Lehrstuhl für Informatik I
Optimierung unter Ressourcenbeschränkung
Universität Würzburg

Prof. Dr. Marie Schmidt
Kendra Reiter, M. Sc.
SS 2023

7. Übungsblatt zur Vorlesung Graphen und diskrete Optimierung

Abgabe am 07.06.2023 um 10:00 Uhr

Aufgabe 1. *(Approximationsalgorithmus für Knotenüberdeckungsproblem)* **4 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

(1.1) Beweisen Sie: Ist M ein nicht-erweiterbares Matching in G, dann ist die Menge aller Knoten, die zu Kanten im Matching M inzident sind, also $V' := \bigcup_{\{u,v\}\in M}\{u, v\}$, eine Knotenüberdeckung in G. **1 Punkt**

(1.2) Betrachten Sie folgenden Algorithmus:

Input: Graph $G = (V, E)$
Output: Knotenüberdeckung V'
Finde ein nicht-erweiterbares Matching M in G
Erstelle V' wie in (1.1) beschrieben

Zeigen Sie, dass der Algorithmus ein Approximationsalgorithmus für das Optimierungsproblem 'Finde eine minimale Knotenüberdeckung' ist. Was ist die Approximationsgüte α dieses Approximationsalgorithmus'? **2 Punkte**

(1.3) Was ist die Laufzeit dieses Approximationsalgorithmus'? **1 Punkt**

Aufgabe 2. *(Algorithmus von Buss)* **5 Punkte**

(4.1) Implementieren Sie den Algorithmus von Buss um das Entscheidungsproblem 'Knotenüberdeckung' zu lösen. **2 Punkte**

(4.2) Testen Sie Ihre Implementation auf verschiedenen Instanzen, z.B. dürfen Sie die auch in Aufgabe 2 von Übungsblatt 6 benutzten Instanzen verwenden. **2 Punkte**

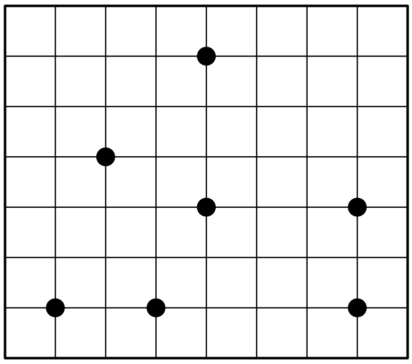
(4.3) Erstellen Sie einen (oder mehrere) $x-y$ Plot(s), um die reale Laufzeit in Abhängigkeit von k für mindestens fünf Ihrer ausprobierten Instanzen zu vergleichen. Zeigen Sie auf, für welche Werte von k Ihr Algorithmus eine positive Antwort geliefert hat (also das Entscheidungsproblem mit 'Ja' beantwortet hat) - wie groß ist jeweils die kleinste Knotenüberdeckung für die Instanzen? **1 Punkt**

Aufgabe 3. *(Handlungsreisendenproblem)* **6 Punkte**

Wir betrachten das *Bohrproblem auf Leiterplatten*, auch PCBs (Printed Circuit Boards bzw. gedruckte Schaltungen) oder Platinen gennannt. Eine Leiterplatte besteht aus Leiterbahnen und Löchern, wobei die Leiterbahnen ähnlich zu Kabeln sind, durch die Strom fließen wird. Um eine Leiterbahn auf einer Schicht mit einer Leiterbahn auf einer anderen Schicht der Platine zu verbinden, müssen in der Produktion passende Löcher durch die Platten gebohrt werden.
Hierfür haben wir eine Maschine mit passendem Bohrkopf. Die Maschine fährt systematisch jede Platine ab und bohrt an den vorgegebenen Stellen ein Loch. Die Produktionszeit, welche abhängig von der gefahrenen Strecke ist, soll minimiert werden.

(3.1) Modellieren Sie die beschriebene Situation als Handlungsreisendenproblem auf einem geeigneten Graph. Wofür stehen Knoten und (gerichtete oder ungerichte?) Kanten? Wie setzen Sie die Kantenlabel? **2 Punkte**

(3.2) Führen Sie den Algorithmus von Christofides von Hand an der Beispielinstanz mit Euklidischer Metrik durch. Zeigen Sie Ihre Vorgehensweise und Zwischenschritte! Das kostenminimale Matching dürfen Sie 'raten' (und brauchen nicht zu beweisen, dass dies kostenminimal ist). Was ist der Zielfunktionswert Ihrer Lösung? **3 Punkte**



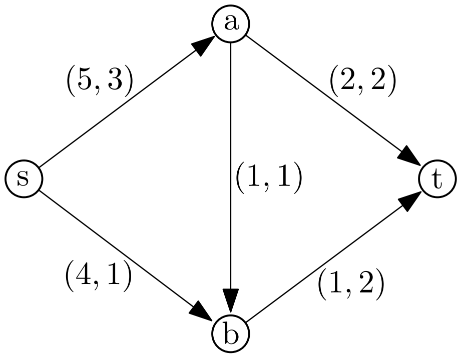
(3.3) Bestimmen Sie auch eine Lösung mit der Cheapest Insertion Methode (dazu dürfen Sie natürlich Ihren Code aus Aufgabe 4 vom Übungsblatt 2 verwenden). Was ist der Zielfunktionswert dieser Lösung? **1 Punkt**

Aufgabe 4. *(Bikriterielle kürzeste Wege)* **5 Punkte**

Ein alternativer Ansatz zum Lösen des Entscheidungsproblems 'Bikriteriell kürzeste Wege' aus der Vorlesung geht folgendermaßen:
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit zwei positiven ganzzahligen Kantenlabel w_e^1 und w_e^2 auf jeder Kante und sei W^2 die Schranke auf der Weglänge bezüglich der Gewichte w_e^2.
Erstelle einen Graph $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ mit

$$\begin{aligned}
\tilde{V} &= V \times \{1, 2, \ldots, W^2\} \cup \{\tilde{s}\} \cup \{\tilde{t}\} \\
\tilde{E} &= \Big\{ \Big([v, i], [v', i + w^2_{\{v,v'\}}] \Big) : (v, v') \in E, i \geq 1, i + w^2_{(v,v')} \leq W^2 \Big\} \\
&\quad \cup \big\{ (\tilde{s}, [s, i]) : i \in \{1, 2, \ldots, W^2\} \big\} \\
&\quad \cup \big\{ ([t, i], \tilde{t}) : i \in \{1, 2, \ldots, W^2\} \big\}
\end{aligned}$$

Finde mit Dijkstra's Algorithmus einen kürzesten Weg von $\tilde{s}$ nach $\tilde{t}$ auf dem Graphen $\tilde{G}$.



(4.1) Erstellen Sie den Graphen $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ für den gegeben Beispielgraphen, welcher Kantenlabels (w_e^1, w_e^2) für alle $e \in E$ hat. **1 Punkt**

(4.2) Führen Sie den beschriebenen Ansatz an Ihrem Graph $\tilde{G}$ und der Schranke $W^2 = 5$ auf dem Label w_e^2 aus. Zeigen Sie Ihre Schritte. Warum löst das das Entscheidungsproblem? **2 Punkte**

(4.3) Was ist die Laufzeit dieses Algorithmus'? **1 Punkt**

(4.4) Wie hängt dieser Ansatz mit dem bikriteriellen Labelsetting-Algorithmus aus der Vorlesung zusammen? Insbesondere: Können Sie diesen Ansatz nutzen, um die Laufzeitanalyse für den bikriteriellen Labelsetting-Algorithmus zu verbessern? **1 Punkt**

(4.5) **Bonus:** Können Sie so auch das Optimierungsproblem 'Bikriteriell kürzeste Wege' für positive ganzzahlige Kantenlabel pseudopolynomiell lösen? Und das (Entscheidungs- / Optimierungs-) Problem 'Multikriteriell kürzeste Wege'? **1 Punkt**

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf Datei auf WueCampus hoch. Die Übungsblätter können in Gruppen von maximal zwei Personen bearbeitet werden, geben Sie bei der Abgabe stets beide Namen an.