

6. Übungsblatt zur Vorlesung Graphen und diskrete Optimierung

Abgabe am 31.05.2023 um 10:00 Uhr

Aufgabe 1. (NP-Vollständigkeitsbeweis)

5 Punkte

- (1.1) Stellen Sie das zum Optimierungsproblem 'Knotenüberdeckung' gehörige Entscheidungsproblem 'Knotenüberdeckung' auf. **1 Punkt**
- (1.2) Beweisen Sie: Das Entscheidungsproblem 'Knotenüberdeckung' ist in NP. **1 Punkt**
- (1.3) Reduzieren Sie das Entscheidungsproblem 'Unabhängige Menge' polynomiell auf das Entscheidungsproblem 'Knotenüberdeckung'. **2 Punkte**
- (1.4) Was bedeutet das für die Komplexität des Entscheidungsproblems 'Knotenüberdeckung'? **1 Punkt**

Aufgabe 2. (Brute Force Algorithmus)

5 Punkte

- (2.1) Überlegen Sie sich einen Brute Force Algorithmus für das Entscheidungsproblem 'Knotenüberdeckung'. Geben Sie den Pseudocode an. Was ist die Laufzeit Ihres Algorithmus'? **2 Punkte**
- (2.2) Implementieren Sie Ihren Algorithmus. **1 Punkt**
- (2.3) Testen Sie Ihren Algorithmus auf Graphen unterschiedlicher Größe. Visualisieren Sie den Zusammenhang von Laufzeit und Größe des Graphen (Anzahl der Knoten) in einem x-y-Plot. **2 Punkte**

Hinweis: Eine Sammlung von unterschiedlichen Graphen im Adjazenzlistenformat, die Sie zum Test verwenden können, finden Sie hier: <http://yaroslavvb.com/upload/graphs2.txt>. Wollen Sie lieber selbst Graphen erzeugen? Auf <https://cstheory.stackexchange.com/questions/739/data-for-testing-graph-algorithms> finden Sie Links zu mehreren Generatoren.

Laden Sie für diese Aufgabe bitte zusätzlich zu der pdf-Abgabe der Lösungen Ihren kommentierten Quellcode (als .java) auf WueCampus und die Testgraphen aus Aufgabenteil (2.3) hoch.

Aufgabe 3. (Optimierungs- und Entscheidungsprobleme)

4 Punkte

In der Vorlesung haben wir besprochen, dass wenn ein Minimierungsproblem OPT mit Zielfunktion f in P liegt, das zugehörige Entscheidungsproblem ENT(OPT) 'Gibt es eine zulässige Lösung mit $f(X) \leq k$?' auch in P liegt, denn wir können aus der Lösung für OPT ja direkt die Antwort für das Entscheidungsproblem schlussfolgern.

- (3.1) Nehmen wir nun an, dass Sie Algorithmus A mit Laufzeit $f(A)$ (nicht notwendigerweise polynomiell) für Entscheidungsproblem ENT(OPT) haben. Wie können Sie diesen nutzen, um (möglichst effizient) das Optimierungsproblem OPT zu lösen? Geben Sie die Laufzeit Ihres Optimierungsalgorithmus an. **2 Punkte**
- (3.2) Erweitern Sie Ihren Algorithmus aus (2.2), um das Optimierungsproblem 'Finde eine kleinste Knotenüberdeckung.' zu lösen. **2 Punkte**

Implementieren Sie diese Erweiterung in einer separaten Funktion (nicht direkt in der Abgabe von Aufgabe 2) und Sie bitte zusätzlich zu der pdf-Abgabe der Lösungen Ihren kommentierten Quellcode (als .java) auf WueCampus hoch, inklusive einem Testgraphen.

Aufgabe 4. (Modellieraufgabe)**6 Punkte**

In den vergangenen Wochen haben Sie schon einige Situationen kennengelernt, die sich mit Hilfe von Graphen als Optimierungsprobleme modellieren und lösen lassen. Bei einigen davon war das ganz offensichtlich, bei anderen weniger. Bei einigen kann die Lösung dazu beitragen, Prozesse ein nachhaltiger zu machen, indem zum Beispiel Ressourcen eingespart werden. Andere hatten keinen (offensichtlichen) Nachhaltigkeitsbezug.

Ab Vorlesungswoche 7 werden wir mit der linearen und ganzzahligen Programmierung eine Methode kennenlernen, die es Ihnen ermöglicht, noch viel mehr Optimierungsprobleme zu lösen.

Deswegen ist es nun an der Zeit, noch einmal unsere Frage aus der ersten Vorlesung zu wiederholen: Suchen Sie sich ein geeignetes Problem 'aus der wirklichen Welt' und modellieren Sie es als Optimierungsproblem mit Hilfe von einem (oder mehreren) Graphen. Sie können sich hierbei gerne von anderen Vorlesungen, dem Internet, oder Beobachtungen aus Ihrem täglichen Leben inspirieren lassen.

- (4.1) Problem in der realen Welt: Beschreiben Sie die Situation, die Sie modellieren werden, in Worten. Erwähnen Sie dabei alle Ihrer Ansicht nach wesentlichen Gesichtspunkte - auch wenn Sie die in der Modellierung in den folgenden Schritten auslassen. **1 Punkt**
- (4.2) Modellierung 1: Beschreiben Sie (in Worten), welche Zusammenhänge aus der Situation 'in der realen Welt' Sie in Ihr Modell aufnehmen werden - und welche Sie bewusst außen vor lassen. **1 Punkt**
- (4.3) Modellierung 2: Formulieren Sie Ihr (mathematisches) Optimierungsproblem: Was ist gegeben? Was ist der zulässige Bereich? Was ist die Zielfunktion? Ist diese zu maximieren oder zu minimieren? **1 Punkt**
(Sie dürfen die Schritte 'Modellierung 2' und 'Modellierung 3' auch vertauschen, wenn sich die Modellierung dadurch besser darstellen lässt.)
- (4.4) Modellierung 3: Beschreiben Sie Ihr Graphmodell: Wofür stehen Knoten, wofür stehen (gerichtete oder ungerichtete) Kanten? Gibt es Kantenlabel, und wenn ja, wofür stehen die? **1 Punkt**
- (4.5) Lässt sich Ihr Problem, so wie Sie es modelliert haben, als ein Ihnen schon bekanntes Optimierungsproblem auf Graphen interpretieren (z.B. kürzeste-Wege-Problem, Färbungsproblem, Kontenüberdeckungsproblem etc.)? Wenn ja: begründen Sie. Wenn nicht: Ähnelte es einem (oder mehreren) Ihnen schon bekannten Optimierungsproblemen? Wo sind Gemeinsamkeiten und Unterschiede? **1 Punkt**
- (4.6) Erstellen Sie eine Beispielinstantz von Ihrem Problem. **1 Punkt**

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf Datei auf WueCampus hoch. Die Übungsblätter können in Gruppen von maximal zwei Personen bearbeitet werden, geben Sie bei der Abgabe stets beide Namen an.