

5. Übungsblatt zur Vorlesung Graphen und diskrete Optimierung

Abgabe am 24.05.2023 um 10:00 Uhr

Aufgabe 1. (Komplementgraph)

4 Punkte

Beweisen Sie folgende Aussagen aus der Vorlesung:

(1.1) S ist eine Clique in G genau dann wenn S eine unabhängige Menge in $\bar{G}$ ist. **2 Punkte**

(1.2) $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$ und $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$. **2 Punkte**

Zur Erinnerung: $\bar{G}$ ist der Komplementgraph von G , $\omega(G)$ ist die *Cliquenzahl* von G und $\alpha(G)$ ist die *Unabhängigkeitszahl* von G (siehe Übungsblatt 4).

Aufgabe 2. (Stunden- und Raumplanung)

6 Punkte

Sie sind für die Erstellung von Stundenplänen und Raumbelagungen am Institut für Informatik an der Universität Würzburg zuständig. Im nächsten Wintersemester sind für jeden Montag folgende Vorlesungen mit festen Zeiten geplant:

Nr.	Vorlesung	Zeit
(1)	Mathematik I	8:00 - 10:00
(2)	Algorithmen und Datenstrukturen	10:00 - 12:00
(3)	Rechnernetze und Informationsübertragung	10:00 - 12:00
(4)	Datenbanken	14:00 - 16:00
(5)	Nachhaltigkeit und Informatik	8:00 - 10:00
(6)	Modellbildung und Simulation	14:00 - 16:00
(7)	Logik für Informatiker	10:00 - 12:00
(8)	Komplexitätstheorie	12:00 - 14:00
(9)	Seminar	14:00 - 16:00

Ziel ist es, einen optimalen Raumplan zu erstellen, so dass sich keine Kurse einen Hörsaal teilen aber gleichzeitig so wenig Hörsäle wie möglich benötigt werden.

(2.1) Modellieren Sie das Problem der Raumverteilung auf einem Graphen. Wofür stehen die Knoten, Kanten und ggf. Gewichte? **2 Punkte**

(2.2) Wie kann das Problem als Färbungsproblem gelöst werden? **1 Punkt**

(2.3) Modellieren Sie das Problem (wenn vorher noch nicht getan) mit Hilfe von einem Intervallgraphen und zeichnen Sie bitte auch die Intervalle. **2 Punkte**

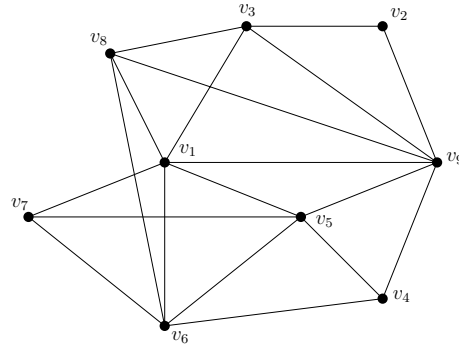
(2.4) Wie hängen Ihre beiden Modellierung (falls unterschiedlich) zusammen? **1 Punkt**

(2.5) **Bonusaufgabe:** Benutzen Sie einen Greedy Algorithmus aus der Vorlesung, um eine zulässige Raumplanung zu finden. Zeigen Sie Ihre Vorgehensweise! Reichen die beiden vorhandenen Hörsäle im M2 (Zuse und Turing) aus, oder werden noch mehr Räume benötigt? **2 Punkte**

Aufgabe 3. (*Greedy Algorithmus*)**6 Punkte**

Geben Sie für diese Aufgabe bitte zusätzlich Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus ab. Benutzen Sie folgenden Graphen um Ihre Implementierungen zu testen:

- (3.1) Implementieren Sie den Greedy Algorithmus aus der Vorlesung, um eine minimale Färbung auf einem beliebigem Graphen $G = (V, E)$ zu bestimmen. Ihre Implementierung sollte eine Funktion `getNextVertex` aufrufen (siehe 3.2 und 3.3), in welcher der nächste zu färbende Knoten ausgewählt bzw. ausgegeben wird. **2 Punkte**
- (3.2) Färben Sie den gegebenen Graphen in der in der Zeichnung vorgegebenen Reihenfolge $(v_1, v_2, \dots, v_8, v_9)$. (Soll heißen: in diesem Aufgabenteil gibt `getNextVertex` die Knoten in dieser Reihenfolge zurück.) **1 Punkt**
- (3.3) Implementieren Sie eine Funktion `getChordalReihenfolge`, um die Reihenfolge der Knoten für einen Chordalen Graphen zu bestimmen. Diese sollte die nächsten Knoten aus der Reihenfolge an Ihre Funktion `getNextVertex` liefern. **2 Punkte**
- (3.4) Vergleichen Sie die beiden Färbungen: haben Sie eine optimale Lösung für den Graphen gefunden? Wenn ja, mit welcher Reihenfolge der Knoten? **1 Punkt**

**Aufgabe 4.** (*Färbung von Landkarten*)**4 Punkte**

Der Bezirk Unterfranken sucht eine neue, bunte Landkarte für ihre Website und hat Sie als Designer aufgefordert, Vorschläge einzureichen!

Unterfranken ist in neun Landkreise und drei kreisfreie Städte untergliedert; Eine erste, einfache Version ist rechts gegeben.

Nun soll jede Region so eingefärbt werden, dass kein Nachbar die selbe Farbe hat, damit man die Landkreise gut unterscheiden kann. Gleichzeitig sollen so wenig Farben wie möglich benutzt werden.



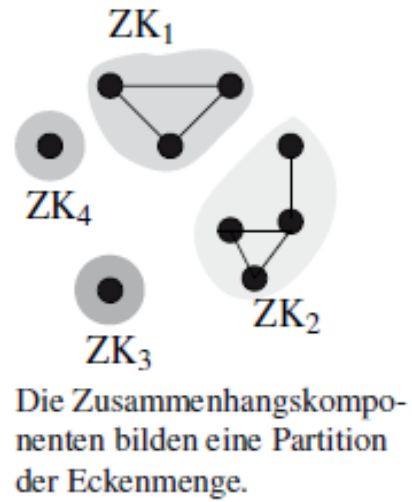
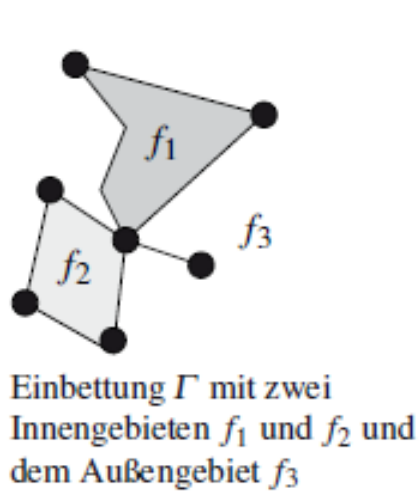
- (4.1) Modellieren Sie das Färbungsproblem für die Landkarte von Unterfranken mithilfe eines planar gezeichnetem Graphen. Wofür stehen Knoten, Kanten und ggf. Gewichte? Geben Sie die Anzahl an Knoten $|V|$, Kanten $|E|$ und Facetten $|F|$ Ihrer Darstellung an. **2 Punkte**
- (4.2) Wie viele Farben werden mindestens benötigt, um den Bezirk Unterfranken einzufärben? Geben Sie eine mögliche Färbung an. **1 Punkt**
- (4.3) Die *Eulersche Polyederformel* macht folgende Aussage über planare Graphen: Für eine Einbettung des planaren Graphen $G = (V, E)$ in die Ebene (das heißt: eine Zeichnung des Graphen, wobei sich keine zwei Kanten kreuzen) gilt:

$$|V| - |E| + |F| = |K| + 1.$$

Dabei sind $|V|$ und $|E|$ natürlich Knoten- und Kantenanzahl des Graphen, $|F|$ ist die Anzahl der *Gebiete* (Jede Einbettung eines Graphens teilt die Ebene in zusammenhängende *Gebiete*, auch *Flächen* oder *Facetten* genannt, die von den Kanten des Graphens begrenzt werden)

und $|K|$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten (in einer Zusammenhangskomponente ist jedes Knotenpaar durch mindestens einen Weg verbunden).

Siehe hierzu auch die beiden folgenden Abbildungen aus dem Lehrbuch von Krumke und Noltemeier.



Machen Sie sich mit den Begriffen *Gebiet* und *Zusammenhangskomponente* vertraut und überprüfen Sie, ob die Eulersche Polyederformel auch für Ihren in 4.1 erstellten Graph gilt.
1 Punkt

Aufgabe 5. (Bonus: Greedy-Färben mit Breitensuche)

Beweisen oder widerlegen Sie durch Gegenbeispiel die in der Vorlesung aufgestellte Behauptung 'Der Greedy-Algorithmus, kombiniert mit Breitensuche, findet immer (für jeden Graph) eine optimale Färbung.' **2 Punkte**

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf Datei auf WueCampus hoch. Die Übungsblätter können in Gruppen von maximal zwei Personen bearbeitet werden, geben Sie bei der Abgabe stets beide Namen an.