

4. Übungsblatt zur Vorlesung Graphen und diskrete Optimierung

Abgabe am 17.05.2023 um 10:00 Uhr

Aufgabe 1. (*Bipartites Matching*)

3 Punkte

Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:

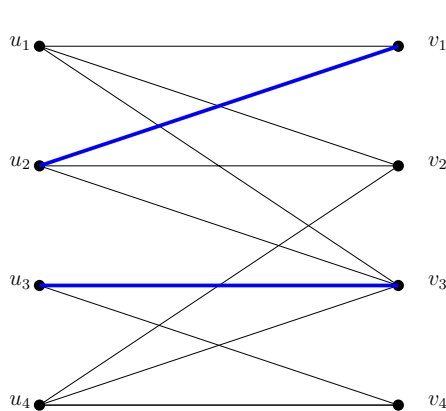
Sei G ein bipartiger Graph mit ganzzahligen Kantenkapazitäten. Sei M^* ein maximales Matching in G und sei f^* ein maximaler Fluss auf $\tilde{G}$. Dann gilt $|M^*| = |f^*|$.

Hinweis: Sie dürfen folgenden Satz (auch *Ganzzahligkeitssatz* genannt) ohne Beweis verwenden: sind alle Kantenkapazitäten ganzzahlig, so existiert immer ein maximaler Fluss, der ganzzahlig ist.

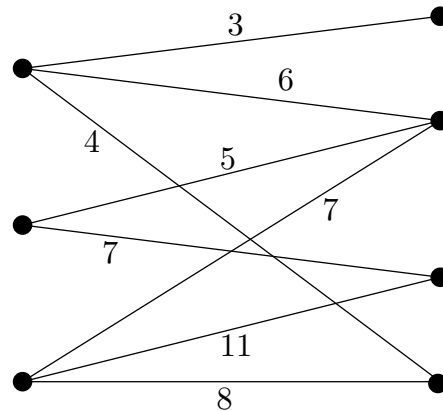
Aufgabe 2. (*Augmentierende Wege*)

7 Punkte

Gegeben sein die folgenden bipartiten Graphen:



(a) Graph $G = (U, V, E)$ mit einem Matching M in blau.



(b) Graph $G' = (U', V', E')$ mit Kantengewichten

- (2.1) Finden Sie einen augmentierenden Weg in G . **1 Punkt**
- (2.2) Finden Sie daraus folgend ein größeres Matching in G . Ist dies ein maximales Matching? Argumentieren Sie, warum, oder finden Sie ein maximales Matching in G (und zeigen Sie, dass dies maximal ist). **2 Punkte**
- (2.3) Benutzen Sie die Ungarische Methode auf <https://algorithms.discrete.ma.tum.de/de/matching/> um ein Matching mit maximalem Gewicht auf dem Graphen G' zu finden. Dokumentieren Sie die Augmentierenden Wege der Methode und das finale Matching. **2 Punkte**
- (2.4) Können augmentierende Wege auch in nicht-bipartiten Graphen genutzt werden, um ein größeres Matching zu finden? Begründen Sie Ihre Antwort. **2 Punkte**

Aufgabe 3. (Unabhängige Mengen und Knotenüberdeckungen)**6 Punkte**

Wir wiederholen zwei Definitionen aus der Vorlesung:

Definition (Unabhängige Menge). Eine *unabhängige Menge* ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ in einem Graphen $G = (V, E)$, falls keine zwei verschiebenden Knoten $u, v \in V$ in G adjazent sind. Eine unabhängige Menge heißt *maximal* wenn sie keine echte Teilmenge einer größeren unabhängigen Menge ist.

Für einen Graphen G bezeichnet

$$\alpha(G) := \max \{|U| : U \text{ ist eine unabhängige Menge in } G\}$$

die *Unabhängigkeitszahl* von G .

Definition (Knotenüberdeckung). Eine *Knotenüberdeckung* ist eine Teilmenge $V' \subseteq V$ in einem Graphen $G = (V, E)$, wenn für jedes $e \in E$ mindestens ein inzidenter Knoten in V' ist.

- (3.1) Bestimmen Sie eine unabhängige Menge im Graphen G von Aufgabe 2. Bestimmen Sie eine andere, maximale unabhängige Menge im selben Graph. Was ist $\alpha(G)$? **2 Punkte**
- (3.2) In den Folien wurde behauptet, dass in jedem Graph $G = (V, E)$ für ein beliebiges Matching M und eine beliebige Knotenüberdeckung S in G gilt dass $|S| \leq |M|$. Kann man eine ähnliche Behauptung über das Verhältnis zwischen der Größe einer unabhängigen Menge U und eines Matchings M für einen gegebenen Graph G aufstellen? Begründen Sie Ihre Behauptung. **4 Punkte**

Aufgabe 4. (Verteilung von Sitzplätzen)**4 Punkte**

Eine Gruppe an Studierenden hat sich zum gemeinsamen Pizzaessen verabredet. Um den Austausch untereinander zu fördern, wollen sie sich so aufteilen, dass keine zwei Studierenden des selben Studiengangs an einem Tisch zusammensitzen.

Die Gruppe besteht aus Studierenden von n Studiengängen, wo die Zahlen $x_1, \dots, x_n$ die Anzahl der Studierenden aus dem jeweiligen Studiengang beschreibt. In der Pizzeria gibt es m Tische, jeweils mit $r_1, \dots, r_m$ Stühlen.

Beim *seating arrangement* Problem stellen wir die Frage: ist es möglich, alle Studenten des selben Studiengangs auf unterschiedliche Tische zu verteilen?

- (4.1) Formulieren Sie das *seating arrangement* Problem als maximales Flussproblem. Wofür stehen Kanten, Knoten, und ggf. Knoten- und Kantenkapazitäten? Was bedeutet der Wert des maximalen Flusses für die Tischordnung? **3 Punkte**
- (4.2) Geben Sie einen passenden Algorithmus und seine benötigte (worst-case) Laufzeit, abhängig von n, m, x_i , und r_j (für alle $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$) an. **1 Punkt**

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf Datei auf WueCampus hoch. Die Übungsblätter können in Gruppen von maximal zwei Personen bearbeitet werden, geben Sie bei der Abgabe stets beide Namen an.