Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen und Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 26. April 2023

Prof. Dr. Alexander Wolff
Felix Klesen, M. Sc.

2. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2023)

CPLEX **Aufgabe 1 – Lineares Programm lösen**

Gegeben ist das folgende lineare Programm mit den Variablen x, y und z:

Zielfunktion:	Maximiere $1{,}8x - 0{,}7y + 3{,}3z$				
Nebenbedingungen:	$50x$	$-96y$	$+30z$	≤ 3600	
	$95x$		$+60z$	≤ 16800	
	$36x$	$+15y$		≤ 5000	
	$80x$	$+50y$	$+52z$	≤ 12000	
Nichtnegativität:	$x \geq 0$,	$y \geq 0$,	$z \geq 0$		

Lösen Sie dieses Programm und geben Sie den optimalen Wert der Zielfunktion und die zugehörige Belegung der Variablen an. Sie können dazu beispielsweise die Software CPLEX verwenden, für die es eine Nutzungsanleitung auf WueCampus gibt. Laden Sie bitte zusätzlich Ihren Quelltext in Wuecampus hoch, um ihren Lösungsweg aufzuzeigen. **4 Punkte**

Aufgabe 2 – Lineare Programmierung und Flüsse

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, der ein Verkehrsnetzwerk darstellt, wobei jeder Knoten $v \in V$ eine Stadt repräsentiert und jede Kante $e = \{u, v\}$ eine Straße zwischen den Städten u und v.

Die Straßen müssen erneuert werden. Dabei sind für jede Straße $e \in E$ Reparaturkosten nötig, die durch eine Funktion $r\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben sind. Zusätzlich hat jede Stadt $v \in V$ nur ein begrenztes Budget, das durch eine Funktion $B\colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben ist.

Hinweis: Sie können hier CPLEX nutzen, um Ihre linearen Programme auf einer kleinen selbst erdachten Instanz zu testen – müssen das aber nicht tun. Wir fordern hier explizit eine mathematische Beschreibung Ihres linearen Programms (für eine unbekannte Instanz), keinen Code. Beschreiben Sie zunächst Variablen und Constraints in Worten.

a) Für jede Straße $e = \{u, v\} \in E$ dürfen sich die beiden Städte u und v die Kosten $r(e)$ in beliebigem Verhältnis teilen, wobei natürlich keine negativen Zahlungen möglich sind. Wir wollen entscheiden, ob es eine zulässige Verteilung der Zahlungen gibt, so dass alle Erneuerungen bezahlt werden, aber keine Stadt ihr Budget überschreitet.

   Geben Sie ein lineares Programm zum Lösen dieses Problems an. Argumentieren Sie, dass Ihre Lösung korrekt ist. **3 Punkte**

b) Wir wollen erneut die Reparaturkosten verteilen, lassen jetzt aber keine Aufteilung von Einzelkosten auf die Städte mehr zu; das heißt, für jede Straße $e = \{u, v\} \in E$ muss jetzt entweder die Stadt u oder die Stadt v den Gesamtbetrag $r(e)$ zahlen. Wir wollen wieder entscheiden, ob es eine zulässige Verteilung unter dieser Zusatzbedingung gibt.

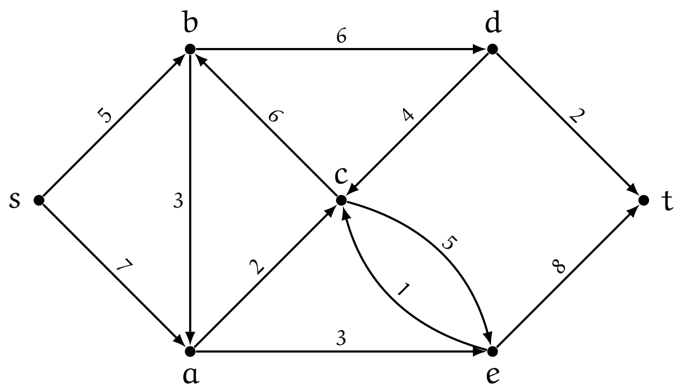
Lösen Sie dieses Problem mit Hilfe von *ganzzahliger* linearer Programmierung. Argumentieren Sie, dass Ihre Lösung korrekt ist. **2 Punkte**

c) Lösen Sie das Problem aus Teilaufgabe a) erneut, verwenden Sie jetzt aber keine lineare Programmierung, sondern eine Modellierung als Flussnetzwerk. Geben Sie also an, was Ihre Knoten, Kanten, Kantenkapazitäten, Ihr Startknoten s und Ihr Zielknoten t sind. Argumentieren Sie wieder, dass Ihre Lösung korrekt ist. **4 Punkte**

Hinweis: Argumentieren Sie, wie aus der Lösung für Teilaufgabe a) ein Fluss in Ihrem Netzwerk abgeleitet werden kann und umgekehrt.

Aufgabe 3 – Flüsse finden

Gegeben sei der folgende Graph mit Kantenkapazitäten:



a) Ermitteln Sie einen maximalen s-t-Fluss. Wie groß ist der Wert des Flusses? **4 Punkte**

b) Begründen Sie, warum es keinen Fluss mit größerem Flusswert geben kann. **1 Zusatzpunkt**

Aufgabe 4 – Längste Wege

Das Problem LÄNGSTER s-t-WEG besteht darin in einem gegebenen ungerichteten Graphen zu einem gegebenen Paar $\{s, t\}$ von Knoten mit $s \neq t$ einen längsten einfachen Weg zu finden. Zur Erinnerung: ein *Weg der Länge* $k \geq 0$ ist eine Folge $\langle v_0, \ldots, v_k \rangle$ mit der Eigenschaft, dass $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}$ Kanten des Graphen sind. Ein Weg ist *einfach*, wenn er jeden Knoten höchstens einmal durchläuft.

Wir wollen zeigen, dass LÄNGSTER s-t-WEG NP-schwer ist, indem wir das Problem HAMILTONWEG auf LÄNGSTER s-t-WEG reduzieren.

a) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Wir erweitern G zu einem Graphen $G' = (V', E')$, dessen Knotenmenge $V' = V \cup \{s, t\}$ um zwei zusätzliche Knoten s und t ergänzt wurde. Außerdem ist $E' = E \cup \{\{s, v\} \mid v \in V\} \cup \{\{v, t\} \mid v \in V\}$, d. h. s und t sind jeweils zu jedem Knoten von G adjazent.

   Erklären Sie, wie man aus einem einfachen Weg der Länge k in G einen einfachen s-t-Weg der Länge $k + 2$ in G' erhält. Erklären Sie ebenfalls, wie man aus einem einfachen s-t-Weg der Länge k in G' einen einfachen Weg der Länge $k - 2$ in G konstruieren kann (zwischen beliebigen Knoten aus V). **2 Punkte**

b) Zeigen Sie: Es gibt einen Hamiltonweg (d. h. einen einfachen Weg der Länge $n - 1$) in G genau dann, wenn es einen einfachen s-t-Weg der Länge $n + 1$ in G' gibt. **1 Punkt**

c) Zeigen Sie damit: LÄNGSTER s-t-WEG ist NP-schwer. **2 Zusatzpunkte**

   Hinweis: Das wichtigste haben wir in der vorherigen Teilaufgabe schon bewiesen. Es fehlen nur noch ein paar Details für eine zulässige Polynomialzeitreduktion.

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf bis **Dienstag, 2. Mai 2023, 13:00 Uhr** im WueCampus-Kursraum beim 2. Übungsblatt hoch. Geben Sie stets die Namen aller an, die das Übungsblatt bearbeitet haben (max. 2).

Begründen Sie Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit $\boxed{\text{CPLEX}}$ gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch. Der Quellcode sollte von derselben Person abgegeben werden, die auch das pdf hochgeladen hat. Wenn dies nicht der Fall sein sollte, vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, wer den Quellcode hochgeladen hat.

Plagiate werden mit 0 Punkten für das ganze Übungsblatt gewertet.