Algorithmen für geographische Informationssysteme

Least Squares Adjustment

8. Vorlesung

Alexander Wolff

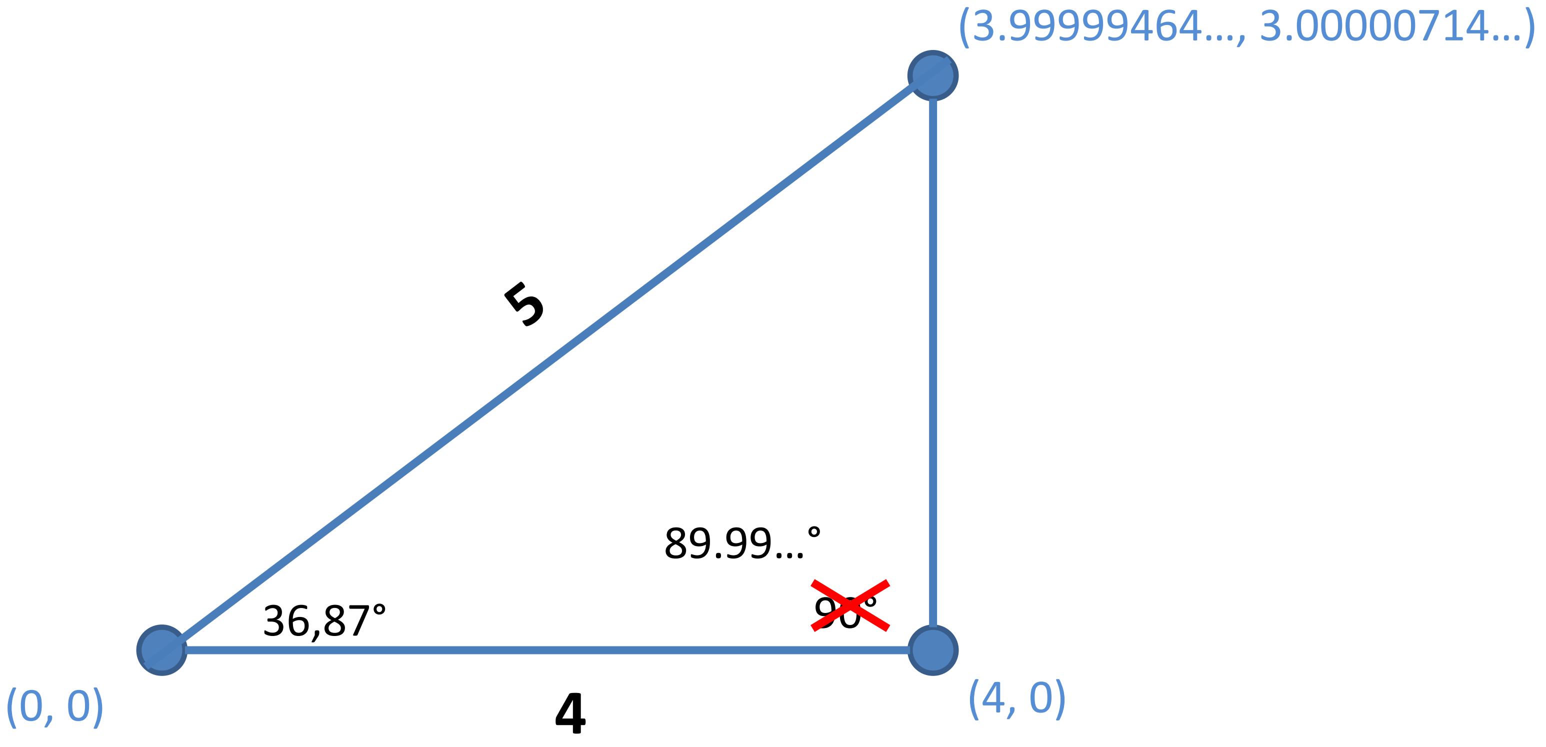
Folien von Jan-Henrik Haunert

Carl Friedrich Gauß

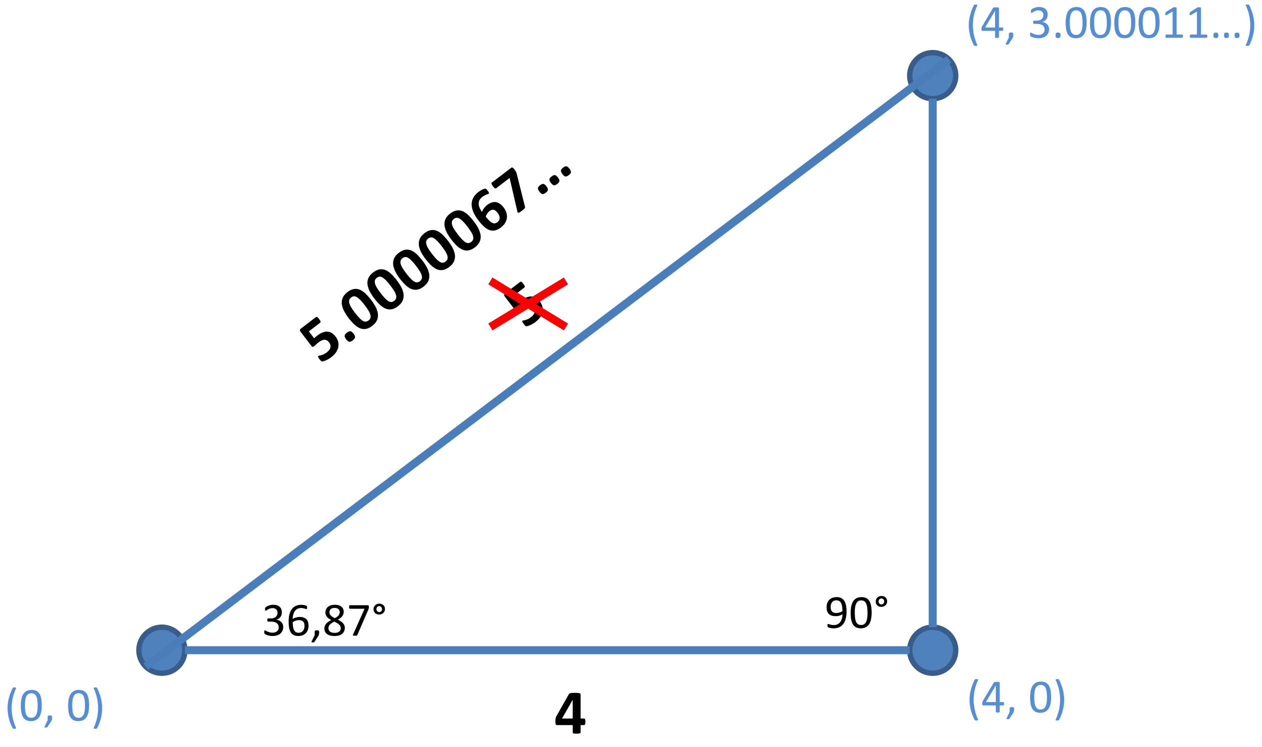
(1777 Braunschweig – 1855 Göttingen)

Ausgleichungsrechnung

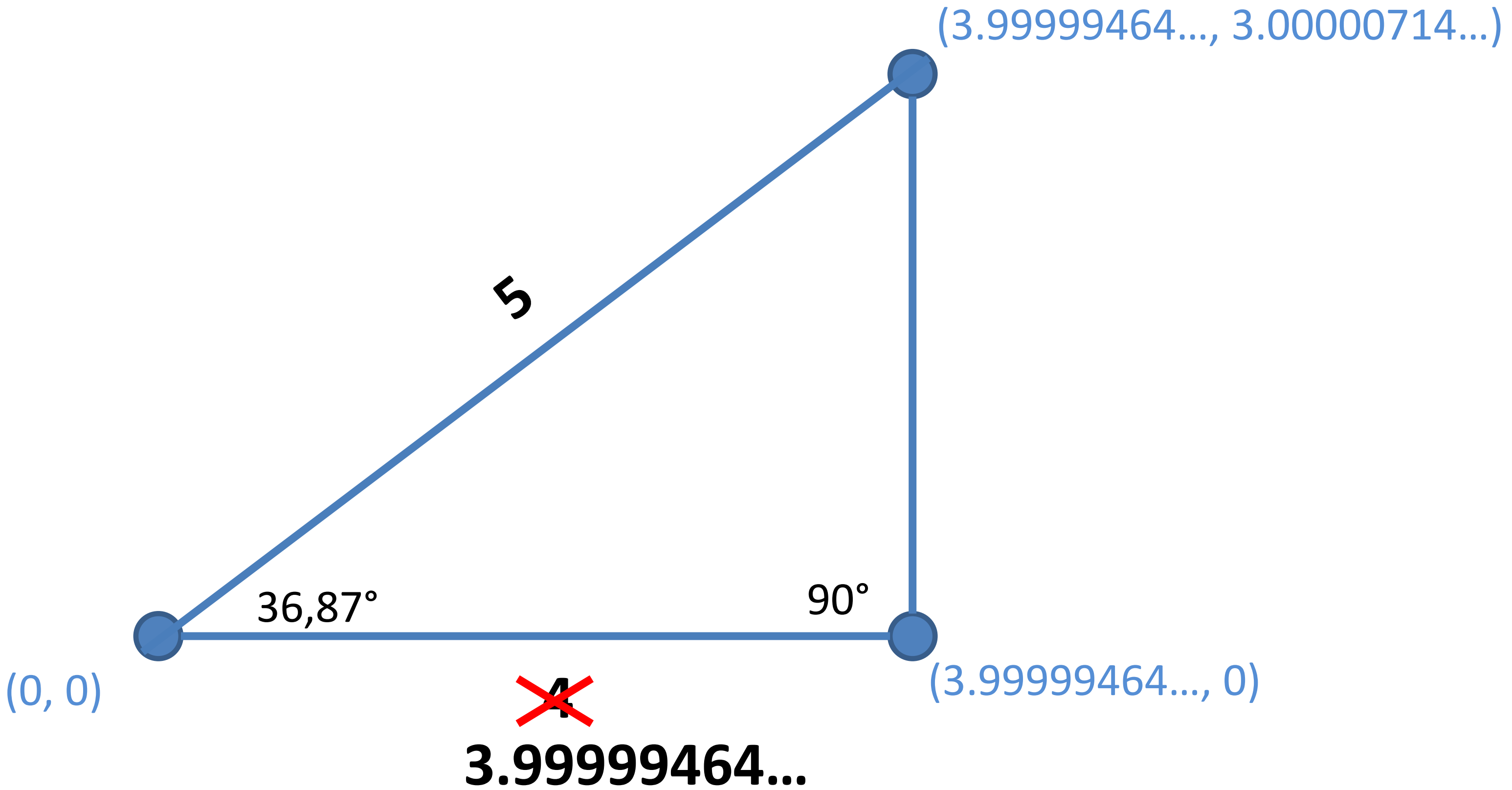
Ausgleichungsrechnung



Ausgleichungsrechnung

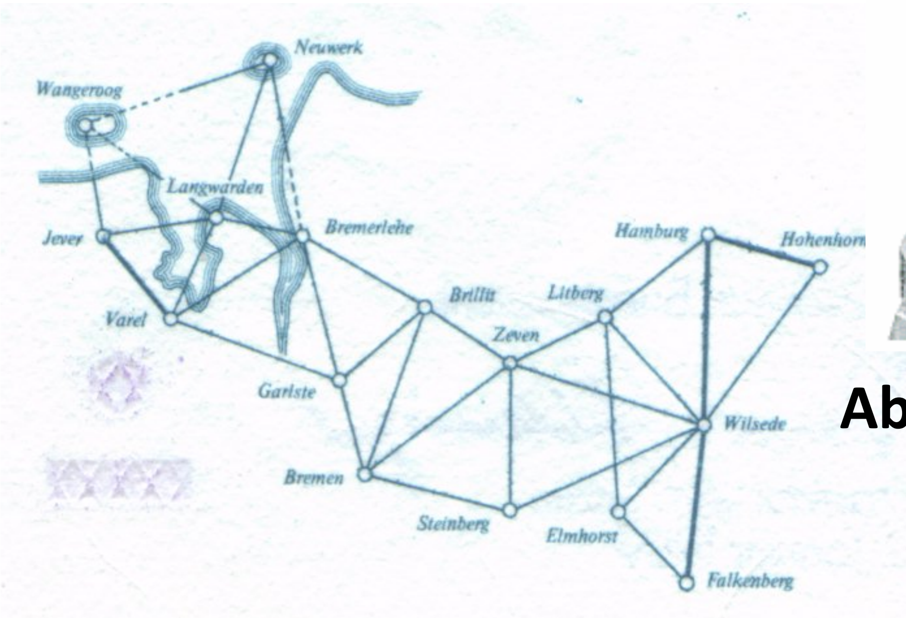


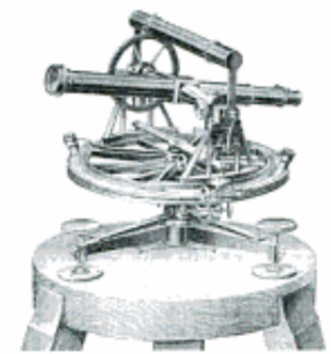
Ausgleichungsrechnung



Ausgleichungsrechnung

Gaußsche Gradmessung, 1821–1823

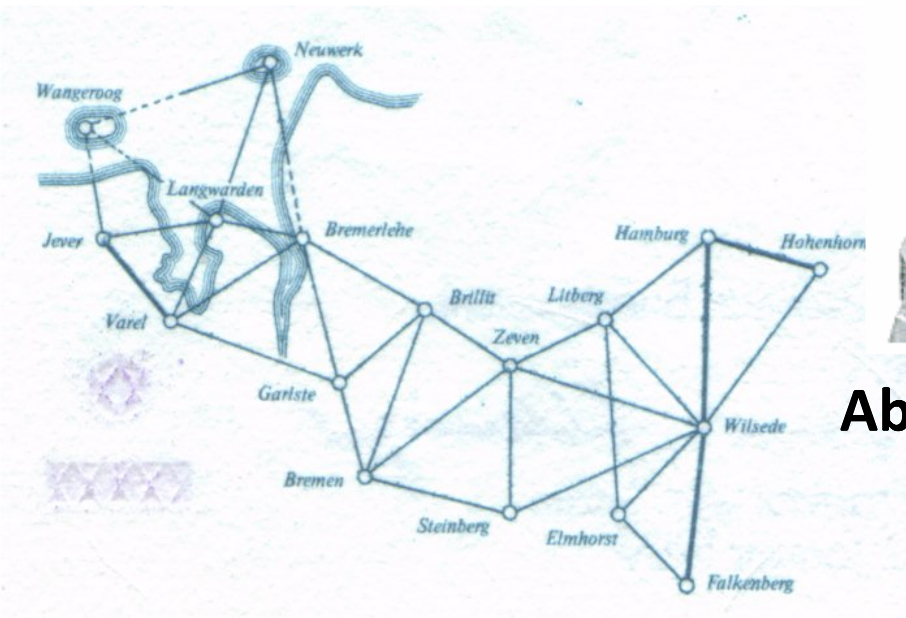




Ablesegenauigkeit: 4 Bogensekunden

Ausgleichungsrechnung

Gaußsche Gradmessung, 1821–1823

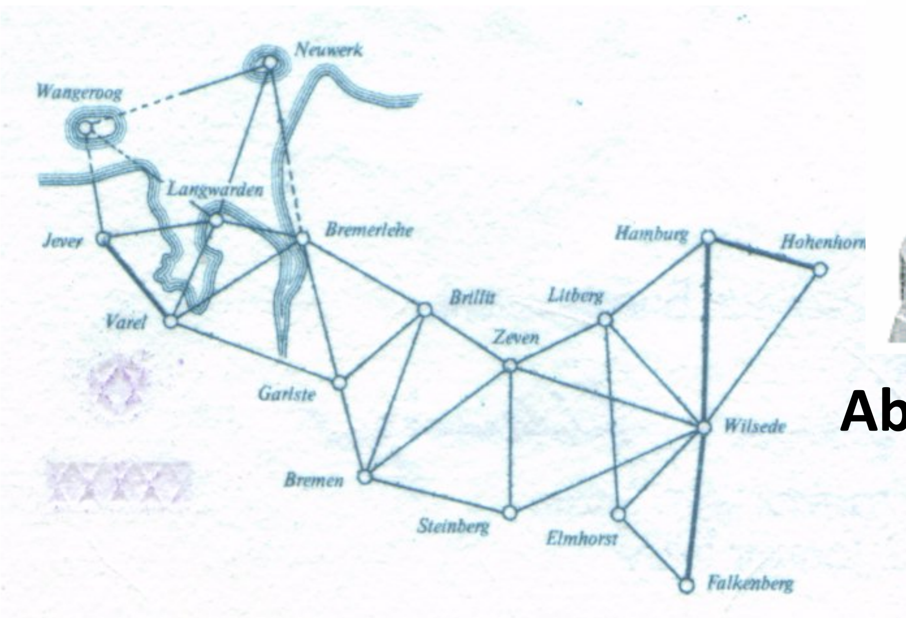


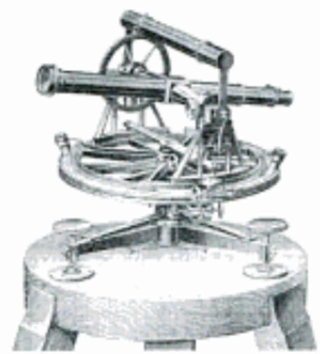
Ablesegenauigkeit: 4 Bogensekunden

Grundidee: Redundante Messung zur Steigerung der Genauigkeit

Ausgleichungsrechnung

Gaußsche Gradmessung, 1821–1823





Ablesegenauigkeit: **4 Bogensekunden**

Grundidee: **Redundante Messung zur Steigerung der Genauigkeit**

Genauigkeit nach Ausgleichung: **0.5 Bogensekunden**

Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von n Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)

- finde Vektor $\hat{\boldsymbol{X}}$ von u Unbekannten (Koordinaten)

Problemdefinition

- Gegben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von n Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)

normalerweise: n > nötig

- finde Vektor $\hat{\boldsymbol{X}}$ von u Unbekannten (Koordinaten)

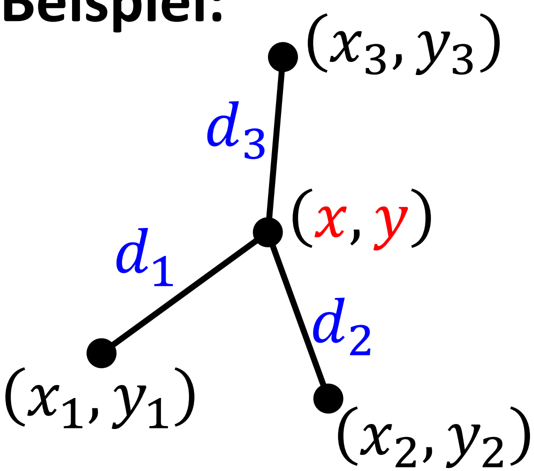
Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von n Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)
  - eine Funktion $\Phi: \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^n$, die für wahre Unbekannte $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ die wahren Beobachtungen durch $\widetilde{\boldsymbol{L}} = \Phi(\widetilde{\boldsymbol{X}})$ liefert
- finde Vektor $\widehat{\boldsymbol{X}}$ von u Unbekannten (Koordinaten)

Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von n Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)
  - eine Funktion $\Phi: \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^n$, die für wahre Unbekannte $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ die wahren Beobachtungen durch $\widetilde{\boldsymbol{L}} = \Phi(\widetilde{\boldsymbol{X}})$ liefert.

Beispiel:

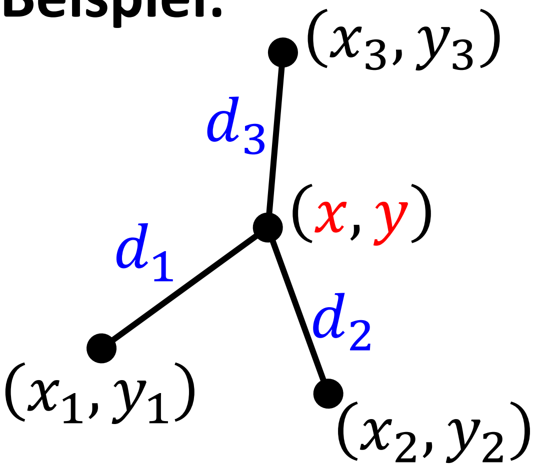


$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \Phi(x, y)$$

Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von n Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)
  - eine Funktion $\Phi\colon \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^n$, die für wahre Unbekannte $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ die wahren Beobachtungen durch $\widetilde{\boldsymbol{L}} = \Phi\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}\right)$ liefert.

Beispiel:



$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \\ \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \\ \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} \end{pmatrix}$$

Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von n Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)
  - eine Funktion $\Phi\colon \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^n$, die für wahre Unbekannte $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ die wahren Beobachtungen durch $\widetilde{\boldsymbol{L}} = \Phi\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}\right)$ liefert
- finde Vektor $\widehat{\boldsymbol{X}}$ von u Unbekannten (Koordinaten)

Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von n Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)
  - eine Funktion $\Phi\colon \mathbb{R}^u \to \mathbb{R}^n$, die für wahre Unbekannte $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ die wahren Beobachtungen durch $\tilde{\boldsymbol{L}} = \Phi\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}\right)$ liefert
- finde Vektor $\widehat{\boldsymbol{X}}$ von u Unbekannten (Koordinaten) und
- Vektor $\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{v}$ von ausgeglichenen Beobachtungen

Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von n Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)
  - eine Funktion $\Phi\colon \mathbb{R}^u \to \mathbb{R}^n$, die für wahre Unbekannte $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ die wahren Beobachtungen durch $\tilde{\boldsymbol{L}} = \Phi\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}\right)$ liefert
- finde Vektor $\widehat{\boldsymbol{X}}$ von u Unbekannten (Koordinaten) und
- Vektor $\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{v}$ von ausgeglichenen Beobachtungen
- so dass
  - $\hat{\boldsymbol{L}} = \Phi\left(\widehat{\boldsymbol{X}}\right)$ gilt und
  - $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$ minimal ist.

Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von n Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)
  - eine Funktion $\Phi\colon \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^n$, die für wahre Unbekannte $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ die wahren Beobachtungen durch $\tilde{\boldsymbol{L}} = \Phi\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}\right)$ liefert
- finde Vektor $\widehat{\boldsymbol{X}}$ von u Unbekannten (Koordinaten) und
- Vektor $\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{v}$ von ausgeglichenen Beobachtungen
- so dass
  - $\hat{\boldsymbol{L}} = \Phi\left(\widehat{\boldsymbol{X}}\right)$ gilt und
  - $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$ minimal ist.

Methode der kleinsten Quadrate

Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von n Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)
  - eine Funktion $\Phi\colon \mathbb{R}^u \to \mathbb{R}^n$, die für wahre Unbekannte $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ die wahren Beobachtungen durch $\tilde{\boldsymbol{L}} = \Phi\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}\right)$ liefert
- finde Vektor $\widehat{\boldsymbol{X}}$ von u Unbekannten (Koordinaten) und
- Vektor $\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{v}$ von ausgeglichenen Beobachtungen
- so dass
  - $\hat{\boldsymbol{L}} = \Phi\left(\widehat{\boldsymbol{X}}\right)$ gilt und
  - $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}$ minimal ist.

Methode der kleinsten Quadrate

Spezialfall: Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

(= linearer Zusammenhang zwischen Beobachtungen & Unbekannten)

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \Phi\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}\right) = \boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

$\widetilde{\boldsymbol{L}} = \Phi(\widetilde{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}}$

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$ mit $L_i = i$-te Messung der Strecke

Gesucht: Ausgeglichene Strecke $\hat{X}$, Verbesserungen $\boldsymbol{v}$

Bedingung:

$$\hat{\boldsymbol{L}} =$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Lösung...

$$\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{L}$$

Minimiere $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}$...

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{L}\right)^T\left(\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{L}\right)$$
$$= \widehat{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} - 2\widehat{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}$$

notwendige Bedingung für Optimum:

Gradient der Zielfunktion = Nullvektor

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Lösung…

$$F(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \widehat{\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{X}} - 2\widehat{\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{L}$$

$$\operatorname{grad} F\left(\widehat{\boldsymbol{X}}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial \hat{X}_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial \hat{X}_u} \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{X}} - 2\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L}$$

notwendige Bedingung für Optimum:

Gradient der Zielfunktion $=$ Nullvektor

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Lösung...

$$F(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \widehat{\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{X}} - 2\widehat{\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{L}$$

$$\operatorname{grad} F(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial \hat{X}_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial \hat{X}_u} \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{X}} - 2\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L} \stackrel{!}{=} \boldsymbol{0}$$

notwendige Bedingung für Optimum:

Gradient der Zielfunktion = Nullvektor

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Lösung…

$$F(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \widehat{\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{X}} - 2\widehat{\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{L}$$

$$\operatorname{grad} F(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial \hat{X}_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial \hat{X}_u} \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{X}} - 2\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L} \overset{!}{=} \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} x = \boldsymbol{A}^T b$

Gauß-Normalgleichung

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L}}$$

Lösung durch Gaußsches Eliminationsverfahren

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$ mit $L_i = i$-te Messung der Strecke

$$\boxed{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}}$$

Gesucht: Ausgeglichene Strecke $\hat{X}$, Verbesserungen $\boldsymbol{v}$

Bedingung:

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\hat{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\hat{X} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v} \to \text{Min}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} =$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (1, \ldots, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} = (1, \ldots, 1)\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\hat{X} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} \quad \Longrightarrow$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = n$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\hat{X} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} \quad \Longrightarrow \quad n\hat{X} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\hat{X} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} \quad \Longrightarrow \quad n\hat{X} = \sum_{i=1}^{n} L_i \Leftrightarrow \hat{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{n}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = n$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

Ausgleichung entspricht Berechnung des Mittelwerts!

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\hat{X} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} \quad \Longrightarrow \quad n\hat{X} = \sum_{i=1}^{n} L_i \Longleftrightarrow \boxed{\hat{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{n}}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

- immer lösbar?
- wirklich optimal?
- optimale Lösung eindeutig?

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion F hat immer eine Minimalstelle.

Zielfunktion $v^T v$

$$= F(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \widehat{\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{X}} - 2\widehat{\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{L}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion F hat immer eine Minimalstelle.

Jede quadratische Funktion in den Variablen $X_1, \ldots, X_u$ lässt sich durch **Drehung** und **Verschiebung** des Koordinatensystems in die **Normalform**

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_r \xi_r^2 + \alpha_{r+1}\xi_{r+1} + \cdots + \alpha_u \xi_u + \gamma$$

bringen (d.h. keine gemischten Terme, jede Variable nur einmal).

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion F hat immer eine Minimalstelle.

Jede quadratische Funktion in den Variablen $X_1, \dots, X_u$ lässt sich durch **Drehung** und **Verschiebung** des Koordinatensystems in die **Normalform**

$$f(\xi_1, \dots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_r \xi_r^2 + \alpha_{r+1} \xi_{r+1} + \cdots + \alpha_u \xi_u + \gamma$$

bringen (d.h. keine gemischten Terme, jede Variable nur einmal).

Beispiel: $f(x) = x^2 + 6x - 7$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion F hat immer eine Minimalstelle.

Jede quadratische Funktion in den Variablen $X_1, \dots, X_u$ lässt sich durch **Drehung** und **Verschiebung** des Koordinatensystems in die **Normalform**

$$f(\xi_1, \dots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_r \xi_r^2 + \alpha_{r+1} \xi_{r+1} + \cdots + \alpha_u \xi_u + \gamma$$

bringen (d.h. keine gemischten Terme, jede Variable nur einmal).

Beispiel:
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x - 7 \\ &= x^2 + 6x + 9 - 16 \end{aligned}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion F hat immer eine Minimalstelle.

Jede quadratische Funktion in den Variablen $X_1, \ldots, X_u$ lässt sich durch **Drehung** und **Verschiebung** des Koordinatensystems in die **Normalform**

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_r \xi_r^2 + \alpha_{r+1} \xi_{r+1} + \cdots + \alpha_u \xi_u + \gamma$$

bringen (d.h. keine gemischten Terme, jede Variable nur einmal).

Beispiel:
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x - 7 \\ &= x^2 + 6x + 9 - 16 \\ &= (x+3)^2 \qquad - 16 \end{aligned}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion F hat immer eine Minimalstelle.

Jede quadratische Funktion in den Variablen $X_1, \ldots, X_u$ lässt sich durch **Drehung** und **Verschiebung** des Koordinatensystems in die **Normalform**

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_r \xi_r^2 + \alpha_{r+1} \xi_{r+1} + \cdots + \alpha_u \xi_u + \gamma$$

bringen (d.h. keine gemischten Terme, jede Variable nur einmal).

Beispiel:
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x - 7 \\ &= x^2 + 6x + 9 - 16 \\ &= (x+3)^2 \qquad - 16 \\ &= \xi^2 - 16 \quad \text{mit} \quad \xi = x + 3 \end{aligned}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion F hat immer eine Minimalstelle.

Jede quadratische Funktion in den Variablen $X_1, \dots, X_u$ lässt sich durch **Drehung** und **Verschiebung** des Koordinatensystems in die **Normalform**

$$f(\xi_1, \dots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_r \xi_r^2 + \alpha_{r+1} \xi_{r+1} + \cdots + \alpha_u \xi_u + \gamma$$

bringen (d.h. keine gemischten Terme, jede Variable nur einmal).

Beispiel: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion F hat immer eine Minimalstelle.

Jede quadratische Funktion in den Variablen $X_1, \dots, X_u$ lässt sich durch **Drehung** und **Verschiebung** des Koordinatensystems in die **Normalform**

$$f(\xi_1, \dots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_r \xi_r^2 + \alpha_{r+1} \xi_{r+1} + \cdots + \alpha_u \xi_u + \gamma$$

bringen (d.h. keine gemischten Terme, jede Variable nur einmal).

Da $F(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v}$, gilt $F(\widehat{\boldsymbol{X}}) \geq 0$. Also hat F die Normalform

$$f(\xi_1, \dots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_u \xi_u^2 + \gamma \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_u, \gamma \geq 0.$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion F hat immer eine Minimalstelle.

Jede quadratische Funktion in den Variablen $X_1, \dots, X_u$ lässt sich durch **Drehung** und **Verschiebung** des Koordinatensystems in die **Normalform**

$$f(\xi_1, \dots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_r \xi_r^2 + \alpha_{r+1} \xi_{r+1} + \cdots + \alpha_u \xi_u + \gamma$$

bringen (d.h. keine gemischten Terme, jede Variable nur einmal).

Da $F(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v}$, gilt $F(\widehat{\boldsymbol{X}}) \geq 0$. Also hat F die Normalform

$$f(\xi_1, \dots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_u \xi_u^2 + \gamma \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_u, \gamma \geq 0.$$

Damit ist der Punkt $\xi_1 = \cdots = \xi_u = 0$ eine Minimalstelle.
Der Funktionswert an dieser Stelle ist γ. $\square$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

D.h. für jede Lösung $\hat{\boldsymbol{X}}$ der Gauß-Normalgleichung ist $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}$ global minimal.

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{L})$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})$$
$$= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})$$
$$= (\boxed{\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0} + \boxed{\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L}})^T(\boxed{\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0} + \boxed{\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L}})$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{X}) &= (\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{L}) \\
&= (\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{AX}_0+\boldsymbol{AX}_0-\boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{AX}_0+\boldsymbol{AX}_0-\boldsymbol{L}) \\
&= (\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{AX}_0) \\
&\quad +2(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX}_0-\boldsymbol{L}) \\
&\quad +(\boldsymbol{AX}_0-\boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX}_0-\boldsymbol{L})
\end{aligned}
$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$
\begin{aligned}
&F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L}) \\
&= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L}) \\
&= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0) \\
&\quad +2(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L}) \\
&\quad +(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})
\end{aligned}
$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})$$
$$= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})$$
$$= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)$$
$$\boxed{+2(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L}) = 0}$$
$$+(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})$$
$$= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})$$
$$= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)$$

$$+(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{X}) &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{L}) \\
&= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{L}) \\
&= \boxed{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)} \\
&\quad + \boxed{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{L})} \\
&= \boxed{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)} + \boxed{F(\boldsymbol{X}_0)}
\end{aligned}
$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})$$
$$= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})$$
$$= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)$$

$$+(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})$$
$$= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0) + F(\boldsymbol{X}_0) \geq F(\boldsymbol{X}_0)$$

$\square$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist eindeutig lösbar, wenn $\mathrm{rang}(A) = u$.

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist eindeutig lösbar, wenn $\operatorname{rang}(A) = u$.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt:

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0) + F(\boldsymbol{X}_0) \geq F(\boldsymbol{X}_0)$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist eindeutig lösbar, wenn $\mathrm{rang}(A) = u$.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt:

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0) + F(\boldsymbol{X}_0) \geq F(\boldsymbol{X}_0)$$

Wenn $F(\boldsymbol{X}) = F(\boldsymbol{X}_0)$, dann:

$$(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0) = \boldsymbol{0}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist eindeutig lösbar, wenn $\mathrm{rang}(A) = u$.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt:

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0) + F(\boldsymbol{X}_0) \geq F(\boldsymbol{X}_0)$$

Wenn $F(\boldsymbol{X}) = F(\boldsymbol{X}_0)$, dann:

$$(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0) = 0$$

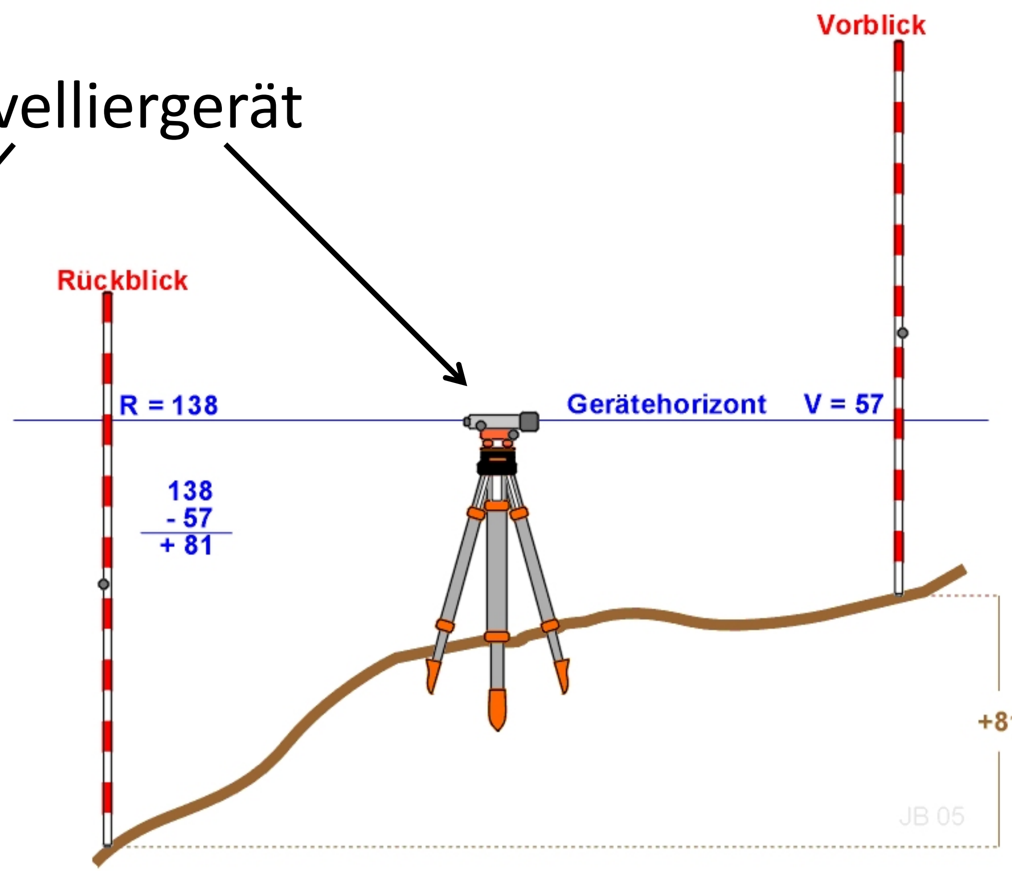
$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0) = \boldsymbol{0}$$

mit $\mathrm{rang}(A) = u \;\Rightarrow\; \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0$ $\square$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

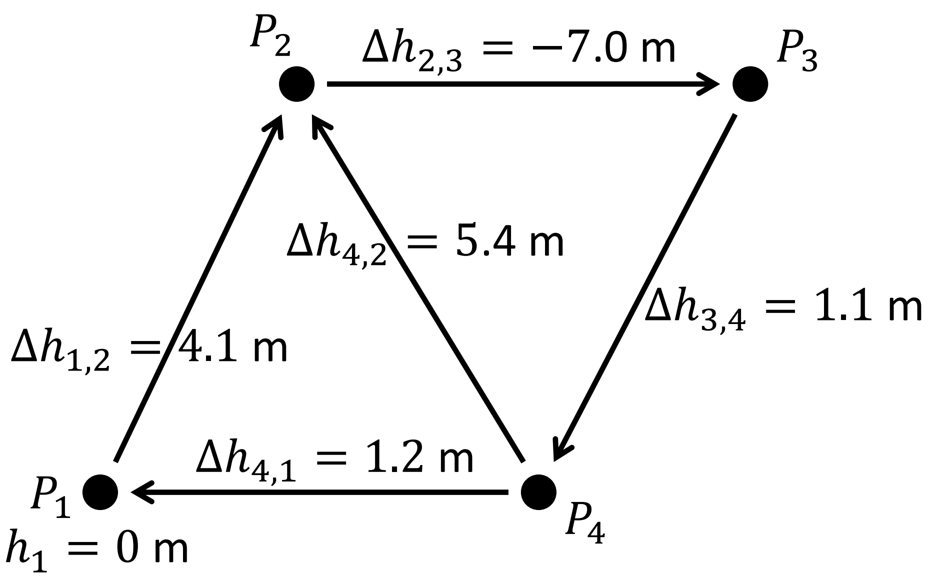
Nivelliergerät



Quelle: wikipedia

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

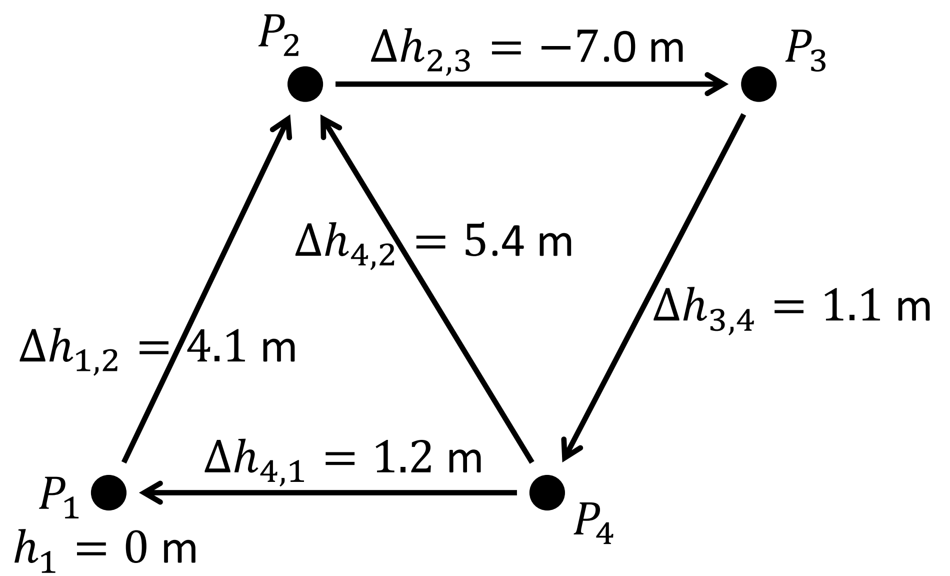


Gesucht: h_2, h_3, h_4

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \Delta h_{1,2} \\ \Delta h_{2,3} \\ \Delta h_{3,4} \\ \Delta h_{4,1} \\ \Delta h_{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1 \\ -7.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 5.4 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$



Gesucht: h_2, h_3, h_4

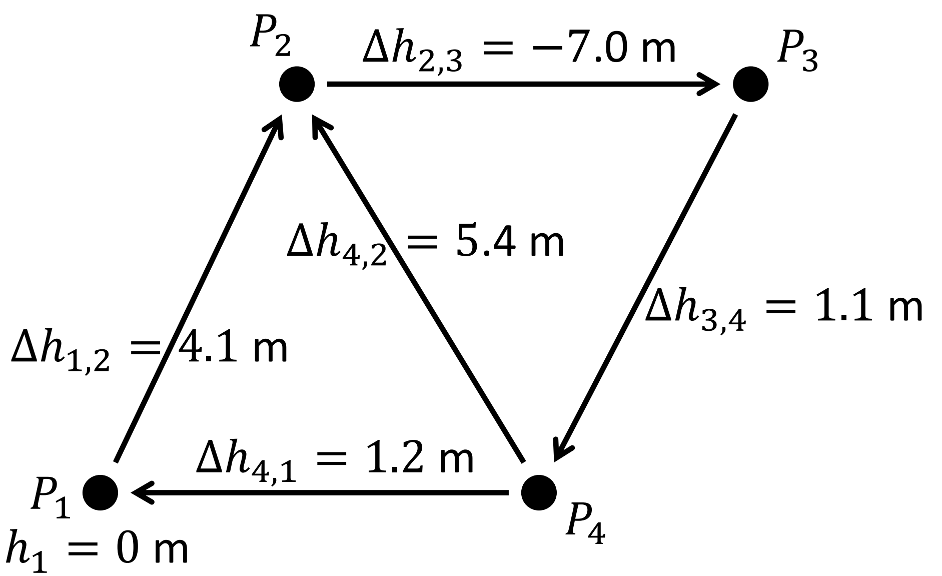
Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \Delta h_{1,2} \\ \Delta h_{2,3} \\ \Delta h_{3,4} \\ \Delta h_{4,1} \\ \Delta h_{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1 \\ -7.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 5.4 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \widehat{\boldsymbol{L}}$$



Gesucht: h_2, h_3, h_4

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \Delta h_{1,2} \\ \Delta h_{2,3} \\ \Delta h_{3,4} \\ \Delta h_{4,1} \\ \Delta h_{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1 \\ -7.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 5.4 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}\left(\widehat{\boldsymbol{X}}\right) = \widehat{\boldsymbol{L}} = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 - h_2 \\ h_4 - h_3 \\ -h_4 \\ h_2 - h_4 \end{pmatrix}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \Delta h_{1,2} \\ \Delta h_{2,3} \\ \Delta h_{3,4} \\ \Delta h_{4,1} \\ \Delta h_{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1 \\ -7.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 5.4 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \widehat{\boldsymbol{L}} = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 - h_2 \\ h_4 - h_3 \\ -h_4 \\ h_2 - h_4 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{\boldsymbol{A}} \cdot \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \Delta h_{1,2} \\ \Delta h_{2,3} \\ \Delta h_{3,4} \\ \Delta h_{4,1} \\ \Delta h_{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1 \\ -7.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 5.4 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

Gauß-Normalgleichung:

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L}$$

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}\left(\widehat{\boldsymbol{X}}\right) = \widehat{\boldsymbol{L}} = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 - h_2 \\ h_4 - h_3 \\ -h_4 \\ h_2 - h_4 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{\boldsymbol{A}} \cdot \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Gauß-Normalgleichung:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}$$

$$\boldsymbol{A}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^T \qquad\qquad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Gauß-Normalgleichung:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}$$

$$\boldsymbol{A}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^T \qquad\qquad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Gauß-Normalgleichung:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}$$

$$\boldsymbol{L} \begin{pmatrix} 4.1 \\ -7.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 5.4 \end{pmatrix}_{\mathrm{m}}$$

$$\underset{\boldsymbol{A}^T}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}} \quad \underset{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}}{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}} \quad \underset{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}}{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}_{\mathrm{m}}}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Gauß-Normalgleichung:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}$$

$$\boldsymbol{L}\begin{pmatrix} 4.1 \\ -7.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 5.4 \end{pmatrix}_{\mathrm{m}}$$

$$\underset{\boldsymbol{A}^T}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}} \quad \underset{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}}{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}} \quad \underset{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}}{\begin{pmatrix} 16.5 \\ -8.1 \\ -5.5 \end{pmatrix}_{\mathrm{m}}}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

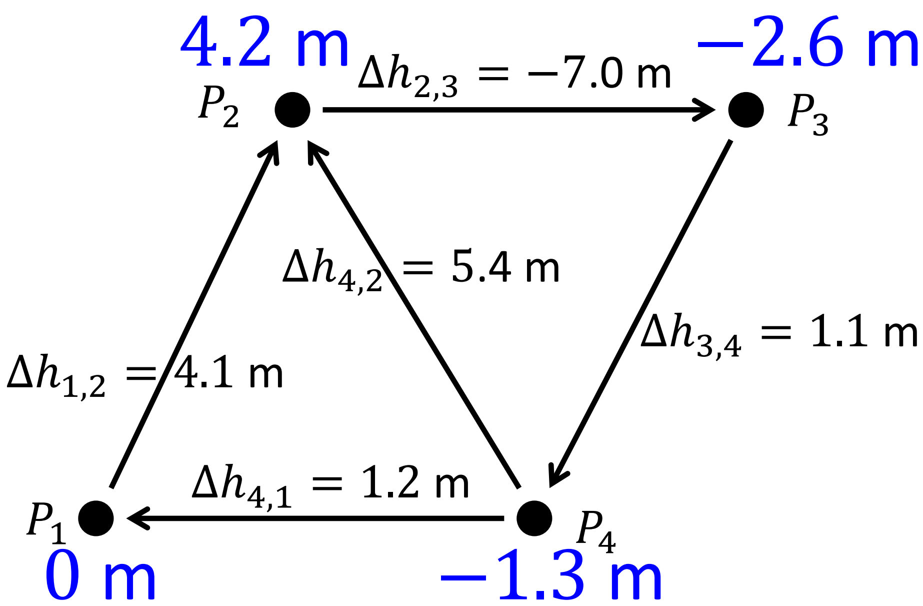
Gauß-Normalgleichung:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 16.5 \\ -8.1 \\ -5.5 \end{pmatrix}_{\mathrm{m}}}_{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen



Gauß-Normalgleichung:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 16.5 \\ -8.1 \\ -5.5 \end{pmatrix}_{\mathrm{m}}}_{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}} \quad \Rightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} 4.2 \\ -2.6 \\ -1.3 \end{pmatrix}_{\mathrm{m}}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Ausgeglichene Beobachtungen:

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} 4.2 \\ -2.6 \\ -1.3 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \mathrm{m}}_{\hat{\boldsymbol{L}}}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Ausgeglichene Beobachtungen:

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \overset{\hat{\boldsymbol{X}}}{\begin{pmatrix} 4.2 \\ -2.6 \\ -1.3 \end{pmatrix}_{\mathrm{m}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4.2 \\ -6.8 \\ 1.3 \\ 1.3 \\ 5.5 \end{pmatrix}_{\mathrm{m}}}_{\hat{\boldsymbol{L}}}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

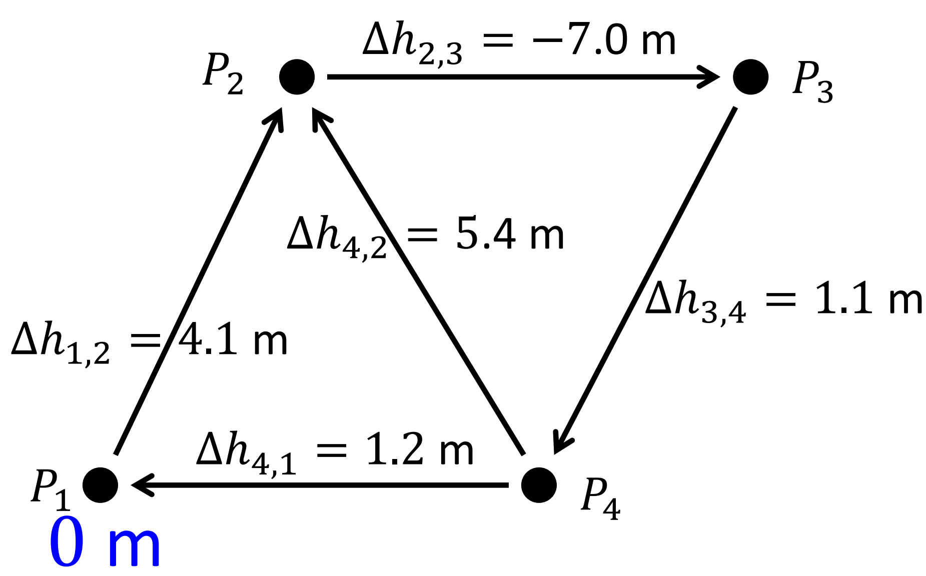
Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Ausgeglichene Beobachtungen:

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} 4.2 \\ -2.6 \\ -1.3 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 4.2 \\ -6.8 \\ 1.3 \\ 1.3 \\ 5.5 \end{pmatrix} \mathrm{m}}_{\hat{\boldsymbol{L}}}$$



Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

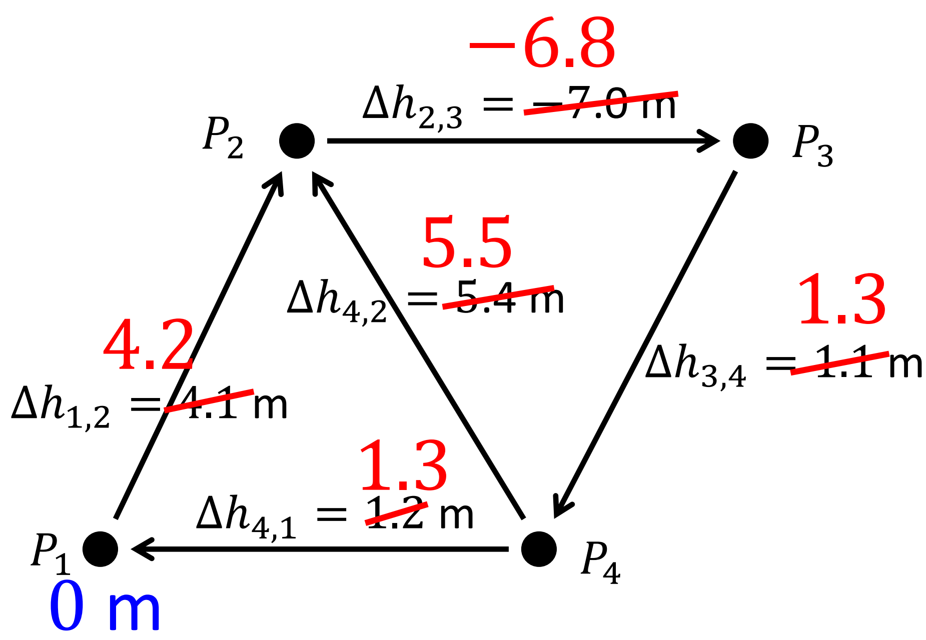
Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Ausgeglichene Beobachtungen:

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} 4.2 \\ -2.6 \\ -1.3 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 4.2 \\ -6.8 \\ 1.3 \\ 1.3 \\ 5.5 \end{pmatrix} \mathrm{m}}_{\hat{\boldsymbol{L}}}$$



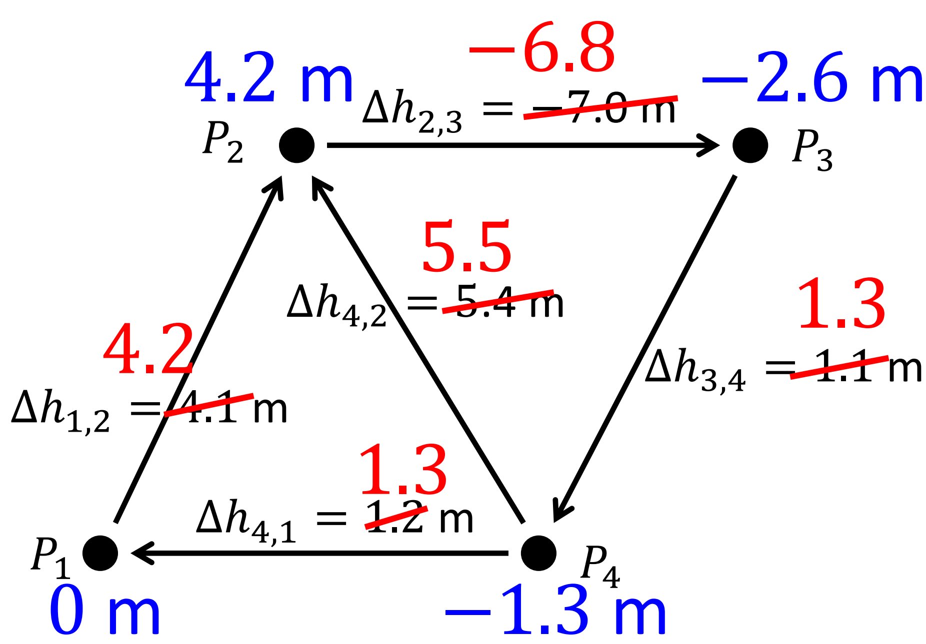
Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Ausgeglichene Beobachtungen:

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \overbrace{\begin{pmatrix} 4.2 \\ -2.6 \\ -1.3 \end{pmatrix} \mathrm{m}}^{\hat{\boldsymbol{X}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4.2 \\ -6.8 \\ 1.3 \\ 1.3 \\ 5.5 \end{pmatrix} \mathrm{m}}_{\hat{\boldsymbol{L}}}$$



Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell (1)

Wenn

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \Phi\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}\right) = \boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}}$$

dann erfüllt Optimum $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{L}}$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell (2)

Wenn

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \Phi\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}\right) = \Phi(\boldsymbol{X}_0) + \boldsymbol{A}\left(\widetilde{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_0\right)$$

dann erfüllt Optimum $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\ell}$

mit $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{L} - \Phi(\boldsymbol{X}_0)$

und $\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}_0 + \widehat{\boldsymbol{x}}$.

Der **Ausgleichungsalgorithmus**

1. Welche Beobachtungen liegen vor?

   Vektor $\boldsymbol{L}$, n Elemente

2. Welche Unbekannte sind gesucht?

   Vektor $\widetilde{\boldsymbol{X}}$, u Elemente

3. Wie ließen sich die wahren Beobachtungen $\widetilde{\boldsymbol{L}}$ bei gegebenen wahren Unbekannten $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ berechnen?

   funktionales Modell $\boldsymbol{\Phi}$: $\widetilde{\boldsymbol{X}} \longmapsto \widetilde{\boldsymbol{L}}$

   bzw. $\widetilde{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\Phi}\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}\right) = \boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}}$

   Designmatrix $\boldsymbol{A}$, n Zeilen, u Spalten

   Zeile i, Spalte j: Ableitung von $\tilde{L}_i$ nach $\tilde{X}_j$

4. Löse Normalgleichung $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}$.

   Liefert ausgeglichene Unbekannte $\widehat{\boldsymbol{X}}$

Literatur

- Meyberg, K. & Vachenauer, P. (1997): *Höhere Mathematik 1*, Springer, Berlin.
- Niemeier, W. (2008): *Ausgleichungsrechnung*, de Gruyter, Berlin.
- Torge, W. (2009): *Geschichte der Geodäsie in Deutschland*, de Gruyter, Berlin.