# Hidden Markov Model

# Hidden Markov Model

**Gegeben:**

- Beobachtungen $O = \langle o_1, \ldots, o_n \rangle$, je eine pro Zeitpunkt

# Hidden Markov Model

**Gegeben:**

- Beobachtungen $O = \langle o_1, \ldots, o_n \rangle$, je eine pro Zeitpunkt
- mögliche Systemzustände $Z$

# Hidden Markov Model

**Gegeben:**

- Beobachtungen $O = \langle o_1, \ldots, o_n \rangle$, je eine pro Zeitpunkt
- mögliche Systemzustände $Z$
- für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung $o$
  - die Wahrscheinlichkeit $\Pr(o \mid z)$ oder
  - die Wahrscheinlichkeits*dichte* $f(o \mid z)$,

  dass $o$ bei Zustand $z$ beobachtet wird

# Hidden Markov Model

**Gegeben:**

- Beobachtungen $O = \langle o_1, \ldots, o_n \rangle$, je eine pro Zeitpunkt
- mögliche Systemzustände $Z$
- für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung $o$
  - die Wahrscheinlichkeit $\Pr(o \mid z)$ oder
  - die Wahrscheinlichkeits*dichte* $f(o \mid z)$,

  dass $o$ bei Zustand $z$ beobachtet wird
- für jedes Paar von Zuständen $z_1, z_2 \in Z$ die Wahrscheinlichkeit

  $\Pr(z_2 \mid \text{was } z_1 \text{ before})$,

  also die Wahrscheinlichkeit für $z_2$ bei Kenntnis, dass zuvor $z_1$ vorherrschte (*Übergangswahrscheinlichkeit*)

# Hidden Markov Model

**Gegeben:**

- Beobachtungen $O = \langle o_1, \ldots, o_n \rangle$, je eine pro Zeitpunkt
- mögliche Systemzustände $Z$
- für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung $o$
  - die Wahrscheinlichkeit $\Pr(o \mid z)$ oder
  - die Wahrscheinlichkeits*dichte* $f(o \mid z)$,

  dass $o$ bei Zustand $z$ beobachtet wird
- für jedes Paar von Zuständen $z_1, z_2 \in Z$ die Wahrscheinlichkeit

  $\Pr(z_2 \mid \text{was } z_1 \text{ before})$,

  also die Wahrscheinlichkeit für $z_2$ bei Kenntnis, dass zuvor $z_1$ vorherrschte (*Übergangswahrscheinlichkeit*)
- für jeden Zustand $z \in Z$ die (a-priori-)Wahrscheinlichkeit $\Pr(z)$

# Hidden Markov Model

**Gesucht:**
Folge $S = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ von Zuständen, die sich am besten mit gegebenen Beobachtungen erklären lässt, also $\Pr(S \mid O)$ maximimiert.

$$\Pr(S \mid O) =$$

# Hidden Markov Model

**Gesucht:**
Folge $S = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ von Zuständen, die sich am besten mit gegebenen Beobachtungen erklären lässt, also $\Pr(S \mid O)$ maximimiert.

$$\Pr(S \mid O) = f(O \mid S) \cdot \Pr(S) / f(O)$$

# Hidden Markov Model

**Gesucht:**
Folge $S = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ von Zuständen, die sich am besten mit gegebenen Beobachtungen erklären lässt, also $\Pr(S \mid O)$ maximimiert.

$$\Pr(S \mid O) = f(O \mid S) \cdot \Pr(S)/f(O)$$

$$f(O \mid S) = f(o_1 \mid z_1) \cdot \ldots \cdot f(o_n \mid z_n)$$

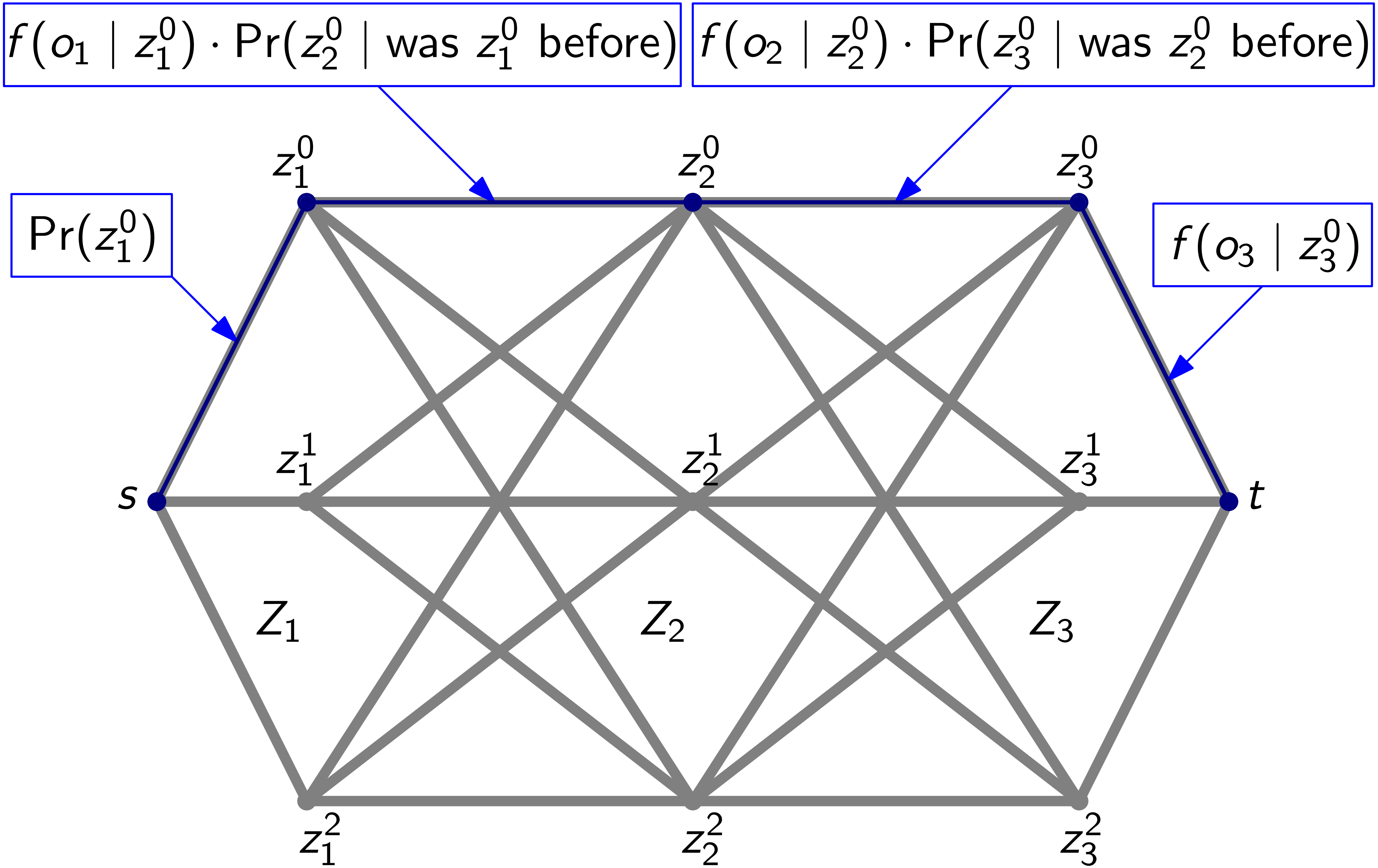
# Hidden Markov Model

**Gesucht:**
Folge $S = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ von Zuständen, die sich am besten mit gegebenen Beobachtungen erklären lässt, also $\Pr(S \mid O)$ maximimiert.

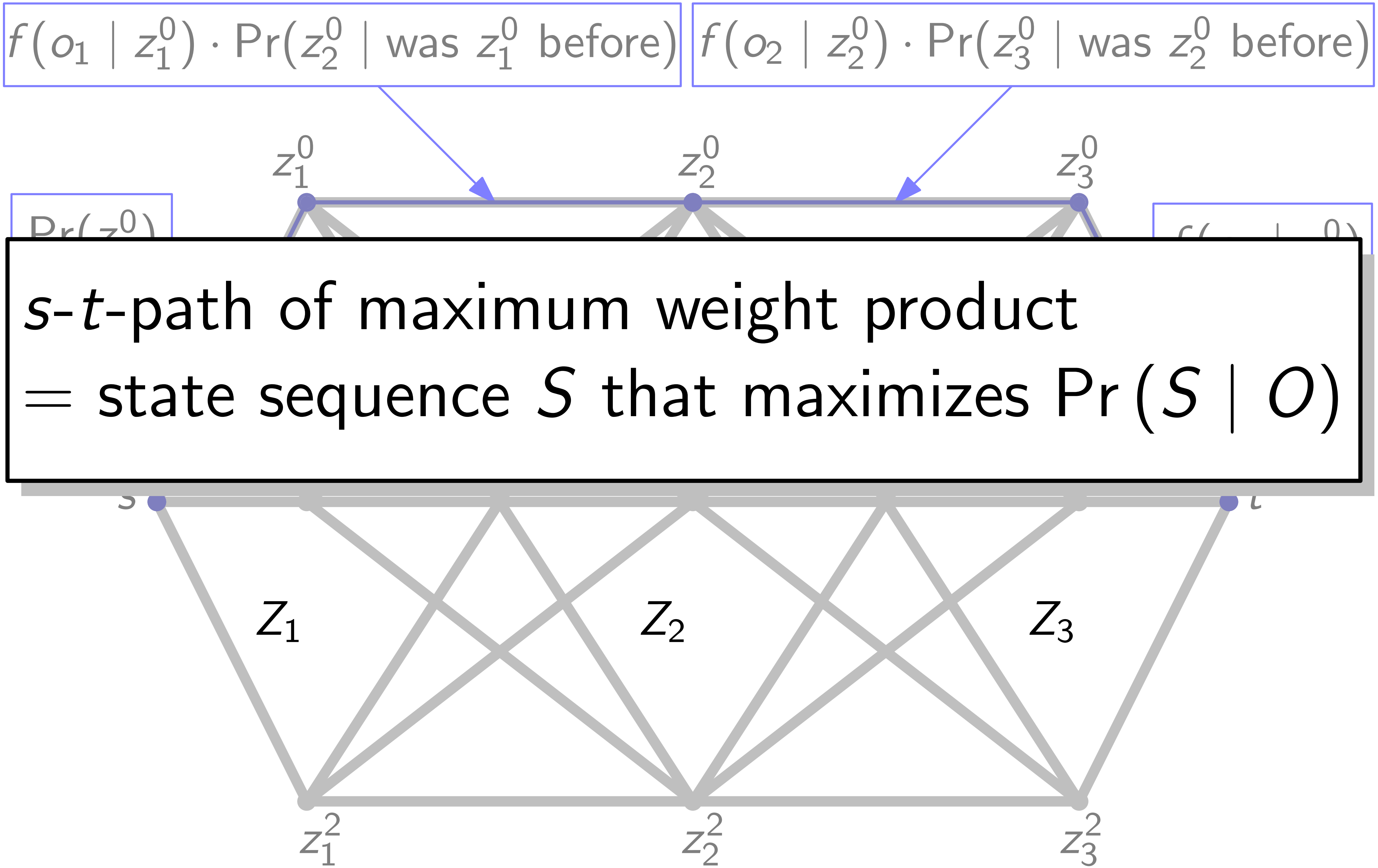
$$\Pr(S \mid O) = f(O \mid S) \cdot \Pr(S) / f(O)$$

$$\Pr(S) = \Pr(z_1) \cdot \Pr(z_2 \mid \text{was } z_1 \text{ before}) \cdot \ldots \cdot \Pr(z_n \mid \text{was } z_{n-1} \text{ before})$$

# Hidden Markov Model



# Hidden Markov Model




$s$-$t$-path of maximum weight product
$=$ state sequence $S$ that maximizes $\Pr(S \mid O)$

# Hidden Markov Model – ein Beispiel

**Gegeben:**

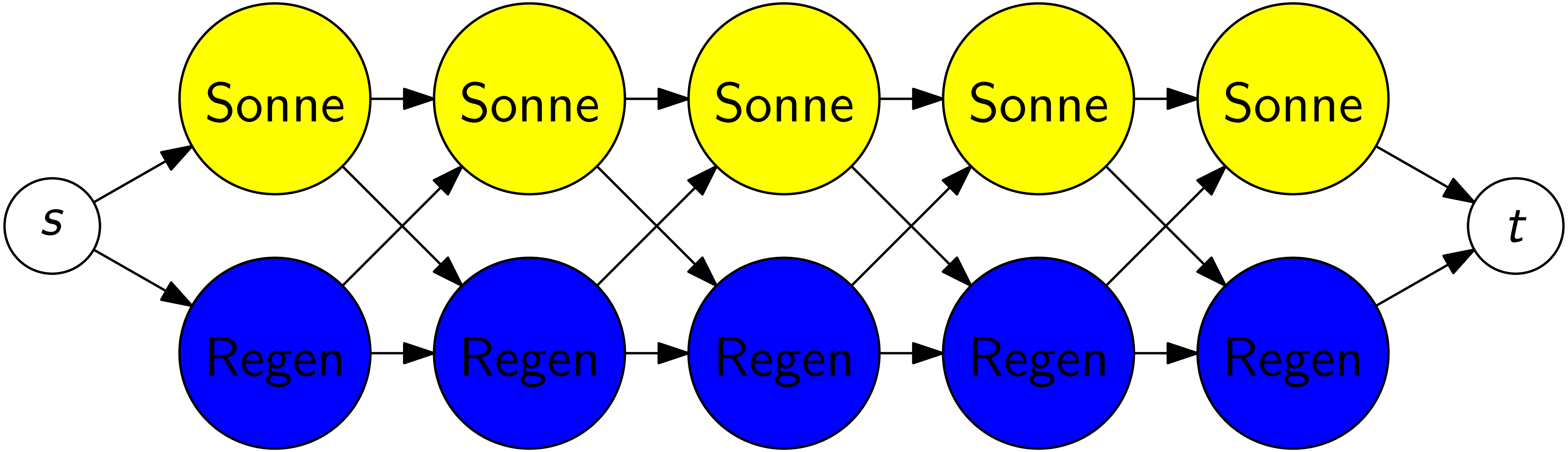
- Folge von Beobachtungen
  $O = \langle o_1, \ldots, o_n \rangle = \langle \text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken} \rangle$
- Menge möglicher Systemzustände: $Z = \{\text{Sonne}, \text{Regen}\}$
- Beobachtungswahrscheinlichkeiten:

  $\Pr(\text{nass} \mid \text{Sonne}) = 0.1$
  $\Pr(\text{trocken} \mid \text{Sonne}) = 0.9$
  $\Pr(\text{nass} \mid \text{Regen}) = 0.95$
  $\Pr(\text{trocken} \mid \text{Regen}) = 0.05$
- Übergangswahrscheinlichkeiten:

  $\Pr(\text{Regen} \mid \text{zuvor Regen}) = 0.7$
  $\Pr(\text{Sonne} \mid \text{zuvor Regen}) = 0.3$
  $\Pr(\text{Regen} \mid \text{zuvor Sonne}) = 0.2$
  $\Pr(\text{Sonne} \mid \text{zuvor Sonne}) = 0.8$
- A-Priori-Wahrscheinlichkeiten: $\Pr(\text{Regen}) = 0.3$, $\Pr(\text{Sonne}) = 0.7$

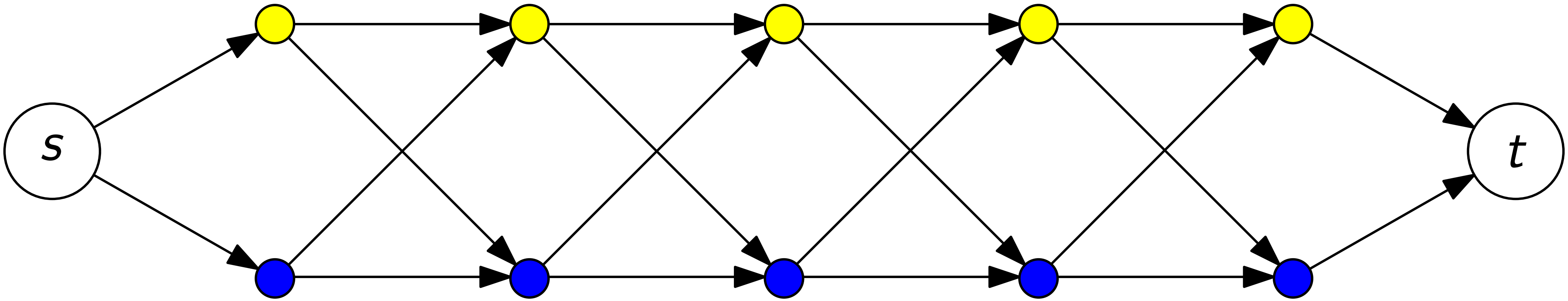
**Gesucht:** Folge $S = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ von Zuständen, so dass $\Pr(S \mid O)$ maximal ist.

# Hidden Markov Model – ein Beispiel



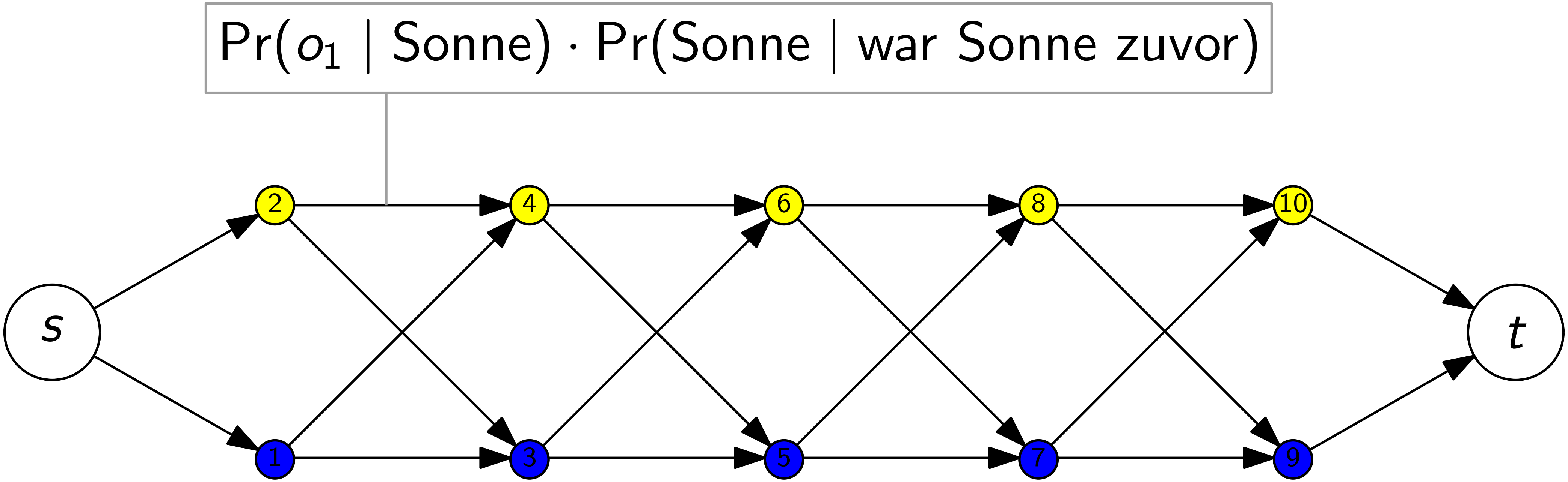

$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

# Hidden Markov Model – ein Beispiel



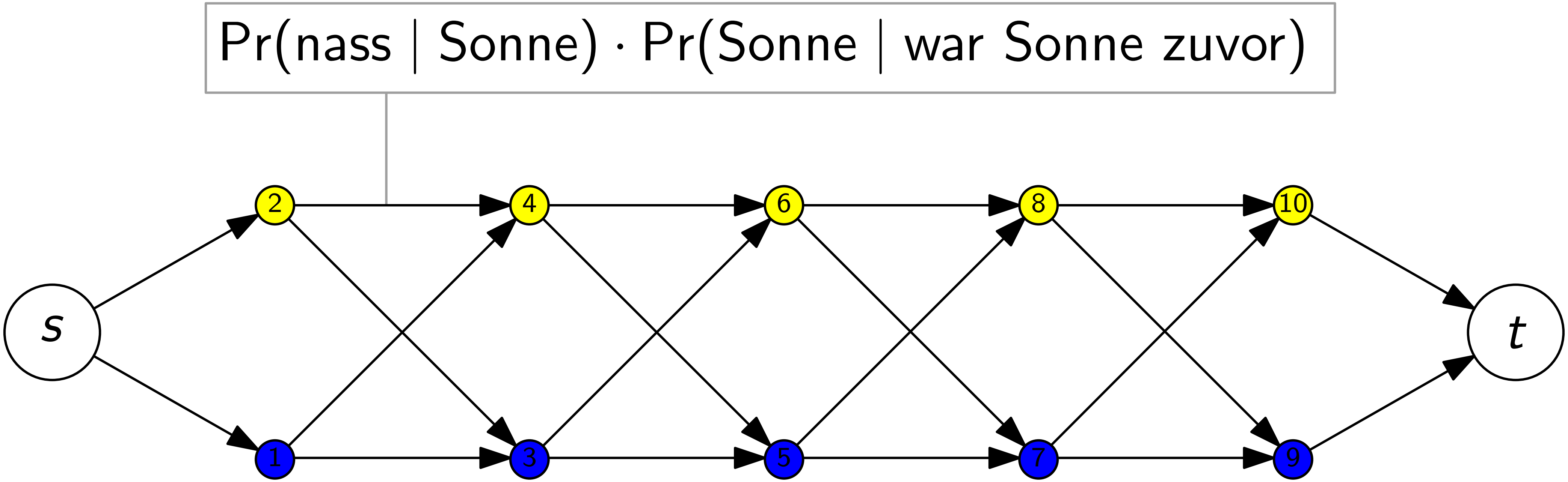

$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

# Hidden Markov Model – ein Beispiel



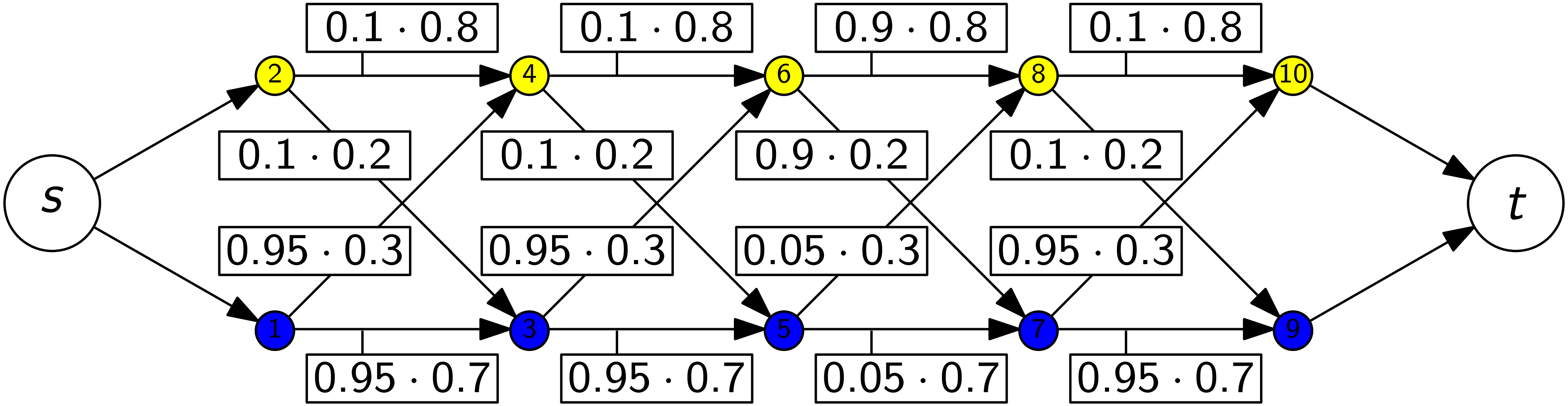

$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

# Hidden Markov Model – ein Beispiel



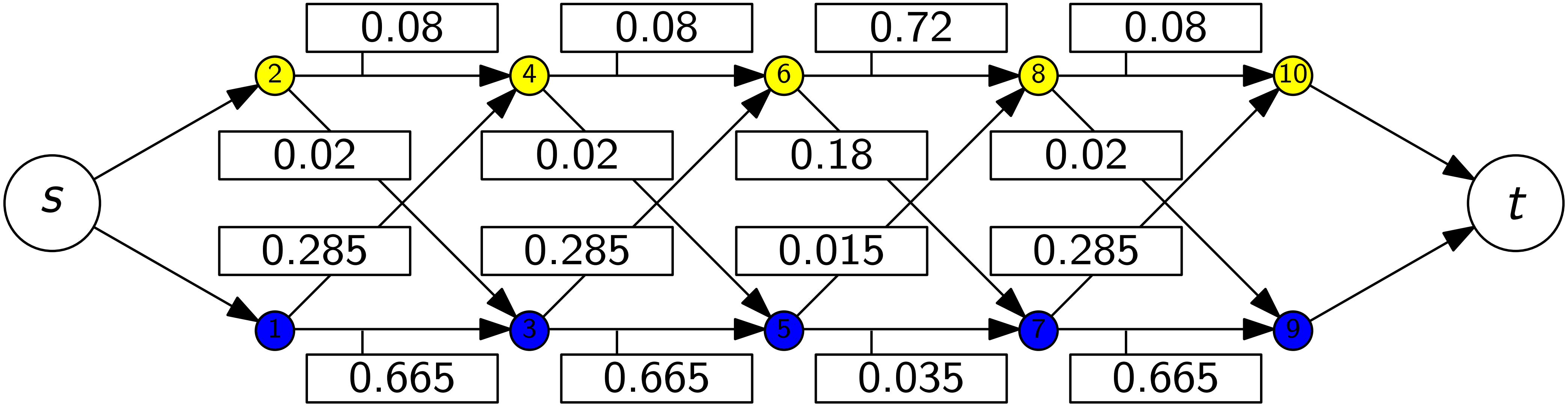

$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

# Hidden Markov Model – ein Beispiel



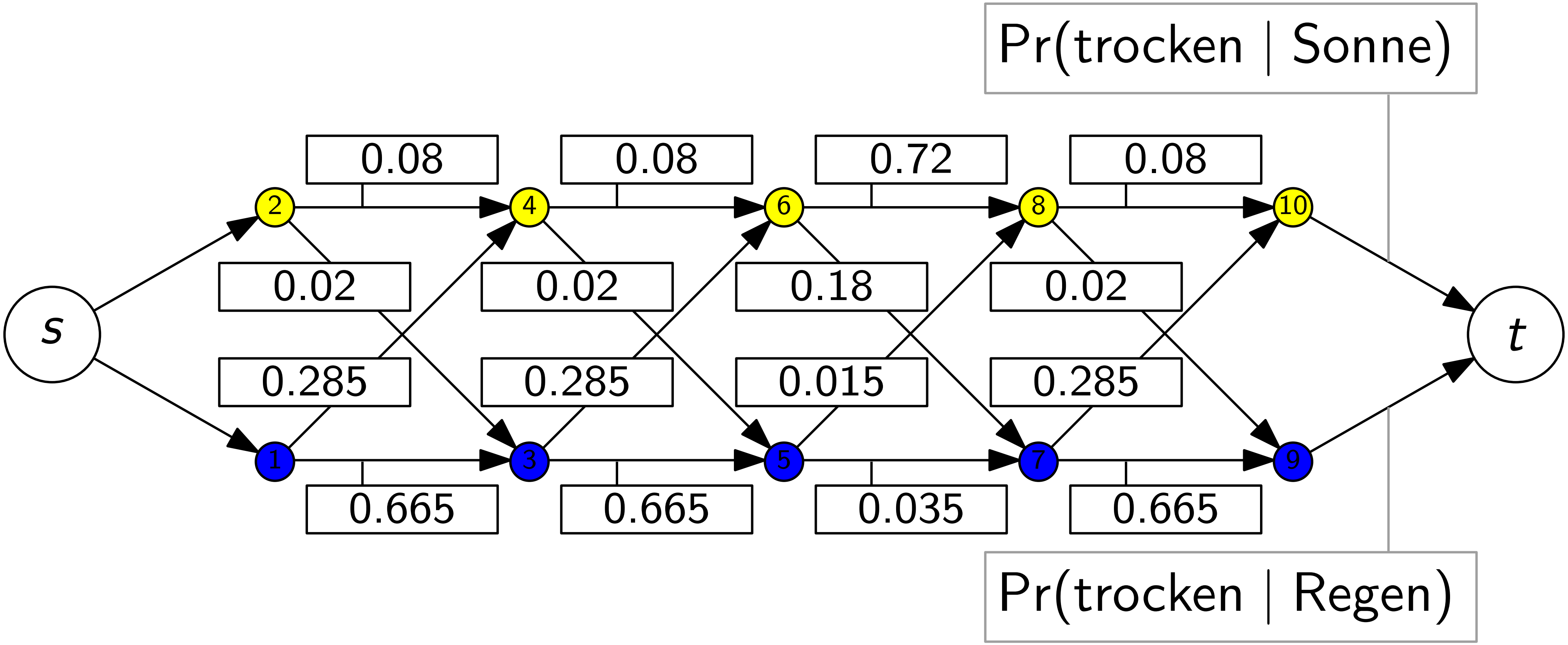

$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

# Hidden Markov Model – ein Beispiel



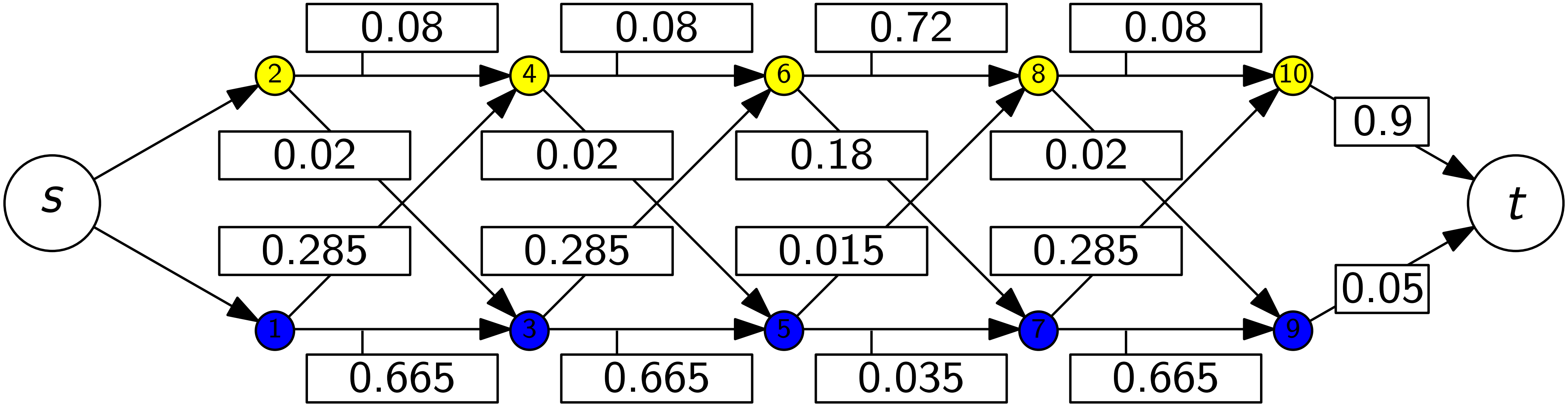

$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

# Hidden Markov Model – ein Beispiel



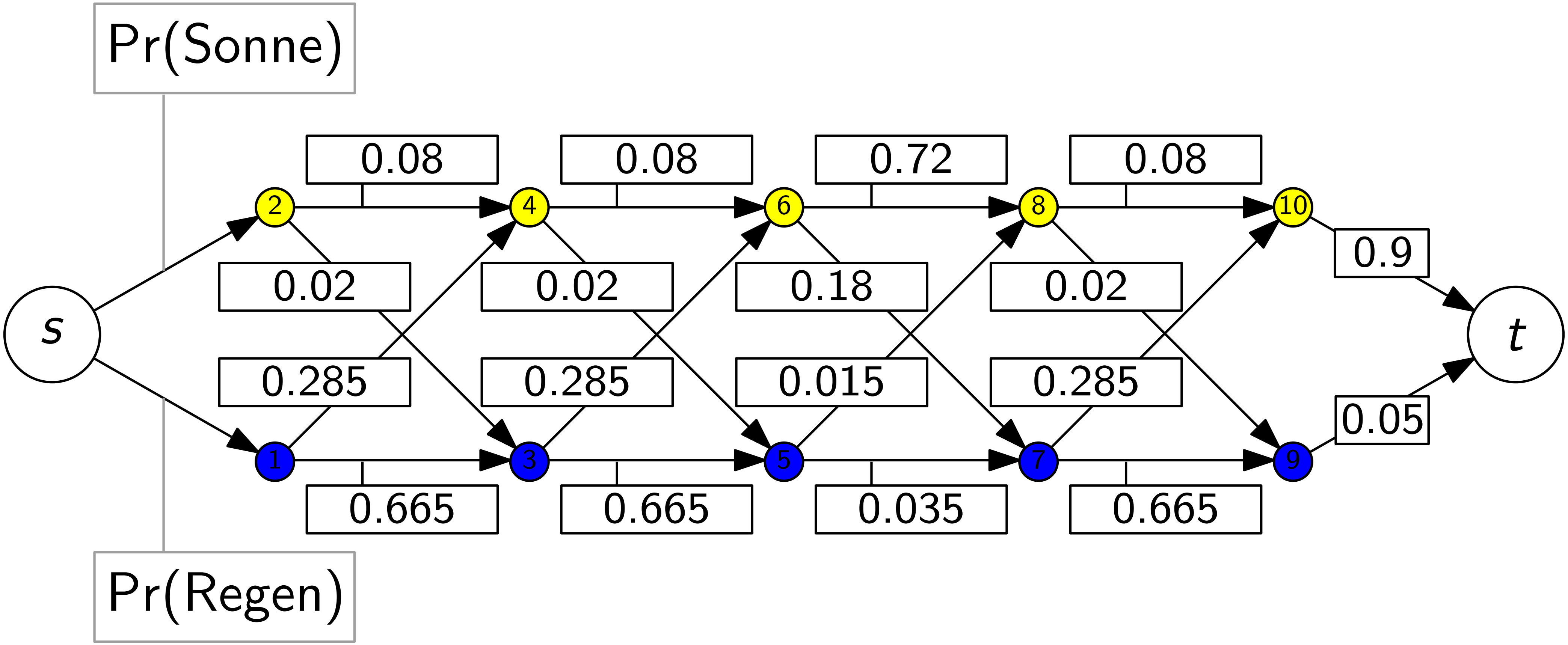

$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

# Hidden Markov Model – ein Beispiel



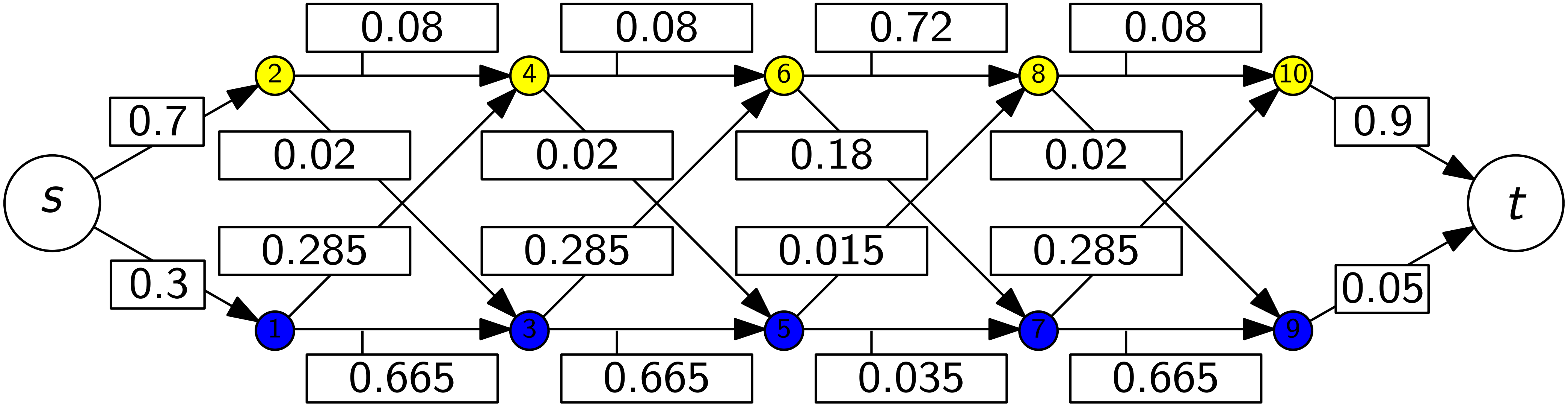

$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

# Hidden Markov Model – ein Beispiel




$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

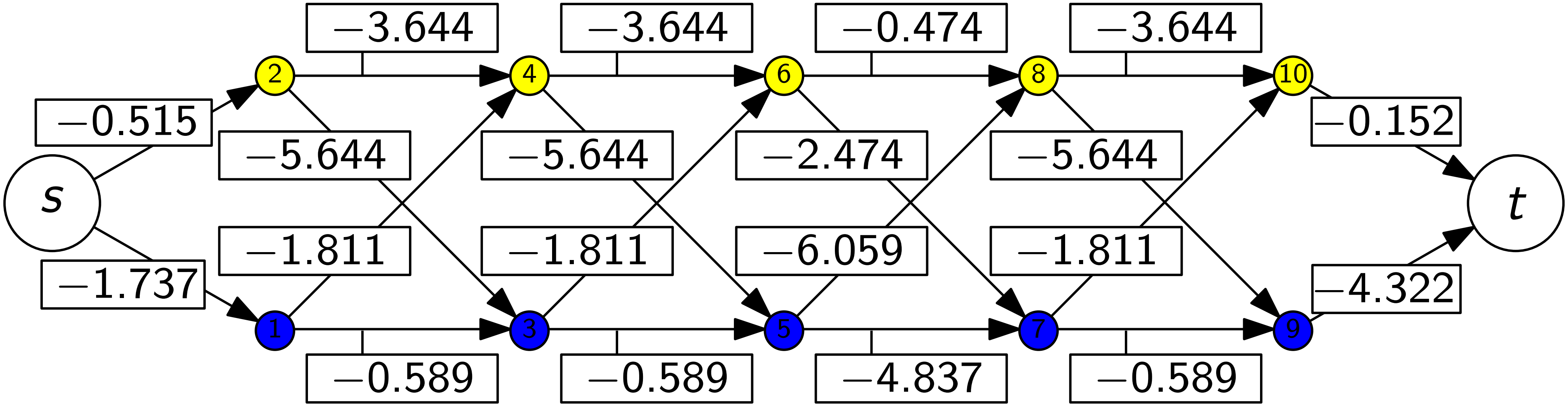
# Hidden Markov Model – ein Beispiel




$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

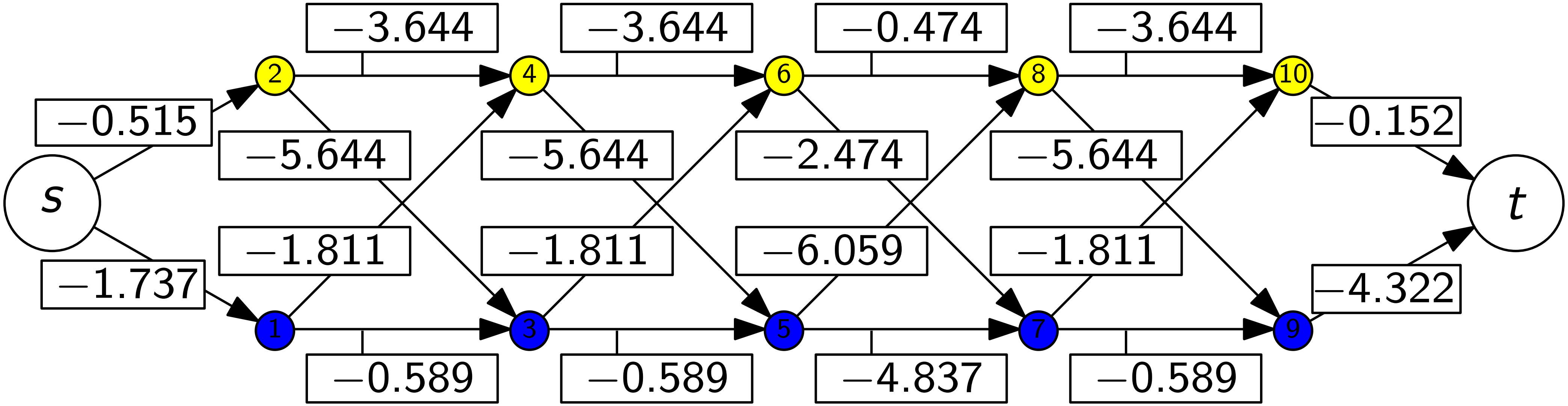
# Hidden Markov Model – ein Beispiel

## $\log_2$

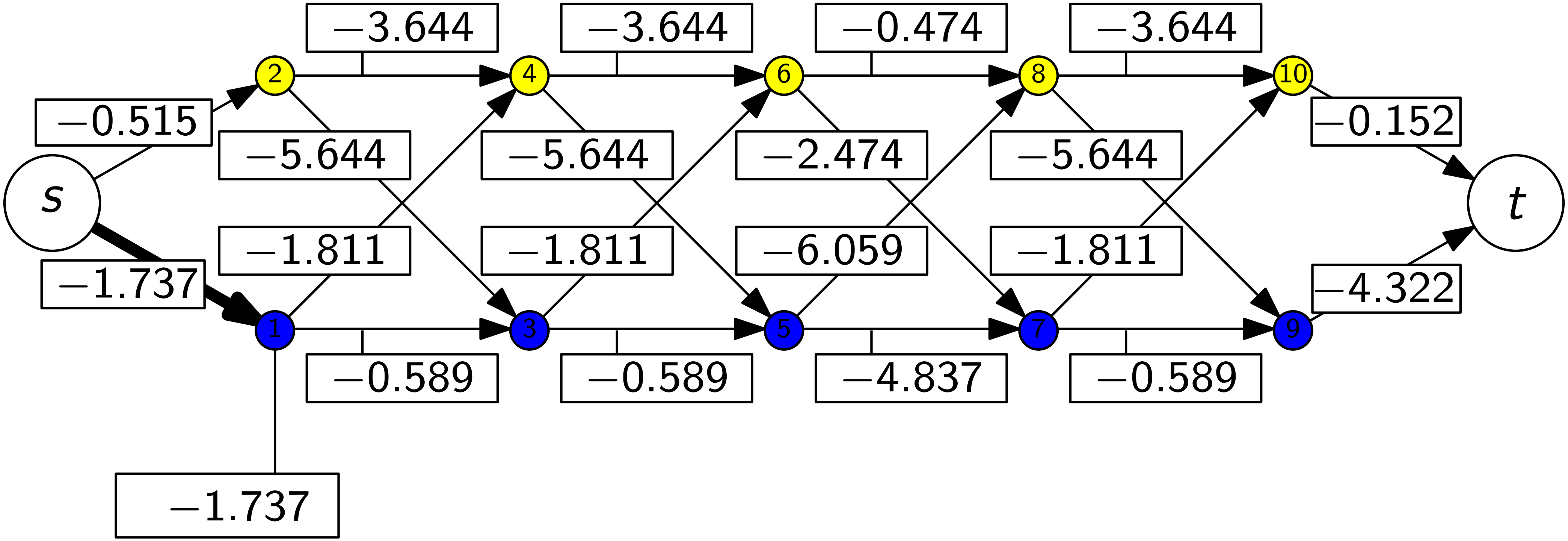



$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

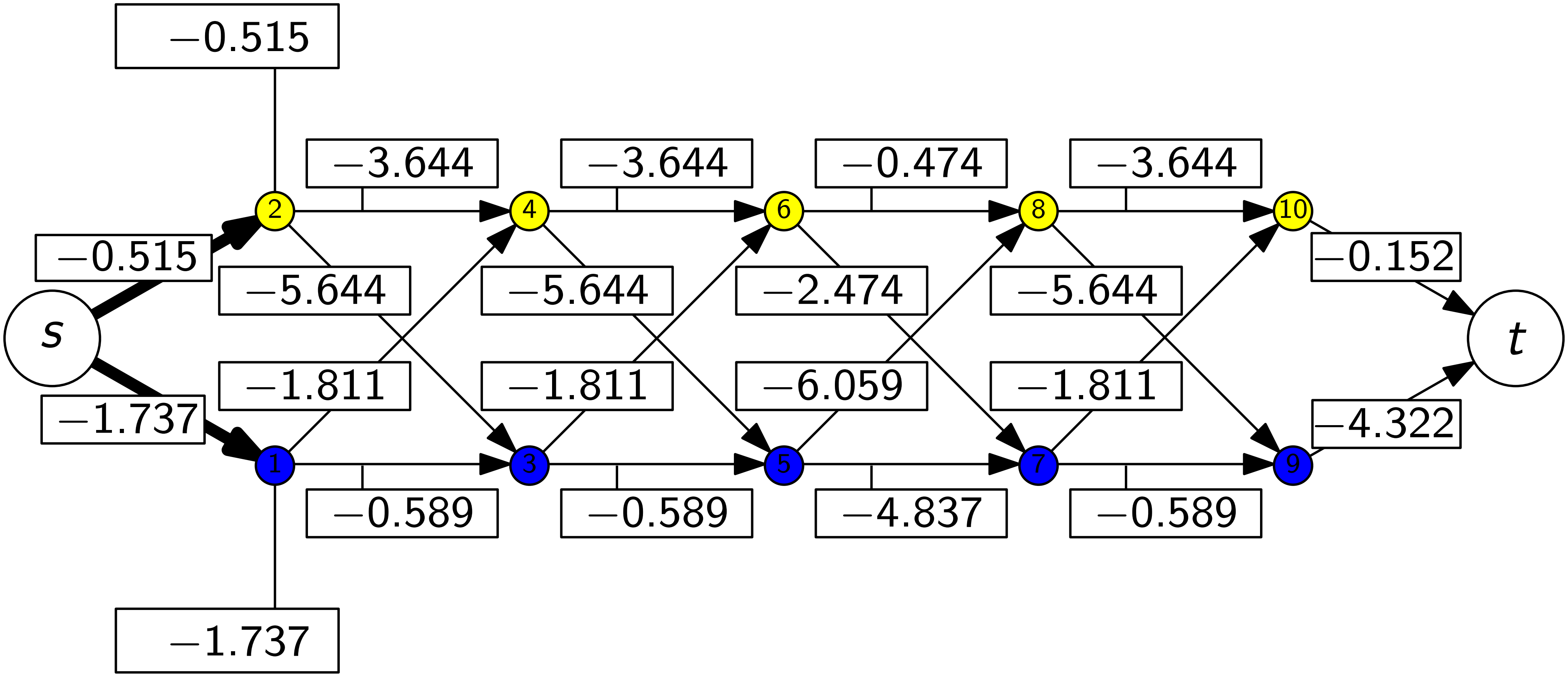
# Hidden Markov Model – ein Beispiel



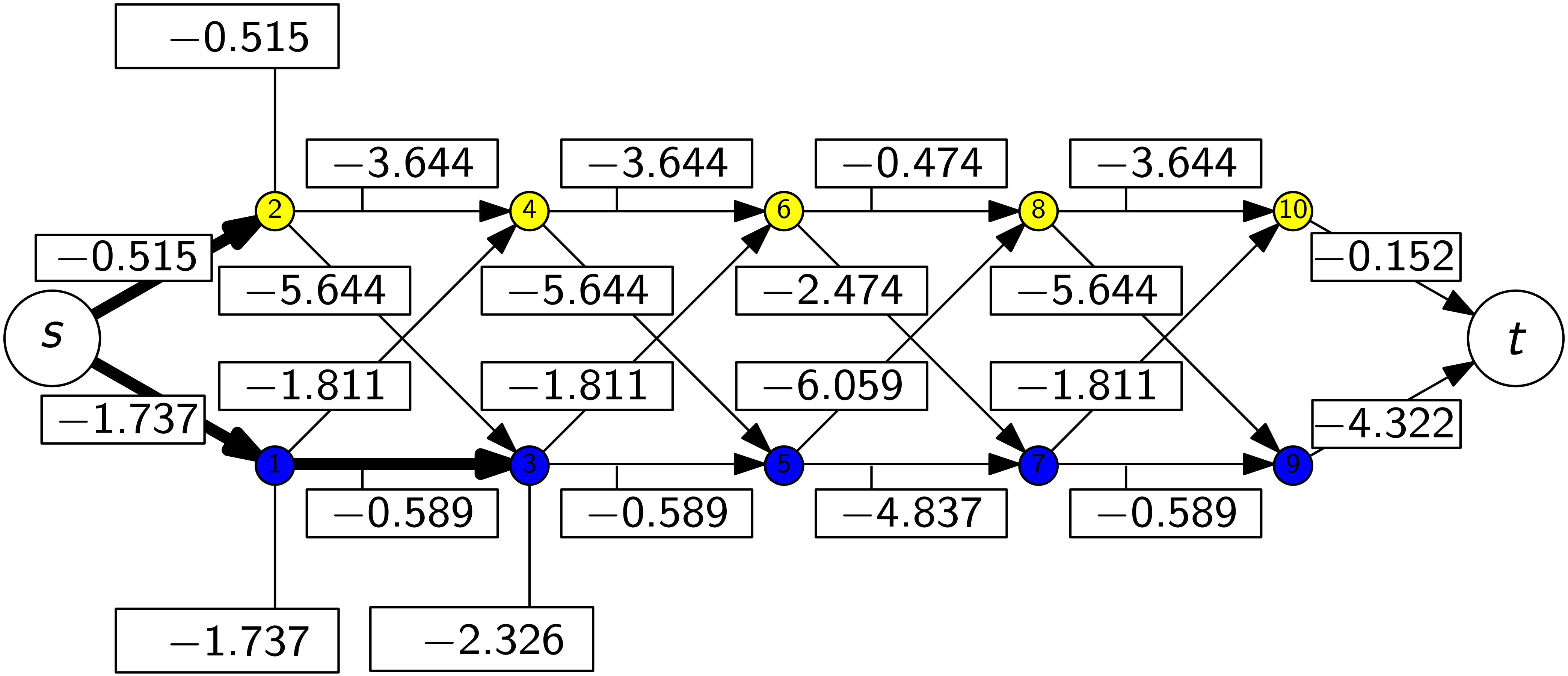
# Hidden Markov Model – ein Beispiel



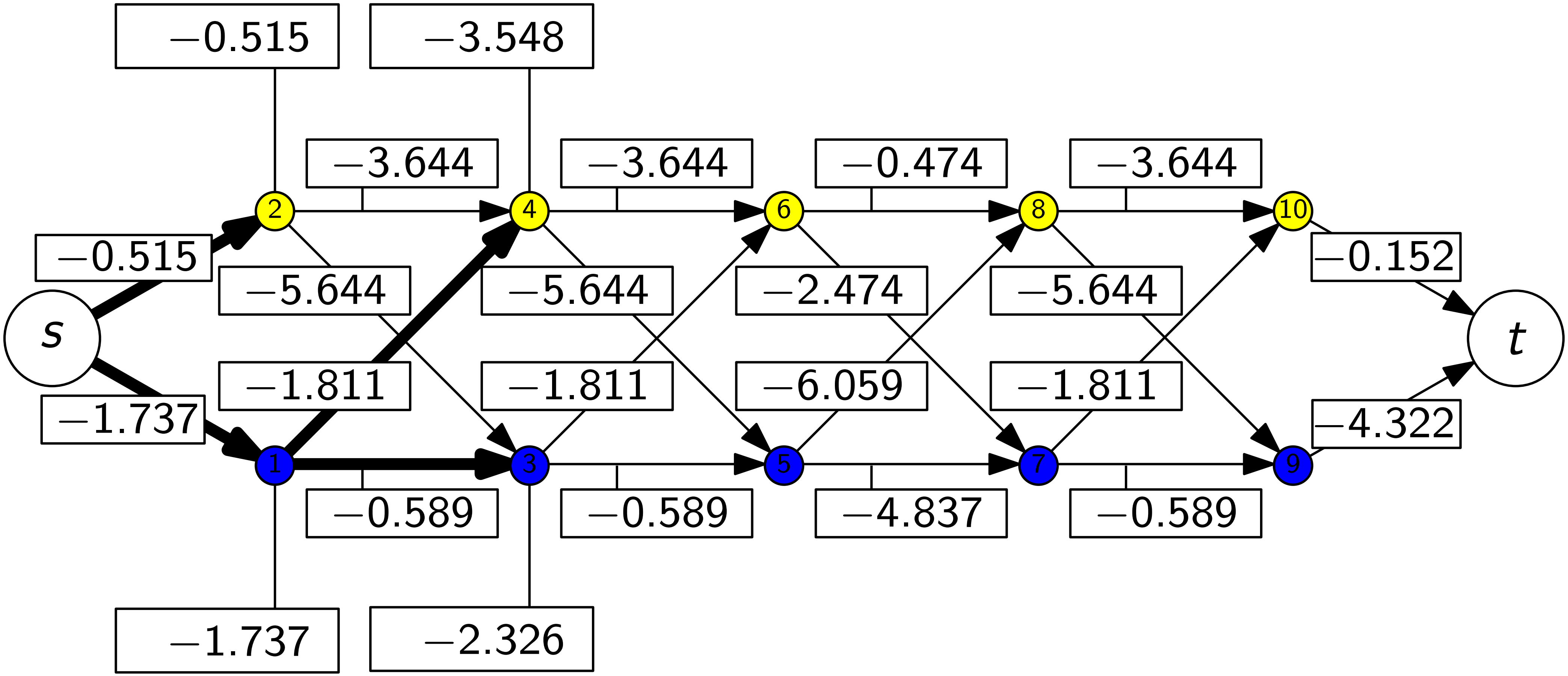
# Hidden Markov Model – ein Beispiel



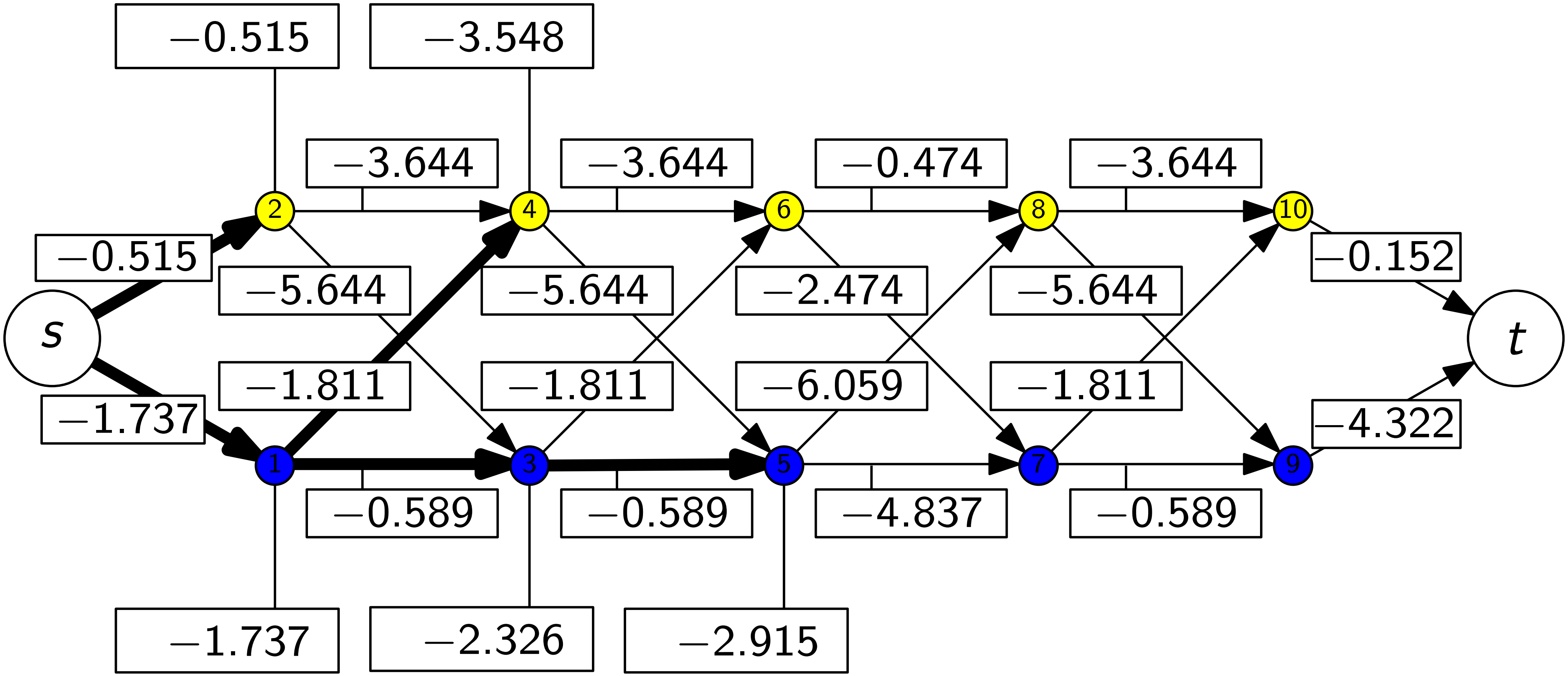
# Hidden Markov Model – ein Beispiel



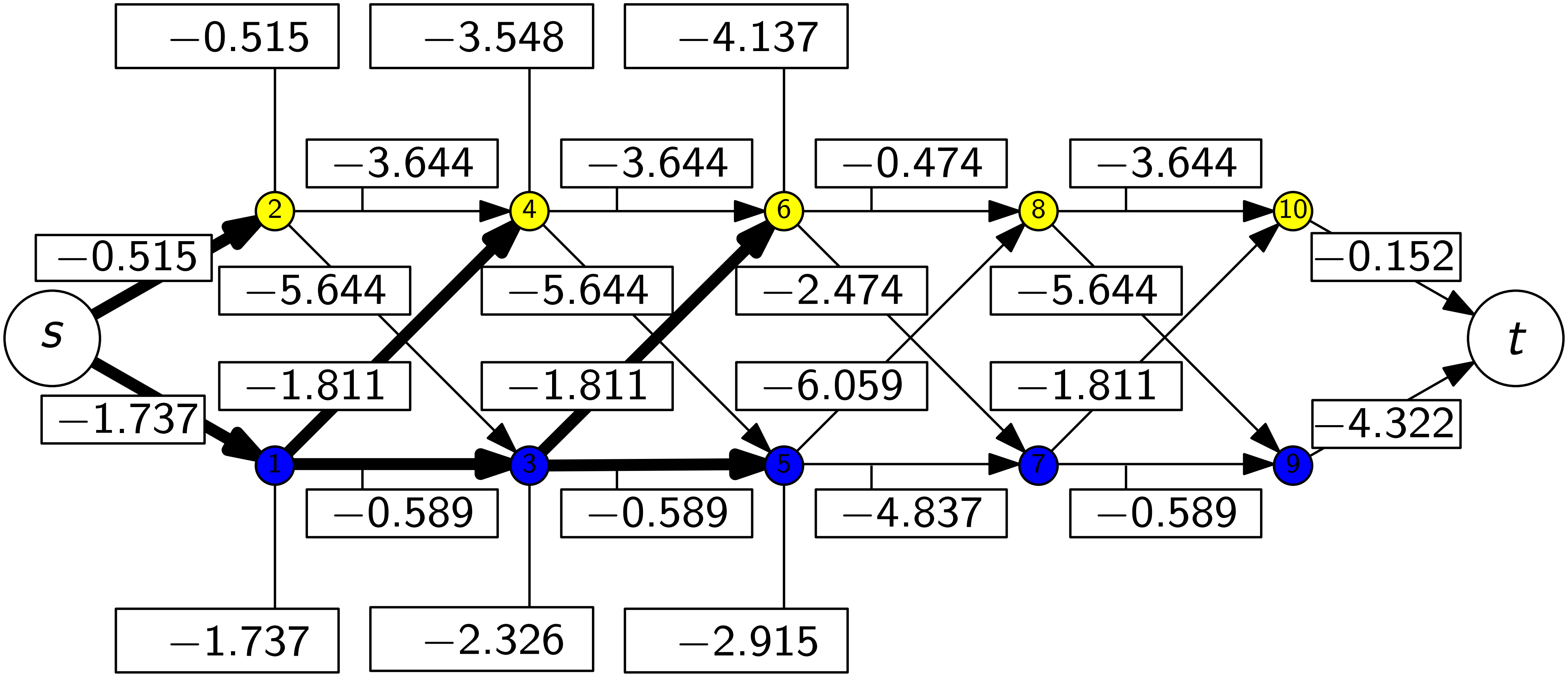
# Hidden Markov Model – ein Beispiel



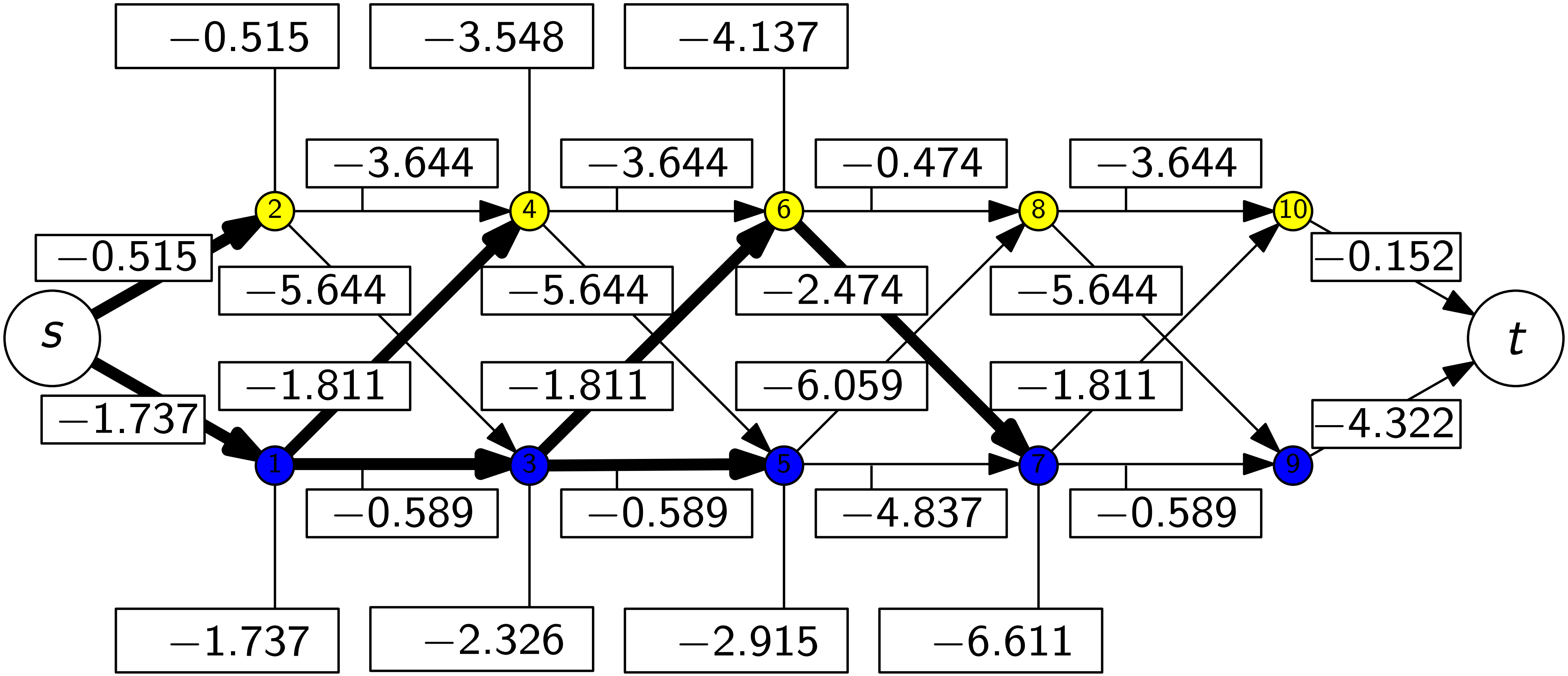
# Hidden Markov Model – ein Beispiel



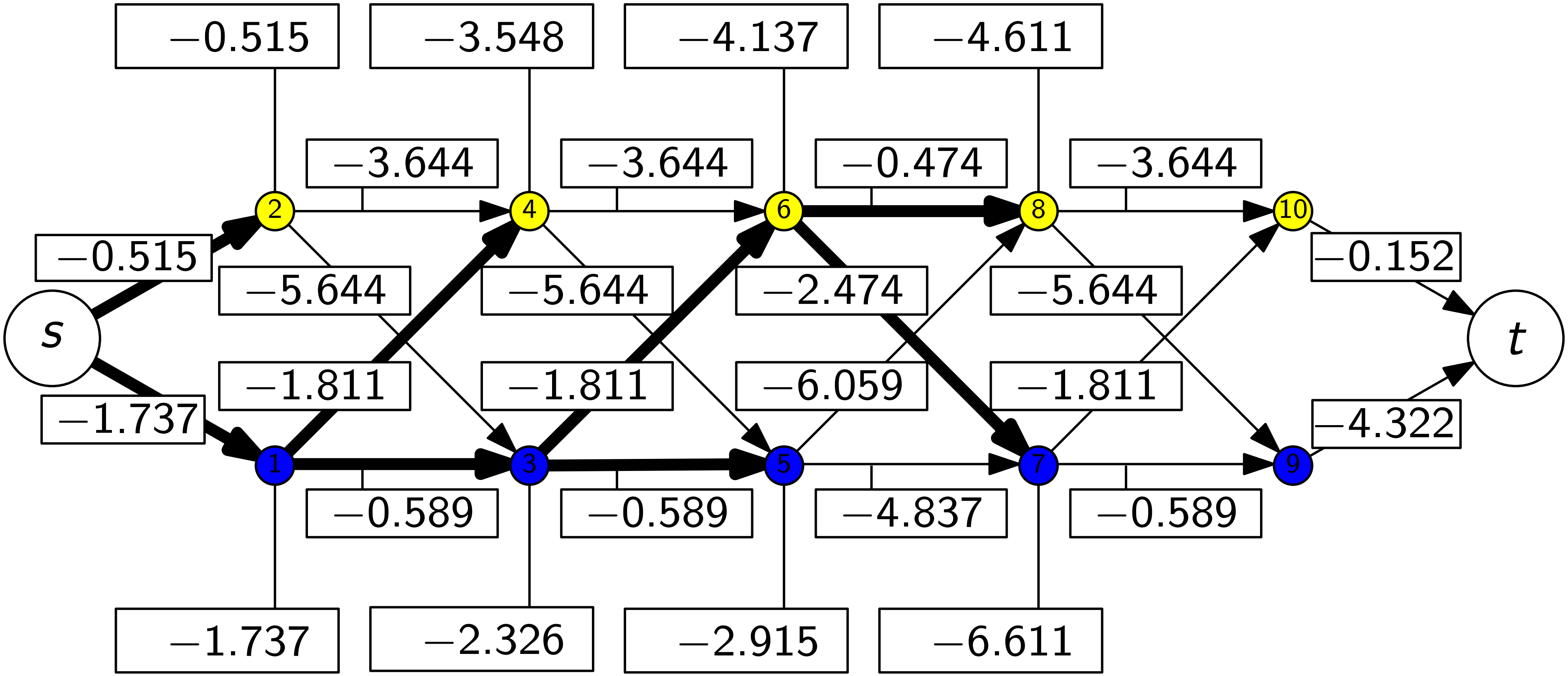
# Hidden Markov Model – ein Beispiel



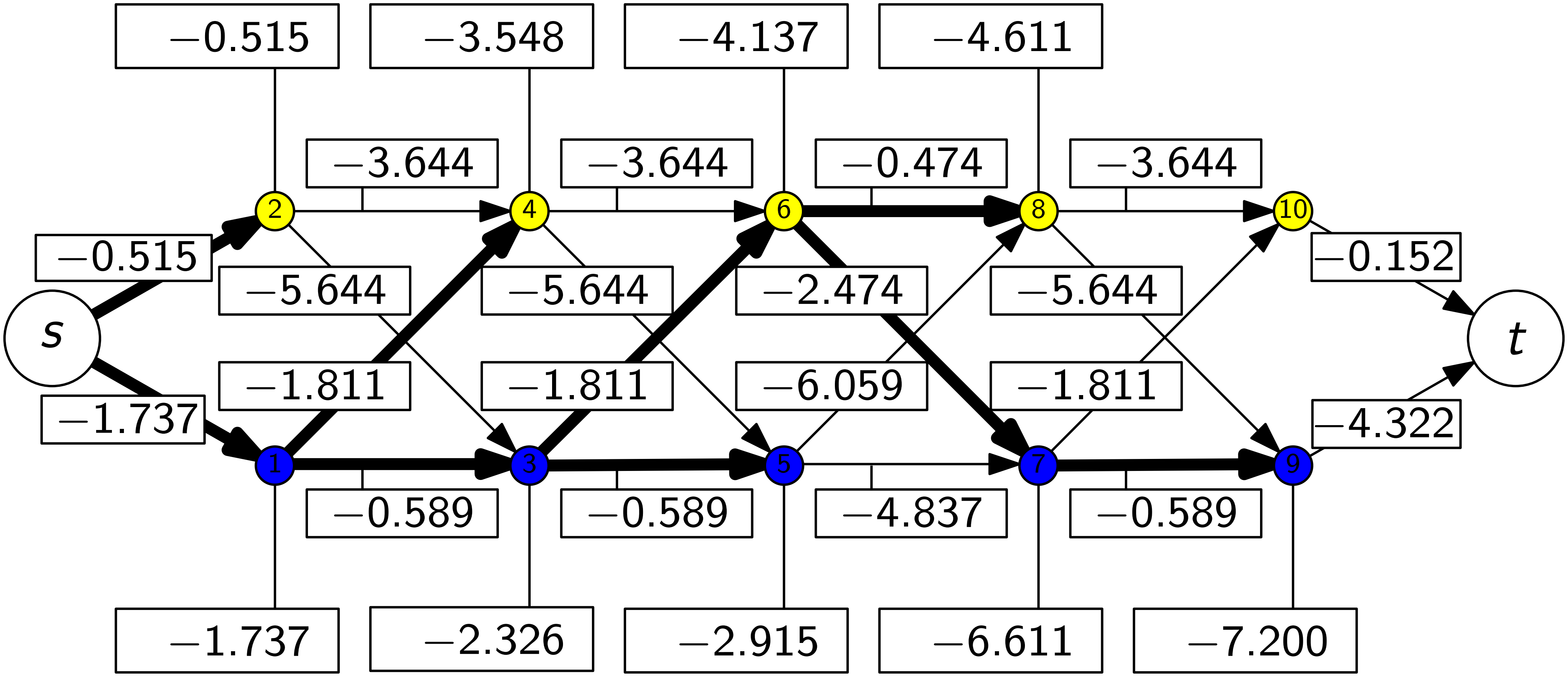
# Hidden Markov Model – ein Beispiel



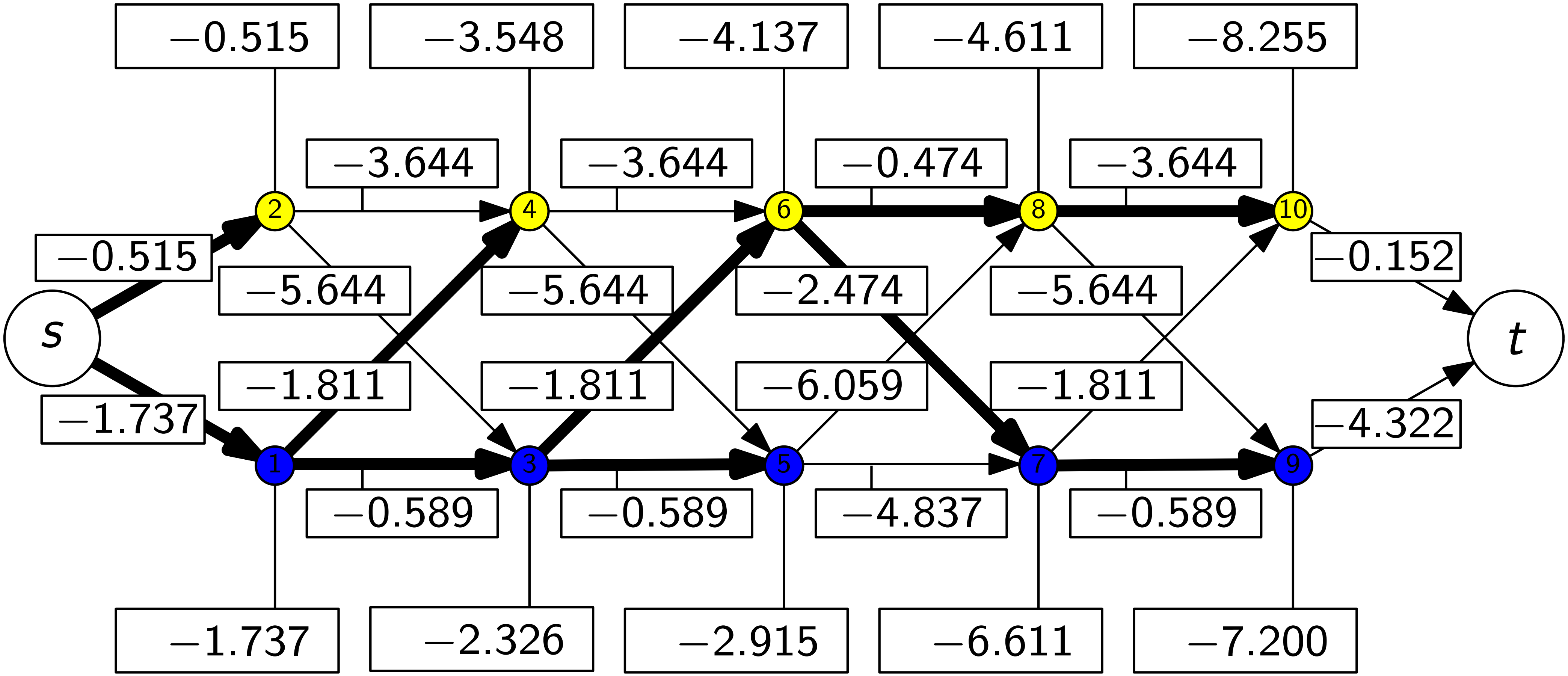
# Hidden Markov Model – ein Beispiel



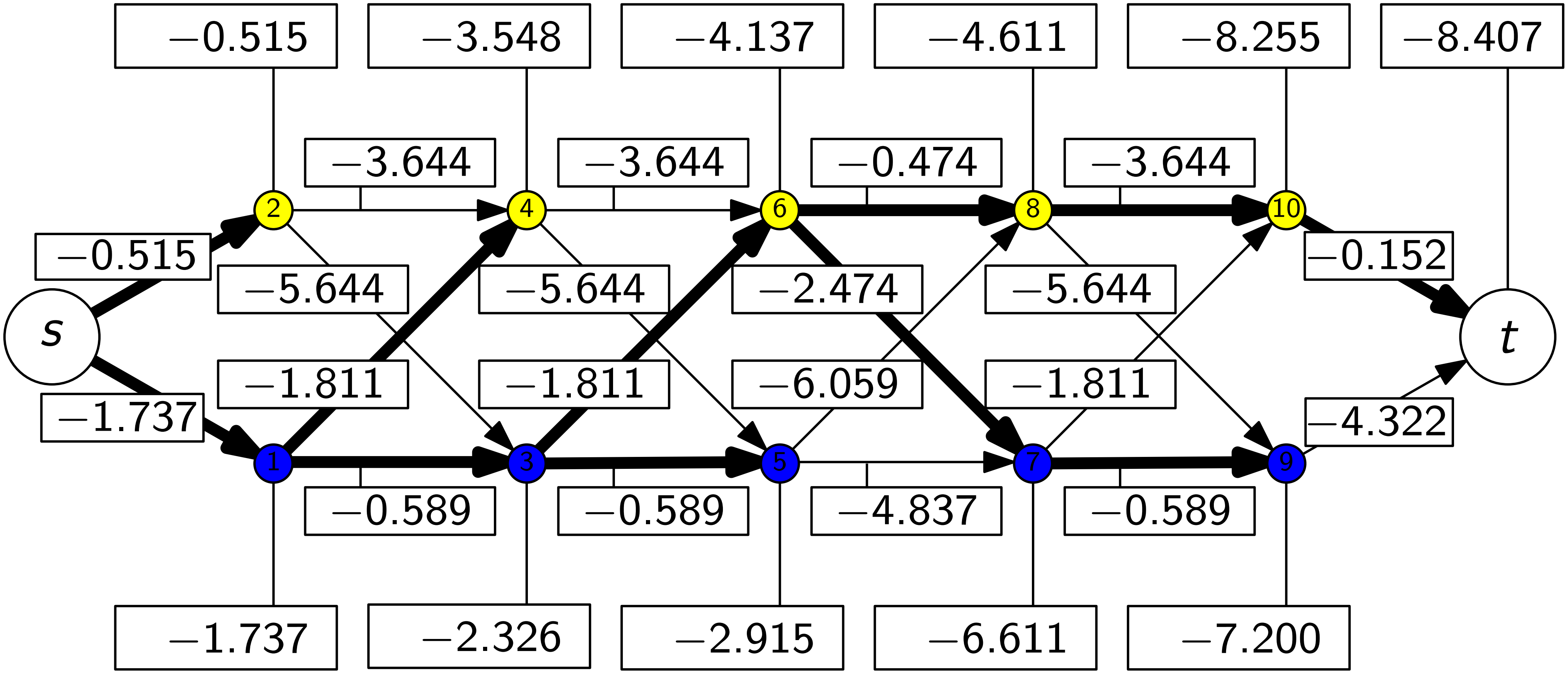
# Hidden Markov Model – ein Beispiel



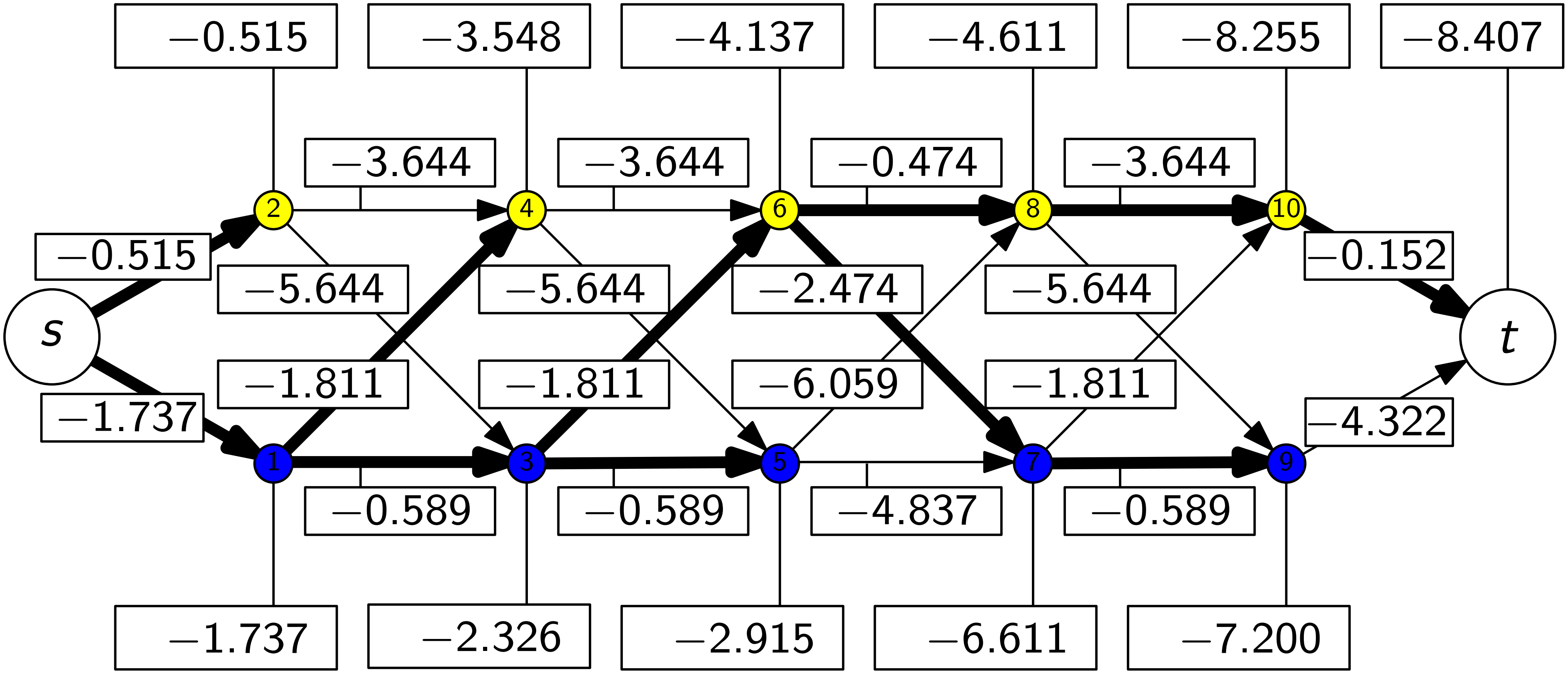
# Hidden Markov Model – ein Beispiel



# Hidden Markov Model – ein Beispiel



# Hidden Markov Model – ein Beispiel




$$O = \langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

$$\boxed{S = \langle \text{Regen, Regen, Sonne, Sonne, Sonne} \rangle}$$

# Algorithmus

LongestPath(directed acyclic graph $G = (V, A)$)

    Bring $V$ in topologische Ordnung $\to v_1, \ldots, v_n$
    $v_1.d = 0$
    $v_1.\pi = nil$
    **for** $j = 2$ **to** $n$ **do**
        $v_j.d = -\infty$
        $v_j.\pi = nil$
        **for** $v_i v_j \in A$ **do**
            **if** $v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d$ **then**
                $v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)$
                $v_j.\pi = v_i$

$u.d$: Länge des längsten Wegs von $v_1$ nach $u$
$u.\pi$: Vorgänger von $u$ im längsten Weg von $v_1$ nach $u$
$w(uv)$: Gewicht von Kante $uv$

# Algorithmus

LongestPath(directed acyclic graph $G = (V, A)$)

Bring $V$ in topologische Ordnung $\to v_1, \ldots, v_n$
$v_1.d = 0$
$v_1.\pi = nil$
**for** $j = 2$ **to** $n$ **do**
    $v_j.d = -\infty$
    $v_j.\pi = nil$
    **for** $v_i v_j \in A$ **do**
        **if** $v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d$ **then**
            $v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)$
            $v_j.\pi = v_i$

$u.d$: Länge des längsten Wegs von $v_1$ nach $u$
$u.\pi$: Vorgänger von $u$ im längsten Weg von $v_1$ nach $u$
$w(uv)$: Gewicht von Kante $uv$

Laufzeit: $O(|V| + |A|)$

# Algorithmus

LongestPath(directed acyclic graph $G = (V, A)$)

Bring $V$ in topologische Ordnung $\rightarrow v_1, \dots, v_n$
$v_1.d = 0$
$v_1.\pi = nil$
**for** $j = 2$ **to** $n$ **do**
    $v_j.d = -\infty$
    $v_j.\pi = nil$
    **for** $v_i v_j \in A$ **do**
        **if** $v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d$ **then**
            $v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)$
            $v_j.\pi = v_i$

$u.d$: Länge des längsten Wegs von $v_1$ nach $u$
$u.\pi$: Vorgänger von $u$ im längsten Weg von $v_1$ nach $u$
$w(uv)$: Gewicht von Kante $uv$

Laufzeit: $O(|V| + |A|)$    Laufzeit Dijkstra: $O(|V| \log |V| + |A|)$