

# Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2023

12. Vorlesung

## Färben planarer Graphen und Planaritätstest

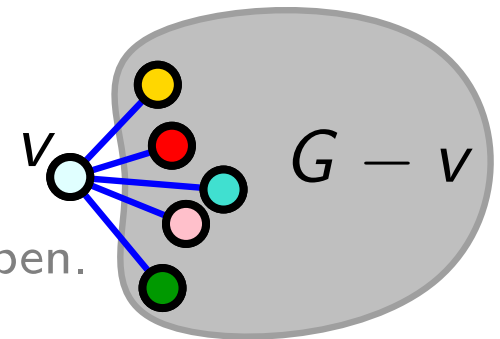
# Graphen färben

**Def.** Sei  $G$  ein Graph.  
Eine Abbildung  $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  heißt  $k$ -Färbung, falls für alle  $uv \in E(G)$  gilt  $f(u) \neq f(v)$ .

**Beob.**  $G$  bipartit  $\Leftrightarrow G$  2-färbbar.  $G$   $k$ -partit  $\Leftrightarrow G$   $k$ -färbbar.

**Beob.** Jeder planare Graph ist 6-färbbar.

*Beweis.*  $G$  hat einen Knoten  $v$  vom Grad  $\leq 5$ .  
Färbe  $G - v$  induktiv.  $\Rightarrow N(v)$  verwendet  $\leq 5$  Farben.  
Nimm sechste Farbe für  $v$ .

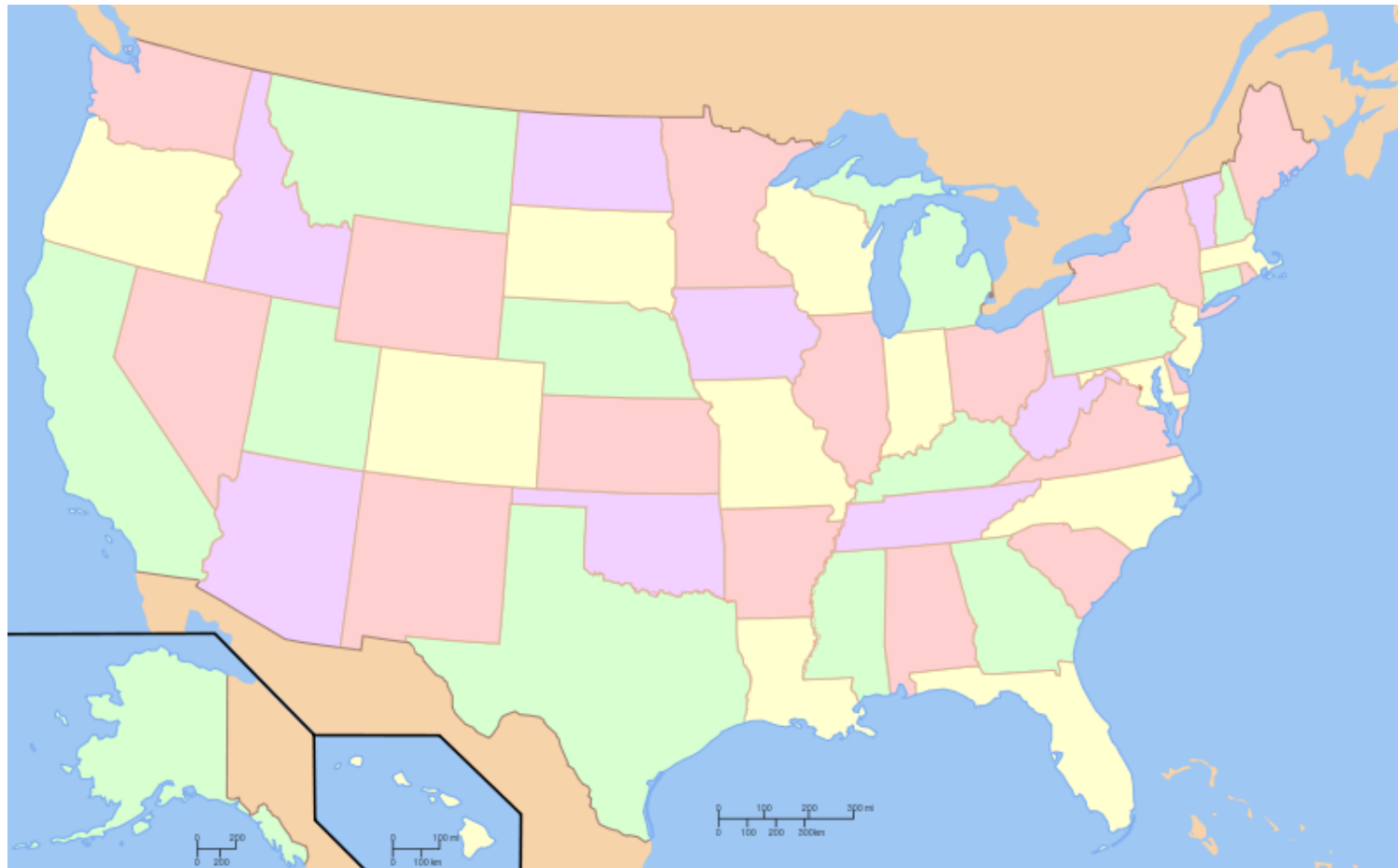


**Satz.** *Fünf-Farben-Satz* [Heawood 1890]  
Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

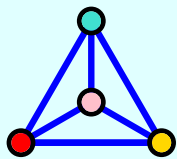
Percy John Heawood  
1861 Newport, GB  
1955 Durham, GB



# Der Vier-Farben-Satz von 1976



**Satz.** *Vier-Farben-Satz*  
 Jeder planare Graph ist 4-färbbar.



[Appel & Haken 1976]

[Robertson, Sanders, Seymour, Thomas 1997]

# Eine andere Art von Färbung

**Def.** Gegeben ein Graph  $G$  und für jeden Knoten  $v$  von  $G$  eine Liste  $L_v$  von „Farben“, so ist eine *Listenfärbung* von  $G$  eine Abbildung  $\lambda: V(G) \rightarrow \bigcup_v L_v$  mit

- $\lambda(v) \in L_v$  und
- $\lambda(u) \neq \lambda(v) \quad \forall uv \in E(G)$ .

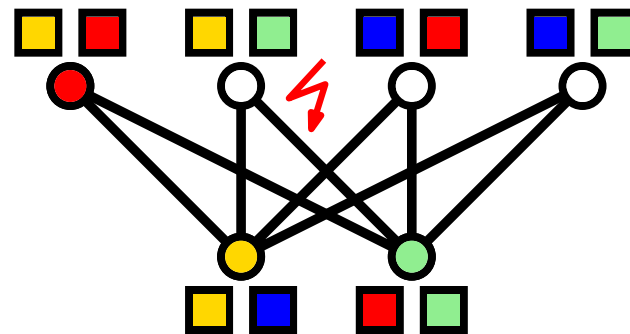
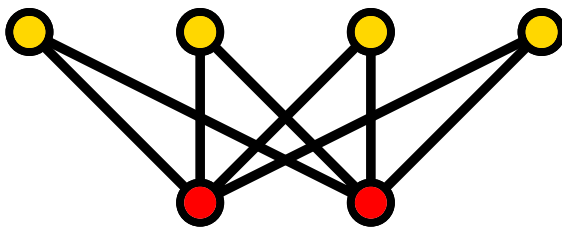
**Bsp.** Eine „normale“ Färbung  $c: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  entspricht einer Listenfärbung mit  $L_v = \{1, \dots, k\}$  für alle  $v \in V(G)$ .

# Listenfärbbarkeit

**Def.** Ein Graph  $G$  ist  $k$ -listenfärbbar, wenn  $G$  für jede Wahl von Listen der Länge  $k$  eine Listenfärbung hat.

**Beob.**  $G$   $k$ -listenfärbbar  $\not\Rightarrow$   $k$ -färbbar.

**Bsp.** Jeder bipartite Graph ist 2-färbbar –  
aber nicht unbedingt 2-listenfärbbar.



# Listenfärbbarkeit planarer Graphen

**Satz.** *Nicht-Vier-Farben-Satz* [Voigt, 1993]  
Nicht jeder planare Graph ist 4-listenfärbbar.

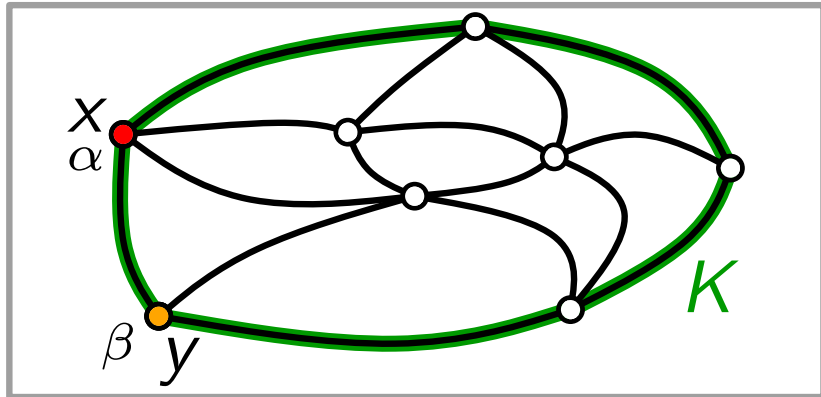


Carsten Thomassen  
1948 in Grindsted, DK

**Satz.** Jeder planare Graph  
ist 5-*listenfärbbar*. [Thomassen 1994]  
(also auch 5-färbbar!)

# Beweis von Thomassens Satz

OBdA  $G$  fast trianguliert, d.h. alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach.



Thomassens Trick:  
*Verschärfe Aussage,  
beweise mit Induktion!*

**Beh.** Falls  $G$  fast trianguliert (mit einfacher Außenfacette  $K$ ) und

- (i) zwei adj. Knoten  $x, y \in V(K)$  mit  $xy \in E(K)$  sind mit  $\alpha \neq \beta$  gefärbt,
- (ii)  $|L_v| \geq 3$  für alle  $v \in K \setminus \{x, y\}$ ,
- (iii)  $|L_v| \geq 5$  für alle  $v \in V(G) \setminus V(K)$ ,

dann lässt sich die Färbung von  $x$  &  $y$  auf  $G$  fortsetzen.

**Bew.** Per Induktion über  $n = |V(G)|$ .

$n = 3$ :  Färbe  $z$  mit Farbe  $\gamma \in L_z \setminus \{\alpha, \beta\}$ . ✓

# Induktionsschritt $n > 3$

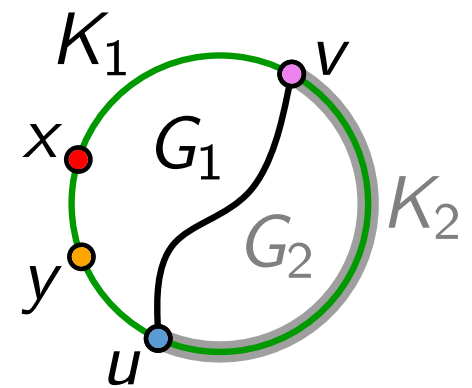
Fall 1:  $K$  hat Sehne  $uv$ .

$uv$  zerlegt  $K$  in  $K_1$  und  $K_2$ .

Sei  $G_1$  der Teilgraph von  $G$  auf und innerhalb  $K_1 + uv$ .

Wende Induktionsvoraussetzung (IV) auf  $G_1$  an. Definiere  $G_2$ .

Wende IV (mit schon gefärbten Knoten  $u$  und  $v$ !) auf  $G_2$  an. ✓



Fall 2:  $K$  hat keine Sehne.

Sei  $w \neq y$  Nachbar von  $x$  auf  $K$ .

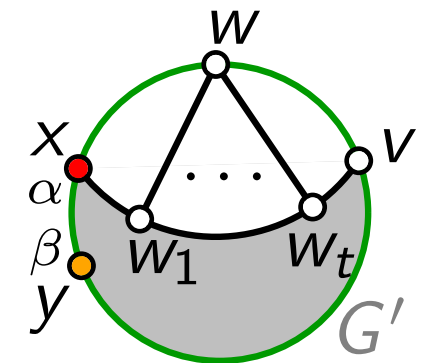
Sei  $N(w) = \{x, w_1, \dots, w_t, v\}$  Nachbarschaft von  $w$ .

$|L_w| \geq 3 \Rightarrow \exists \gamma, \delta \in L_w \setminus \{\alpha\}$

$L'_{w_i} := L_{w_i} \setminus \{\gamma, \delta\}$ .  $G' = G - w$  ist fast trianguliert.

$\Rightarrow G'$  mit Listen  $L'$  erfüllt IV  $\Rightarrow$  5-Listenfärbung von  $G'$

Färbe  $w$  mit  $\{\gamma, \delta\} \setminus \text{Farbe}(v) \Rightarrow$  5-Listenfärbung von  $G$  ✓ □





# Planaritätstest

**Satz.** [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]  
Sei  $G$  ein einfacher Graph mit  $n$  Knoten. Dann kann man in  $O(n)$  Zeit entscheiden, ob  $G$  planar ist.



John Edward Hopcroft  
\*1939, Seattle, WA, U.S.A.



Robert Endre Tarjan  
\*1948 Pomona, CA, USA

Ziemlich kompliziert!  $\Rightarrow$

Wir behandeln einfacheren Algorithmus mit Laufzeit  $O(n^3)$ .

# Planaritätstest

**Satz.** [Auslander & Parter 1961]

Sei  $G$  ein einfacher Graph mit  $n$  Knoten. Dann kann man in  $O(n^3)$  Zeit entscheiden, ob  $G$  planar ist.

**Beobachtung.**

$G$  planar  $\Leftrightarrow$  jede Zusammenhangskomponente von  $G$  ist planar.

Also können wir uns auf Algorithmen für zusammenhängende Graphen beschränken.

# Zweifacher Knotenzusammenhang

bzgl. Inklusion maximale Knotenmenge  $K \subseteq V(G)$ ,  
für die  $G[K]$  zweifach zusammenhängend ist

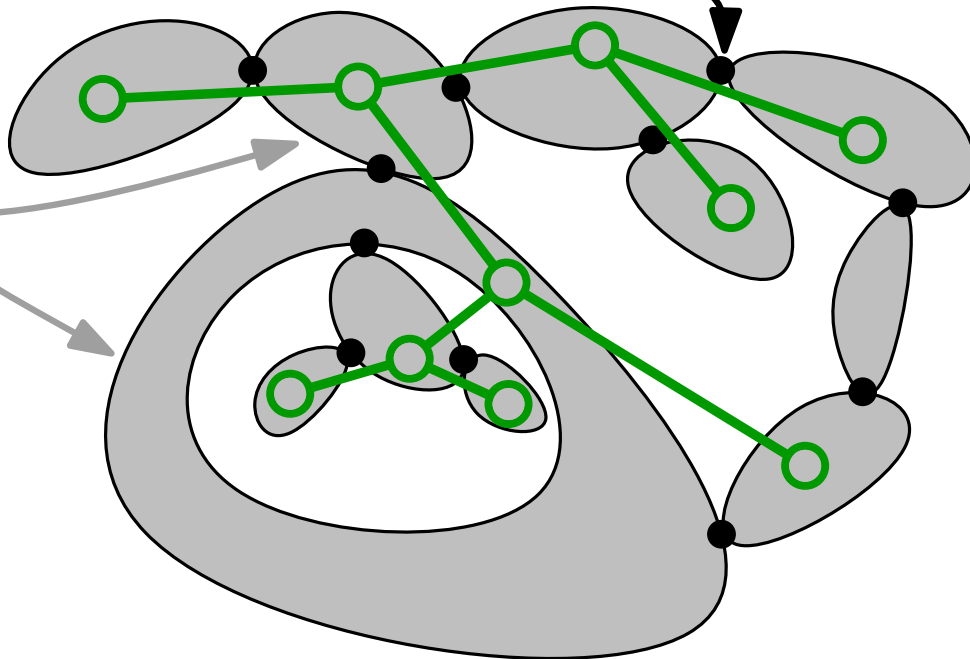
**Behauptung.**  $G$  planar  $\Leftrightarrow$   
jede Zweifach-Zusammenhangskomponente  
(ZZK) von  $G$  ist planar.

# Zweifacher Knotenzusammenhang

bzgl. Inklusion maximale Knotenmenge  $K \subseteq V(G)$ ,  
für die  $G[K]$  zweifach zusammenhängend ist

**Behauptung.**  $G$  planar  $\Leftrightarrow$   
jede Zweifach-Zusammenhangskomponente  
(ZZK) von  $G$  ist planar.

ZZKs sind über *Schnittknoten* verbunden und bilden den sog.  
*Zwei-Block-Baum*, der in Linearzeit berechnet werden kann.

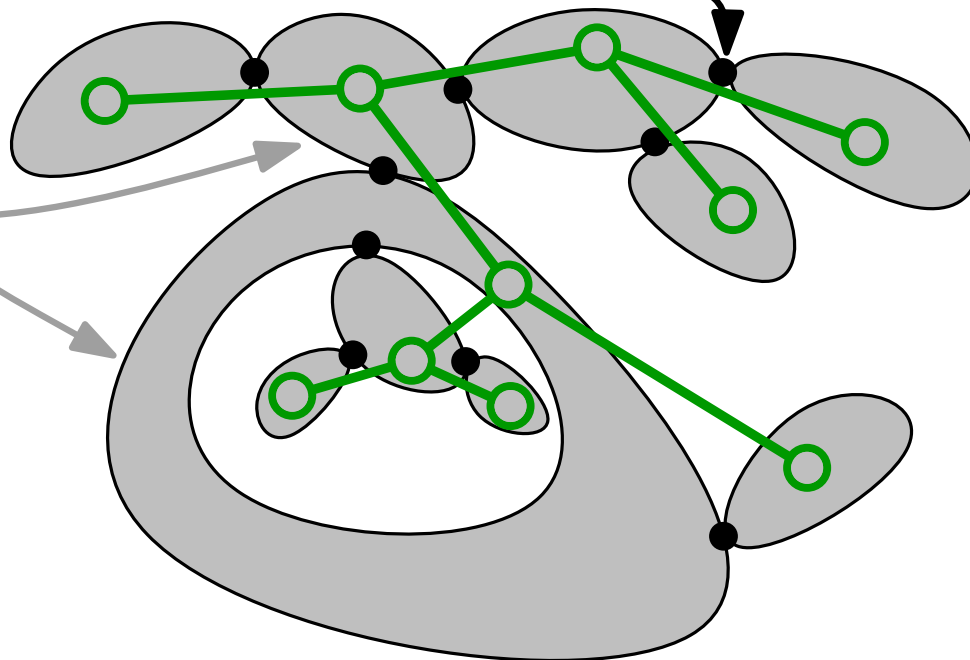


# Zweifacher Knotenzusammenhang

bzgl. Inklusion maximale Knotenmenge  $K \subseteq V(G)$ , für die  $G[K]$  zweifach zusammenhängend ist

**Behauptung.**  $G$  planar  $\Leftrightarrow$   
jede Zweifach-Zusammenhangskomponente (ZZK) von  $G$  ist planar.

ZZKs sind über *Schnittknoten* verbunden und bilden den sog. *Zwei-Block-Baum*, der in Linearzeit berechnet werden kann.



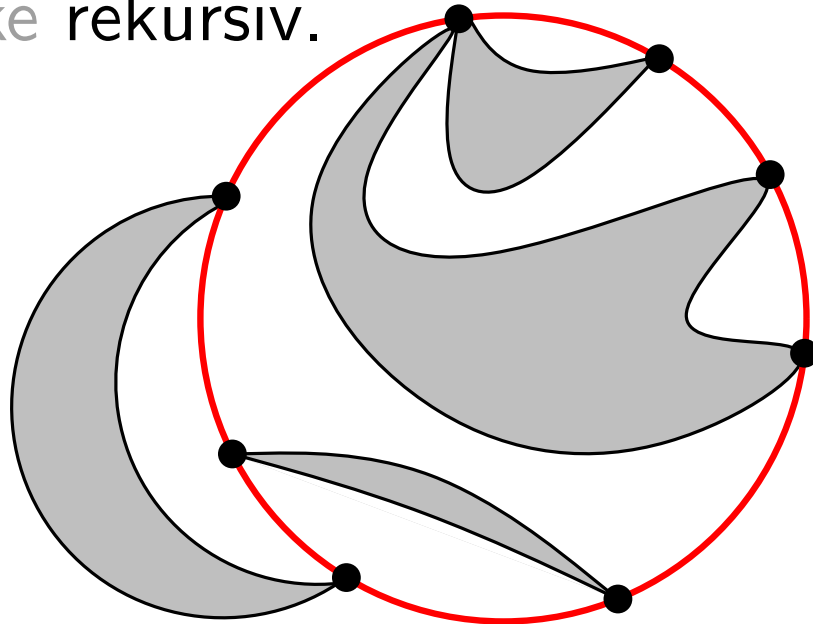
Es genügt, zweifach zusammenhängende Graphen zu betrachten.

# Ziel und Strategie

**Ziel:** Planaritätstest für zweifach zusammenhängende Graphen.

## Strategie:

- Berechne separierenden **Kreis** und zerlege Graph in sogenannte **Teilstücke**.
- Untersuche Grobstruktur der **Teilstücke**.
- Teste **Teilstücke** rekursiv.

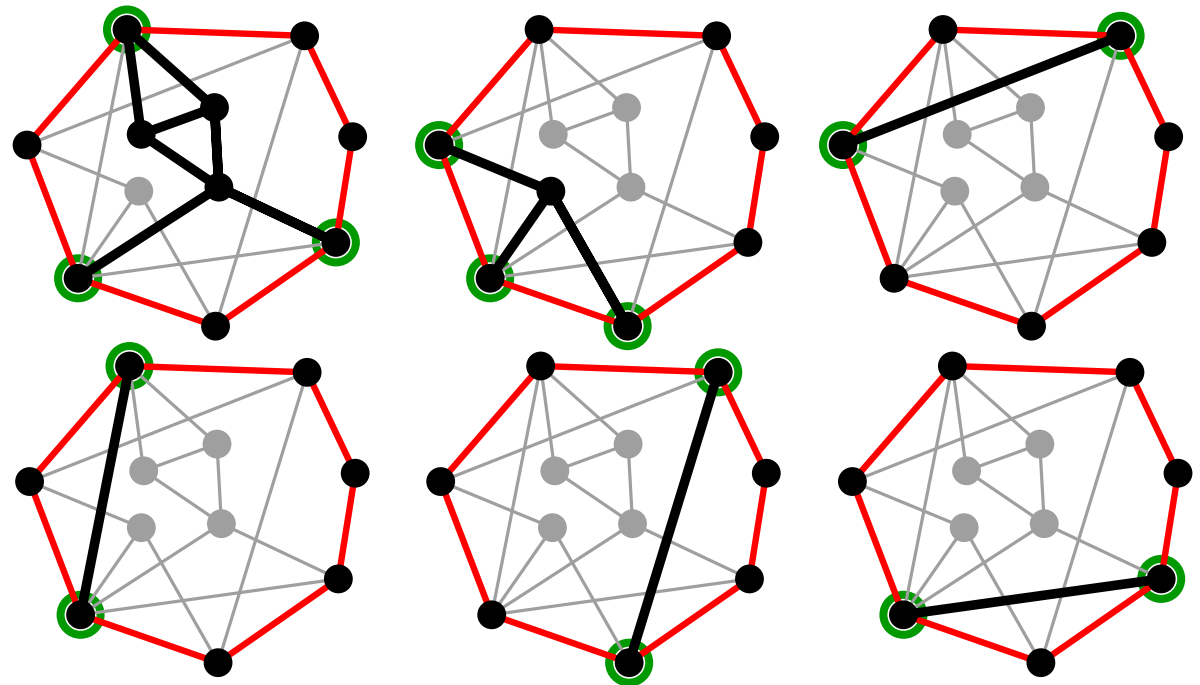
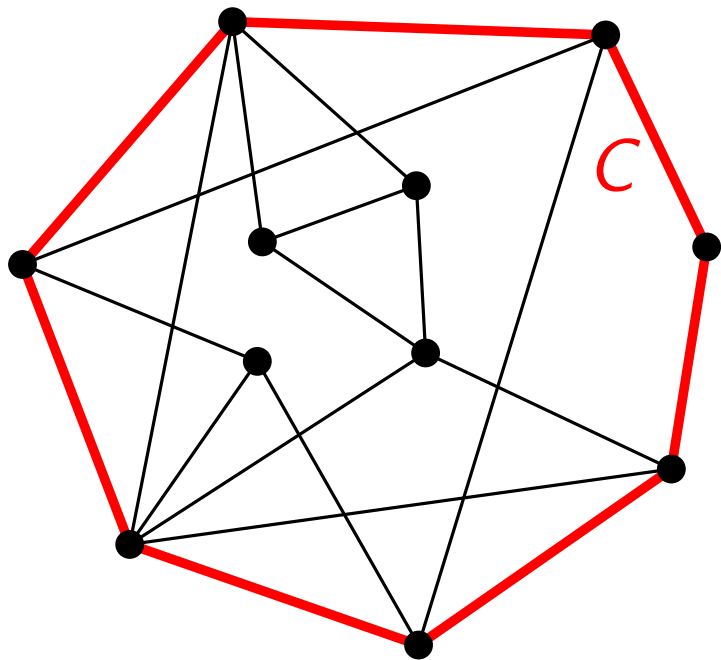


# Teilstück

**Def.** Sei  $C$  ein Kreis und seien  $e, e' \notin C$  Kanten.

Dann heißen  $e$  und  $e'$  *äquivalent* (bezüglich  $C$ ), wenn sie durch einen Pfad verbunden sind, der  $C$  nicht berührt.

Die resultierenden Äquivalenzklassen heißen *Teilstücke* (bezüglich  $C$ ). Jedes Teilstück hat  $\geq 2$  *Anknüpfungspunkte*.

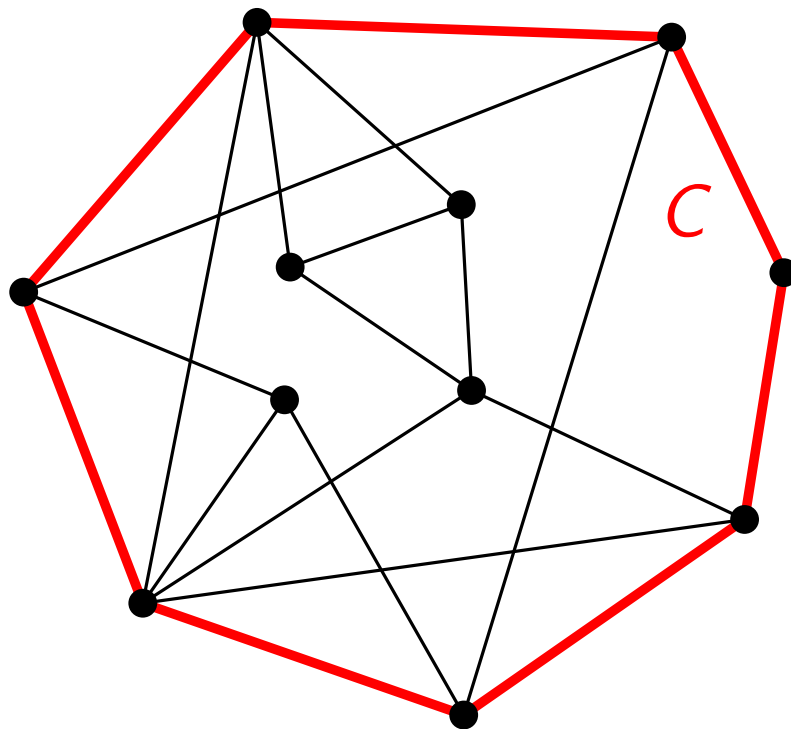


Teilstücke bzgl.  $C$

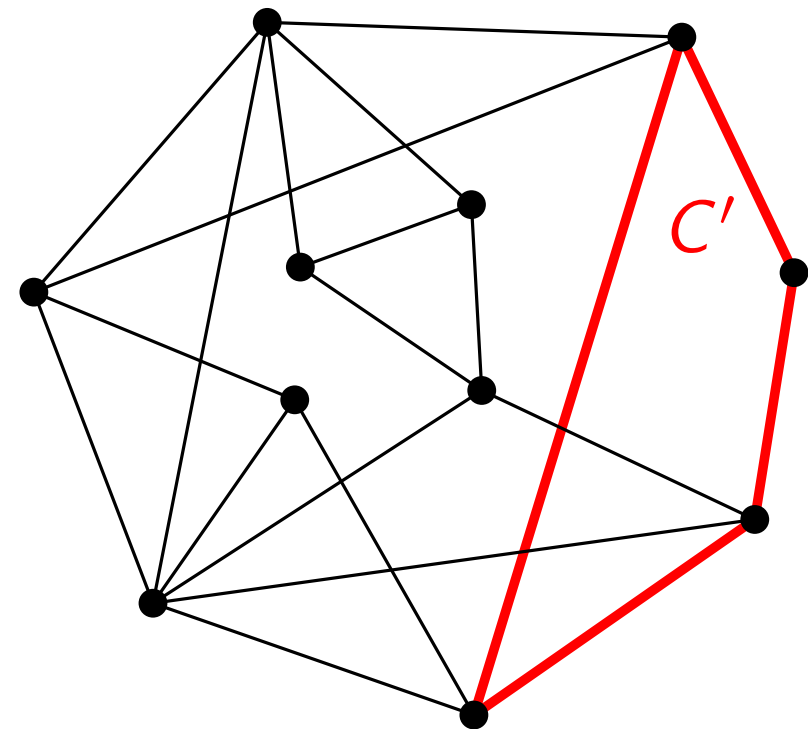
# Separierender Kreis

**Def.** Ein Kreis heißt *separierend*, wenn er mindestens zwei Teilstücke induziert.

separierend



nicht separierend





# Existenz separierender Kreis

**Lem<sub>1</sub>.** Sei  $C$  ein *nicht-separierender* Kreis mit Teilstück  $P$ . Falls  $P$  kein Pfad ist, dann besitzt  $G$  einen separierenden Kreis  $C'$ , der aus einem Teilpfad von  $C$  und einem Pfad in  $P$  zwischen zwei Anknüpfungspunkten von  $P$  besteht.

## Beweis.

Seien  $u$  und  $v$  aufeinanderfolgende Anknüpfungspunkte von  $P$  in der zyklischen Reihenfolge von  $C$ .

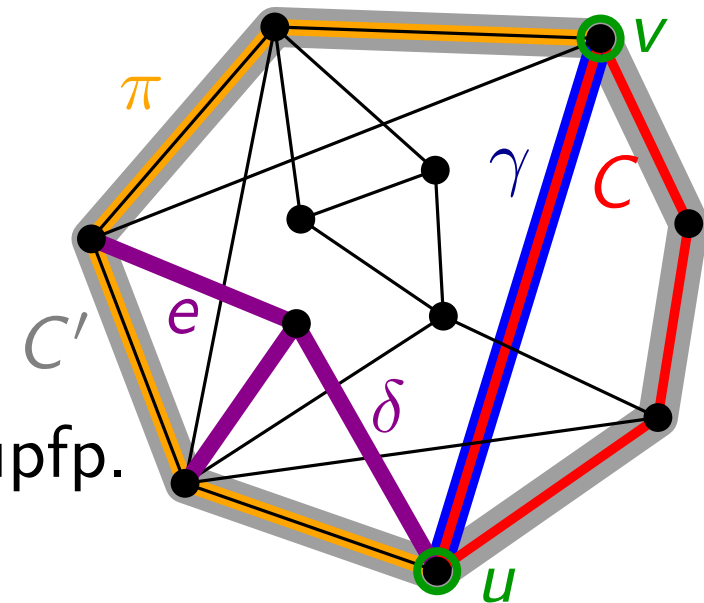
Betr.  $u$ - $v$ -Pfad  $\gamma$  auf  $C$  ohne innere Anknüpfungspunkte.

Sei  $\pi$  ein  $u$ - $v$ -Pfad in  $P$ .

Betrachte Kreis  $C' := C + \pi - \gamma \Rightarrow \gamma$  ist Teilstück bzgl.  $C'$ .

Falls  $P$  kein Pfad ist, existiert eine Kante  $e \in E(P) \setminus E(\pi)$ .

Teilstück  $\delta$ , das  $e$  enthält, ist verschieden von  $\gamma \Rightarrow C'$  sep.  $\square$

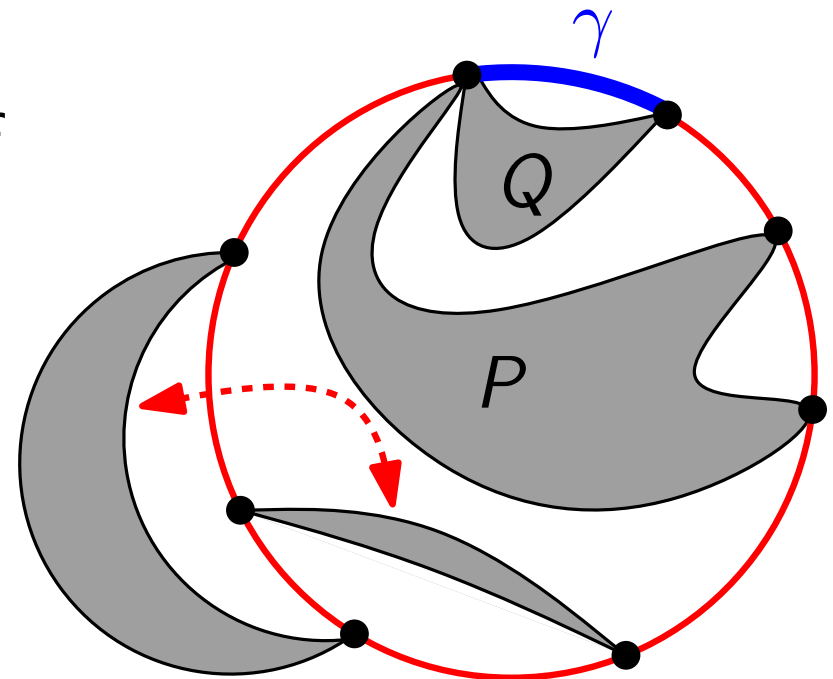


# Einander störende Teilstücke

$G$  planar  $\Rightarrow$  jedes Teilstück wird entweder komplett im Inneren oder im Äußeren von  $C$  eingebettet.

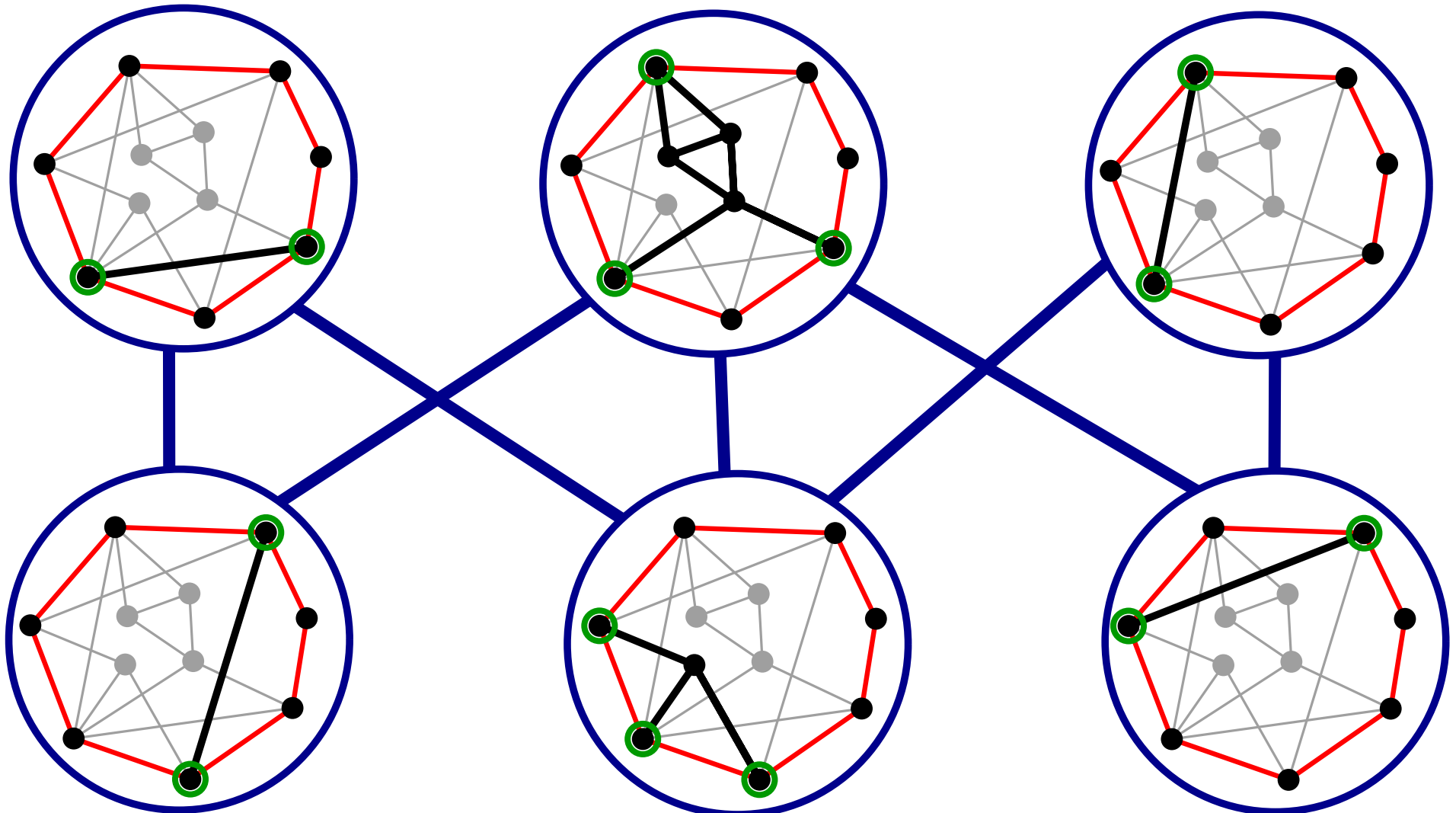
**Beob.** Zwei Teilstücke  $P \neq Q$  können auf der gleichen Seite von  $C$  eingebettet werden  $\Leftrightarrow$  es existiert ein Teilpfad  $\gamma$  von  $C$ , so dass  $\gamma$  alle Anknüpfungspunkte von  $Q$  enthält, aber kein innerer Knoten von  $\gamma$  Anknüpfungspunkt von  $P$  ist.

**Def.** Zwei Teilstücke, die nicht auf der gleichen Seite von  $C$  eingebettet werden können, *stören* einander.



# Störgraph

**Def.** Der *Störgraph*  $I$  (bezüglich  $C$ ) hat als Knoten die Teilstücke. Zwei Teilstücke sind adjazent genau dann, wenn sie einander stören.

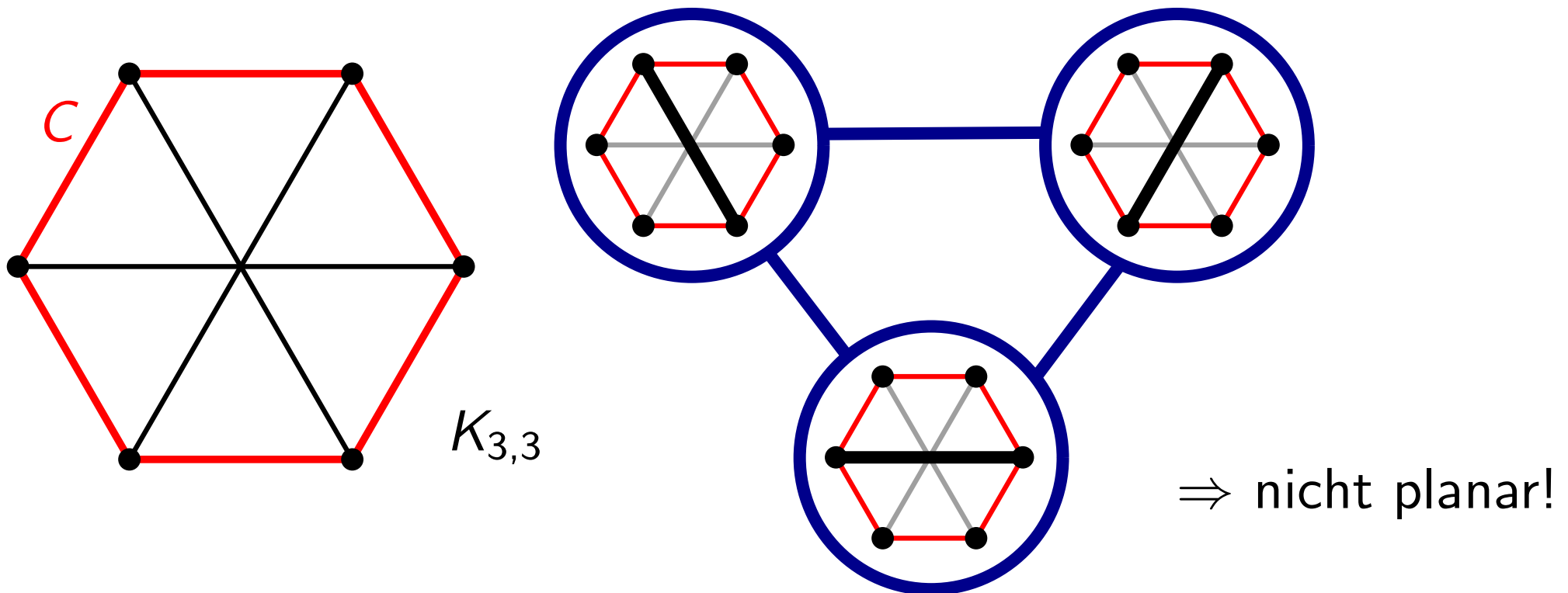


# Bipartiter Störgraph

**Lem<sub>2</sub>.** Sei  $G$  ein Graph mit separierendem Kreis  $C$  und Störgraphen  $I$ . Der Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn

- (i) für jedes Teilstück  $P$  der Graph  $C + P$  planar und
- (ii) der Störgraph  $I$  bipartit ist.

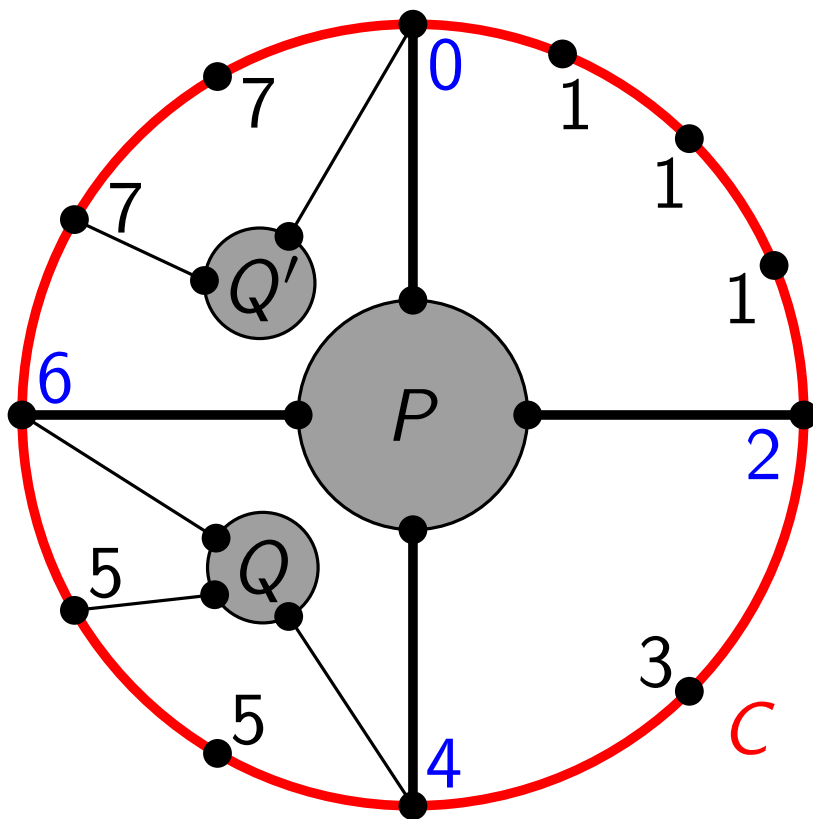
**Beweis.** Übung. □



# Berechnung Störgraph

**Beob.** Die Nachbarn eines Teilstücks  $P$  im Störgraphen lassen sich in  $O(n)$  Zeit bestimmen, wenn die Teilstücke bekannt sind.

Der Störgraph lässt sich so in  $O(n^2)$  Zeit aufbauen.



Nummeriere Knoten von  $C$  mit Nummern  $\{0, \dots, 2k - 1\}$  wie abgebildet.

Teilstück  $Q$  stört  $P$  *nicht*  $\Leftrightarrow$  alle Anknüpfungspunkte von  $Q$  liegen in einem Intervall der Art

$$[2i, 2i + 2 \bmod (2k + 2)]$$

# Planaritätstest

Übung:

Falls  $G$  keinen separierenden Kreis hat, ist  $G$  planar.

PlanarityTest(zweifach-zsghd. Graph  $G$ , separ. Kreis  $C$ )

Berechne Teilstücke bzgl.  $C$

**foreach** Teilstück  $P$ , das **kein** Pfad ist **do**

$G' := C + P$

$C' := C - \gamma + \pi$  wie in Lem<sub>1</sub>

**if** PlanarityTest( $G'$ ,  $C'$ ) == false **then**

**return** false

Berechne Störgraphen  $I$

**if**  $I$  bipartit **then**

**return** true

**else**

**return** false

Übung:

$G'$  ist zweifach  
zusammenhängend.

Baut nicht-sep. Kreis  $C$   
in sep. Kreis  $C'$  um.

Sei  $G$  ein Graph mit sep. Kreis  $C$  und  
Störgraphen  $I$ . Dann ist  $G$  planar  $\Leftrightarrow$   
(i) für jedes Teilstück  $P$  ist  $C + P$  planar,  
(ii)  $I$  ist bipartit.

Korrektheit? Per Induktion über  $|E|$  mit Hilfe von Lem<sub>2</sub>.

# Laufzeit

Falls  $G$  mehr als  $3n - 6$  Kanten hat, ist  $G$  nicht planar.

Also können wir davon ausgehen, dass  $G$   $O(n)$  Kanten hat.

Berechnung der Teilstücke in  $O(n)$  Zeit durch Modifikation von BFS (Knoten auf  $C$  werden nicht exploriert).

Berechnung des Störgraphen in  $O(n^2)$  Zeit.

$\Rightarrow$  Jeder Aufruf (ohne Rek.) in  $O(n^2)$  Zeit.

**Beh.** Anz. der Aufrufe (nicht nur der Teilstücke!) ist  $\leq |E(G)|$ .

*Beweis* folgt auf der nächsten Folie!

$\Rightarrow$  Gesamtlaufzeit  $O(n^3)$



# Anzahl der rekursiven Aufrufe

**Beh.** Die Anzahl der rekursiven Aufrufe ist höchstens  $|E(G)|$ .

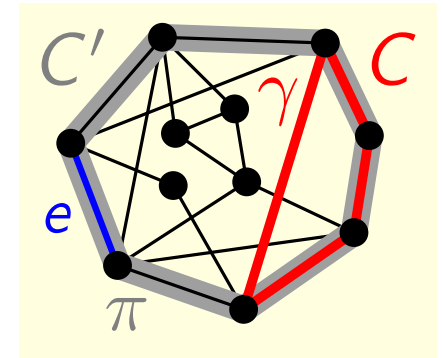
**Beweis.** Assoziiere mit **Aufruf**  $(G', C')$  eine Kante  $e \in C' - C$ .

Zeige: Keine Kante wird  $2 \times$  assoziiert!

```


PlanarityTest( $G, C$ )
...
  foreach Nicht-Pfad-Teilstück  $P$  do
     $G' := C + P$ 
     $C' := C - \gamma + \pi$  //  $\pi \subset P$ 
    if PlanarityTest( $G', C'$ ) ...
  ...

```



1. Beob.  $e_P \in \pi \subset P$   
 $\Rightarrow e_P \neq e_{P'}$  für jedes Teilstück  $P' \neq P$  von  $G$ .
2. Beob.  $e$  liegt immer auf dem *neuen* Stück  $\pi$  des sep. Kreises  
 Frühere Kanten  $e$  liegen auf  $C \cap C'$  oder auf  $\gamma$ .

Altes Stück des sep. Kreises! 

Kein Teilstück –   
 wird in Rekursion ignoriert!