

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2023

10. Vorlesung

Festparameter-Berechenbarkeit

Herangehensweisen an NP-schwere Probleme

- Exponentialzeit-Algorithmen, z.B. Backtracking
- Approximationsalgorithmen:
Tausche Qualität gegen Laufzeit
- Heuristiken: empirische Untersuchung auf Benchmarks
- Randomisierung: Suche nach der Nadel im Heuhaufen
- Entwurf von parametrisierten Algorithmen



NEU

Ein Beispiel: Vertex Cover

Def. (Zur Erinnerung)

Sei G ein ungerichteter Graph mit Knotenmenge $V(G)$.
 $C \subseteq V(G)$ heißt *Knotenüberdeckung* (eng. *vertex cover*)
von G , falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$.

Prob. *Kleinste Knotenüberdeckung* – Optimierungsproblem

Gegeben: Graph G

Gesucht: eine kleinste Knotenüberdeckung von G

Prob. *k-Knotenüberdeckung (k-VC)* – Entscheidungsproblem

Gegeben: Graph G , natürliche Zahl k

Gesucht: Knotenüberdeckung der Größe $\leq k$ von G –
falls eine solche existiert
(sonst gib „nein“ zurück)

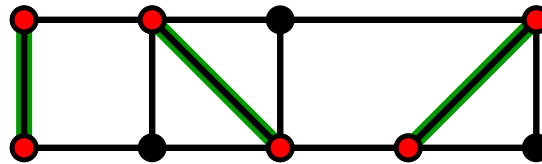
Previous Work



- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde ($\text{SAT} \preceq_p \text{CLIQUE} \preceq_p \text{VC} \preceq_p \dots$) [Karp, 1972]

- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]

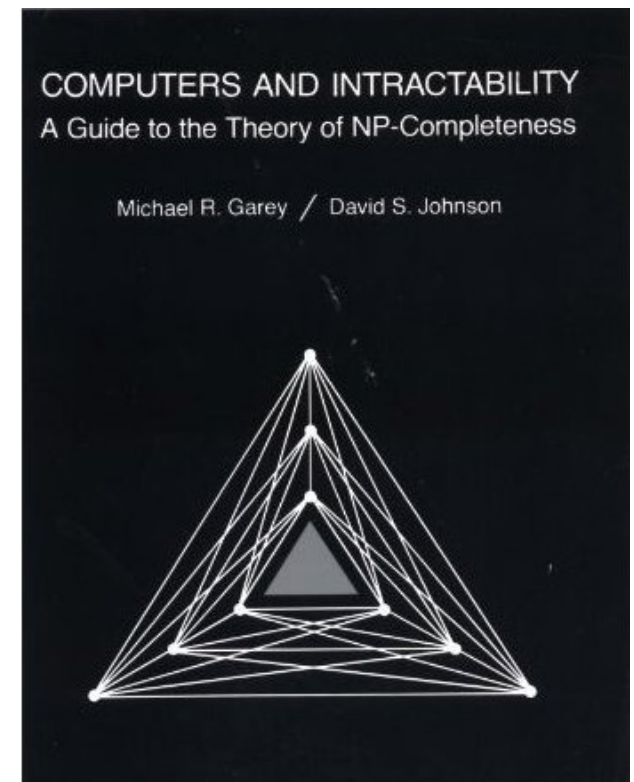
- approximierbar:



Nicht-erweiterbares **Matching** „liefert“ Faktor-2-Approximation für **VC**.

- ..., aber nicht beliebig gut:

Es gibt keine Faktor-1,3606-Approximation für VC, falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.
[Dinur & Safra, 2004]



Ein exakter Algorithmus für k -VC

```
BruteForceVC(Graph  $G$ , Integer  $k$ )
```

```
  foreach  $C \in \binom{V(G)}{k}$  do
```

```
    // teste, ob  $C$  VC
```

```
     $vc = true$ 
```

```
    foreach  $uv \in E(G)$  do
```

```
      if  $\{u, v\} \cap C = \emptyset$  then
```

```
         $vc = false$ 
```

```
    if  $vc$  then
```

```
      return ("yes",  $C$ )
```

```
  return ("no",  $\emptyset$ )
```

$$\left| \binom{V}{k} \right| = \binom{|V|}{k} = \binom{n}{k} = O(n^k)$$

Warum?

$$O(E(G)) = O(m)$$

Laufzeit. $O(n^k m)$ – Dies ist *nicht* polynomiell in der Größe der Eingabe ($= n + m$), da k keine Konstante, sondern Teil der Eingabe.

Ein neues Ziel

Bemerkung.

Die Klasse \mathcal{FPT} ändert sich nicht, wenn statt $+$ hier \cdot steht.

Finde einen Algorithmus für k -VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c) =: O_{\zeta}^*(f(k))$$

ignoriert polynomielle Faktoren!

wobei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von I),
 I gegebene Instanz, c Konstante (unabh. von I)

D.h. die Laufzeit soll abhängen

- beliebig vom Parameter k ,
- polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz I .

Ein Problem, das in dieser Zeit gelöst werden kann, heißt *festparameterberechenbar* (*fixed-parameter tractable*) bzgl. k .

\mathcal{FPT} = Klasse der festparameterberechenbaren Probleme.

Bem. BruteForceVC hat *nicht* die gewünschte Laufzeit.

Ein paar einfache Beobachtungen...

Sei G Graph, C ein VC für G , v Knoten, der nicht in C liegt.
Welche Knoten liegen dann sicher in C ?

Beob. 1. Sei G ein Graph, C ein VC für G , v ein Knoten.
Dann gilt: $v \in C$ oder $N_G(v) \subseteq C$.

Betrachte Entscheidungsproblem k -VC.

Was gilt für Knoten mit Grad $> k$?

Beob. 2. Jeder Knoten mit Grad $> k$ ist in jedem k -VC von G enthalten.

Was gilt, falls $|E(G)| > k^2$ und alle Knoten Grad $\leq k$ haben?

Beob. 3. Falls $|E(G)| > k^2$ und $\Delta(G) := \max_{v \in V} \deg v \leq k$,
so hat G kein k -VC.

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) *Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten)

if $|E(G')| > k^2$ **then return** ("no", \emptyset)

$O(n + m)$
Zeit

II) *Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$

(yesorno, C') = BruteForceVC(G' , k')

return (yesorno, $C \cup C'$)

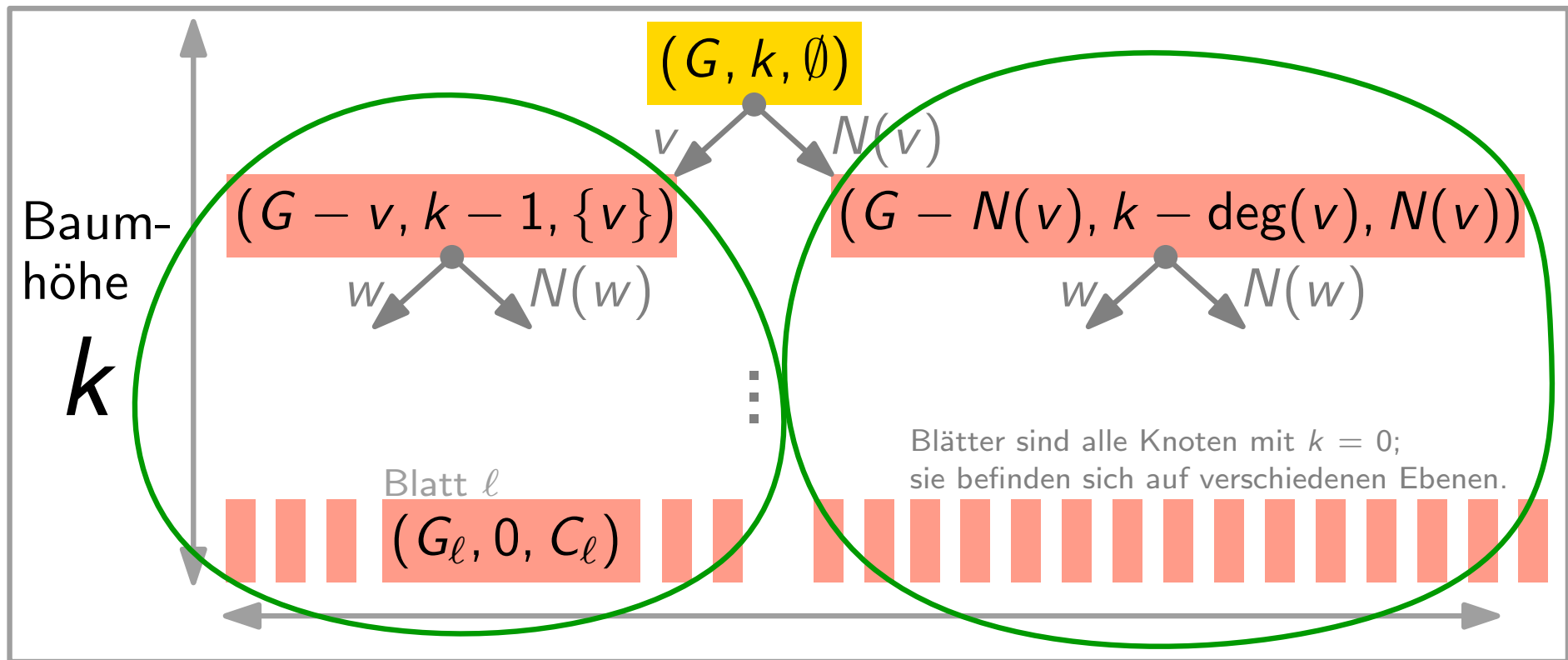
$O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$
 $\Rightarrow n' := |V'| \leq 2k^2$

Laufzeit. $O(n + m + k^2 \cdot (2k^2)^k) = O(\underbrace{n + m}_{|I|^1} + \underbrace{k^2 2^k k^{2k}}_{f(k)})$

Also: k -VC \in FPT!

Suchbaum-Algorithmus

Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.

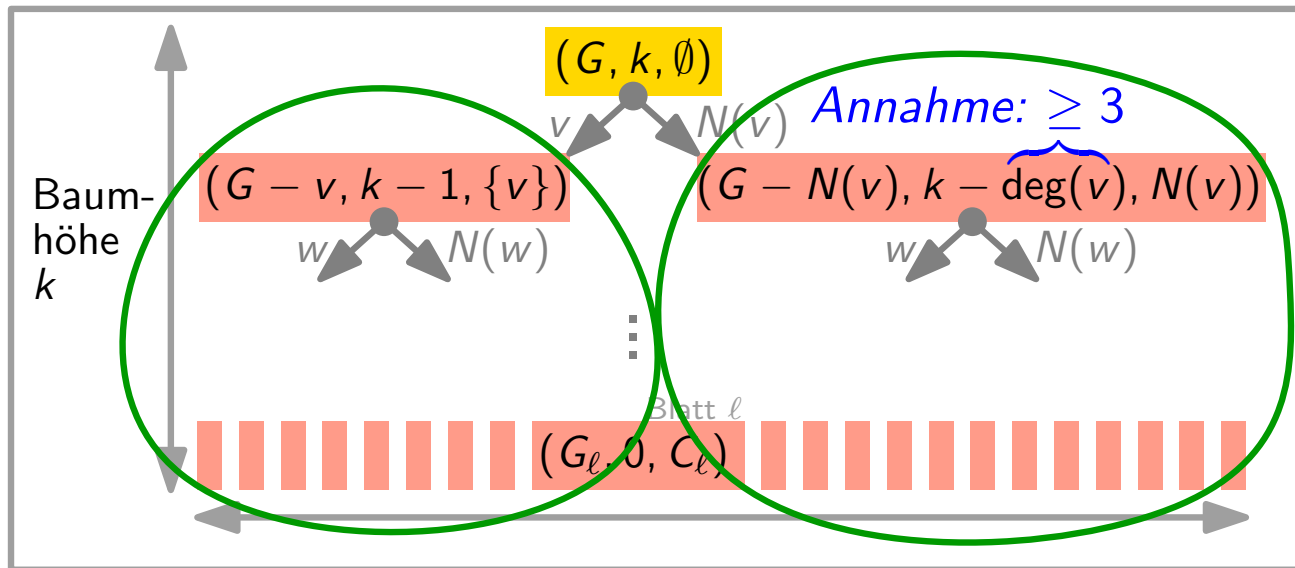


#Knoten: $T(k) \leq 2T(k-1) + 1$, $T(0) = 1 \Rightarrow T(k) \leq 2^{k+1} - 1 \in O(2^k)$
 \Rightarrow **Laufzeit:** $O^*(2^k)$

JA: Gibt es ein Blatt ℓ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist C_ℓ ein k -VC von G .
 NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat G kein k -VC. (Warum?)

Der Grad-3-Algorithmus

Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



$$\Rightarrow T(k) = T(k - 3) + T(k - 1) + 1, \quad T(\leq 3) = \text{const.}$$

Verzweigungsvektor $(3, 1)$

$$\text{Teste } T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k = z^{k-3} + z^{k-1} \quad \cdot \frac{1}{z^{k-3}}$$

\Rightarrow Charakteristisches Polynom: $z^3 = 1 + z^2$

\Rightarrow Größte positive Lösung: $z \approx 1,47$ (Verzweigungszahl)

$\Rightarrow T(k) \in O(1,47^k)$. **Aber wie stellen wir $\deg(v) \geq 3$ sicher?**

Kernbildung II

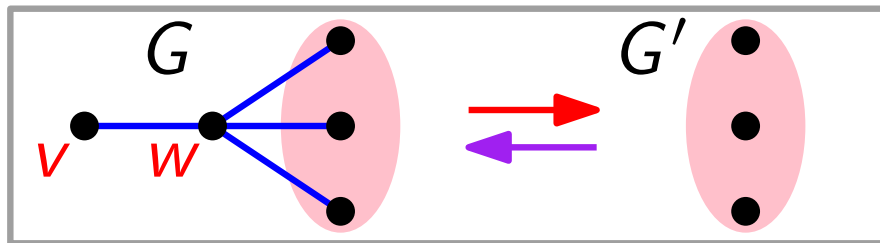
Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

Verbesserte Kernbildung:

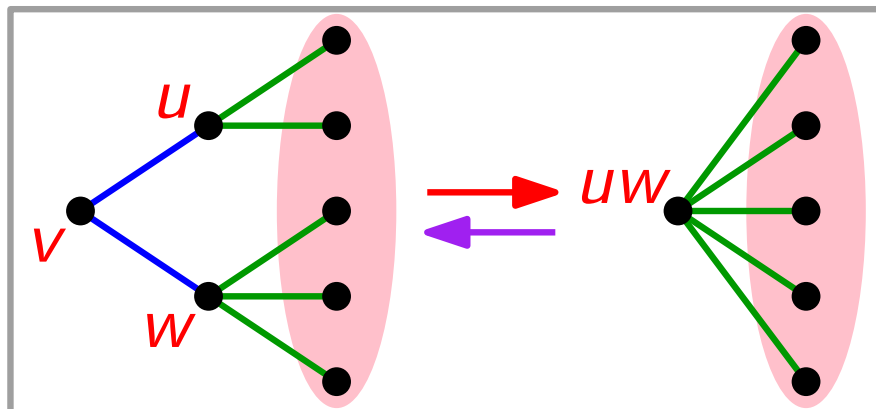
Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1



Setze $k' = k - 1$.
Berechne C' .

$$C = C' \cup \{w\}$$

Regel 2: Eliminiere Knoten mit Grad 2



Setze $k' = k - 1$.
Berechne C' .

Falls $uw \in C'$,
nimm u und w in C ,
sonst v ($\Rightarrow k = k' + 1$)

Der Grad-3-Algorithmus

Idee: Wende die verbesserte Kernbildung *in jedem Knoten* des Suchbaums *erschöpfend* an!

⇒ **Laufzeit:** $O(\boxed{nk} + \boxed{k^2} \cdot 1,47^k) \subseteq O^*(1,47^k)$

↑
Vorverarbeitung

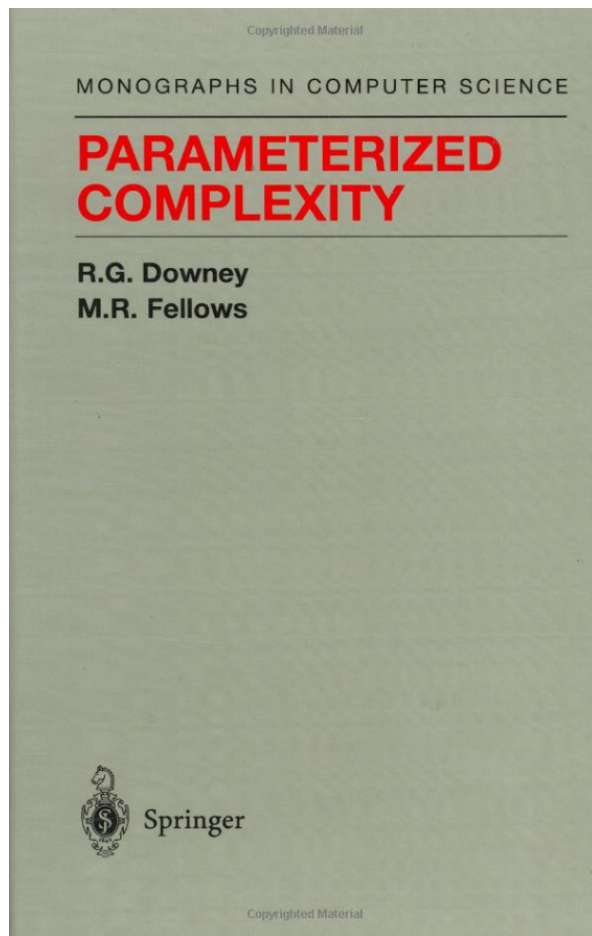
↑
Kernbildung in jedem Knoten

Der Grad-3-Algorithmus ist also ein Fest-Parameter-Algorithmus.

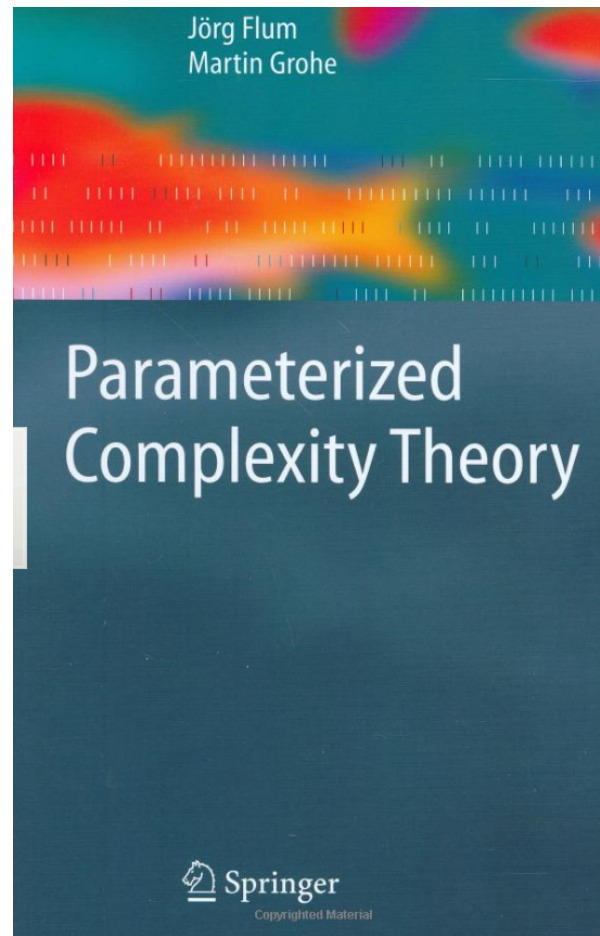
Fazit

- k -VC kann in $O(nk + 1,47^k k^2)$ Zeit gelöst werden.
Der momentan beste FPT-Algo läuft in $O^*(1,27^k)$ Zeit.
[Chen, Kanj, Jia, 2001]
- Parametrisierte Komplexität =
neuer Werkzeugkasten für schwere Probleme:
Kernbildung, Suchbäume, dynamische Programmierung, ...
- Es ist immer sinnvoll, beschränkte Parameter zu identifizieren – FPT nutzt sie!
- Hoffnung:
„natürliches“ Problem $P \in \mathcal{FPT} \Rightarrow f(k)$ erträglich.

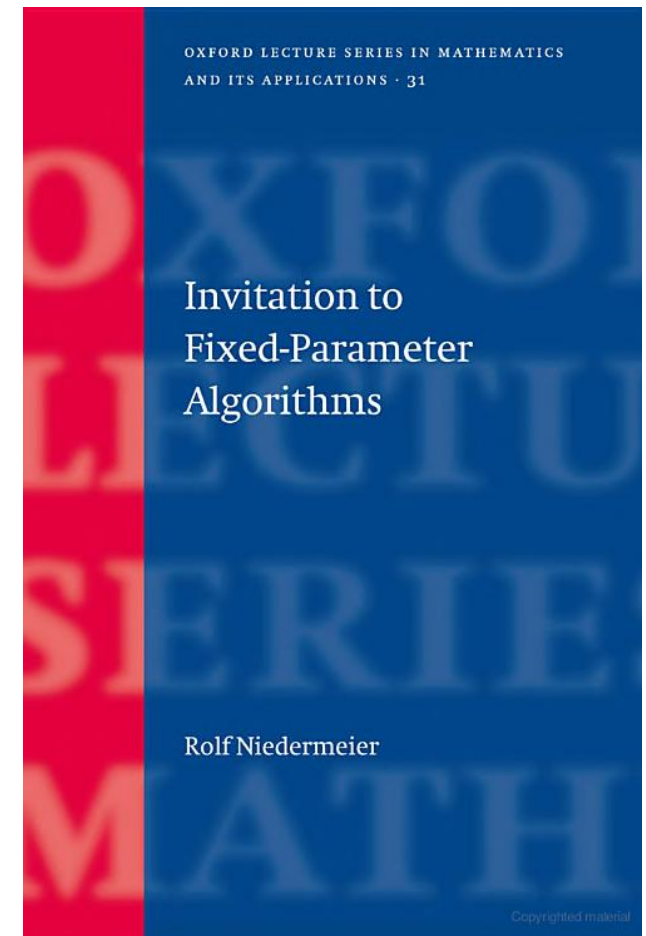
Bücher zum Thema



1999



2006



2006