Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

# Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2023

10. Vorlesung

# Festparameter-Berechenbarkeit

*Alexander Wolff* *Lehrstuhl für Informatik I*

# Herangehensweisen an NP-schwere Probleme

# Herangehensweisen an NP-schwere Probleme

- Exponentialzeit-Algorithmen, z.B. Backtracking

# Herangehensweisen an NP-schwere Probleme

- Exponentialzeit-Algorithmen, z.B. Backtracking
- Approximationsalgorithmen:
  Tausche Qualität gegen Laufzeit

# Herangehensweisen an NP-schwere Probleme

- Exponentialzeit-Algorithmen, z.B. Backtracking
- Approximationsalgorithmen:
  Tausche Qualität gegen Laufzeit
- Heuristiken: empirische Untersuchung auf Benchmarks

# Herangehensweisen an NP-schwere Probleme

- Exponentialzeit-Algorithmen, z.B. Backtracking
- Approximationsalgorithmen:
  Tausche Qualität gegen Laufzeit
- Heuristiken: empirische Untersuchung auf Benchmarks
- Randomisierung: Suche nach der Nadel im Heuhaufen

# Herangehensweisen an NP-schwere Probleme

- Exponentialzeit-Algorithmen, z.B. Backtracking
- Approximationsalgorithmen:
  Tausche Qualität gegen Laufzeit
- Heuristiken: empirische Untersuchung auf Benchmarks
- Randomisierung: Suche nach der Nadel im Heuhaufen
- Entwurf von parametrisierten Algorithmen

# Ein Beispiel: Vertex Cover

**Def.** (Zur Erinnerung)

Sei $G$ ein ungerichteter Graph mit Knotenmenge $V(G)$.
$C \subseteq V(G)$ heißt *Knotenüberdeckung* (eng. *vertex cover*) von $G$, falls

# Ein Beispiel: Vertex Cover

**Def.** (Zur Erinnerung)

Sei $G$ ein ungerichteter Graph mit Knotenmenge $V(G)$.
$C \subseteq V(G)$ heißt *Knotenüberdeckung* (eng. *vertex cover*) von $G$, falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$.

# Ein Beispiel: Vertex Cover

**Def.** (Zur Erinnerung)

Sei $G$ ein ungerichteter Graph mit Knotenmenge $V(G)$.
$C \subseteq V(G)$ heißt *Knotenüberdeckung* (eng. *vertex cover*) von $G$, falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$.

**Prob.** *Kleinste Knotenüberdeckung*

Gegeben: Graph $G$

Gesucht: eine kleinste Knotenüberdeckung von $G$

# Ein Beispiel: Vertex Cover

**Def.** (Zur Erinnerung)

Sei $G$ ein ungerichteter Graph mit Knotenmenge $V(G)$.
$C \subseteq V(G)$ heißt *Knotenüberdeckung* (eng. *vertex cover*) von $G$, falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$.

**Prob.** *Kleinste Knotenüberdeckung* – Optimierungsproblem

Gegeben: Graph $G$

Gesucht: eine kleinste Knotenüberdeckung von $G$

# Ein Beispiel: Vertex Cover

**Def.** (Zur Erinnerung)

Sei $G$ ein ungerichteter Graph mit Knotenmenge $V(G)$.
$C \subseteq V(G)$ heißt *Knotenüberdeckung* (eng. *vertex cover*) von $G$, falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$.

**Prob.** *Kleinste Knotenüberdeckung* – Optimierungsproblem

Gegeben: Graph $G$

Gesucht: eine kleinste Knotenüberdeckung von $G$

**Prob.** – Entscheidungsproblem

# Ein Beispiel: Vertex Cover

**Def.** (Zur Erinnerung)

Sei $G$ ein ungerichteter Graph mit Knotenmenge $V(G)$.
$C \subseteq V(G)$ heißt *Knotenüberdeckung* (eng. *vertex cover*) von $G$, falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$.

**Prob.** *Kleinste Knotenüberdeckung* – Optimierungsproblem

Gegeben: Graph $G$

Gesucht: eine kleinste Knotenüberdeckung von $G$

**Prob.** *k-Knotenüberdeckung (k-VC)* – Entscheidungsproblem

Gegeben: Graph $G$, natürliche Zahl $k$

Gesucht: Knotenüberdeckung der Größe $\leq k$ von $G$ – falls eine solche existiert
(sonst gib „nein“ zurück)

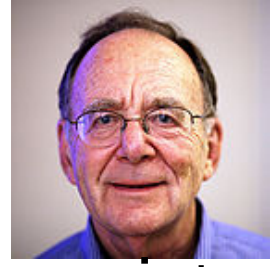
# Previous Work

- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde

# Previous Work

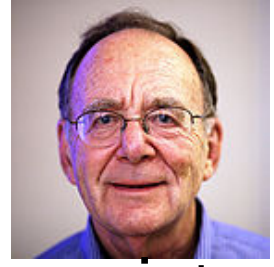
- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde (SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p \ldots$)

# Previous Work



- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde (SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p$ ...) [Karp, 1972]

# Previous Work



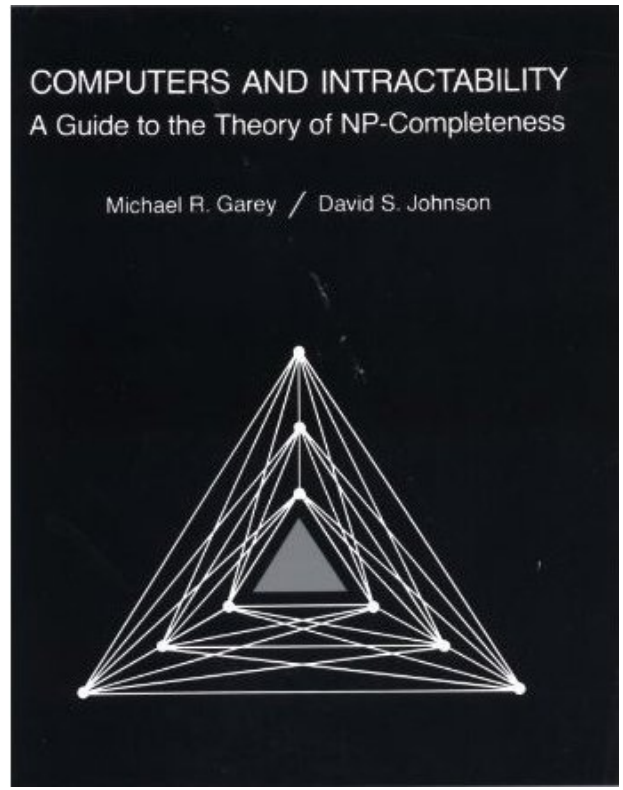
- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde (SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p$ ...) [Karp, 1972]

- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]

# Previous Work

- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde (SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p$ ...) [Karp, 1972]

- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]

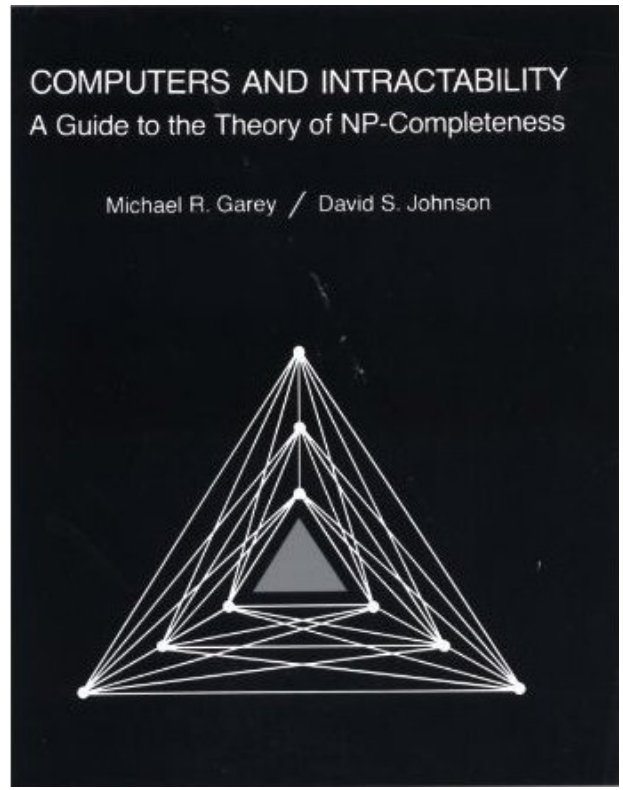


# Previous Work

- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde (SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p$ ...) [Karp, 1972]

- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]

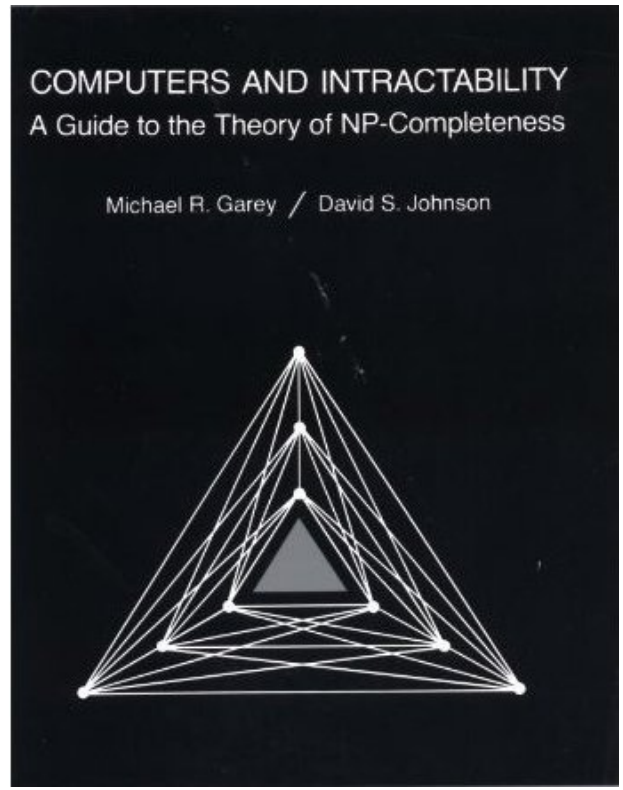
- approximierbar:



# Previous Work

- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde (SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p$ ...) [Karp, 1972]

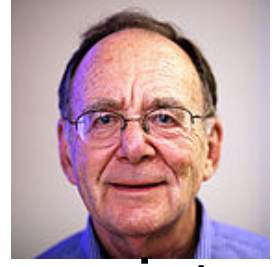
- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]




- approximierbar:

  Nicht-erweiterbares Matching „liefert“ Faktor-2-Approximation für VC.

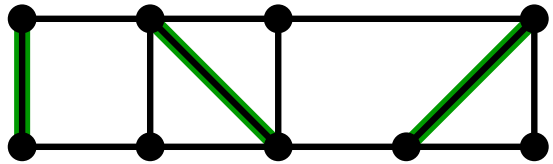
# Previous Work



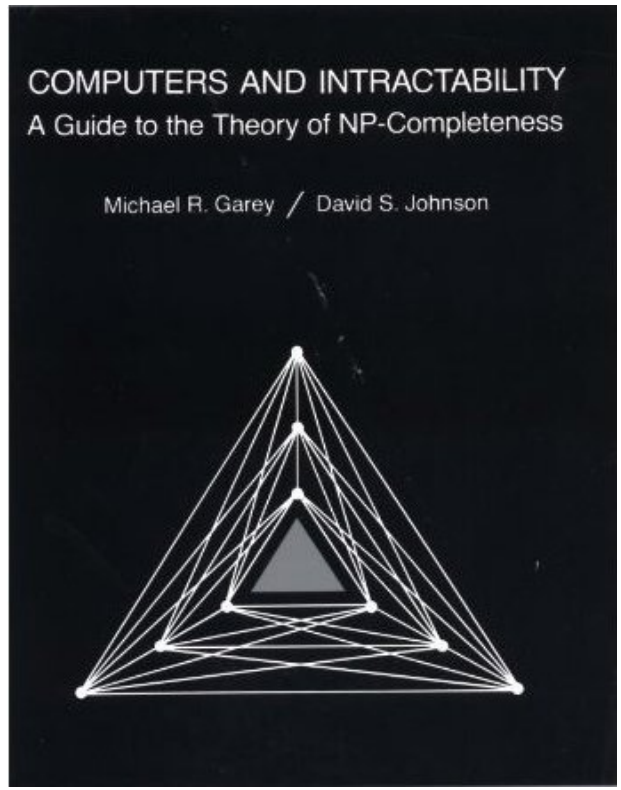
- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde (SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p$ ...) [Karp, 1972]

- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]

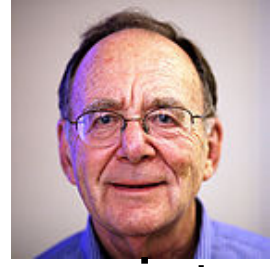
- approximierbar:



Nicht-erweiterbares Matching „liefert“ Faktor-2-Approximation für VC.



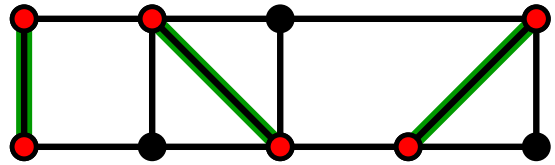
# Previous Work



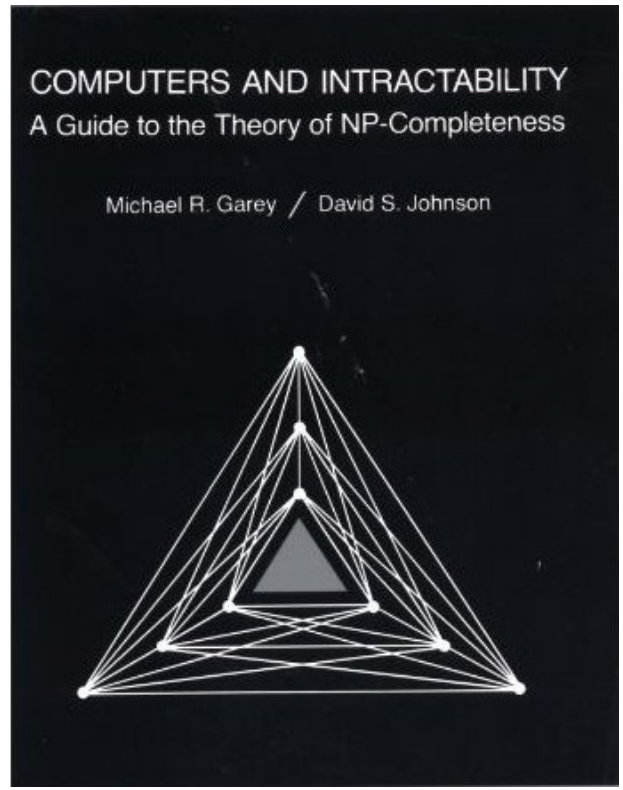
- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde (SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p$ ...) [Karp, 1972]

- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]

- approximierbar:



  Nicht-erweiterbares Matching „liefert“ Faktor-2-Approximation für VC.

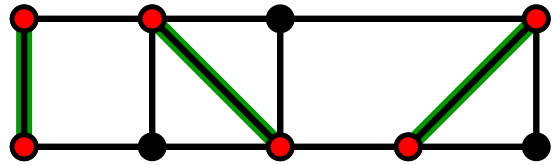


# Previous Work

- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde (SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p$ ...) [Karp, 1972]

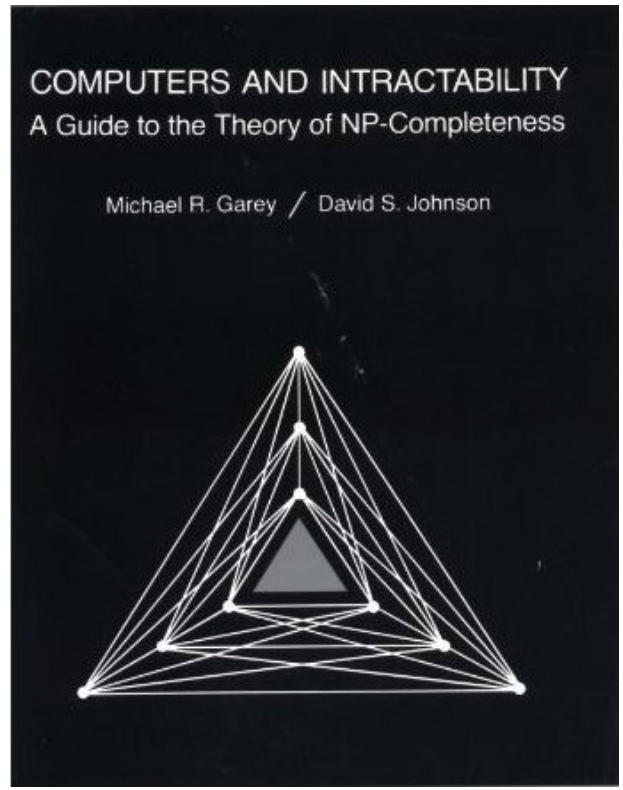
- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]

- approximierbar:

  Nicht-erweiterbares Matching „liefert“ Faktor-2-Approximation für VC.

- ..., aber nicht beliebig gut:

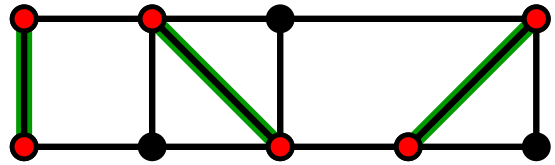


# Previous Work

- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde (SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p$ ...) [Karp, 1972]

- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]

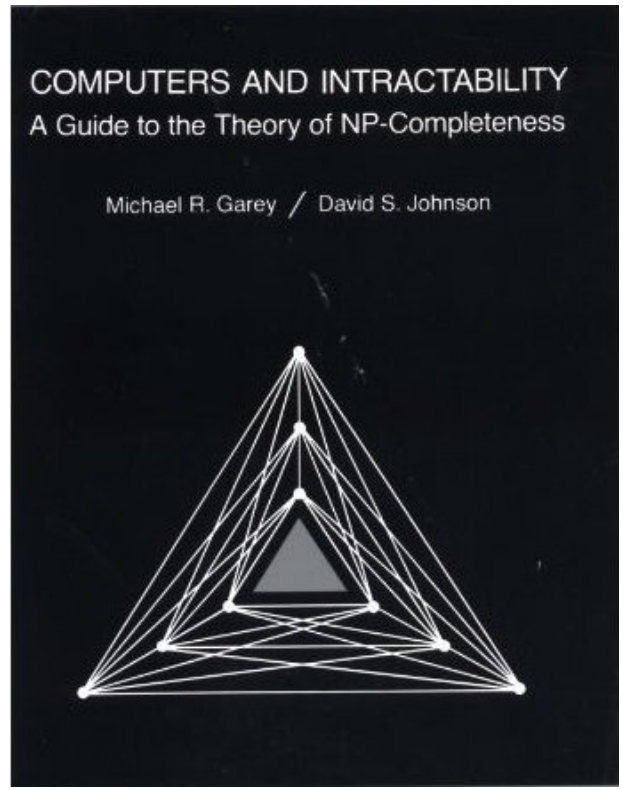
- approximierbar:

  Nicht-erweiterbares Matching „liefert“ Faktor-2-Approximation für VC.

- ..., aber nicht beliebig gut:

  Es gibt keine Faktor-1,3606-Approximation für VC

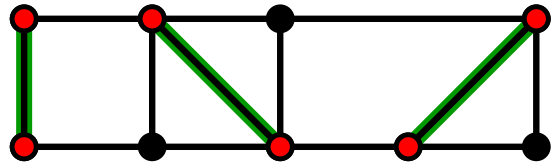


# Previous Work

- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde (SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p$ ...) [Karp, 1972]

- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]

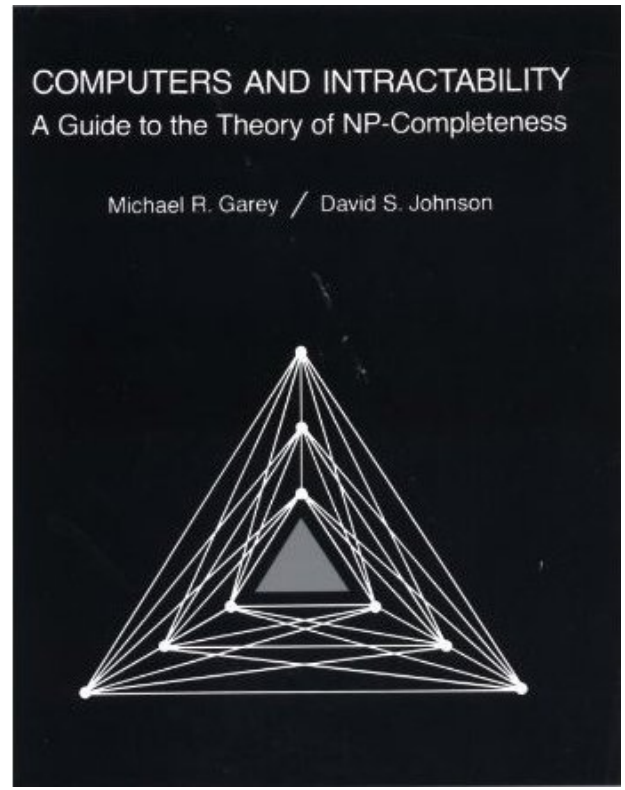
- approximierbar:

  Nicht-erweiterbares Matching „liefert“ Faktor-2-Approximation für VC.

- ..., aber nicht beliebig gut:

  Es gibt keine Faktor-1,3606-Approximation für VC, falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.
  [Dinur & Safra, 2004]



# Ein exakter Algorithmus für $k$-VC

BruteForceVC(Graph $G$, Integer $k$)

# Ein exakter Algorithmus für $k$-VC

```
BruteForceVC(Graph G, Integer k)
  foreach C ∈ (V(G) choose k) do
    // teste, ob C VC
    vc = true
    if vc then
      return ("yes", C)
  return ("no", ∅)
```

# Ein exakter Algorithmus für $k$-VC

```
BruteForceVC(Graph G, Integer k)
  foreach C ∈ (V(G) choose k) do
    // teste, ob C VC
    vc = true
    foreach uv ∈ E(G) do
      if {u, v} ∩ C = ∅ then
        vc = false
    if vc then
      return ("yes", C)
  return ("no", ∅)
```

# Ein exakter Algorithmus für $k$-VC

```
BruteForceVC(Graph G, Integer k)
  foreach C ∈ (V(G) choose k) do
    // teste, ob C VC
    vc = true
    foreach uv ∈ E(G) do
      if {u, v} ∩ C = ∅ then
        vc = false
    if vc then
      return ("yes", C)
  return ("no", ∅)
```

**Laufzeit.**

# Ein exakter Algorithmus für $k$-VC

```
BruteForceVC(Graph G, Integer k)
  foreach C ∈ (V(G) choose k) do
    // teste, ob C VC
    vc = true
    foreach uv ∈ E(G) do
      if {u, v} ∩ C = ∅ then
        vc = false
    if vc then
      return ("yes", C)
  return ("no", ∅)
```

**Laufzeit.**

# Ein exakter Algorithmus für $k$-VC

```
BruteForceVC(Graph G, Integer k)
  foreach C ∈ (V(G) choose k) do
    // teste, ob C VC
    vc = true
    foreach uv ∈ E(G) do
      if {u, v} ∩ C = ∅ then
        vc = false
    if vc then
      return ("yes", C)
  return ("no", ∅)
```

$$\left|\binom{V}{k}\right| = \binom{|V|}{k} = \binom{n}{k} = O(\quad)$$

**Laufzeit.**

# Ein exakter Algorithmus für $k$-VC

```
BruteForceVC(Graph G, Integer k)
  foreach C ∈ (V(G) choose k) do
    // teste, ob C VC
    vc = true
    foreach uv ∈ E(G) do
      if {u, v} ∩ C = ∅ then
        vc = false
    if vc then
      return ("yes", C)
  return ("no", ∅)
```

$$\left|\binom{V}{k}\right| = \binom{|V|}{k} = \binom{n}{k} = O(n^k)$$

*Warum?*

**Laufzeit.**

# Ein exakter Algorithmus für $k$-VC

```
BruteForceVC(Graph G, Integer k)
  foreach C ∈ (V(G) choose k) do
    // teste, ob C VC
    vc = true
    foreach uv ∈ E(G) do
      if {u, v} ∩ C = ∅ then
        vc = false
    if vc then
      return ("yes", C)
  return ("no", ∅)
```

$$\left|\binom{V}{k}\right| = \binom{|V|}{k} = \binom{n}{k} = O(n^k)$$

*Warum?*

**Laufzeit.**

# Ein exakter Algorithmus für $k$-VC

```
BruteForceVC(Graph G, Integer k)
  foreach C ∈ (V(G) choose k) do
    // teste, ob C VC
    vc = true
    foreach uv ∈ E(G) do
      if {u, v} ∩ C = ∅ then
        vc = false
    if vc then
      return ("yes", C)
  return ("no", ∅)
```

$$\left|\binom{V}{k}\right| = \binom{|V|}{k} = \binom{n}{k} = O(n^k)$$

*Warum?*

$$O(E(G)) = O(m)$$

**Laufzeit.**

# Ein exakter Algorithmus für $k$-VC

```
BruteForceVC(Graph G, Integer k)
  foreach C ∈ (V(G) choose k) do
    // teste, ob C VC
    vc = true
    foreach uv ∈ E(G) do
      if {u, v} ∩ C = ∅ then
        vc = false
    if vc then
      return ("yes", C)
  return ("no", ∅)
```

$$\left|\binom{V}{k}\right| = \binom{|V|}{k} = \binom{n}{k} = O(n^k)$$

*Warum?*

$$O(E(G)) = O(m)$$

**Laufzeit.** $O(n^k m)$

# Ein exakter Algorithmus für $k$-VC

```
BruteForceVC(Graph G, Integer k)
  foreach C ∈ (V(G) choose k) do
    // teste, ob C VC
    vc = true
    foreach uv ∈ E(G) do
      if {u, v} ∩ C = ∅ then
        vc = false
    if vc then
      return ("yes", C)
  return ("no", ∅)
```

$$\left|\binom{V}{k}\right| = \binom{|V|}{k} = \binom{n}{k} = O(n^k)$$

*Warum?*

$$O(E(G)) = O(m)$$

**Laufzeit.** $O(n^k m)$ – Dies ist *nicht* polynomiell in der Größe der Eingabe ($= n + m$), da $k$ keine Konstante, sondern Teil der Eingabe.

# Ein neues Ziel

Finde einen Algorithmus für $k$-VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c)$$

# Ein neues Ziel

Finde einen Algorithmus für $k$-VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c)$$

wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von $I$),
$I$ gegebene Instanz, $c$ Konstante (unabh. von $I$)

# Ein neues Ziel

Finde einen Algorithmus für $k$-VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c)$$

wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von $I$),
$I$ gegebene Instanz, $c$ Konstante (unabh. von $I$)

D.h. die Laufzeit soll abhängen
– beliebig vom Parameter $k$,
– polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz $I$.

# Ein neues Ziel

Finde einen Algorithmus für $k$-VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c)$$

wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von $I$),
$I$ gegebene Instanz, $c$ Konstante (unabh. von $I$)

D.h. die Laufzeit soll abhängen
– beliebig vom Parameter $k$, *Schwierigkeit der Instanz*
– polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz $I$.

# Ein neues Ziel

Finde einen Algorithmus für $k$-VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c)$$

wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von $I$),
$I$ gegebene Instanz, $c$ Konstante (unabh. von $I$)

D.h. die Laufzeit soll abhängen
– beliebig vom Parameter $k$, ← *Schwierigkeit der Instanz*
– polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz $I$.

Ein Problem, das in dieser Zeit gelöst werden kann, heißt *festparameterberechenbar* (*fixed-parameter tractable*) bzgl. $k$.

# Ein neues Ziel

Finde einen Algorithmus für $k$-VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c)$$

wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von $I$),
$I$ gegebene Instanz, $c$ Konstante (unabh. von $I$)

D.h. die Laufzeit soll abhängen
– beliebig vom Parameter $k$, ← *Schwierigkeit der Instanz*
– polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz $I$.

Ein Problem, das in dieser Zeit gelöst werden kann, heißt *festparameterberechenbar* (*fixed-parameter tractable*) bzgl. $k$.

$\mathcal{FPT}$ = Klasse der festparameterberechenbaren Probleme.

# Ein neues Ziel

**Bemerkung.**
Die Klasse $\mathcal{FPT}$ ändert sich nicht, wenn statt $+$ hier $\cdot$ steht.

Finde einen Algorithmus für $k$-VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c)$$

wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von $I$),
$I$ gegebene Instanz, $c$ Konstante (unabh. von $I$)

D.h. die Laufzeit soll abhängen
– beliebig vom Parameter $k$, *Schwierigkeit der Instanz*
– polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz $I$.

Ein Problem, das in dieser Zeit gelöst werden kann, heißt *festparameterberechenbar* (*fixed-parameter tractable*) bzgl. $k$.

$\mathcal{FPT}$ = Klasse der festparameterberechenbaren Probleme.

# Ein neues Ziel

**Bemerkung.**
Die Klasse $\mathcal{FPT}$ ändert sich nicht, wenn statt $+$ hier $\cdot$ steht.

Finde einen Algorithmus für $k$-VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c) =: O^\star(f(k))$$

wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von $I$),
$I$ gegebene Instanz, $c$ Konstante (unabh. von $I$)

D.h. die Laufzeit soll abhängen
– beliebig vom Parameter $k$,
– polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz $I$.

*Schwierigkeit der Instanz*

Ein Problem, das in dieser Zeit gelöst werden kann, heißt *festparameterberechenbar* (*fixed-parameter tractable*) bzgl. $k$.

$\mathcal{FPT}$ = Klasse der festparameterberechenbaren Probleme.

# Ein neues Ziel

**Bemerkung.**
Die Klasse $\mathcal{FPT}$ ändert sich nicht, wenn statt $+$ hier $\cdot$ steht.

Finde einen Algorithmus für $k$-VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c) =: O^\star(f(k))$$

*ignoriert polynomielle Faktoren!*

wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von $I$),
$I$ gegebene Instanz, $c$ Konstante (unabh. von $I$)

D.h. die Laufzeit soll abhängen
– beliebig vom Parameter $k$, *Schwierigkeit der Instanz*
– polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz $I$.

Ein Problem, das in dieser Zeit gelöst werden kann, heißt *festparameterberechenbar* (*fixed-parameter tractable*) bzgl. $k$.

$\mathcal{FPT}$ = Klasse der festparameterberechenbaren Probleme.

# Ein neues Ziel

**Bemerkung.**
Die Klasse $\mathcal{FPT}$ ändert sich nicht, wenn statt $+$ hier $\cdot$ steht.

Finde einen Algorithmus für $k$-VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c) =: O^\star(f(k))$$

*ignoriert polynomielle Faktoren!*

wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von $I$),
$I$ gegebene Instanz, $c$ Konstante (unabh. von $I$)

D.h. die Laufzeit soll abhängen
– beliebig vom Parameter $k$, *Schwierigkeit der Instanz*
– polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz $I$.

Ein Problem, das in dieser Zeit gelöst werden kann, heißt *festparameterberechenbar* (*fixed-parameter tractable*) bzgl. $k$.

$\mathcal{FPT}$ = Klasse der festparameterberechenbaren Probleme.

**Bem.** BruteForceVC hat die gewünschte Laufzeit.

# Ein neues Ziel

**Bemerkung.**
Die Klasse $\mathcal{FPT}$ ändert sich nicht, wenn statt $+$ hier $\cdot$ steht.

Finde einen Algorithmus für $k$-VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c) =: O^\star(f(k))$$

*ignoriert polynomielle Faktoren!*

wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von $I$),
$I$ gegebene Instanz, $c$ Konstante (unabh. von $I$)

D.h. die Laufzeit soll abhängen
– beliebig vom Parameter $k$, *Schwierigkeit der Instanz*
– polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz $I$.

Ein Problem, das in dieser Zeit gelöst werden kann, heißt *festparameterberechenbar* (*fixed-parameter tractable*) bzgl. $k$.

$\mathcal{FPT}$ = Klasse der festparameterberechenbaren Probleme.

**Bem.** BruteForceVC hat *nicht* die gewünschte Laufzeit.

# Ein paar einfache Beobachtungen...

Sei $G$ Graph, $C$ ein VC für $G$, $v$ Knoten, der nicht in $C$ liegt.
Welche Knoten liegen dann sicher in $C$?

# Ein paar einfache Beobachtungen...

Sei $G$ Graph, $C$ ein VC für $G$, $v$ Knoten, der nicht in $C$ liegt. Welche Knoten liegen dann sicher in $C$?

**Beob. 1.** Sei $G$ ein Graph, $C$ ein VC für $G$, $v$ ein Knoten. Dann gilt: $v \in C$ oder $N_G(v) \subseteq C$.

# Ein paar einfache Beobachtungen...

Sei $G$ Graph, $C$ ein VC für $G$, $v$ Knoten, der nicht in $C$ liegt.
Welche Knoten liegen dann sicher in $C$?

**Beob. 1.** Sei $G$ ein Graph, $C$ ein VC für $G$, $v$ ein Knoten.
Dann gilt: $v \in C$ oder $N_G(v) \subseteq C$.

Betrachte Entscheidungsproblem $k$-VC.
Was gilt für Knoten mit Grad $> k$?

# Ein paar einfache Beobachtungen...

Sei $G$ Graph, $C$ ein VC für $G$, $v$ Knoten, der nicht in $C$ liegt.
Welche Knoten liegen dann sicher in $C$?

**Beob. 1.** Sei $G$ ein Graph, $C$ ein VC für $G$, $v$ ein Knoten.
Dann gilt: $v \in C$ oder $N_G(v) \subseteq C$.

Betrachte Entscheidungsproblem $k$-VC.
Was gilt für Knoten mit Grad $> k$?

**Beob. 2.** Jeder Knoten mit Grad $> k$ ist in jedem $k$-VC von $G$ enthalten.

# Ein paar einfache Beobachtungen...

Sei $G$ Graph, $C$ ein VC für $G$, $v$ Knoten, der nicht in $C$ liegt.
Welche Knoten liegen dann sicher in $C$?

**Beob. 1.** Sei $G$ ein Graph, $C$ ein VC für $G$, $v$ ein Knoten.
Dann gilt: $v \in C$ oder $N_G(v) \subseteq C$.

Betrachte Entscheidungsproblem $k$-VC.
Was gilt für Knoten mit Grad $> k$?

**Beob. 2.** Jeder Knoten mit Grad $> k$ ist in jedem $k$-VC von $G$ enthalten.

Was gilt, falls $|E(G)| > k^2$ und alle Knoten Grad $\leq k$ haben?

# Ein paar einfache Beobachtungen...

Sei $G$ Graph, $C$ ein VC für $G$, $v$ Knoten, der nicht in $C$ liegt.
Welche Knoten liegen dann sicher in $C$?

**Beob. 1.** Sei $G$ ein Graph, $C$ ein VC für $G$, $v$ ein Knoten.
Dann gilt: $v \in C$ oder $N_G(v) \subseteq C$.

Betrachte Entscheidungsproblem $k$-VC.
Was gilt für Knoten mit Grad $> k$?

**Beob. 2.** Jeder Knoten mit Grad $> k$ ist in jedem $k$-VC von $G$ enthalten.

Was gilt, falls $|E(G)| > k^2$ und alle Knoten Grad $\leq k$ haben?

**Beob. 3.** Falls $|E(G)| > k^2$ und $\Delta(G) := \max_{v \in V} \deg v \leq k$, so hat $G$ kein $k$-VC.

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$

$(\text{yesorno}, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

**return** $(\text{yesorno}, C \cup C')$

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

Benützen Sie Beobachtungen 2 & 3, um eine Instanz $(G, k)$ in eine Instanz $(G', k')$ zu verwandeln, so dass $|G'| \in O(k^2)$!

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$

(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)

**return** (yesorno, $C \cup C'$)

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$

(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)

**return** (yesorno, $C \cup C'$)

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$

**if** $|C| > k$ **then return** ("no", $\emptyset$)

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$

(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)

**return** (yesorno, $C \cup C'$)

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$

**if** $|C| > k$ **then return** ("no", $\emptyset$)

$G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten)

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$

(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)

**return** (yesorno, $C \cup C'$)

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$

**if** $|C| > k$ **then return** ("no", $\emptyset$)

$G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten)

**if** $|E(G')| > k^2$ **then return** ("no", $\emptyset$)

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$

(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)

**return** (yesorno, $C \cup C'$)

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$

**if** $|C| > k$ **then return** ("no", $\emptyset$)

$G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten)

**if** $|E(G')| > k^2$ **then return** ("no", $\emptyset$)

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$

(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)

**return** (yesorno, $C \cup C'$)

**Laufzeit.**

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$
**if** $|C| > k$ **then return** ("no", $\emptyset$)
$G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten)
**if** $|E(G')| > k^2$ **then return** ("no", $\emptyset$)

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$
(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)
**return** (yesorno, $C \cup C'$)

**Laufzeit.**

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$
**if** $|C| > k$ **then return** ("no", $\emptyset$)
$G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten)
**if** $|E(G')| > k^2$ **then return** ("no", $\emptyset$)

} $O(n+m)$ Zeit

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$
(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)
**return** (yesorno, $C \cup C'$)

**Laufzeit.**

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$
**if** $|C| > k$ **then return** ("no", $\emptyset$)
$G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten)
**if** $|E(G')| > k^2$ **then return** ("no", $\emptyset$)

} $O(n+m)$ Zeit

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$
(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)
**return** (yesorno, $C \cup C'$)

**Laufzeit.**

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$
**if** $|C| > k$ **then return** ("no", $\emptyset$)
$G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten)
**if** $|E(G')| > k^2$ **then return** ("no", $\emptyset$)

} $O(n+m)$ Zeit

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$
(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)
**return** (yesorno, $C \cup C'$)

} $O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit

**Laufzeit.**

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$
**if** $|C| > k$ **then return** ("no", $\emptyset$)
$G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten)
**if** $|E(G')| > k^2$ **then return** ("no", $\emptyset$)

} $O(n+m)$ Zeit

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$
(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)
**return** (yesorno, $C \cup C'$)

} $O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$

**Laufzeit.**

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$
**if** $|C| > k$ **then return** ("no", $\emptyset$)
$G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten)
**if** $|E(G')| > k^2$ **then return** ("no", $\emptyset$)

} $O(n+m)$ Zeit

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$
(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)
**return** (yesorno, $C \cup C'$)

} $O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$
$\Rightarrow \quad n' := |V'| \leq 2k^2$

**Laufzeit.**

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$
**if** $|C| > k$ **then return** ("no", $\emptyset$)
$G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten)
**if** $|E(G')| > k^2$ **then return** ("no", $\emptyset$)

} $O(n+m)$ Zeit

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$
(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)
**return** (yesorno, $C \cup C'$)

} $O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$
$\Rightarrow \; n' := |V'| \leq 2k^2$

**Laufzeit.** $O\big(n + m + k^2 \cdot (2k^2)^k\big)$

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$
**if** $|C| > k$ **then return** ("no", $\emptyset$)
$G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten)
**if** $|E(G')| > k^2$ **then return** ("no", $\emptyset$)

} $O(n+m)$ Zeit

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$
(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)
**return** (yesorno, $C \cup C'$)

} $O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$
$\Rightarrow \; n' := |V'| \leq 2k^2$

**Laufzeit.** $O\big(n + m + k^2 \cdot (2k^2)^k\big) = O\big(n + m + k^2 2^k k^{2k}\big)$

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$
**if** $|C| > k$ **then return** ("no", $\emptyset$)
$G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten)
**if** $|E(G')| > k^2$ **then return** ("no", $\emptyset$)

} $O(n+m)$ Zeit

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$
(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)
**return** (yesorno, $C \cup C'$)

} $O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$
$\Rightarrow \; n' := |V'| \leq 2k^2$

**Laufzeit.** $O\big(n + m + k^2 \cdot (2k^2)^k\big) = O\big(n + m + k^2 2^k k^{2k}\big)$

**Also:**

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$
**if** $|C| > k$ **then return** ("no", $\emptyset$)
$G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten)
**if** $|E(G')| > k^2$ **then return** ("no", $\emptyset$)

} $O(n+m)$ Zeit

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$
(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)
**return** (yesorno, $C \cup C'$)

} $O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$
$\Rightarrow \; n' := |V'| \leq 2k^2$

**Laufzeit.** $O\big(n + m + k^2 \cdot (2k^2)^k\big) = O\big(n + m + k^2 2^k k^{2k}\big)$

**Also:** $k$-VC $\in \mathcal{FPT}$!

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$
**if** $|C| > k$ **then return** ("no", $\emptyset$)
$G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten)
**if** $|E(G')| > k^2$ **then return** ("no", $\emptyset$)

} $O(n+m)$ Zeit

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$
(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)
**return** (yesorno, $C \cup C'$)

} $O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$
$\Rightarrow \; n' := |V'| \leq 2k^2$

**Laufzeit.** $O\big(n + m + k^2 \cdot (2k^2)^k\big) = O\big(\underbrace{n+m}_{|I|^1} + k^2 2^k k^{2k}\big)$

**Also:** $k$-VC $\in \mathcal{FPT}$!

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$
**if** $|C| > k$ **then return** ("no", $\emptyset$)
$G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten)
**if** $|E(G')| > k^2$ **then return** ("no", $\emptyset$)

} $O(n+m)$ Zeit

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$
(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)
**return** (yesorno, $C \cup C'$)

} $O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$
$\Rightarrow \; n' := |V'| \leq 2k^2$

**Laufzeit.** $O\big(n + m + k^2 \cdot (2k^2)^k\big) = O\big(\underbrace{n+m}_{|I|^1} + \underbrace{k^2 2^k k^{2k}}_{f(k)}\big)$

**Also:** $k$-VC $\in \mathcal{FPT}$!

# Algorithmus von Buss

BussVC(Graph $G$, Integer $k$)

*I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern*

$C = \{v \in V(G) \mid \deg_G(v) > k\}$
**if** $|C| > k$ **then return** ("no", $\emptyset$)
$G' := G[V \setminus C]$ (entferne auch isolierte Knoten)
**if** $|E(G')| > k^2$ **then return** ("no", $\emptyset$)

} $O(n+m)$ Zeit

*II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt*

$k' = k - |C|$
(yesorno, $C'$) = BruteForceVC($G', k'$)
**return** (yesorno, $C \cup C'$)

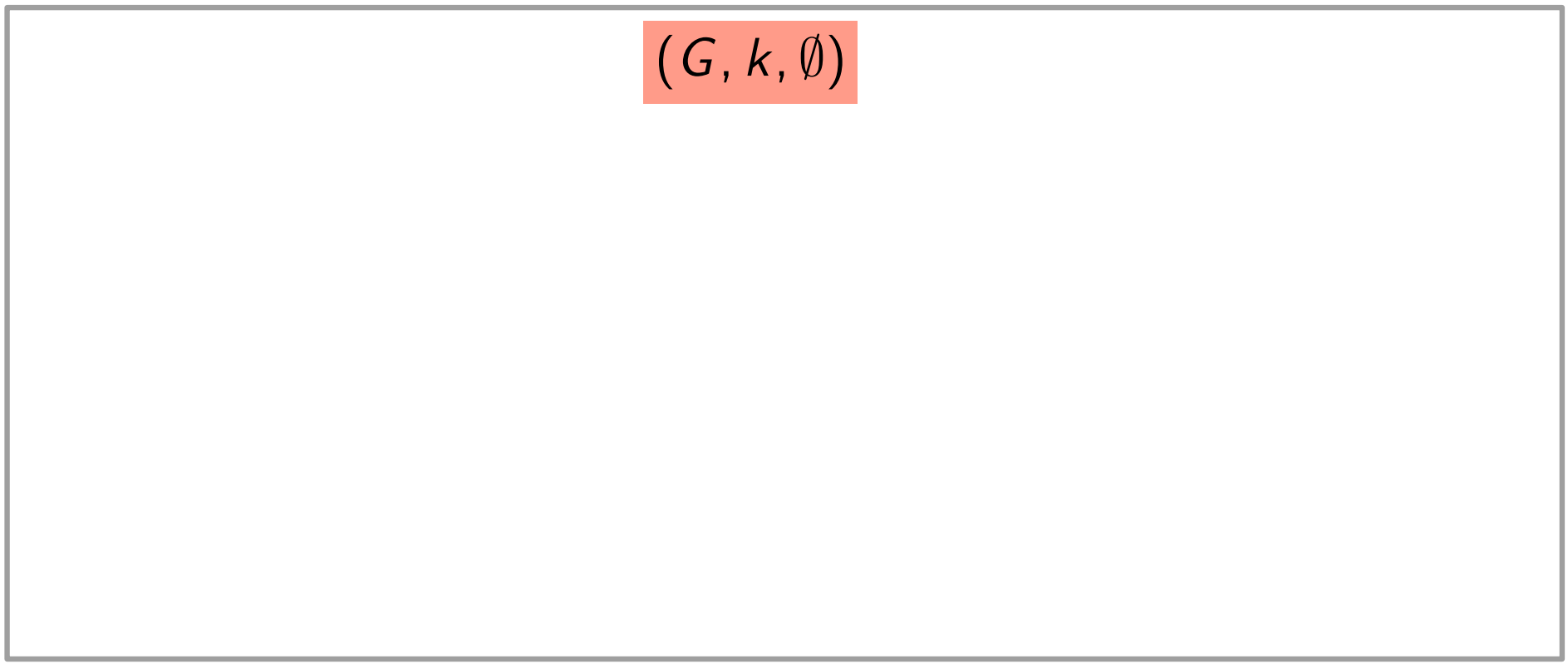
} $O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$
$\Rightarrow \; n' := |V'| \leq 2k^2$

**Laufzeit.** $O\big(n + m + k^2 \cdot (2k^2)^k\big) = O\big(\underbrace{n+m}_{|I|^1} + \underbrace{k^2 2^k k^{2k}}_{f(k)}\big)$

**Also:** $k$-VC $\in \mathcal{FPT}$!

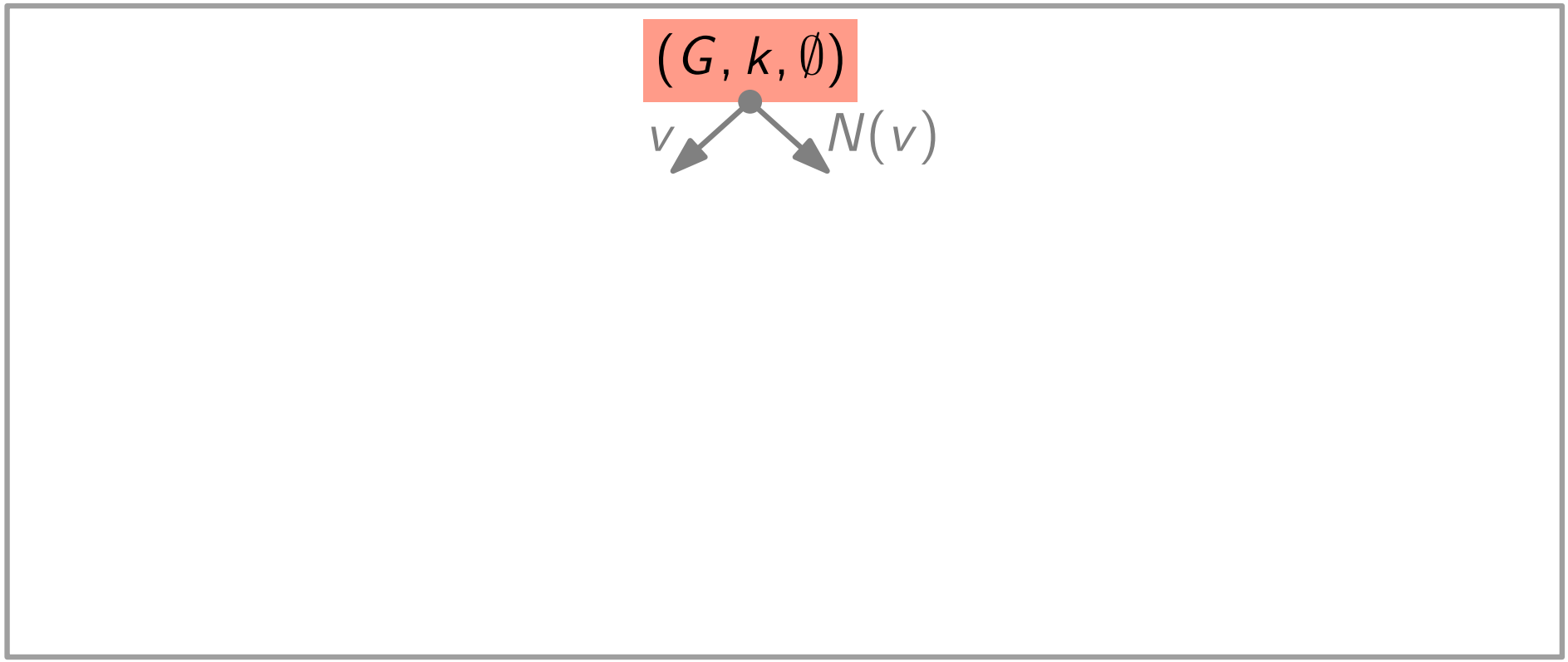
# Suchbaum-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



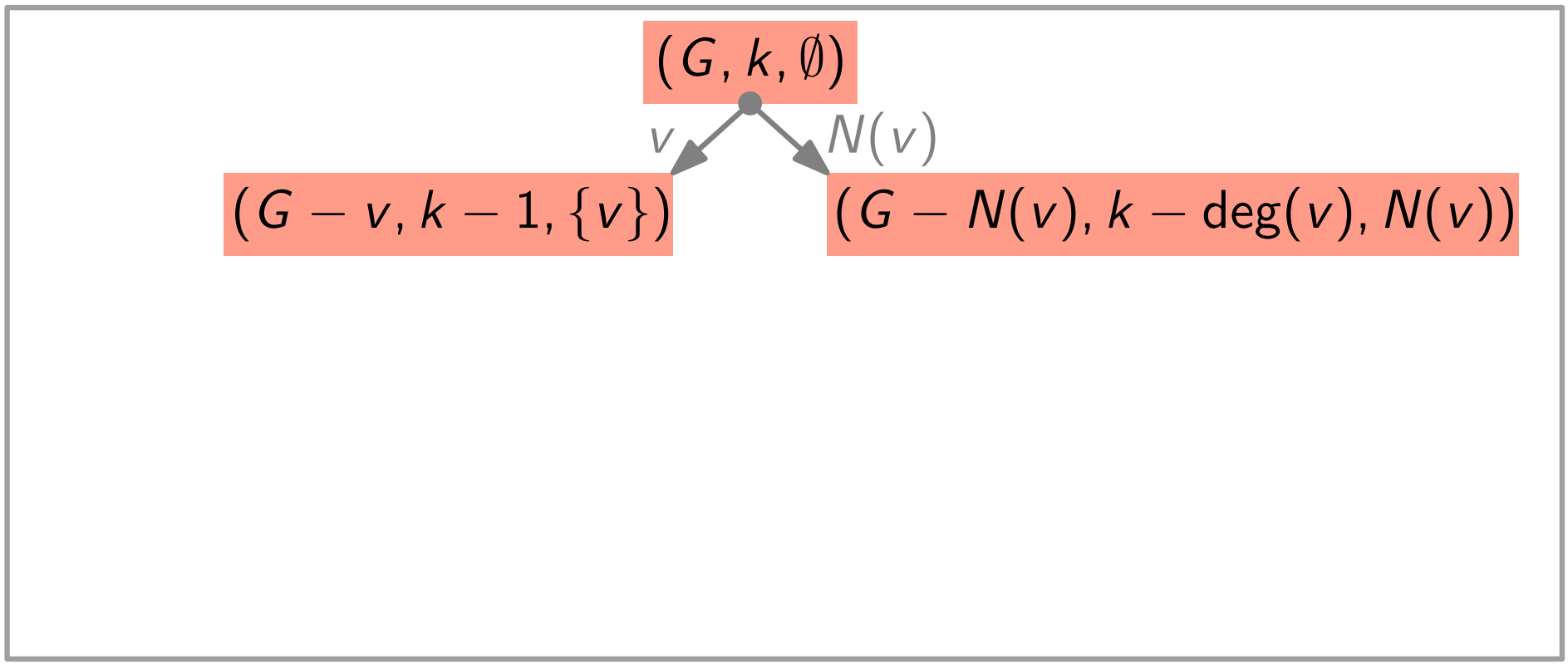
# Suchbaum-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



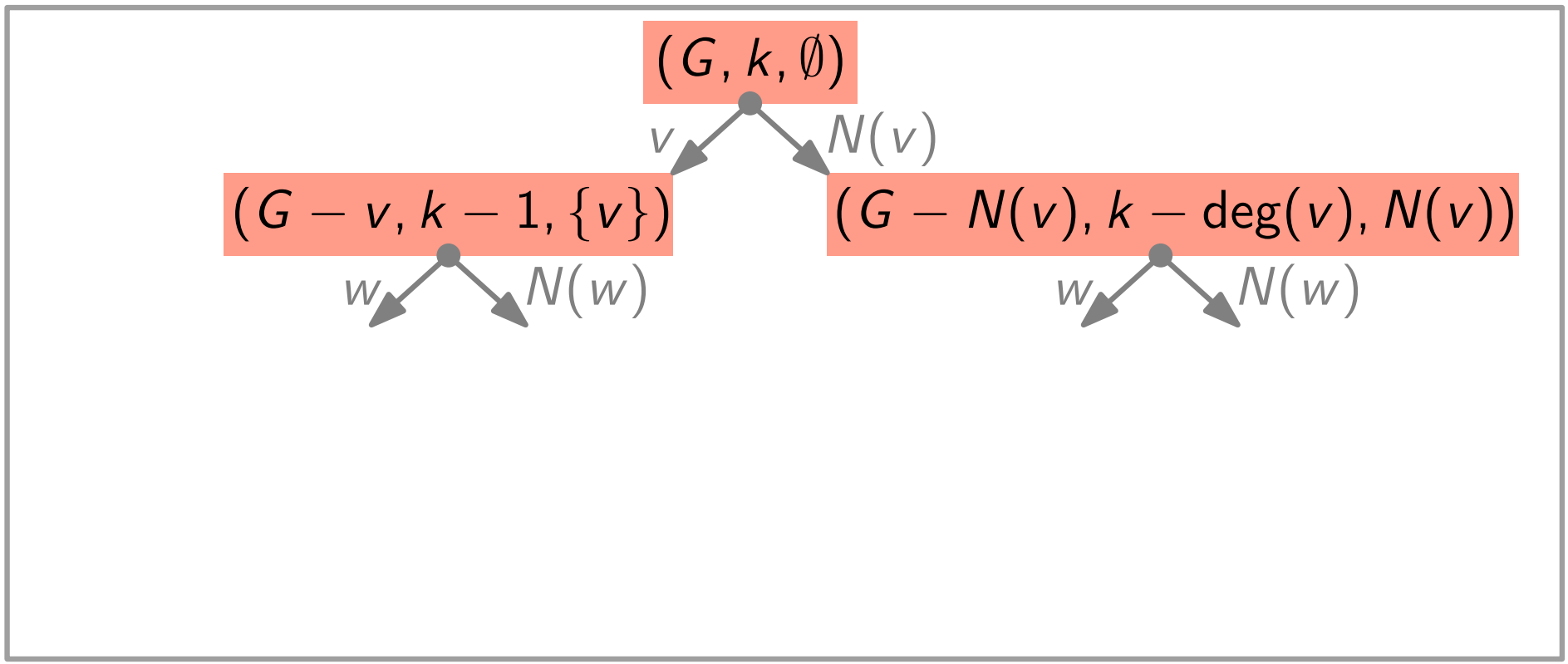
# Suchbaum-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



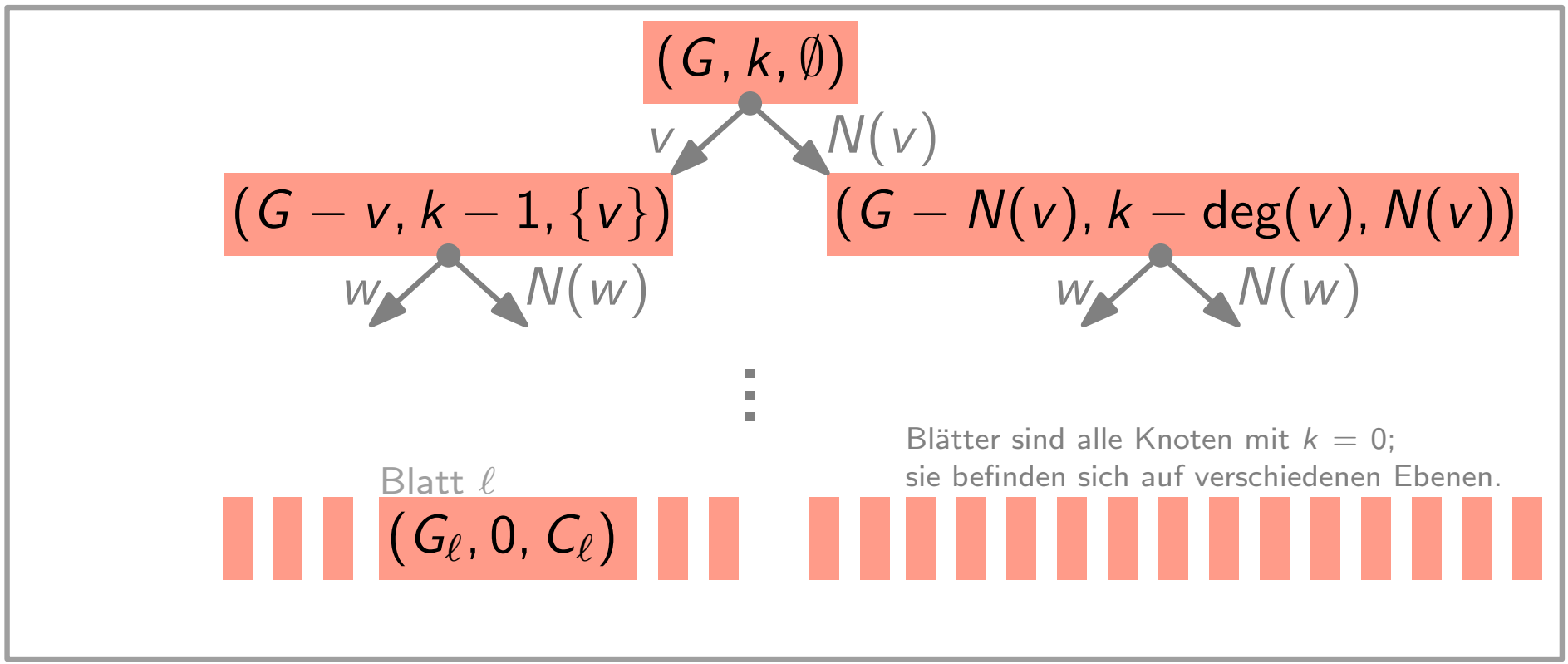
# Suchbaum-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



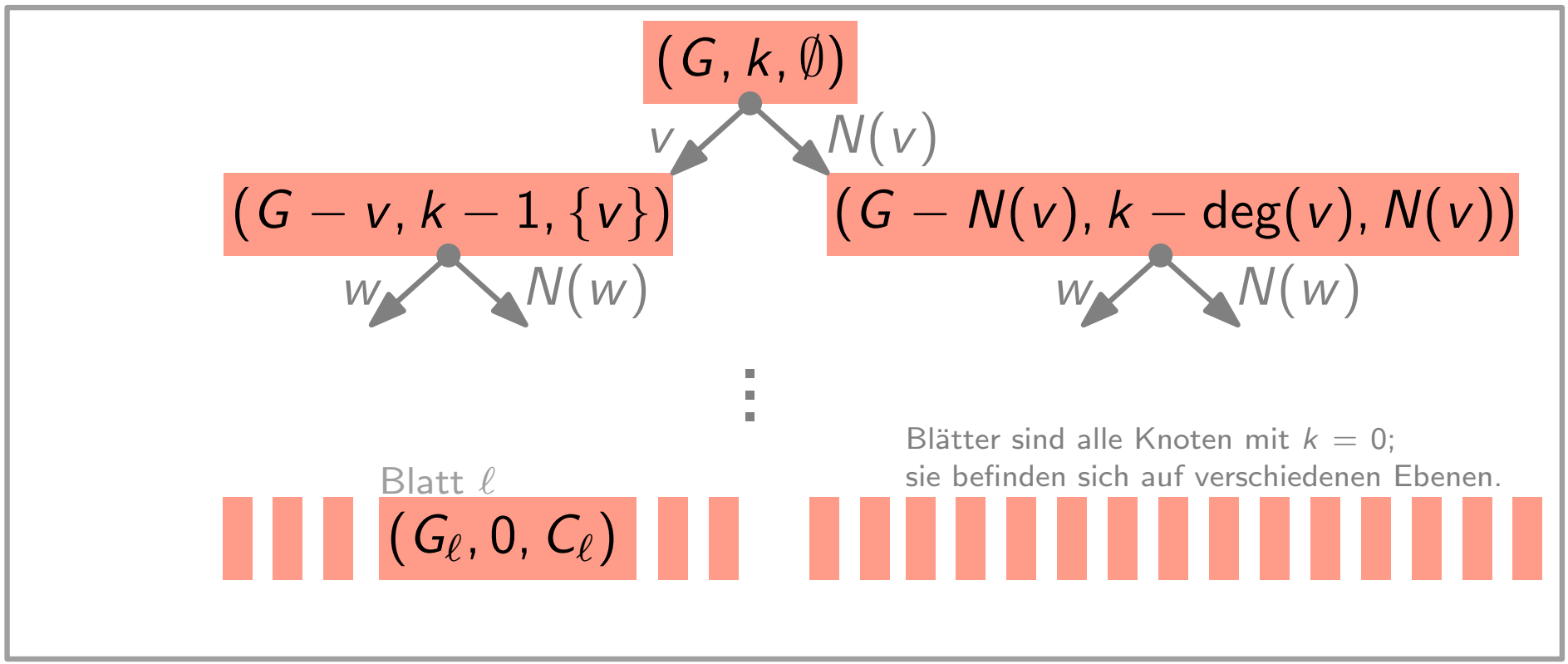
# Suchbaum-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



# Suchbaum-Algorithmus

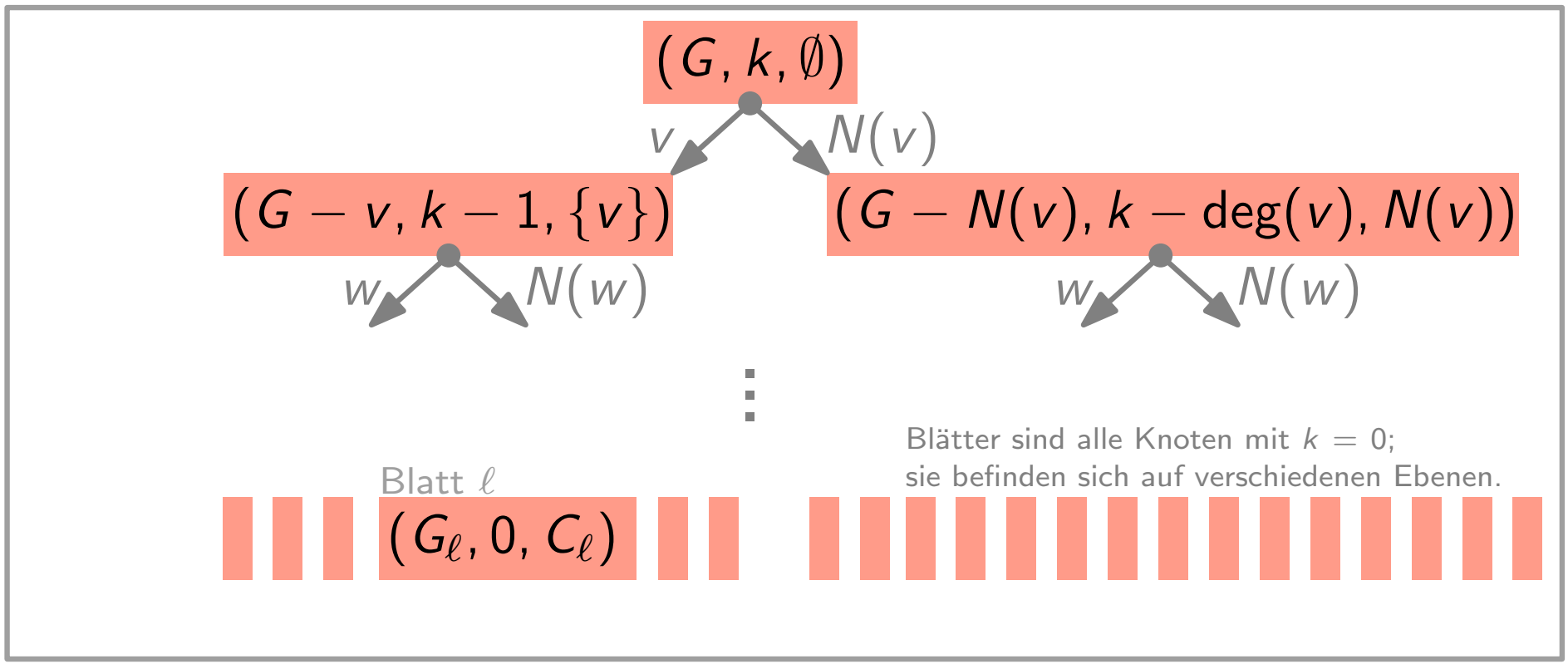
**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.




JA:

# Suchbaum-Algorithmus

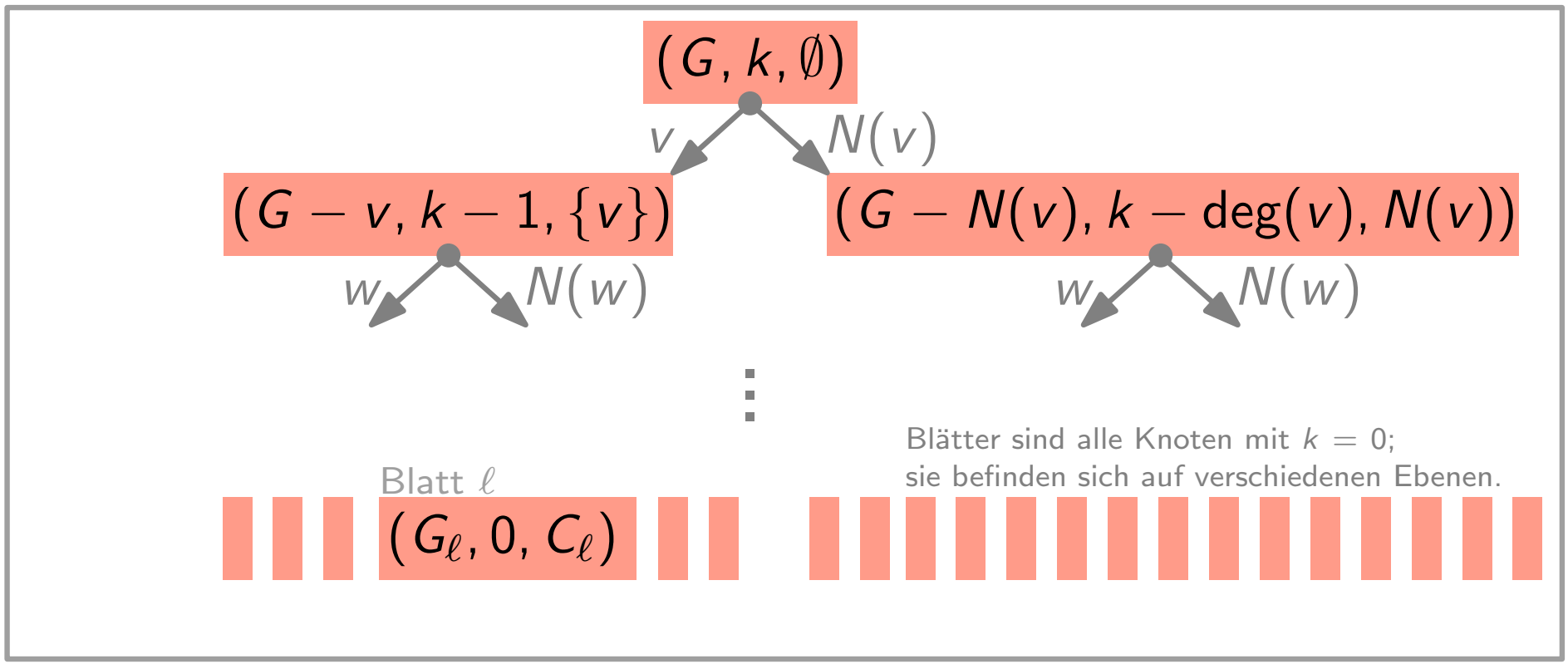
**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.




JA: Gibt es ein Blatt $\ell$ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist $C_\ell$ ein $k$-VC von $G$.

# Suchbaum-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.

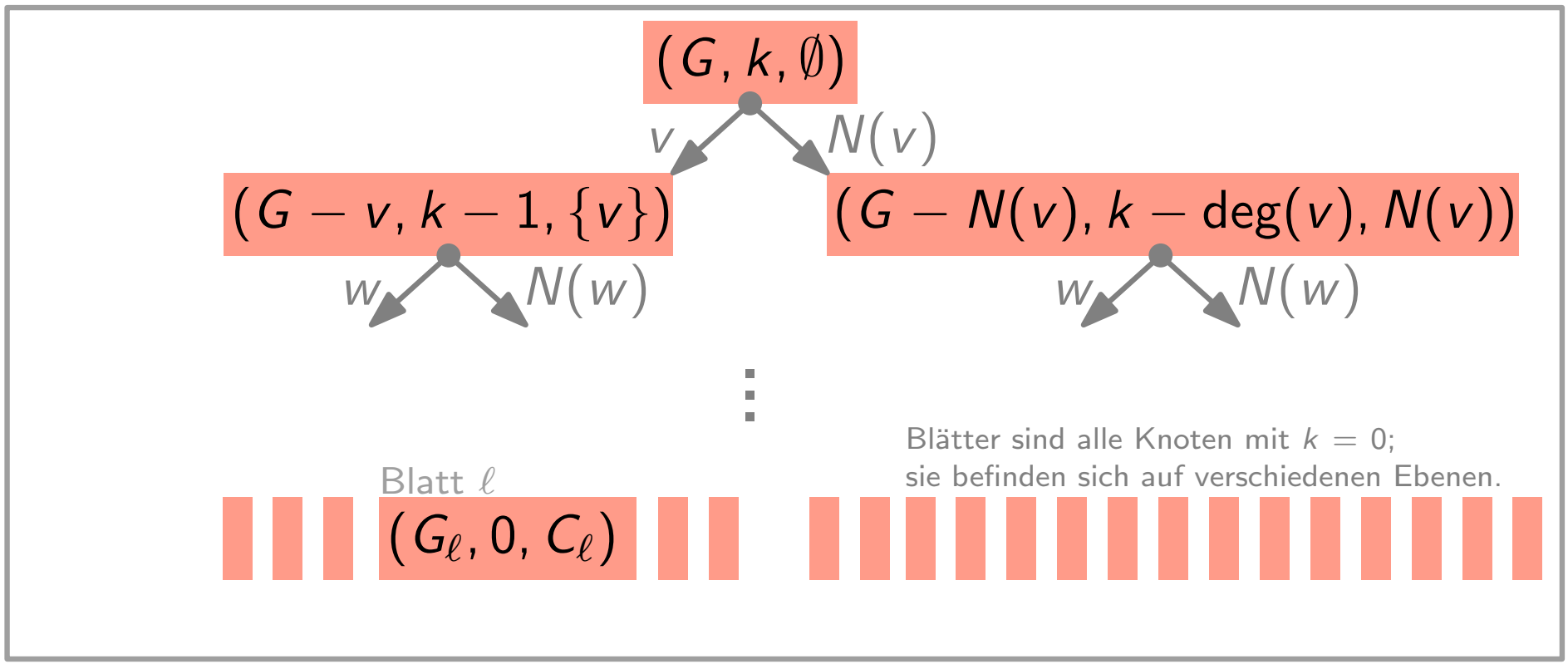



JA: Gibt es ein Blatt $\ell$ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist $C_\ell$ ein $k$-VC von $G$.

NEIN:

# Suchbaum-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.

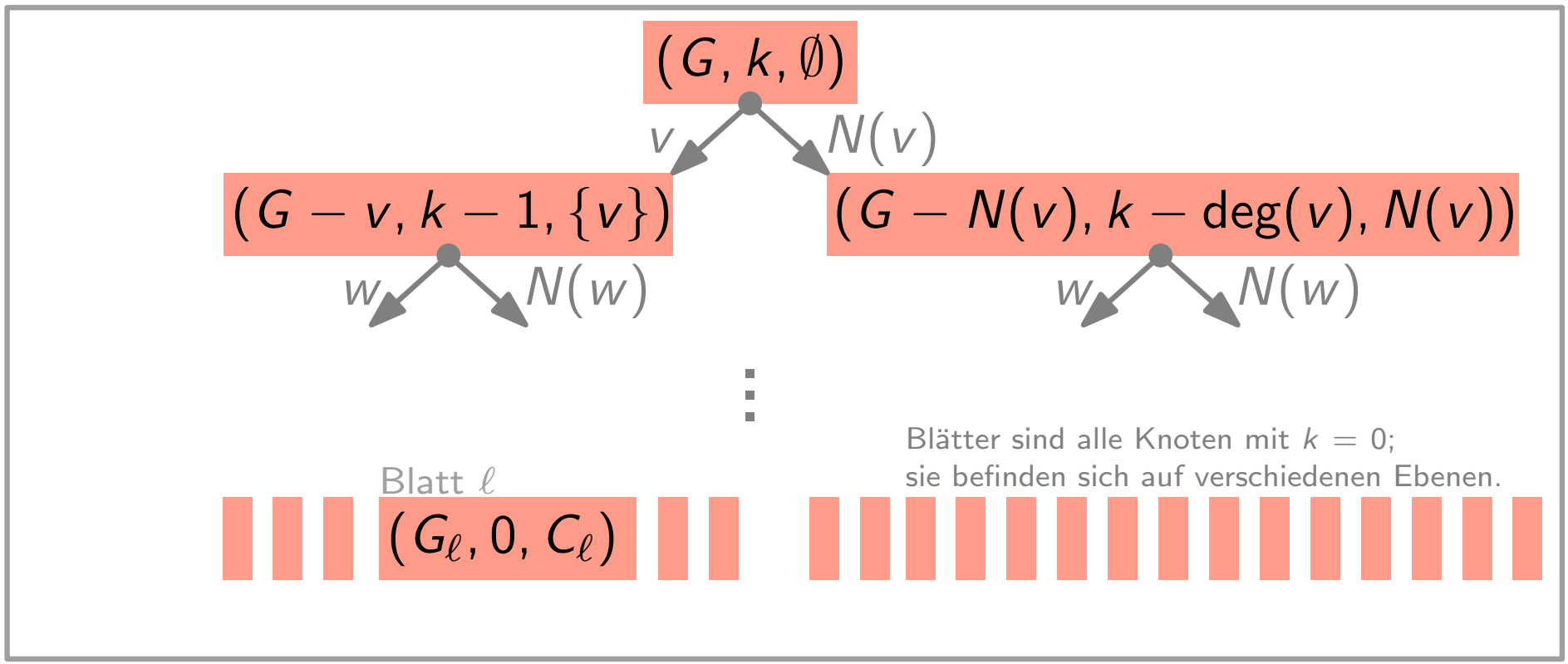



JA: Gibt es ein Blatt $\ell$ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist $C_\ell$ ein $k$-VC von $G$.

NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat $G$ kein $k$-VC.

# Suchbaum-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.

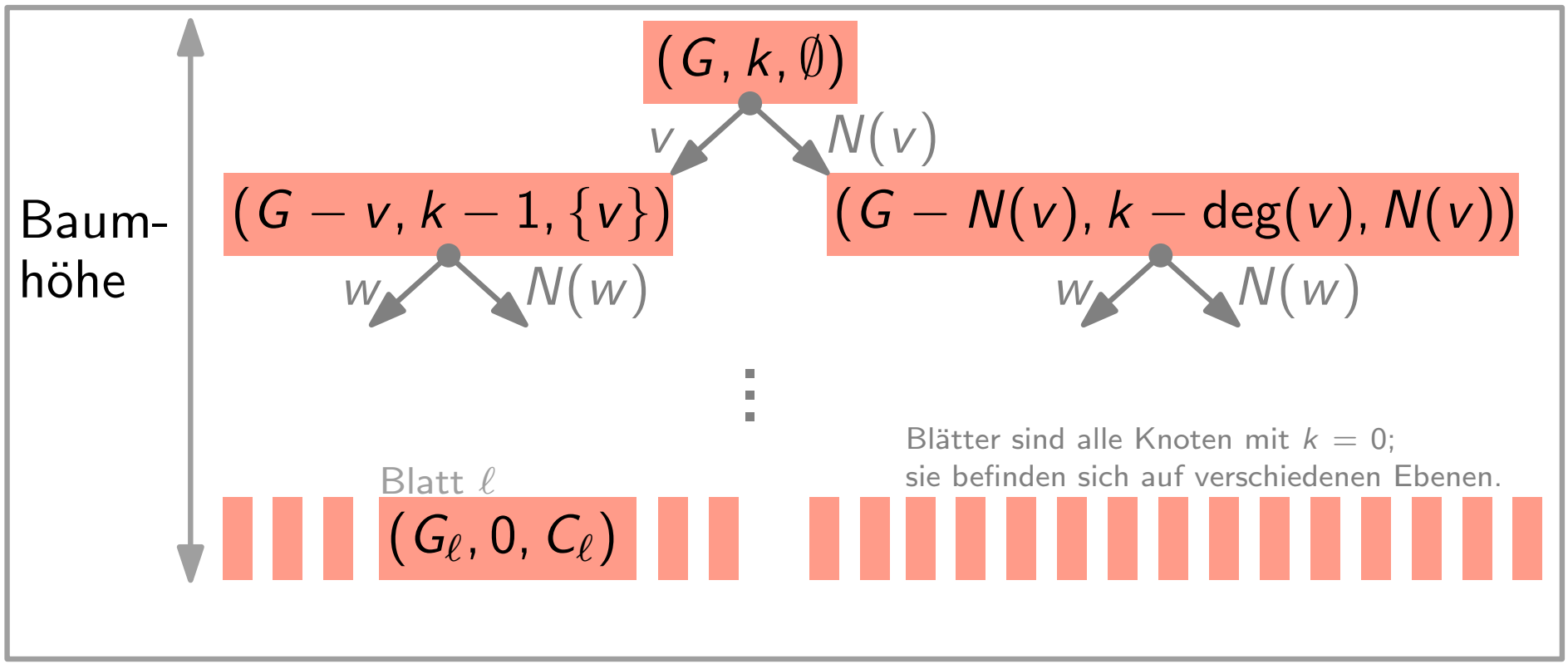



JA: Gibt es ein Blatt $\ell$ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist $C_\ell$ ein $k$-VC von $G$.

NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat $G$ kein $k$-VC. (Warum?)

# Suchbaum-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.

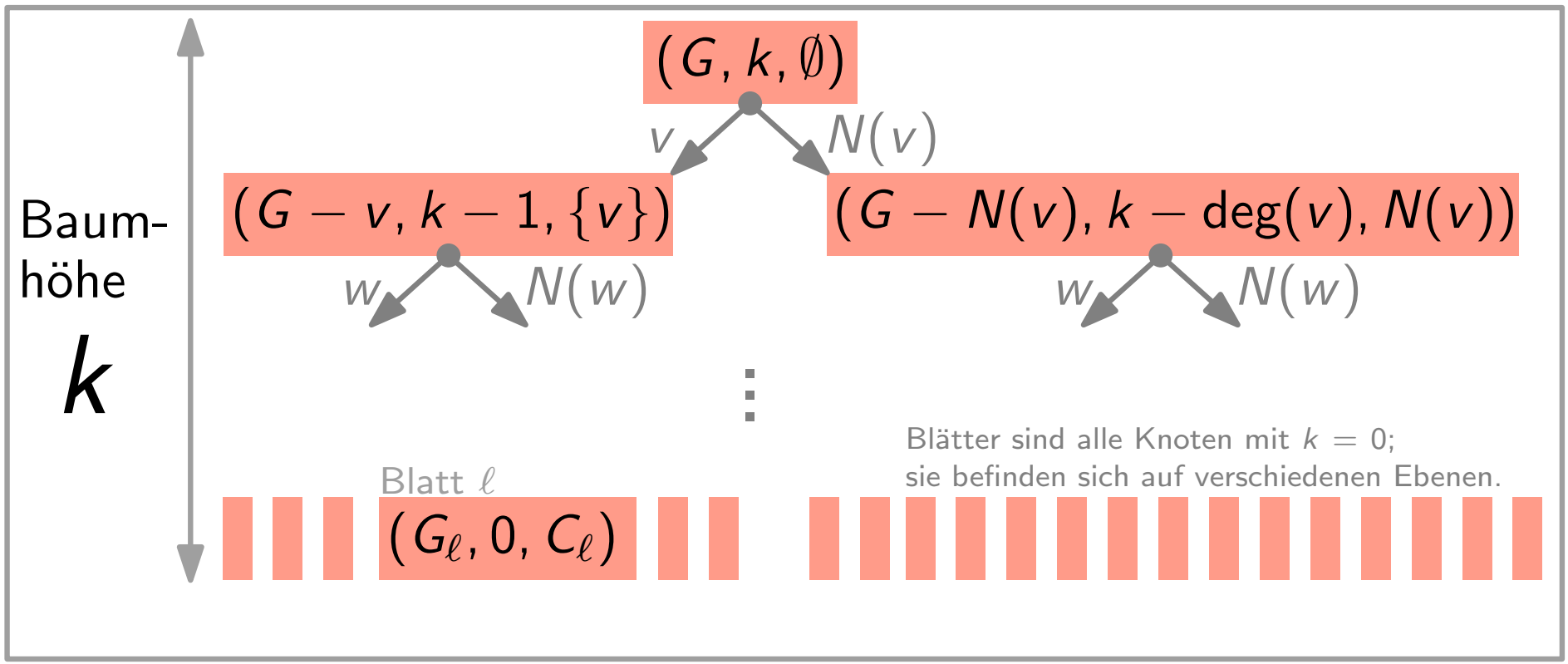



JA: Gibt es ein Blatt $\ell$ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist $C_\ell$ ein $k$-VC von $G$.

NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat $G$ kein $k$-VC. (Warum?)

# Suchbaum-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.

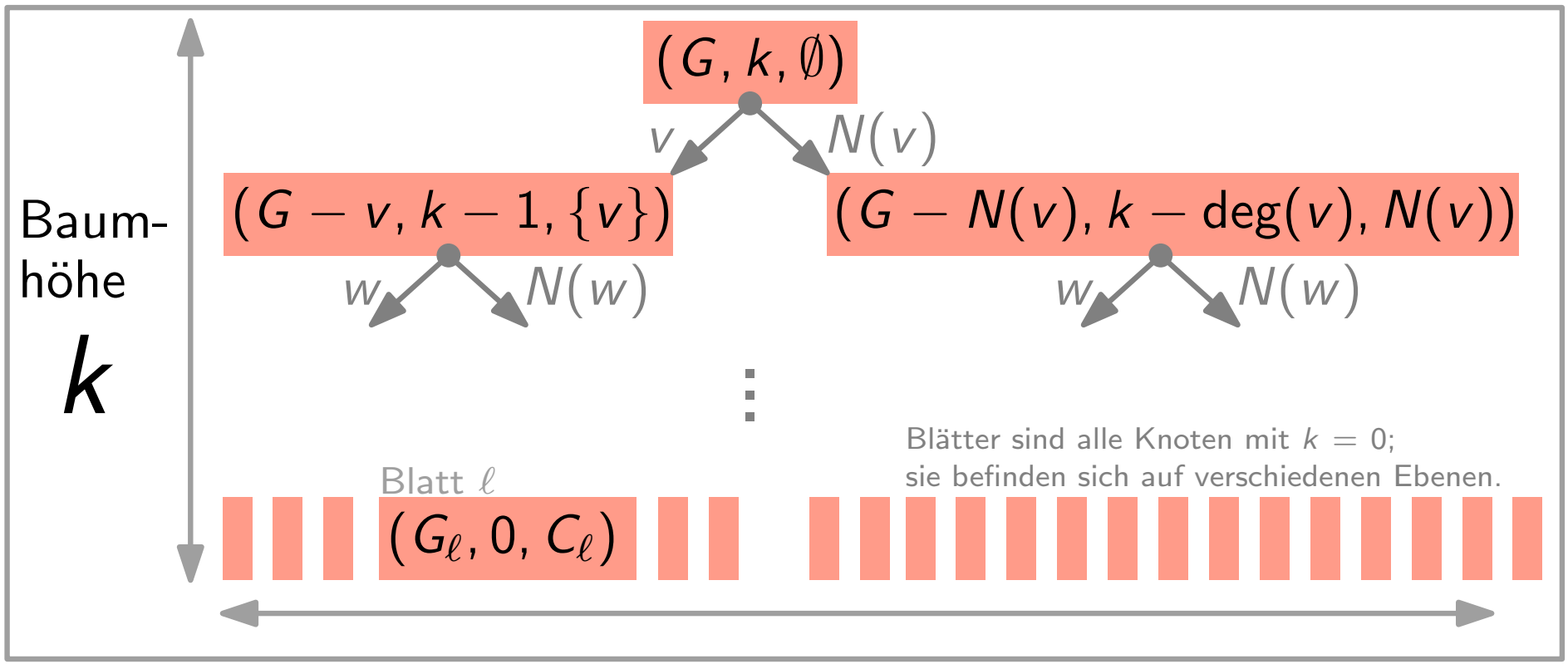



JA: Gibt es ein Blatt $\ell$ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist $C_\ell$ ein $k$-VC von $G$.

NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat $G$ kein $k$-VC. (Warum?)

# Suchbaum-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



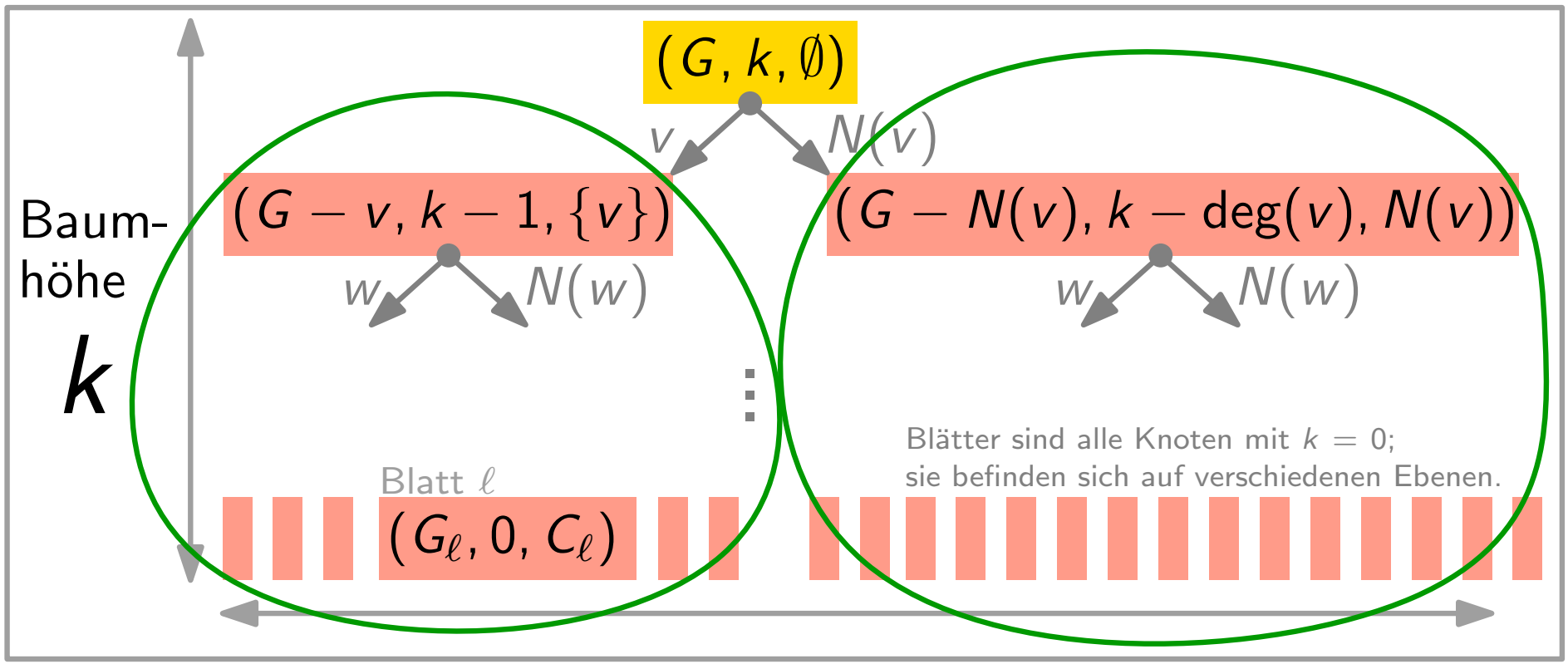

#Knoten: $T(k) \leq$

JA: Gibt es ein Blatt $\ell$ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist $C_\ell$ ein $k$-VC von $G$.

NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat $G$ kein $k$-VC. (Warum?)

# Suchbaum-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



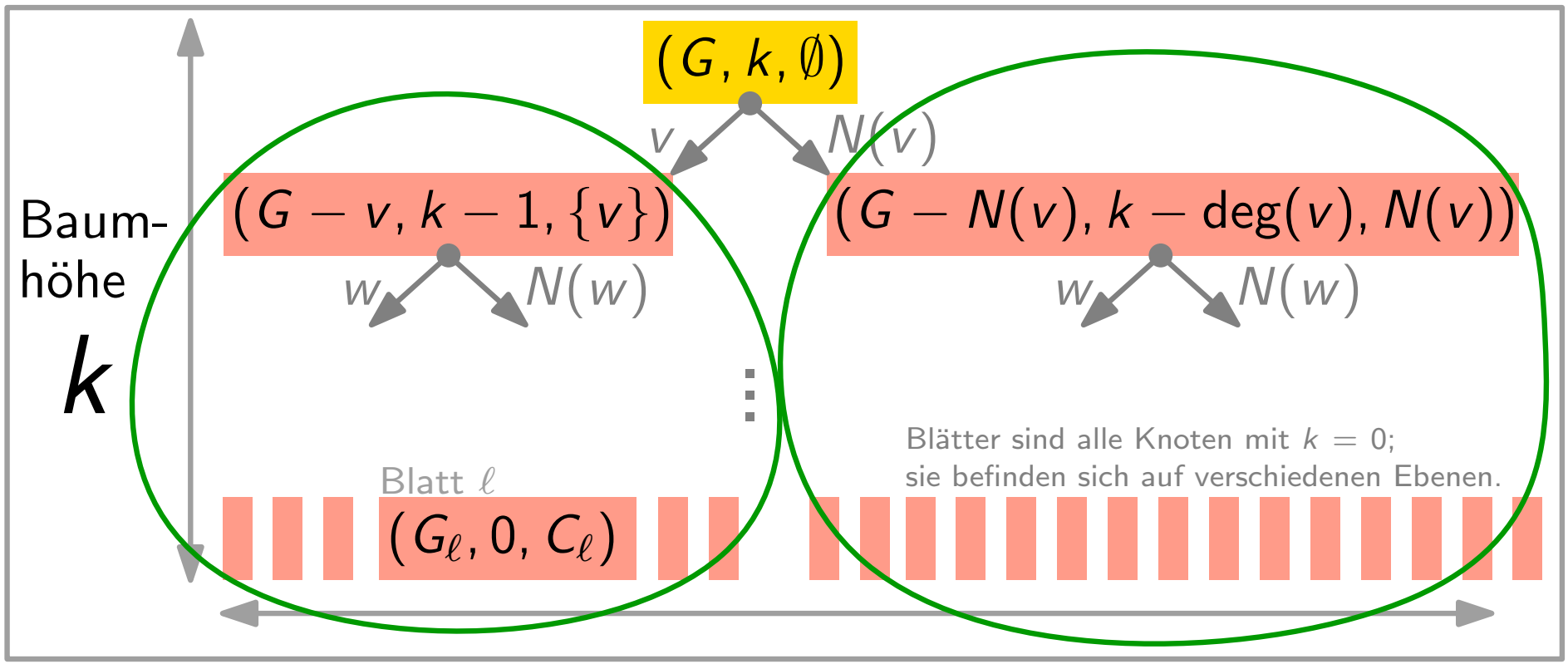

#Knoten: $T(k) \leq$

JA: Gibt es ein Blatt $\ell$ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist $C_\ell$ ein $k$-VC von $G$.

NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat $G$ kein $k$-VC. (Warum?)

# Suchbaum-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



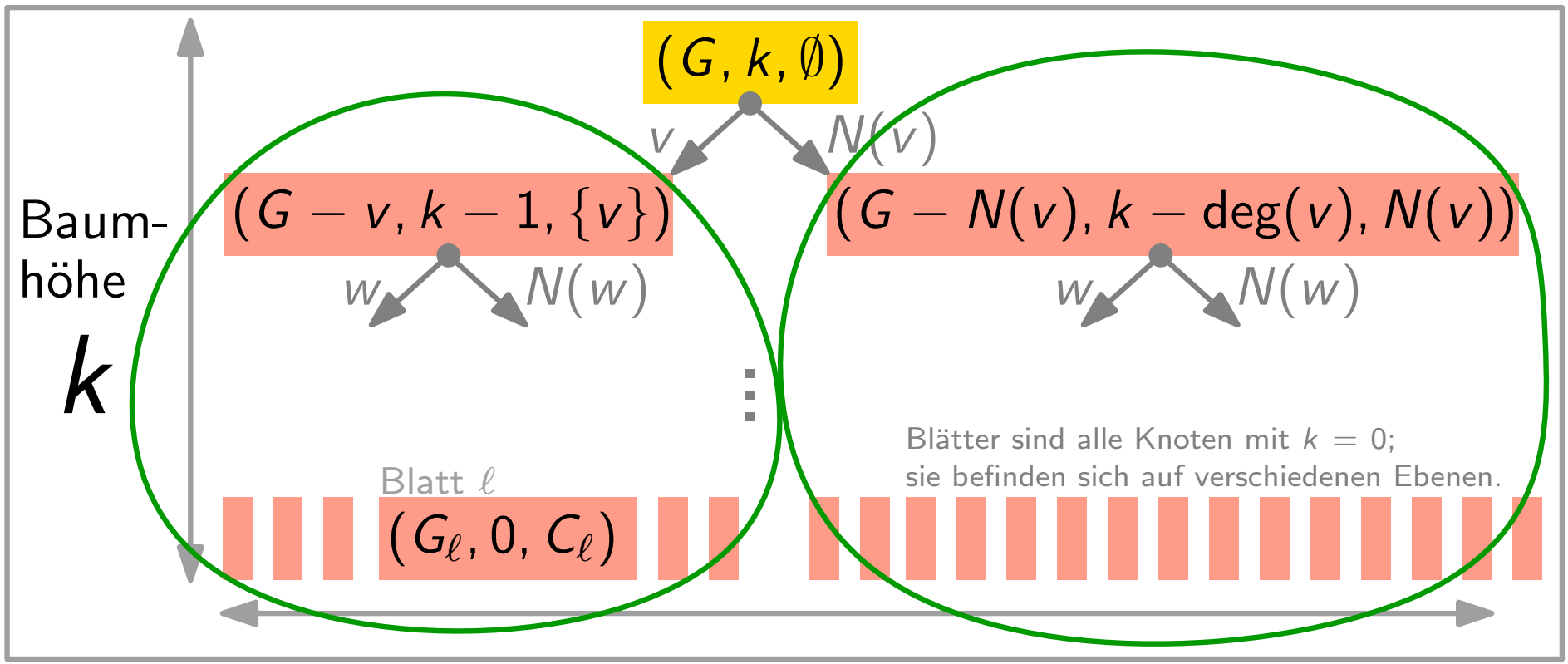

#Knoten: $T(k) \leq 2T(k-1) + 1$

JA: Gibt es ein Blatt $\ell$ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist $C_\ell$ ein $k$-VC von $G$.

NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat $G$ kein $k$-VC. (Warum?)

# Suchbaum-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



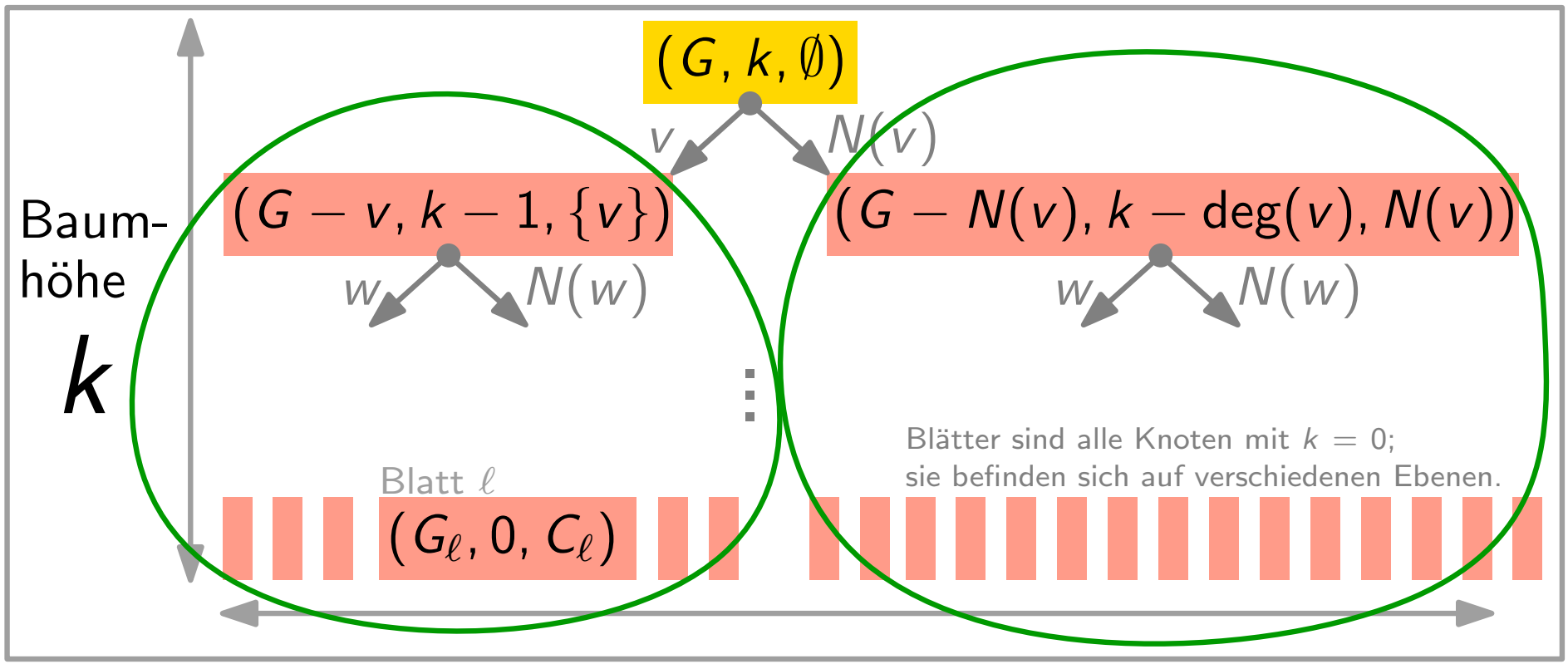

#Knoten: $T(k) \leq 2T(k-1) + 1$, $T(0) = 1$

JA: Gibt es ein Blatt $\ell$ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist $C_\ell$ ein $k$-VC von $G$.

NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat $G$ kein $k$-VC. (Warum?)

# Suchbaum-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



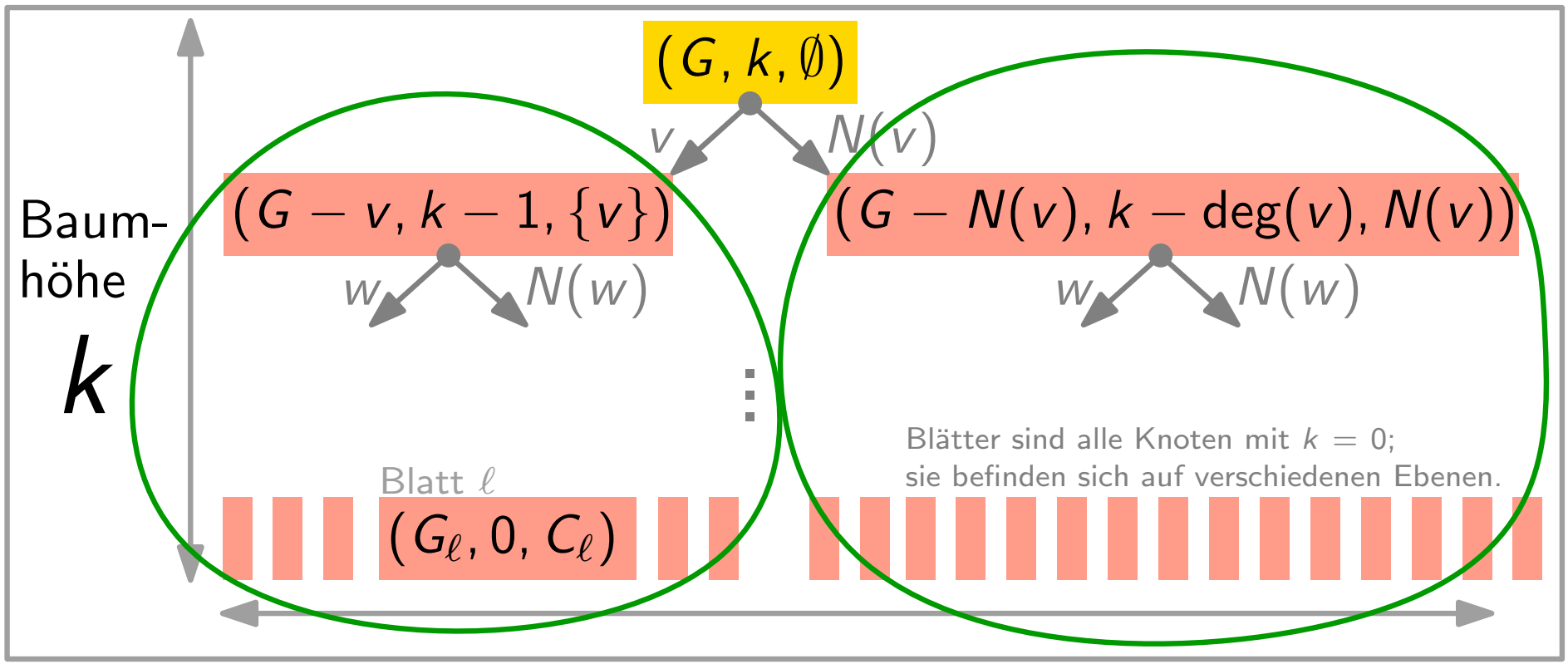

#Knoten: $T(k) \leq 2T(k-1) + 1$, $T(0) = 1 \Rightarrow T(k) \leq 2^{k+1} - 1 \in O(2^k)$

JA: Gibt es ein Blatt $\ell$ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist $C_\ell$ ein $k$-VC von $G$.

NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat $G$ kein $k$-VC. (Warum?)

# Suchbaum-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.




#Knoten: $T(k) \leq 2T(k-1) + 1$, $T(0) = 1 \Rightarrow T(k) \leq 2^{k+1} - 1 \in O(2^k)$

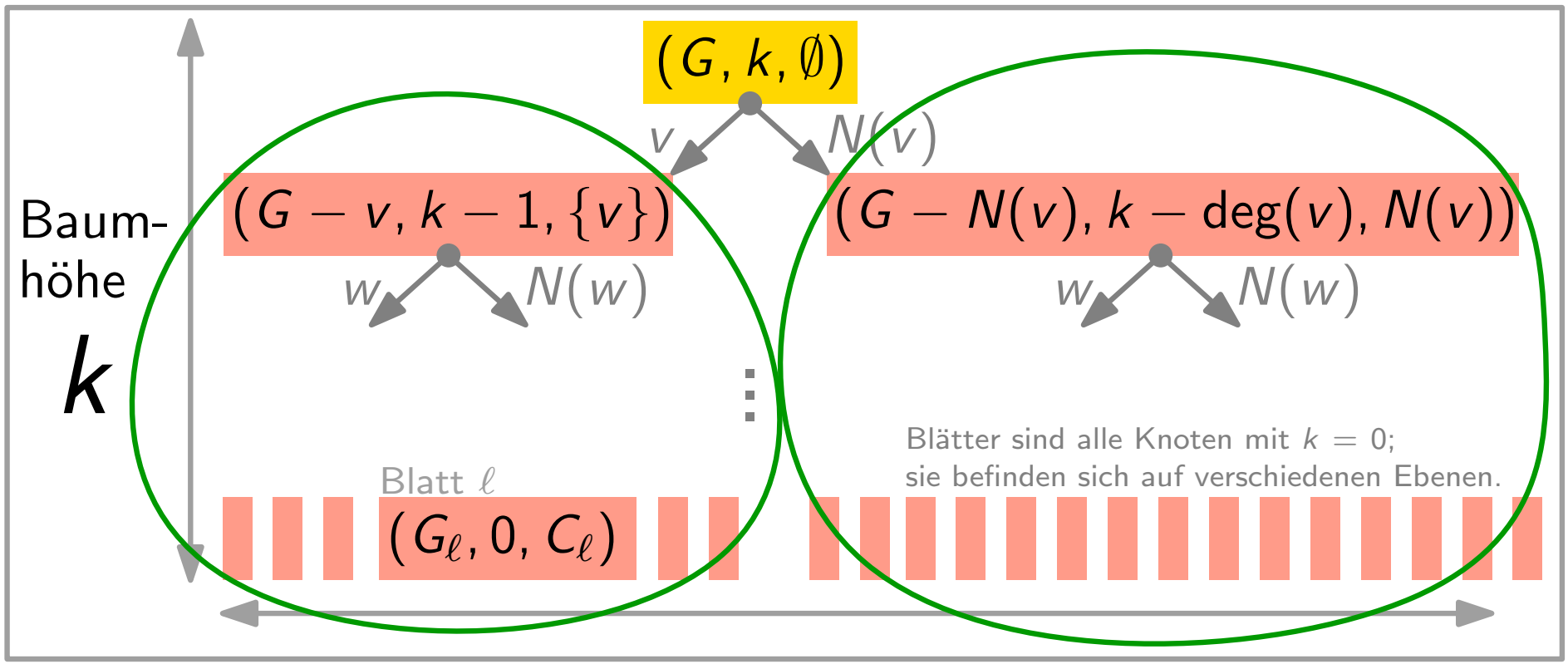
$\Rightarrow$ **Laufzeit:**

JA: Gibt es ein Blatt $\ell$ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist $C_\ell$ ein $k$-VC von $G$.

NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat $G$ kein $k$-VC. (Warum?)

# Suchbaum-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.




#Knoten: $T(k) \leq 2T(k-1) + 1$, $T(0) = 1 \Rightarrow T(k) \leq 2^{k+1} - 1 \in O(2^k)$

$\Rightarrow$ **Laufzeit:** $O^\star(2^k)$

JA: Gibt es ein Blatt $\ell$ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist $C_\ell$ ein $k$-VC von $G$.

NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat $G$ kein $k$-VC. (Warum?)

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.

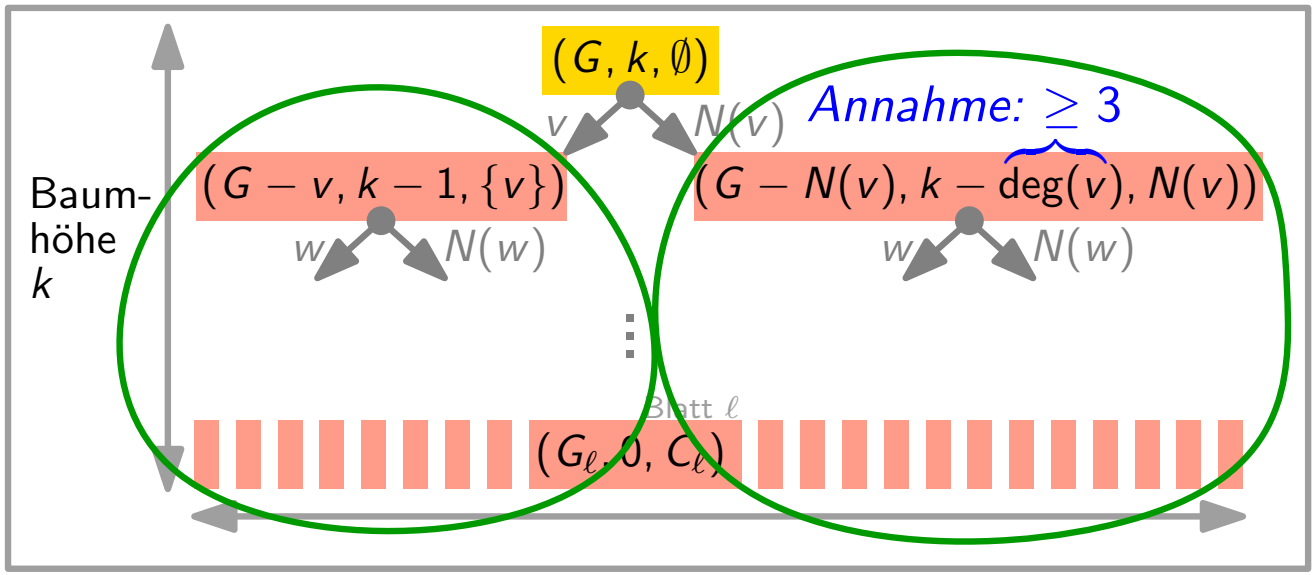
# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.

Was wäre, wenn wir garantieren könnten, dass wir immer mit einem Knoten $v$ verzweigen, dessen Grad mindestens 3 ist?

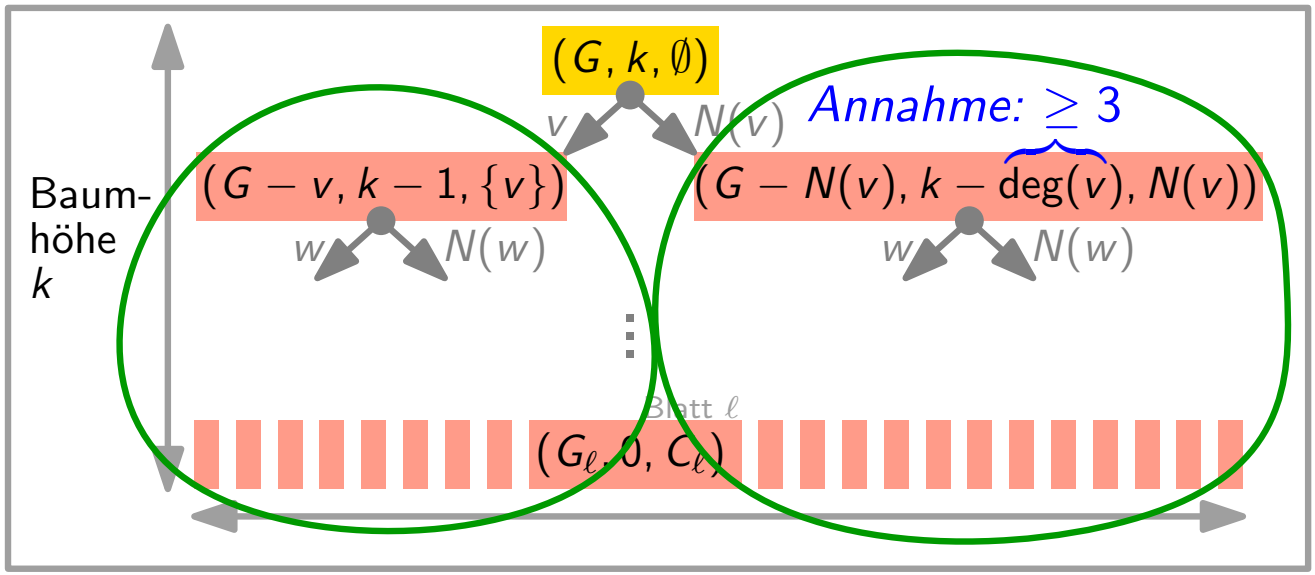
# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



# Der Grad-3-Algorithmus

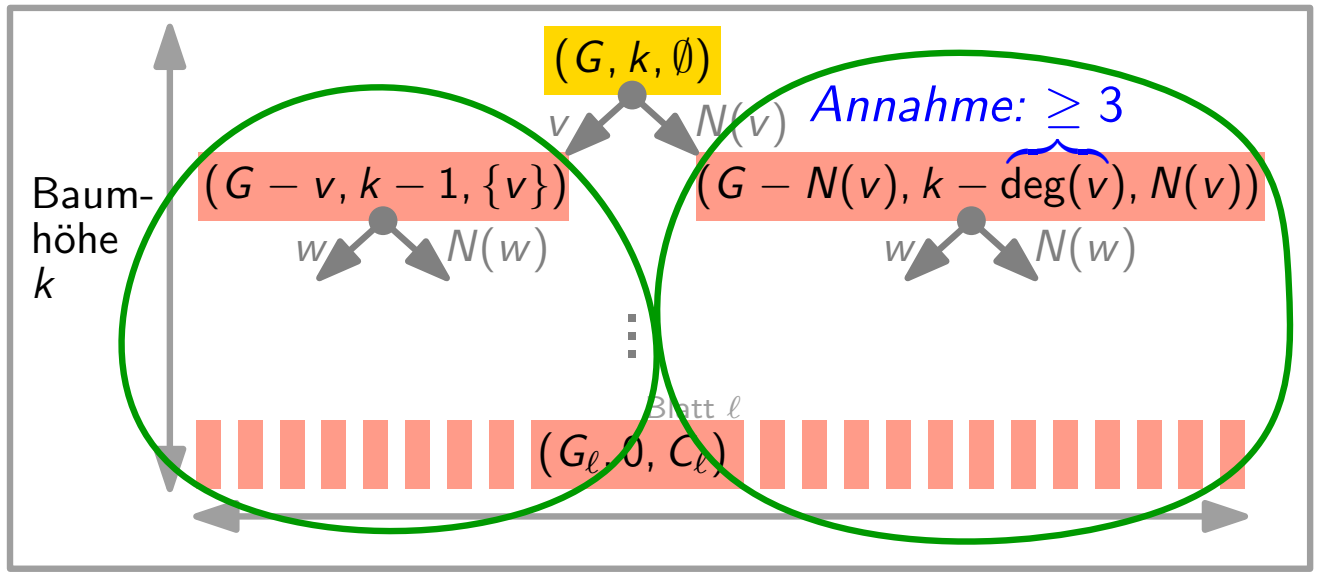
**Idee.** Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.




$\Rightarrow \quad T(k) =$

# Der Grad-3-Algorithmus

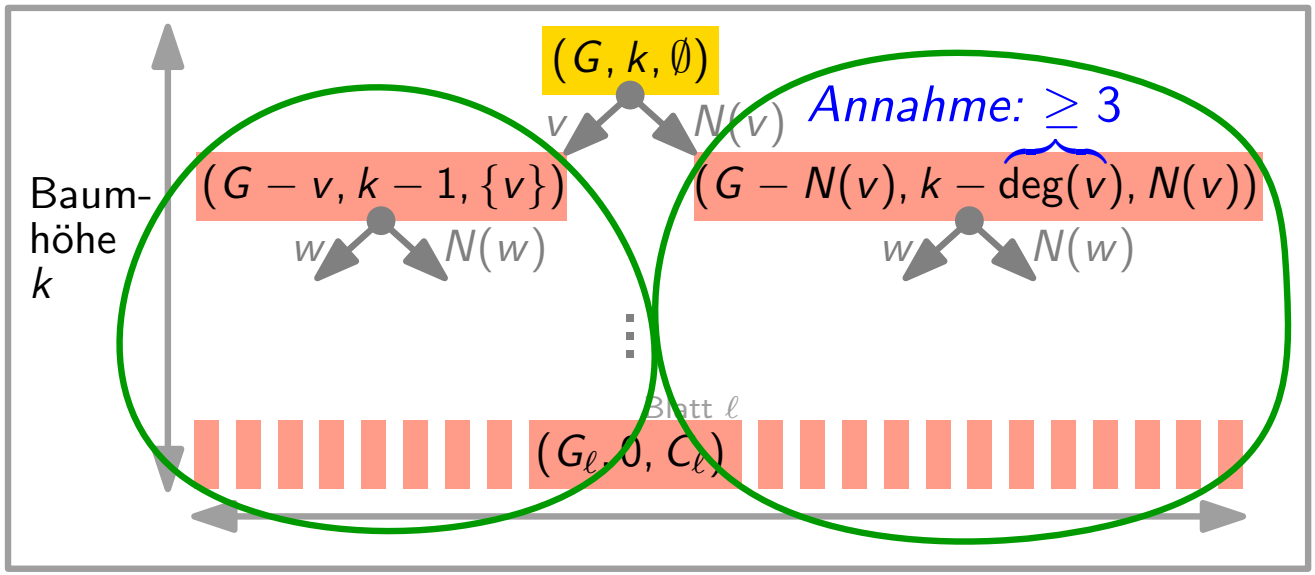
**Idee.** Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.




$$\Rightarrow \quad T(k) = \; T(k-3) + T(k-1) + 1, \quad T(\leq 3) = const.$$

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.

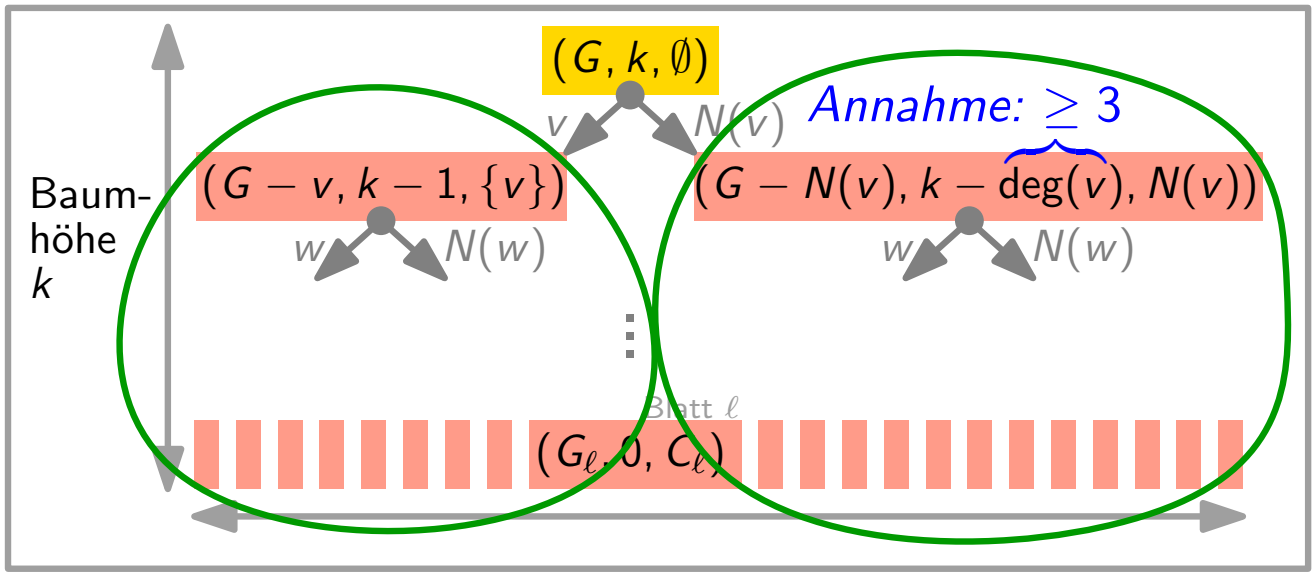



$$\Rightarrow \quad T(k) = T(k-3) + T(k-1) + 1, \quad T(\leq 3) = const.$$

*Verzweigungsvektor* $(3, 1)$

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



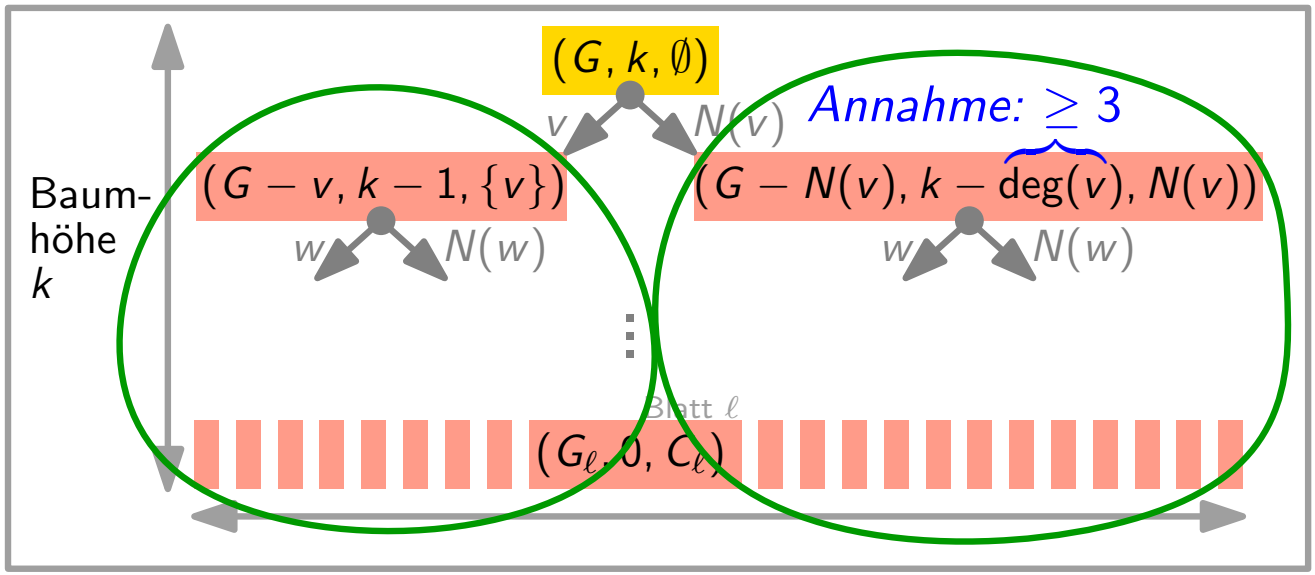

$$\Rightarrow \quad T(k) = T(k-3) + T(k-1) + 1, \quad T(\leq 3) = const.$$

*Verzweigungsvektor* $(3, 1)$

Teste $T(k) = z^k - 1$

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



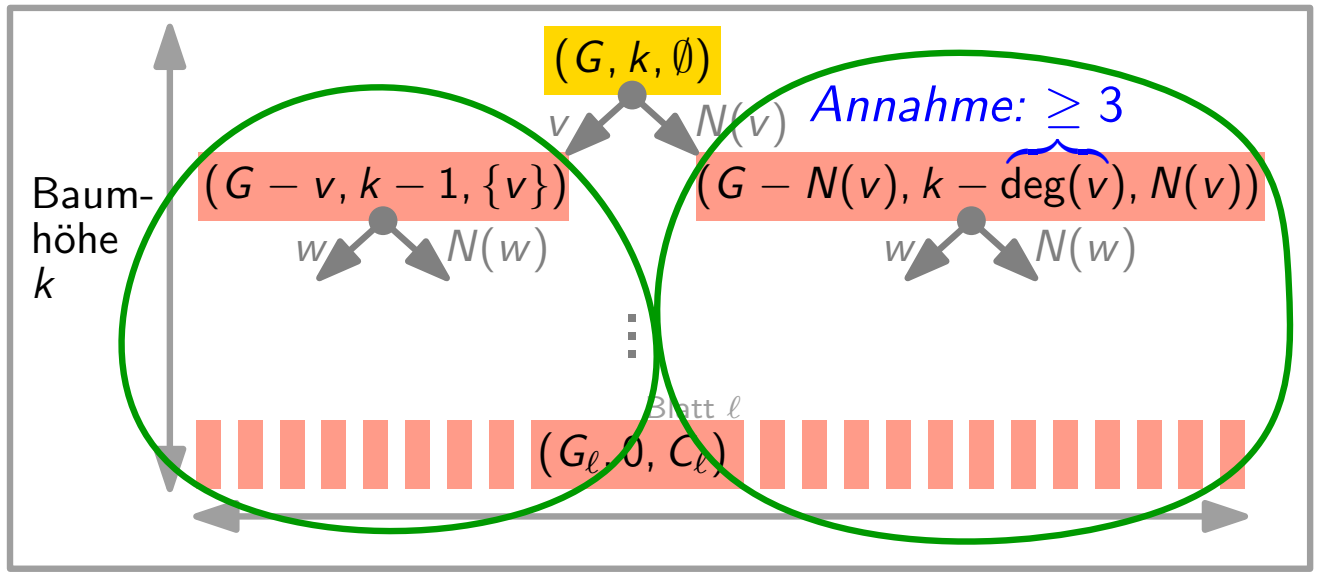

$$\Rightarrow \quad T(k) = T(k-3) + T(k-1) + 1, \quad T(\leq 3) = const.$$

*Verzweigungsvektor* $(3, 1)$

Teste $T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k =$

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



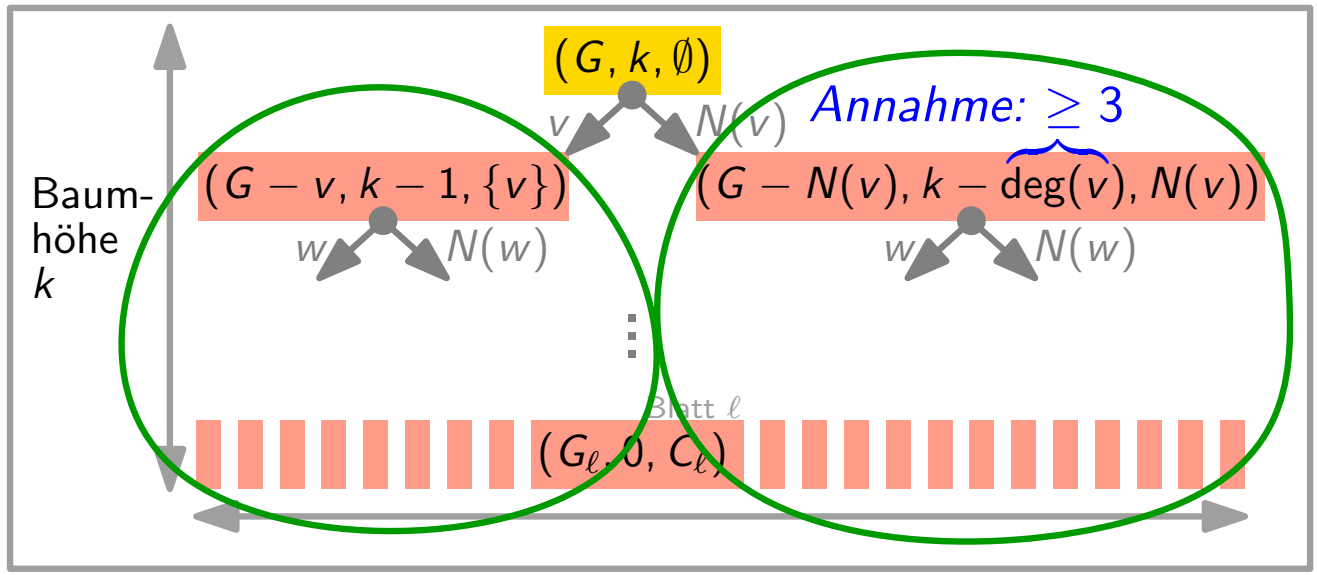

$$\Rightarrow \quad T(k) = T(k-3) + T(k-1) + 1, \quad T(\leq 3) = const.$$

*Verzweigungsvektor* $(3, 1)$

Teste $T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k = z^{k-3} + z^{k-1}$

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



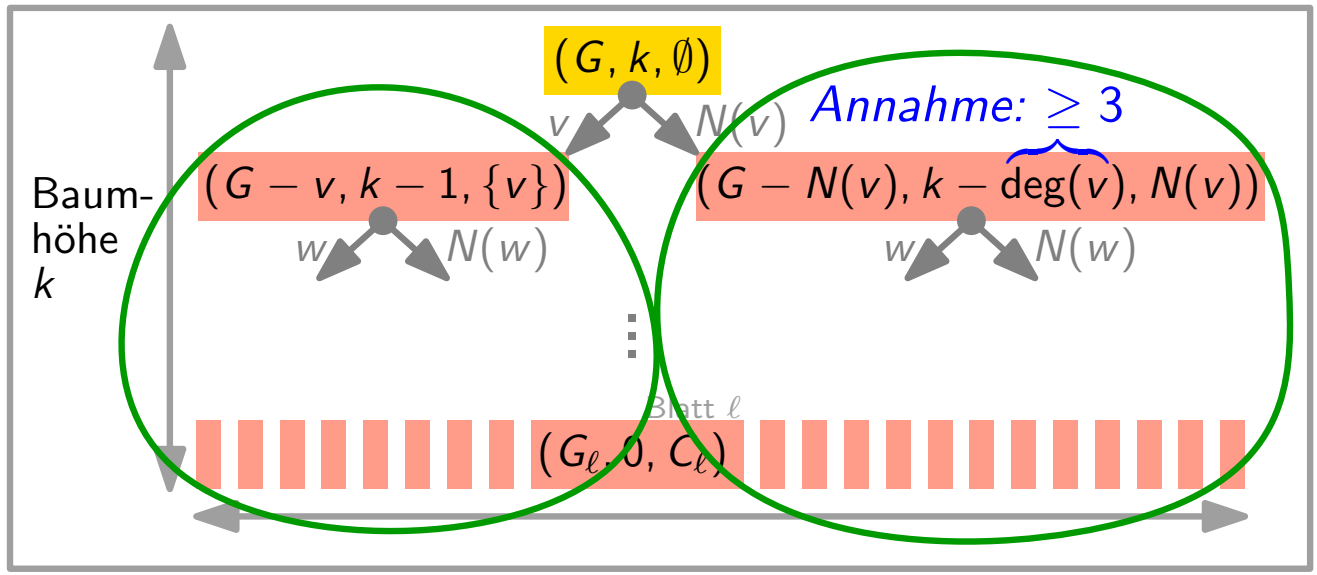

$$\Rightarrow \quad T(k) = T(k-3) + T(k-1) + 1, \quad T(\leq 3) = const.$$

*Verzweigungsvektor* $(3, 1)$

Teste $T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k = z^{k-3} + z^{k-1}$

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



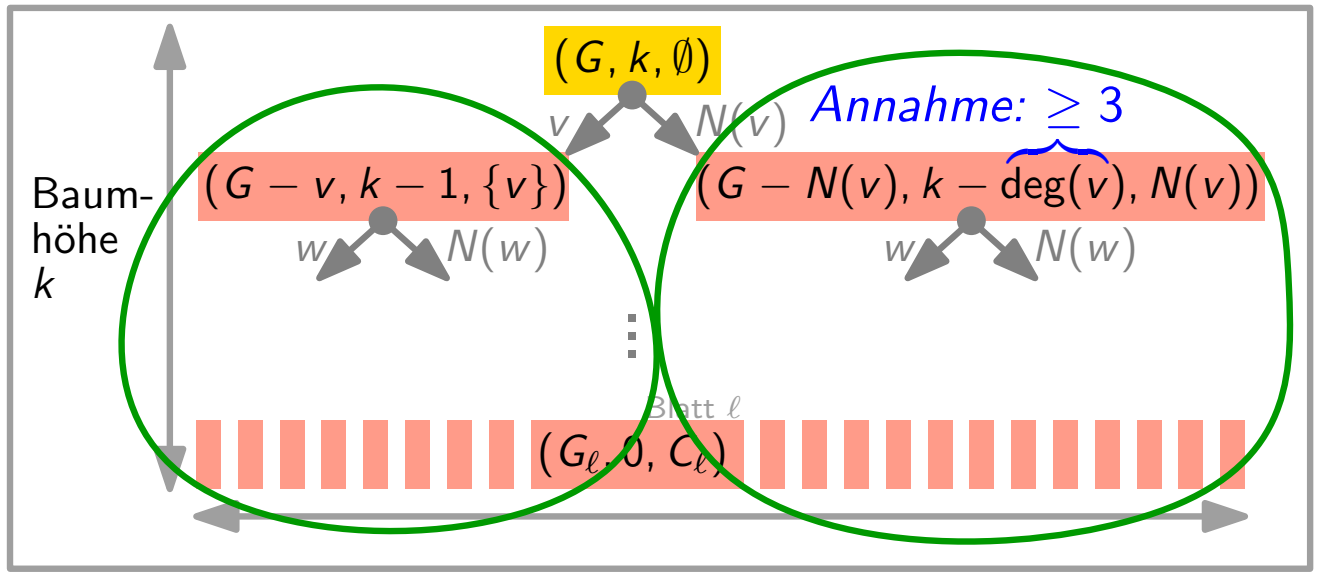

$$\Rightarrow \quad T(k) = T(k-3) + T(k-1) + 1, \quad T(\leq 3) = const.$$

*Verzweigungsvektor* $(3, 1)$

Teste $T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k = z^{k-3} + z^{k-1} \quad \cdot \frac{1}{z^{k-3}}$

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.




$$\Rightarrow \quad T(k) = T(k-3) + T(k-1) + 1, \quad T(\leq 3) = const.$$

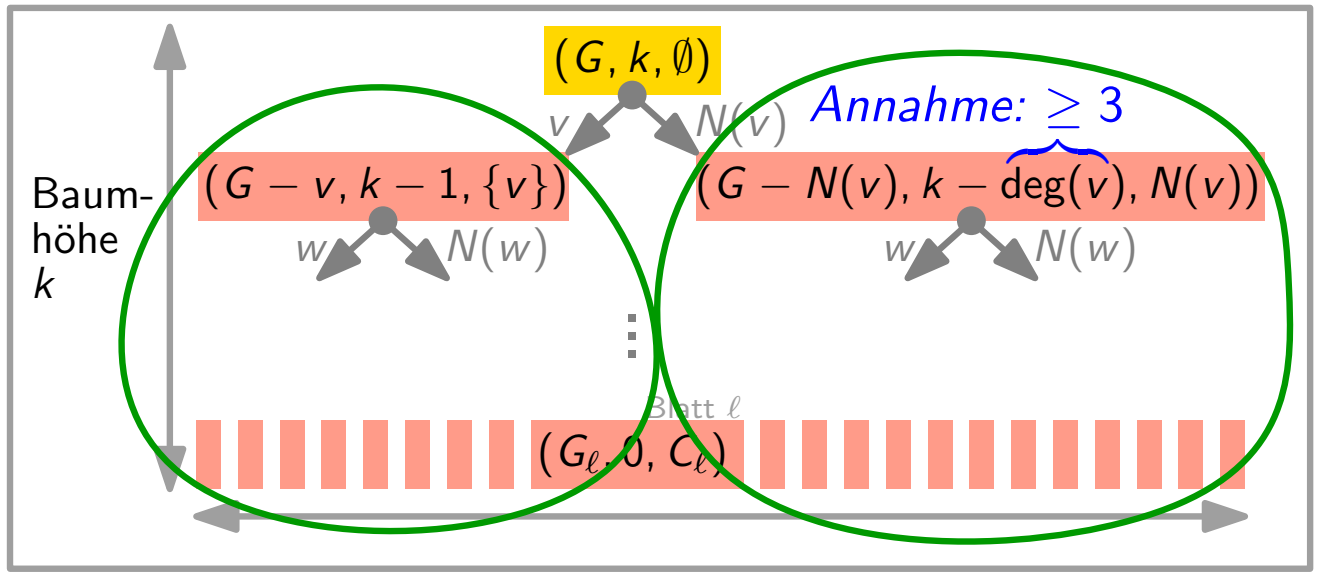
*Verzweigungsvektor* $(3, 1)$

Teste $T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k = z^{k-3} + z^{k-1}$ $\cdot \frac{1}{z^{k-3}}$

$\Rightarrow$ Charakteristisches Polynom: $z^3 = 1 + z^2$

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.




$\Rightarrow \quad T(k) = T(k-3) + T(k-1) + 1, \quad T(\leq 3) = const.$

*Verzweigungsvektor* $(3, 1)$

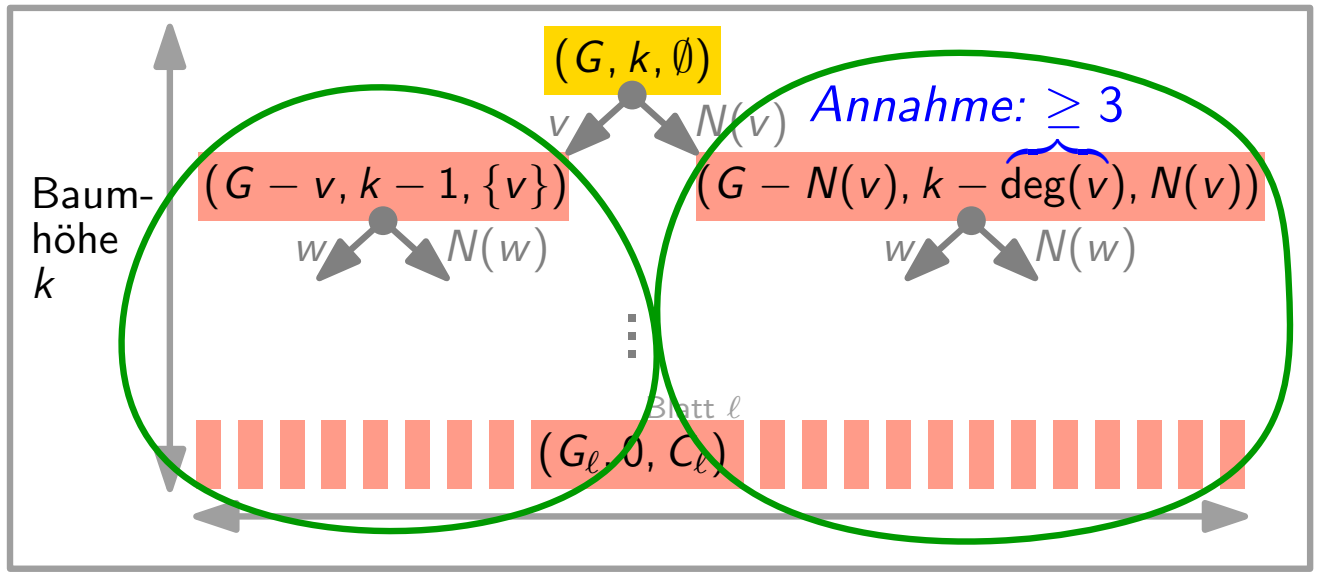
Teste $T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k = z^{k-3} + z^{k-1}$ $\cdot \frac{1}{z^{k-3}}$

$\Rightarrow$ Charakteristisches Polynom: $z^3 = 1 + z^2$

$\Rightarrow$ Größte positive Lösung:

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.




$\Rightarrow \quad T(k) = T(k-3) + T(k-1) + 1, \quad T(\leq 3) = const.$

*Verzweigungsvektor* $(3, 1)$

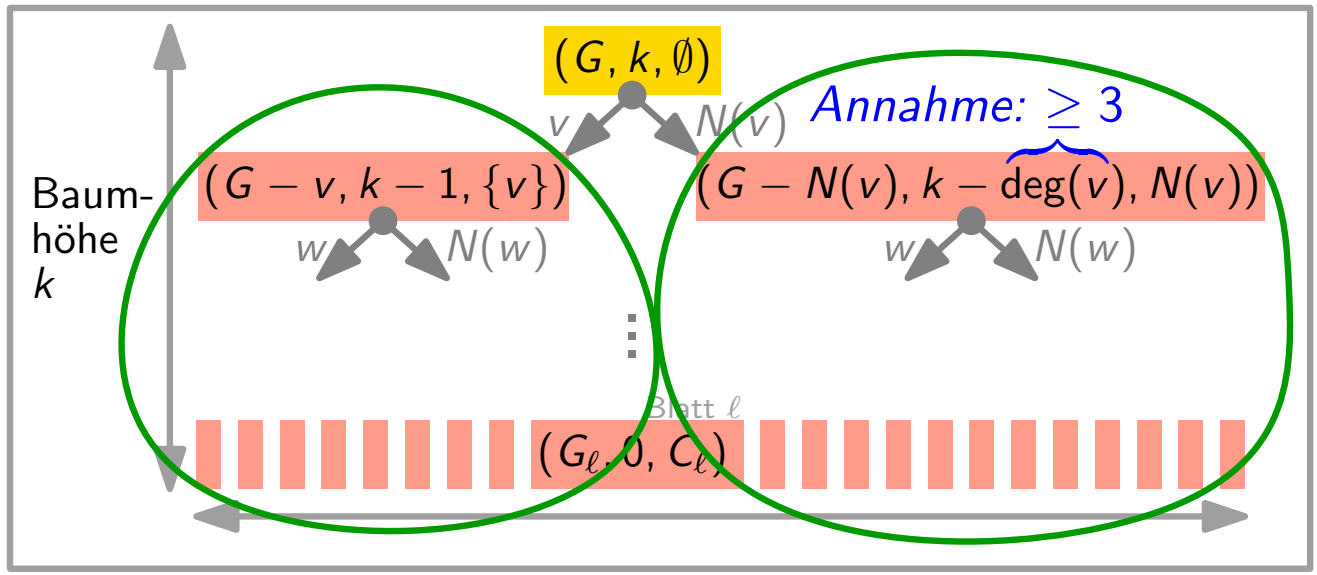
Teste $T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k = z^{k-3} + z^{k-1}$ $\quad \cdot \frac{1}{z^{k-3}}$

$\Rightarrow$ Charakteristisches Polynom: $z^3 = 1 + z^2$

$\Rightarrow$ Größte positive Lösung: $z \approx 1{,}47$ (*Verzweigungszahl*)

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.




$\Rightarrow \quad T(k) = T(k-3) + T(k-1) + 1, \quad T(\leq 3) = const.$

*Verzweigungsvektor* $(3, 1)$

Teste $T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k = z^{k-3} + z^{k-1}$ $\quad \cdot \frac{1}{z^{k-3}}$

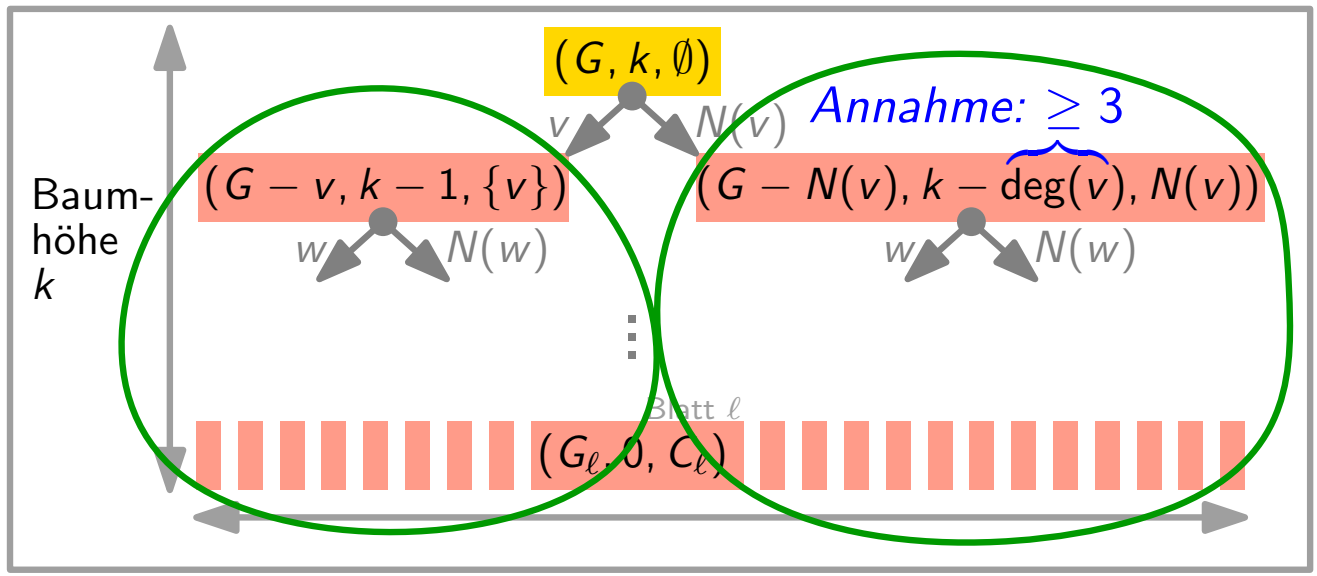
$\Rightarrow$ Charakteristisches Polynom: $z^3 = 1 + z^2$

$\Rightarrow$ Größte positive Lösung: $z \approx 1{,}47$ $\quad$ (*Verzweigungszahl*)

$\Rightarrow \quad T(k) \in O(1{,}47^k)$.

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee.** Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.




$\Rightarrow$ $T(k) = T(k-3) + T(k-1) + 1$, $T(\leq 3) = const.$

*Verzweigungsvektor* $(3, 1)$

Teste $T(k) = z^k - 1$ $\Rightarrow$ $z^k = z^{k-3} + z^{k-1}$ $\cdot \frac{1}{z^{k-3}}$

$\Rightarrow$ Charakteristisches Polynom: $z^3 = 1 + z^2$

$\Rightarrow$ Größte positive Lösung: $z \approx 1{,}47$ (*Verzweigungszahl*)

$\Rightarrow$ $T(k) \in O(1{,}47^k)$. Aber wie stellen wir $\deg(v) \geq 3$ sicher?

# Kernbildung II

**Bisherige Kernbildung:**

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

# Kernbildung II

**Bisherige Kernbildung:**

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

# Kernbildung II

**Bisherige Kernbildung:**

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

**Verbesserte Kernbildung:**

Regel 1:

Regel 2:

# Kernbildung II

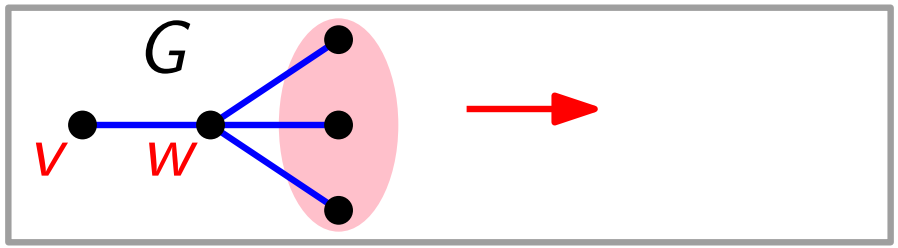
## Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

## Verbesserte Kernbildung:

Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1




Regel 2:

# Kernbildung II

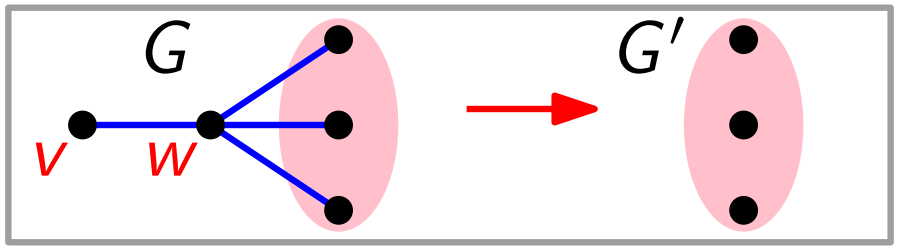
## Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

## Verbesserte Kernbildung:

Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1




Regel 2:

# Kernbildung II

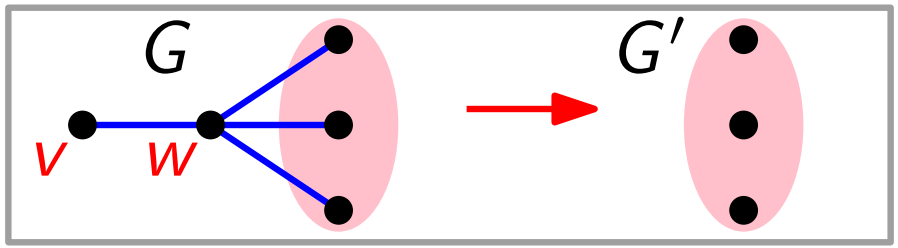
## Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

## Verbesserte Kernbildung:

Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1




Setze $k' = k - 1$.
Berechne $C'$.

Regel 2:

# Kernbildung II

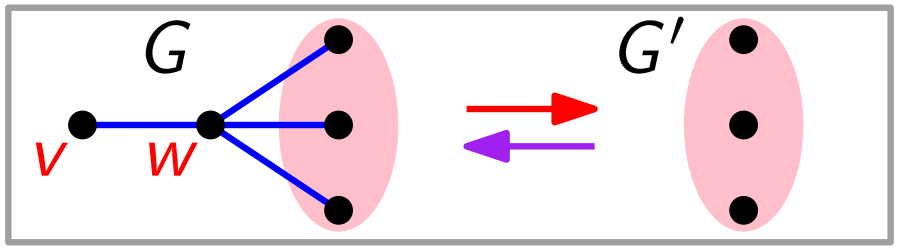
## Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

## Verbesserte Kernbildung:

Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1




Setze $k' = k - 1$.
Berechne $C'$.

Regel 2:

# Kernbildung II

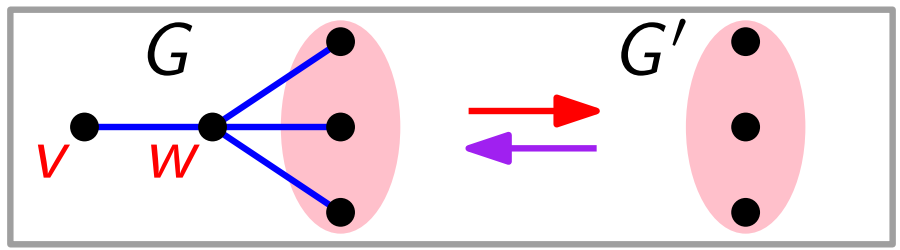
## Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

## Verbesserte Kernbildung:

Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1




Setze $k' = k - 1$.
Berechne $C'$.

$C = C' \cup \{w\}$

Regel 2:

# Kernbildung II

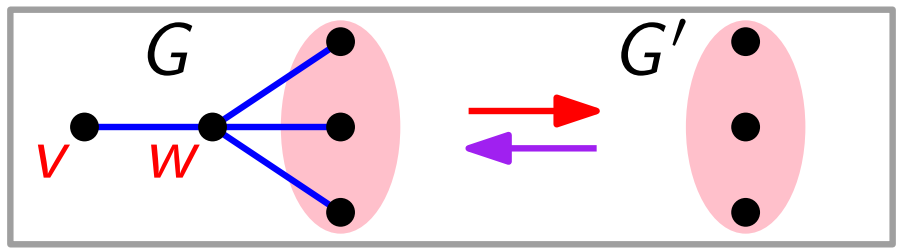
## Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

## Verbesserte Kernbildung:

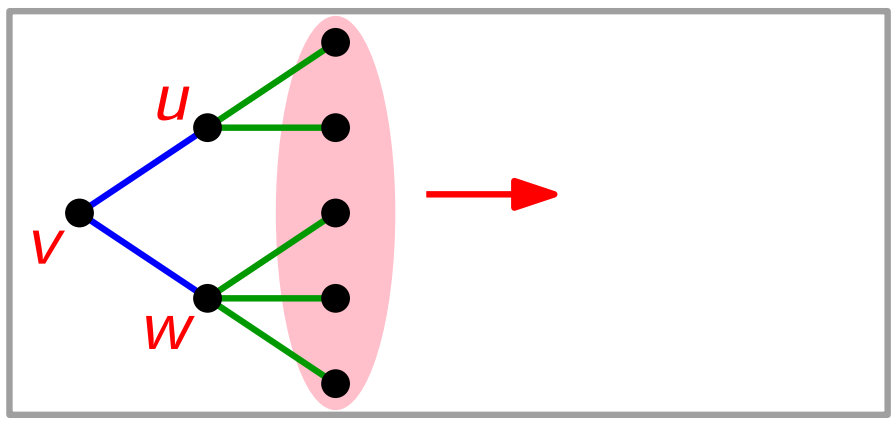
Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1




Setze $k' = k - 1$.
Berechne $C'$.

$C = C' \cup \{w\}$

Regel 2: Eliminiere Knoten mit Grad 2



# Kernbildung II

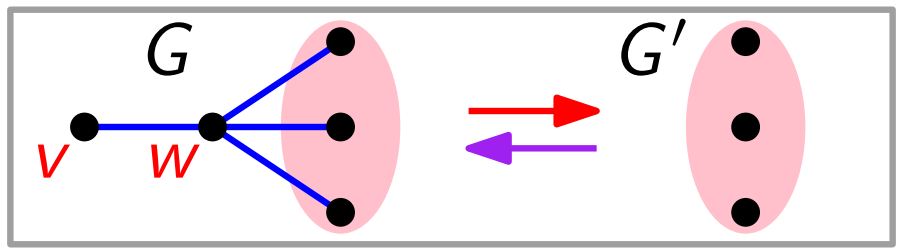
## Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

## Verbesserte Kernbildung:

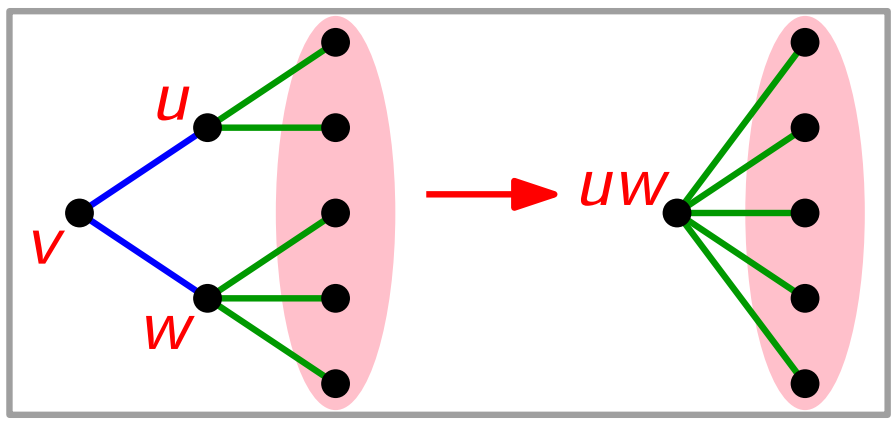
Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1




Setze $k' = k - 1$.
Berechne $C'$.

$C = C' \cup \{w\}$

Regel 2: Eliminiere Knoten mit Grad 2



# Kernbildung II

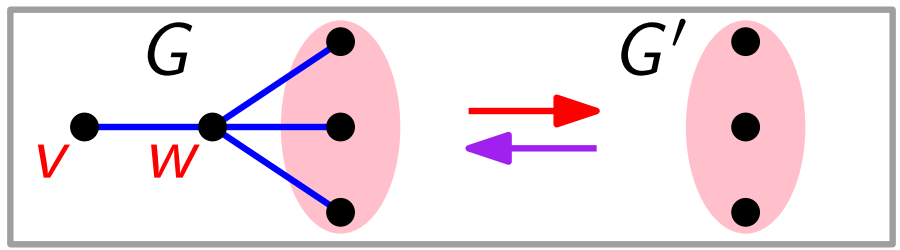
## Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

## Verbesserte Kernbildung:

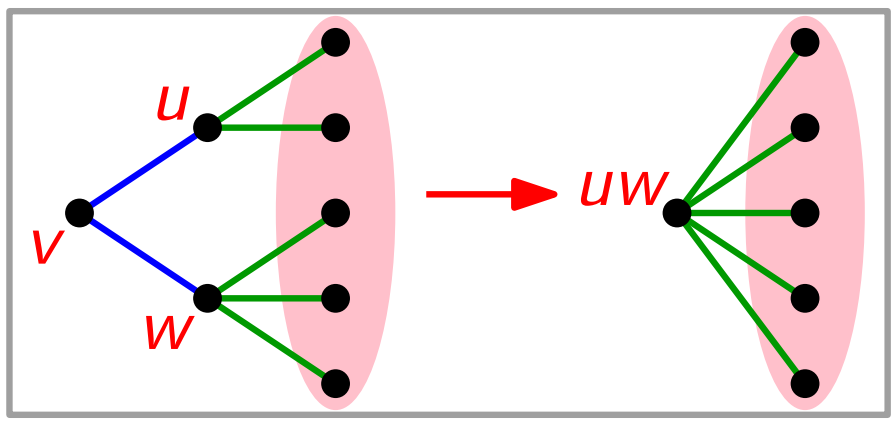
Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1




Setze $k' = k - 1$.
Berechne $C'$.

$C = C' \cup \{w\}$

Regel 2: Eliminiere Knoten mit Grad 2




Setze $k' = k - 1$.

# Kernbildung II

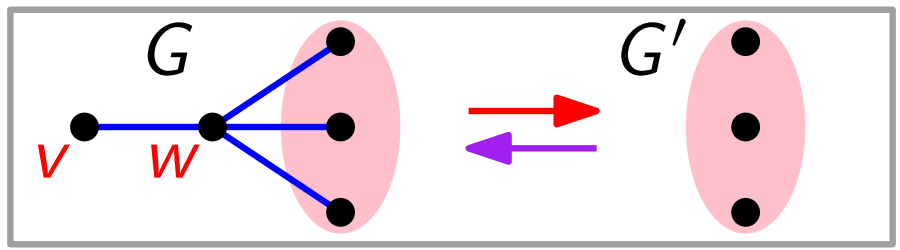
## Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

## Verbesserte Kernbildung:

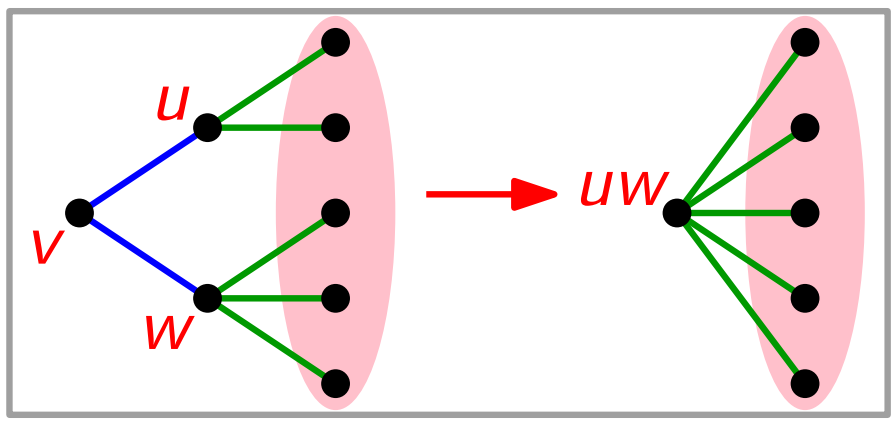
Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1




Setze $k' = k - 1$.
Berechne $C'$.

$C = C' \cup \{w\}$

Regel 2: Eliminiere Knoten mit Grad 2




Setze $k' = k - 1$.
Berechne $C'$.

# Kernbildung II

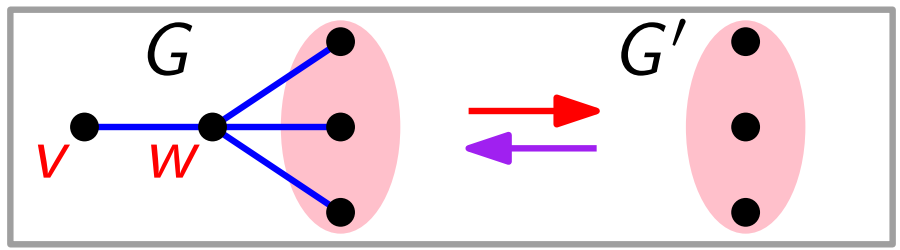
## Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

## Verbesserte Kernbildung:

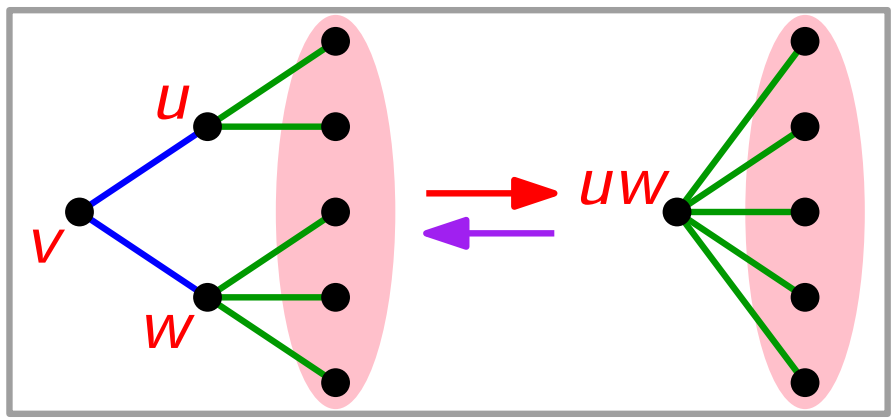
Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1




Setze $k' = k - 1$.
Berechne $C'$.

$C = C' \cup \{w\}$

Regel 2: Eliminiere Knoten mit Grad 2




Setze $k' = k - 1$.
Berechne $C'$.

# Kernbildung II

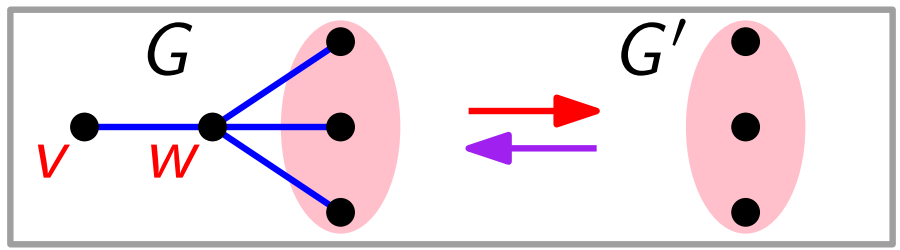
## Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

## Verbesserte Kernbildung:

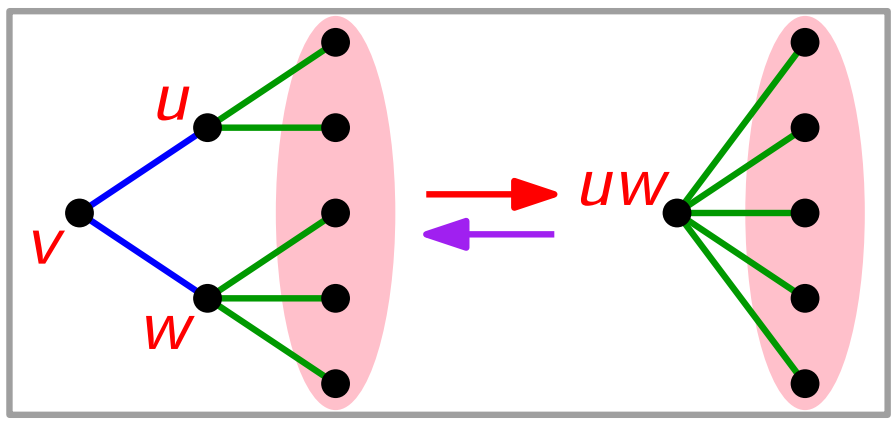
Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1




Setze $k' = k - 1$.
Berechne $C'$.

$C = C' \cup \{w\}$

Regel 2: Eliminiere Knoten mit Grad 2




Setze $k' = k - 1$.
Berechne $C'$.

Falls $uw \in C'$,
nimm $u$ und $w$ in $C$,
sonst $v$

# Kernbildung II

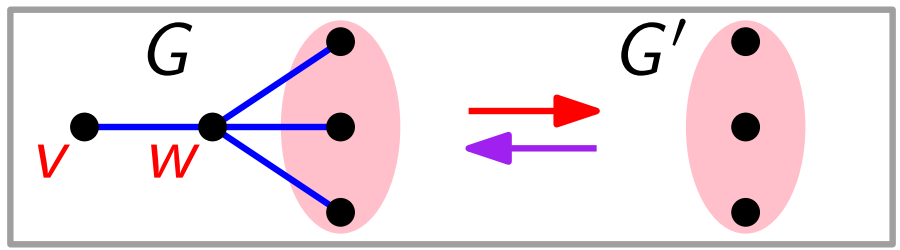
## Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

## Verbesserte Kernbildung:

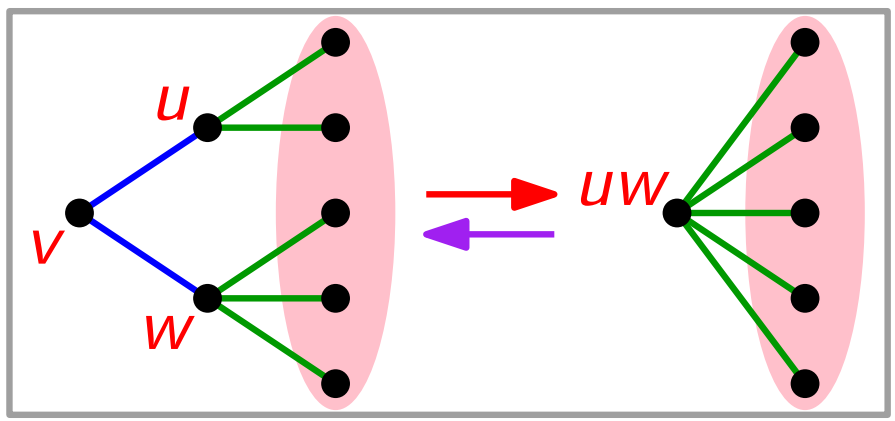
Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1




Setze $k' = k - 1$.
Berechne $C'$.

$C = C' \cup \{w\}$

Regel 2: Eliminiere Knoten mit Grad 2




Setze $k' = k - 1$.
Berechne $C'$.

Falls $uw \in C'$,
nimm $u$ und $w$ in $C$,
sonst $v$ $(\Rightarrow k = k'+1)$

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee:** Wende die verbesserte Kernbildung *in jedem Knoten* des Suchbaums *erschöpfend* an!

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee:** Wende die verbesserte Kernbildung *in jedem Knoten* des Suchbaums *erschöpfend* an!

$\Rightarrow$ **Laufzeit**:

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee:** Wende die verbesserte Kernbildung *in jedem Knoten* des Suchbaums *erschöpfend* an!

$\Rightarrow$ **Laufzeit**: $O(\square + \square \cdot 1{,}47^k)$

Vorverarbeitung  Kernbildung in jedem Knoten

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee:** Wende die verbesserte Kernbildung *in jedem Knoten* des Suchbaums *erschöpfend* an!

$\Rightarrow$ **Laufzeit**: $O(nk + \square \cdot 1{,}47^k)$

Vorverarbeitung  Kernbildung in jedem Knoten

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee:** Wende die verbesserte Kernbildung *in jedem Knoten* des Suchbaums *erschöpfend* an!

$\Rightarrow$ **Laufzeit**: $O(nk + k^2 \cdot 1{,}47^k)$

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee:** Wende die verbesserte Kernbildung *in jedem Knoten* des Suchbaums *erschöpfend* an!

$\Rightarrow$ **Laufzeit**: $O(nk + k^2 \cdot 1{,}47^k) \subseteq O^\star(1{,}47^k)$

Vorverarbeitung — Kernbildung in jedem Knoten

# Der Grad-3-Algorithmus

**Idee:** Wende die verbesserte Kernbildung *in jedem Knoten* des Suchbaums *erschöpfend* an!

$\Rightarrow$ **Laufzeit**: $O(nk + k^2 \cdot 1{,}47^k) \subseteq O^\star(1{,}47^k)$

Vorverarbeitung — Kernbildung in jedem Knoten

Der Grad-3-Algorithmus ist also ein Fest-Parameter-Algorithmus.

# Fazit

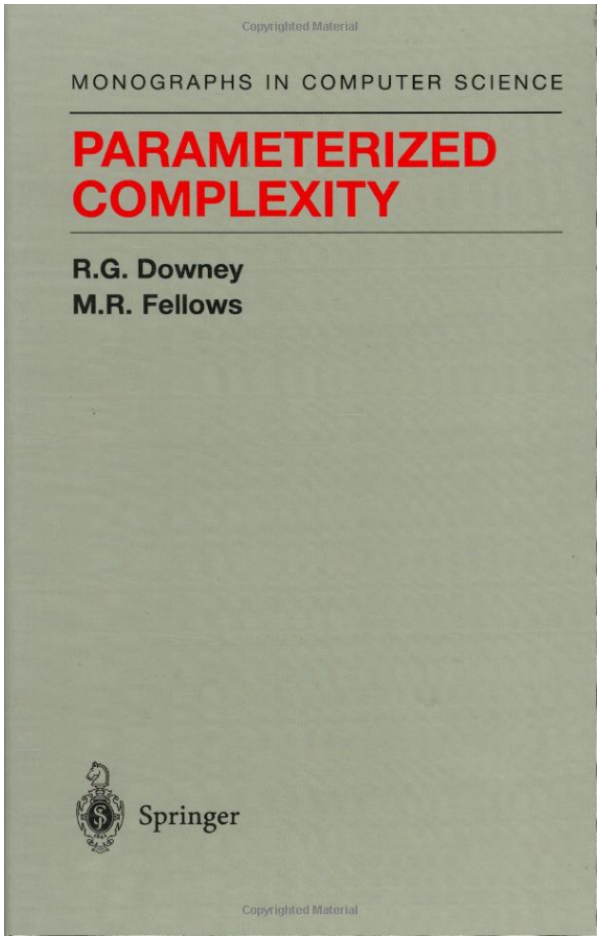
- $k$-VC kann in $O(nk + 1{,}47^k k^2)$ Zeit gelöst werden.
  Der momentan beste FPT-Algo läuft in $O^\star(1{,}27^k)$ Zeit.
  [Chen, Kanj, Jia, 2001]

- Parametrisierte Komplexität =
  neuer Werkzeugkasten für schwere Probleme:
  Kernbildung, Suchbäume, dynamische Programmierung, ...

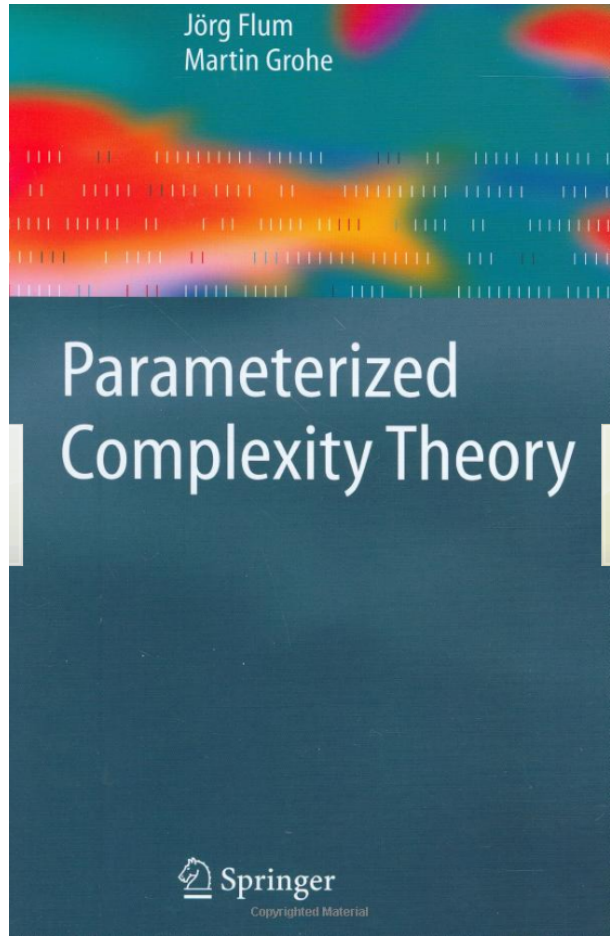
- Es ist immer sinnvoll, beschränkte Parameter zu identifizieren – FPT nutzt sie!

- Hoffnung:
  „natürliches“ Problem $P \in \mathcal{FPT} \Rightarrow f(k)$ erträglich.

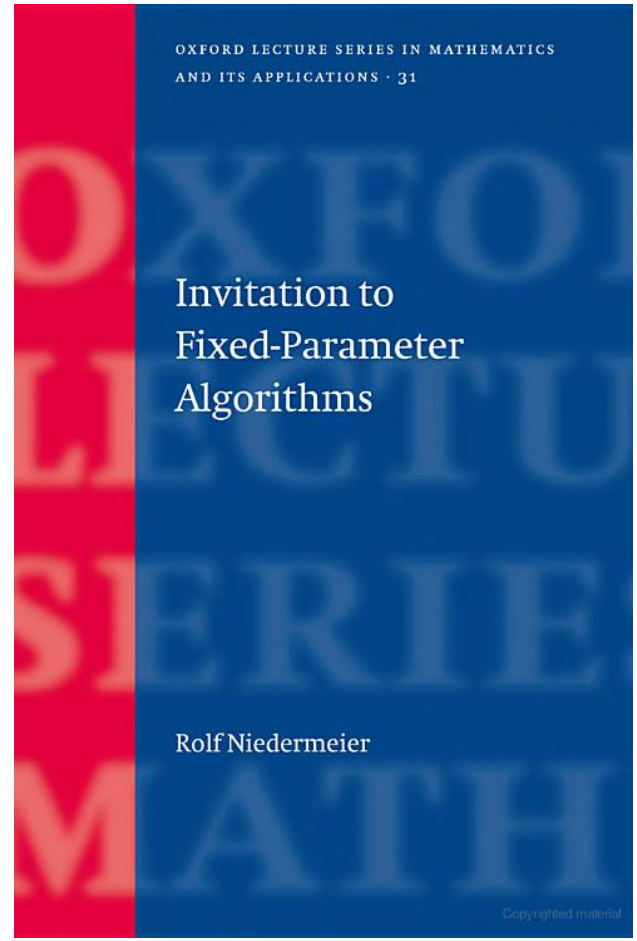
# Bücher zum Thema




1999




2006




2006