AGT, 2.6.2021

Der Min-Cut-Algorithmus von Stoer & Wagner

[J. ACM 1997]

Satz: Sei G ein Graph mit Kantengewichten $w: E(G) \to \mathbb{R}_{\geq}$
Seien s und t zwei beliebige Knoten von G.
Sei G' der Graph, der aus G entsteht, wenn man s und t kontrahiert.
Dann ist ein <u>minimaler Schnitt von G</u>:
- ein minimaler Schnitt in G' <u>oder</u>
- ein minimaler s-t-Schnitt in G.

Algorithmus:

MinCutPhase (Graph G, Gewichte w, Knoten a)

$A = \{a\}$, $n = |V(G)|$
while $|A| \leq n-2$ **do**
  v = <u>am stärksten mit A verbundener Knoten in $V \setminus A$</u> $= \operatorname{argmax}_{u \in V \setminus A} w(A,u)$ $=: \sum_{a' \in A} w(a',u)$
  $A = A \cup \{v\}$
$s = v$ // vorletzter Knoten in V
$\{t\} = V \setminus A$ // letzter Knoten in V
$(S,T) = (V \setminus \{t\}, \{t\})$
$G = G / \{s,t\}$ // verschmelze s und t
return (S,T) // „cut-of-the-phase"

MinCut (Graph G, Gewichte w)

$w^* = \infty$; $S^* = \emptyset$; $T^* = V(G)$

while $|V| > 1$ **do**

  a = bel. Knoten von G

  (S, T) = MinCutPhase (G, w, a)

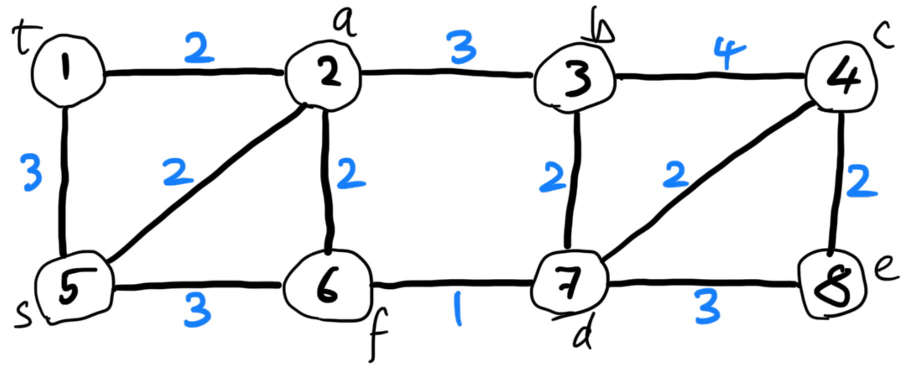
  if $w(S,T) < w^*$ **then**

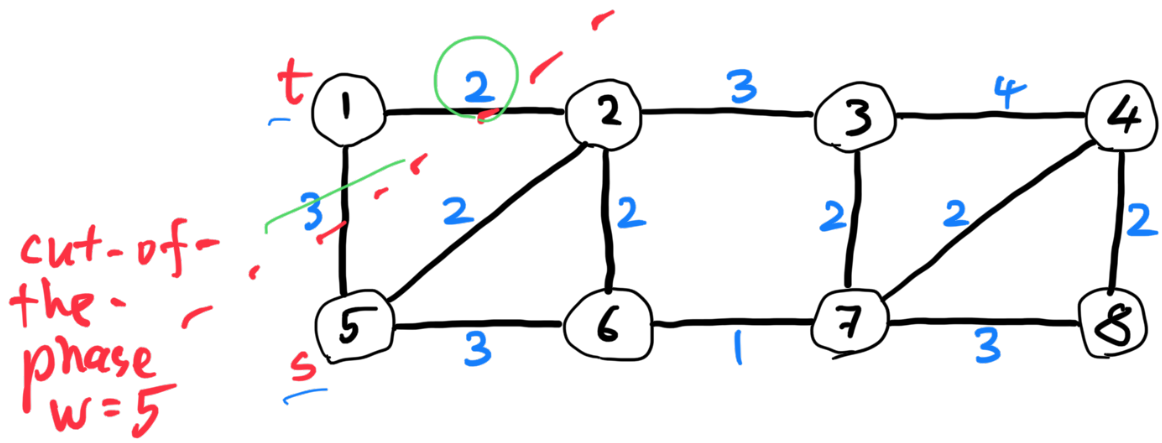
    $w^* = w(S,T)$

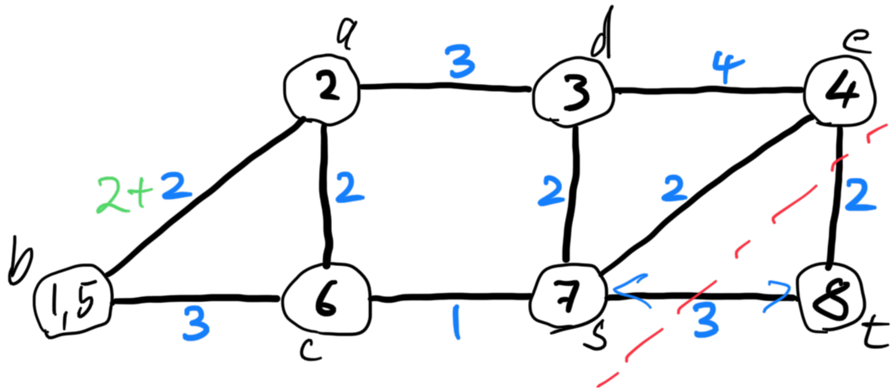
    $S^* = S$; $T^* = T$

return (S^*, T^*)

Beispiel:







2. cut-of-the-phase: $w=5$

Aufgabe: Machen Sie weiter!
Der kleinste Schnitt ist der kleinste „cut-of-the-phase".

Auflösung: Im sehr lesbaren Orginalartikel!
- Ist auf WueCampus verlinkt.
- ~~Hat~~ auf der Konferenz ESA 2015 den „Test of Time ~~Award~~" gewonnen :-)

Gesamtlaufzeit: $(n-1)\cdot O(\overset{|E|}{\overset{\shortparallel}{m}} + \overset{|V|}{\overset{\shortparallel}{n}}\log n)$

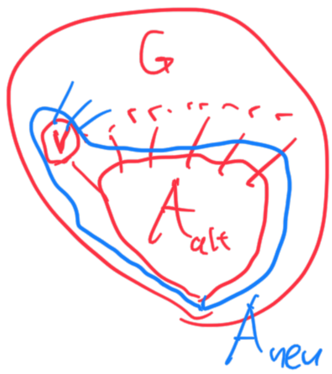
Stoer + Wagner (J. ACM '97)

$= O(mn + n^2 \log n)$
(deterministisch)

Eine Phase:

wie Dijkstra

Fibonacci-Heaps $\rightarrow$ $\boxed{O(E + V \log V)}$



Vgl. Karger (bester Algo, STOC '96) $O(m \cdot \log^3 n)$
(randomisiert)