Graphen und diskrete Optimierung

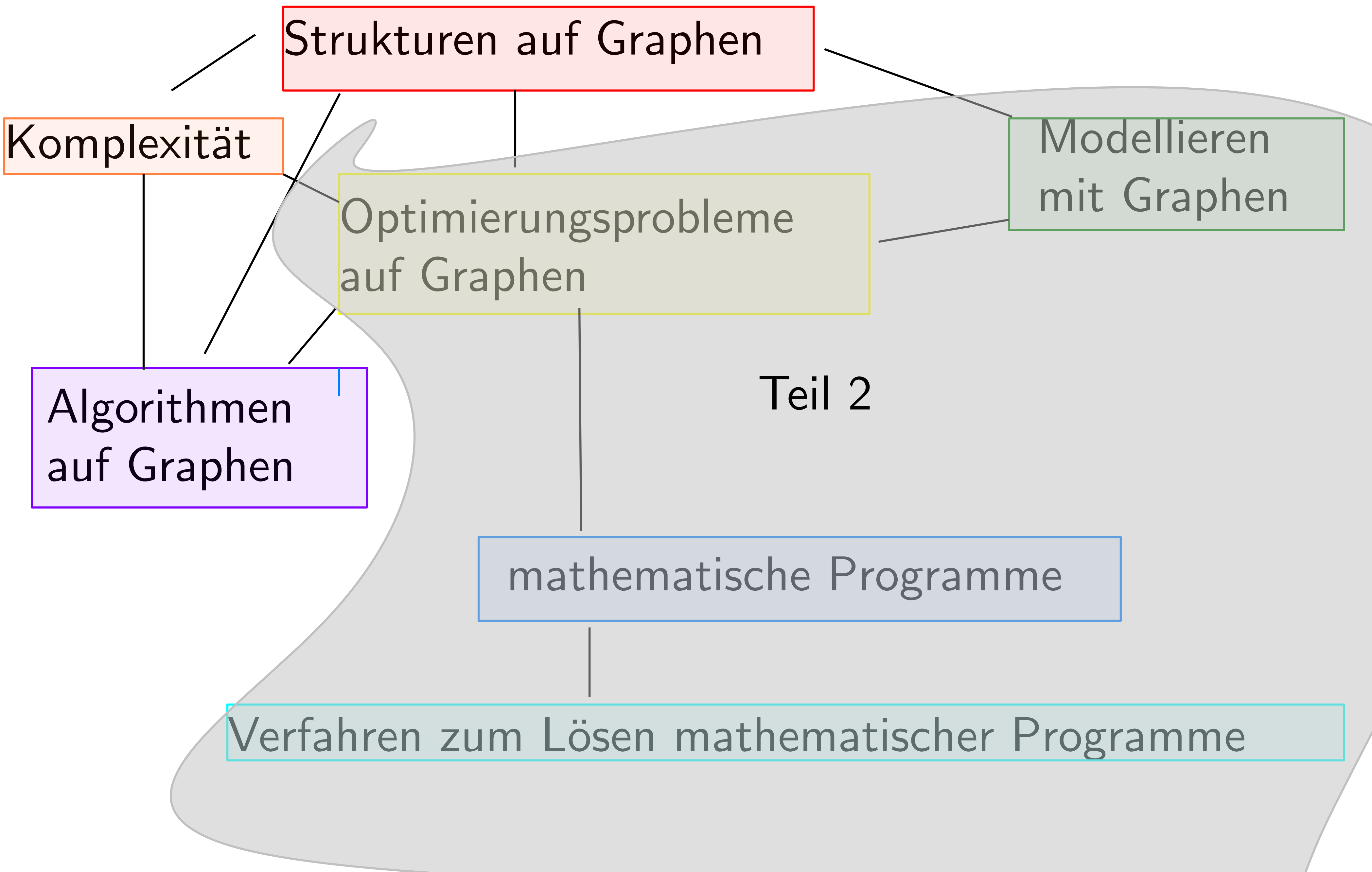
im Bachelorstudiengang 'Informatik und Nachhaltigkeit'

Lineare Programmierung

Marie Schmidt

14.06.2023

Worum soll er hier gehen?



Vorlesungsübersicht

- Einführung: Modellieren auf Graphen ✓
- Teil 1: Graphen und Algorithmen auf Graphen ✓
- Teil 2: Mathematische Programmierung
  - Einführung in die lineare und ganzzahlig lineare Programmierung ✓
    - Was sind lineare / ganzzahlig lineare Programme ✓
    - Modellierung als lineares / ganzzahlig lineares Programm ✓
    - Graphische Lösungsmethode für lineare Programme mit zwei Variablen ✓
  - lineare Programmierung
    - Hauptsatz der linearen Optimierung
    - Simplexverfahren
    - Komplexität lineare Programmierung
    - Dualität
  - ganzzahlige Programmierung

Literaturempfehlungen Teil 2

- Hamacher & Klamroth: Lineare Optimierung und Netzwerkoptimierung
- Burkard & Zimmermann: Einführung in die mathematische Optimierung
- Korte & Vygen: Kombinatorische Optimierung

alle drei über die Unibib als E-Book verfügbar

Lineare Programme

soll heißen: Formulierung eines Opt.problems mit Hilfe von Variablen, Nebenbed.& Zielfkt

Wir nennen ein mathematisches Programm **linear**, wenn

- die Zielfunktion **(affin) linear** in den Variablen ist
  z.B. $5x_1 - 17x_2 + 9x_3 + 78$
- der zulässige Bereich ein **Polyeder** ist

Den zulässigen Bereich kann man dann durch eine Menge von **linearen Nebenbedingungen**, d.h.

- linearen **Gleichungen**, z.B. $4x_1 + 7x_2 - 56x_3 = 100$
- und/oder linearen **Ungleichungen**, z.B. $x_2 + 4x_3 \leq 10$ oder $6x_1 - x_3 \geq 0$

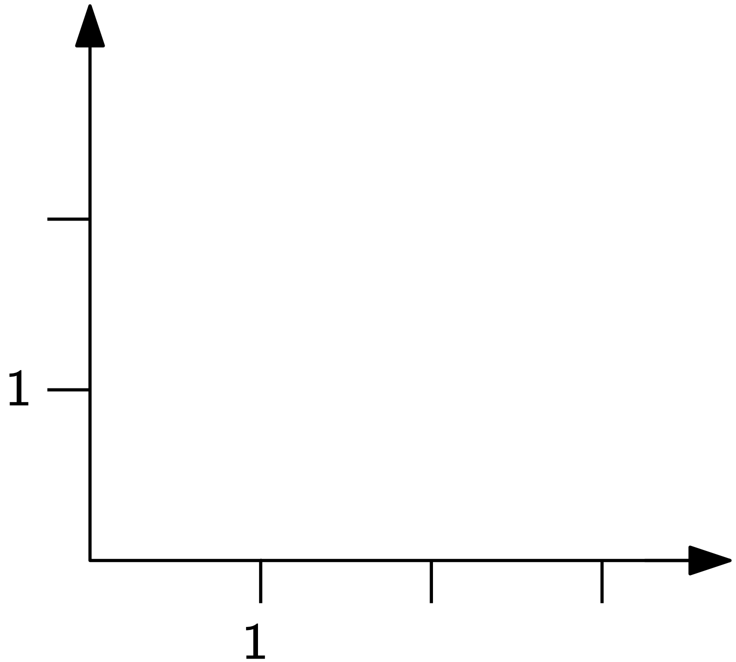
beschreiben

Das lineare Programm schreiben wir dann normalerweise so auf:

$$
\begin{aligned}
\min\ & 5x_1 - 17x_2 + 9x_3 + 78 \\
\text{so dass}\ & 4x_1 + 7x_2 - 56x_3 = 100 \\
& x_2 + 4x_3 \leq 10 \\
& 6x_1 - x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

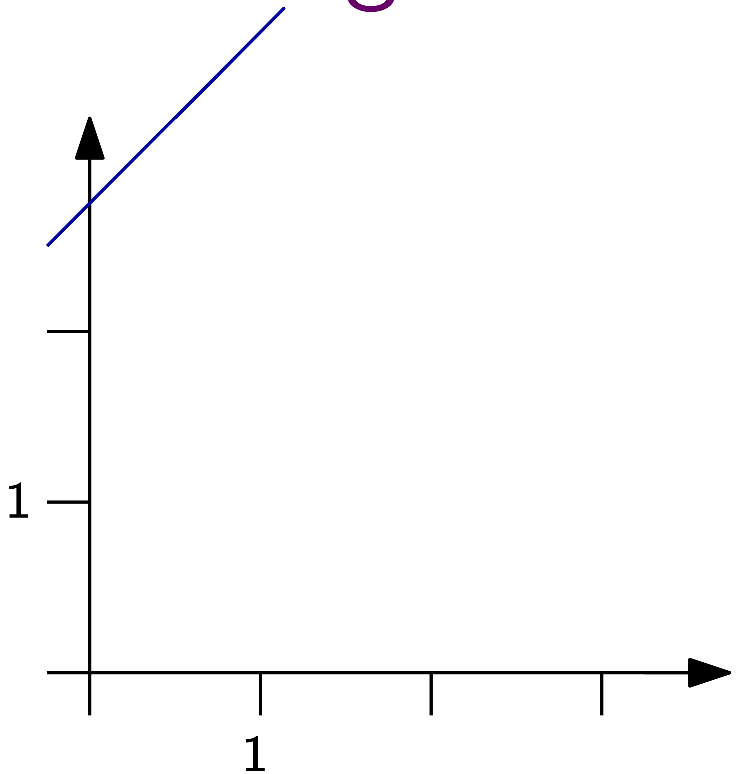
Englisch: lineares Programm = linear program (**LP**)

Zulässiger Bereich und Optimallösung



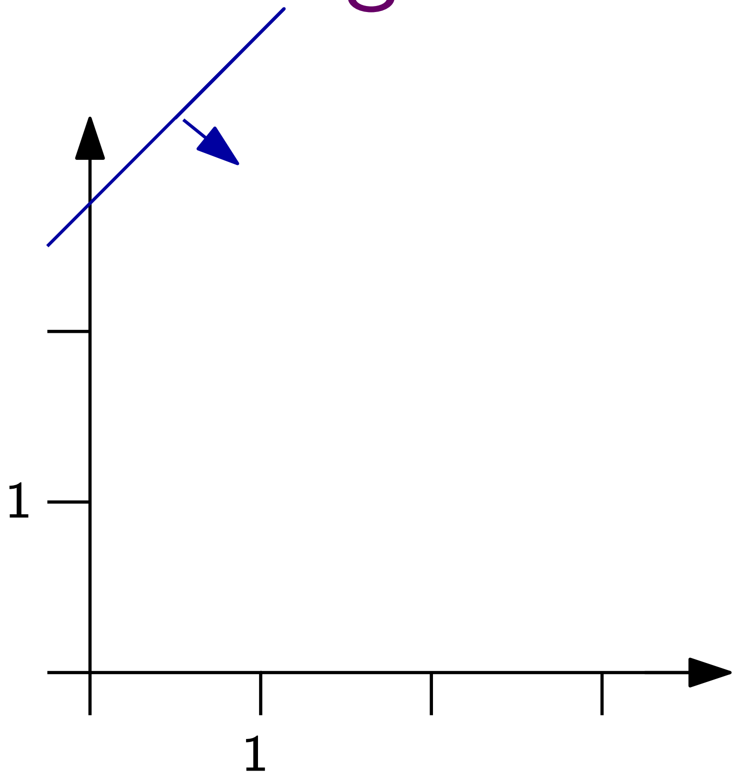
$$\begin{aligned} &\max\ x_1 + 8x_2 \\ \text{so dass}\ & -4x_1 + 4x_2 \leq 11 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & -4x_1 + x_2 \leq 14 \\ & x_1 + 6x_2 \leq 15 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



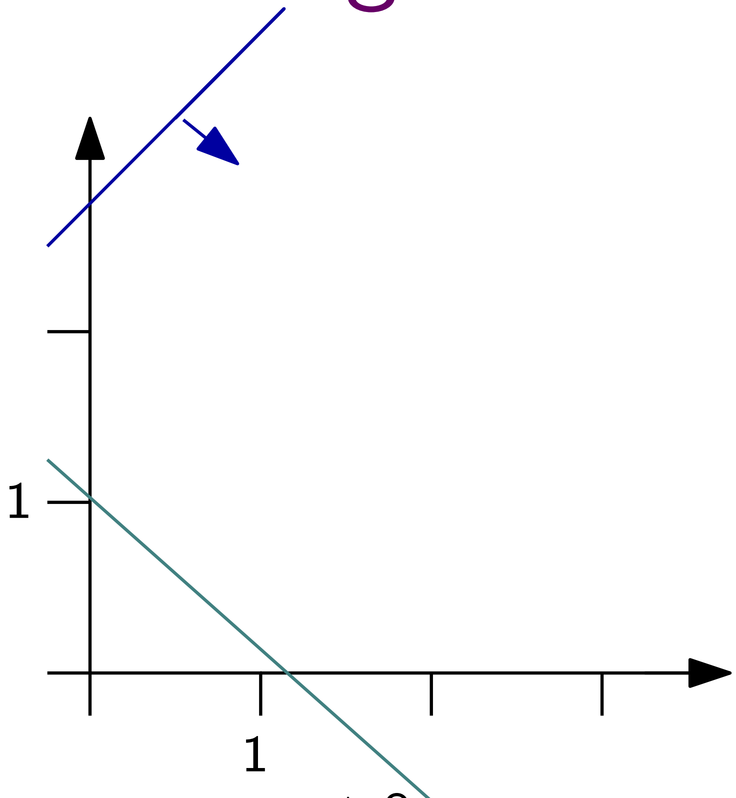
$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 8x_2 \\ \text{so dass}\ & \boxed{-4x_1 + 4x_2 \leq 11} \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & -4x_1 + x_2 \leq 14 \\ & x_1 + 6x_2 \leq 15 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



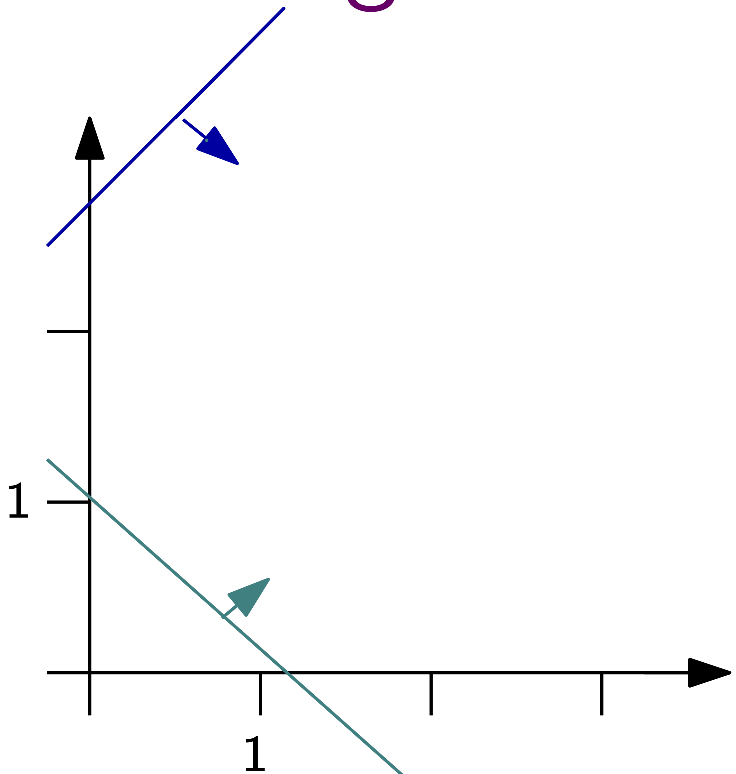
$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 8x_2 \\ \text{so dass}\ & \boxed{-4x_1 + 4x_2 \le 11} \\ & x_1 + x_2 \ge 1 \\ & -4x_1 + x_2 \le 14 \\ & x_1 + 6x_2 \le 15 \\ & 2x_1 - x_2 \le 2 \\ & x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



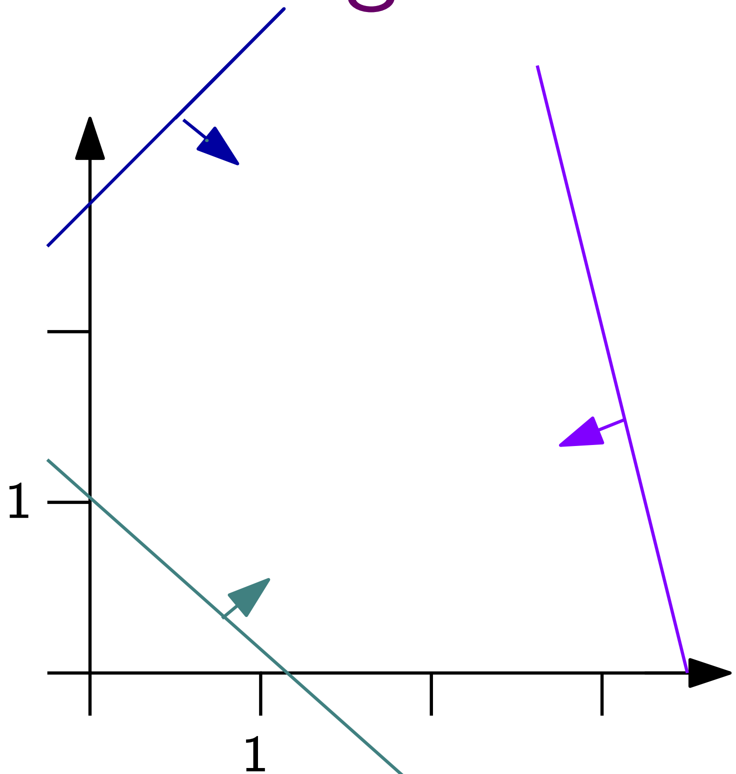
$$
\begin{aligned}
\text{max } & x_1 + 8x_2 \\
\text{so dass } & \boxed{-4x_1 + 4x_2 \leq 11} \\
& \boxed{x_1 + x_2 \geq 1} \\
& -4x_1 + x_2 \leq 14 \\
& x_1 + 6x_2 \leq 15 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 2 \\
& x_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



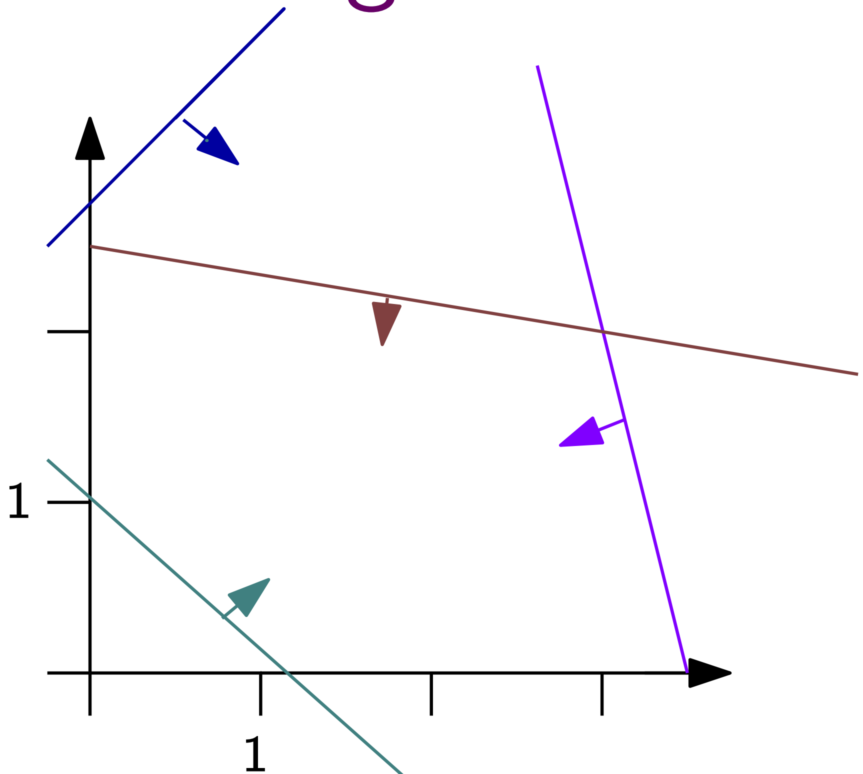
$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + 8x_2 \\
\text{so dass}\ & \boxed{-4x_1 + 4x_2 \leq 11} \\
& \boxed{x_1 + x_2 \geq 1} \\
& -4x_1 + x_2 \leq 14 \\
& x_1 + 6x_2 \leq 15 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 2 \\
& x_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



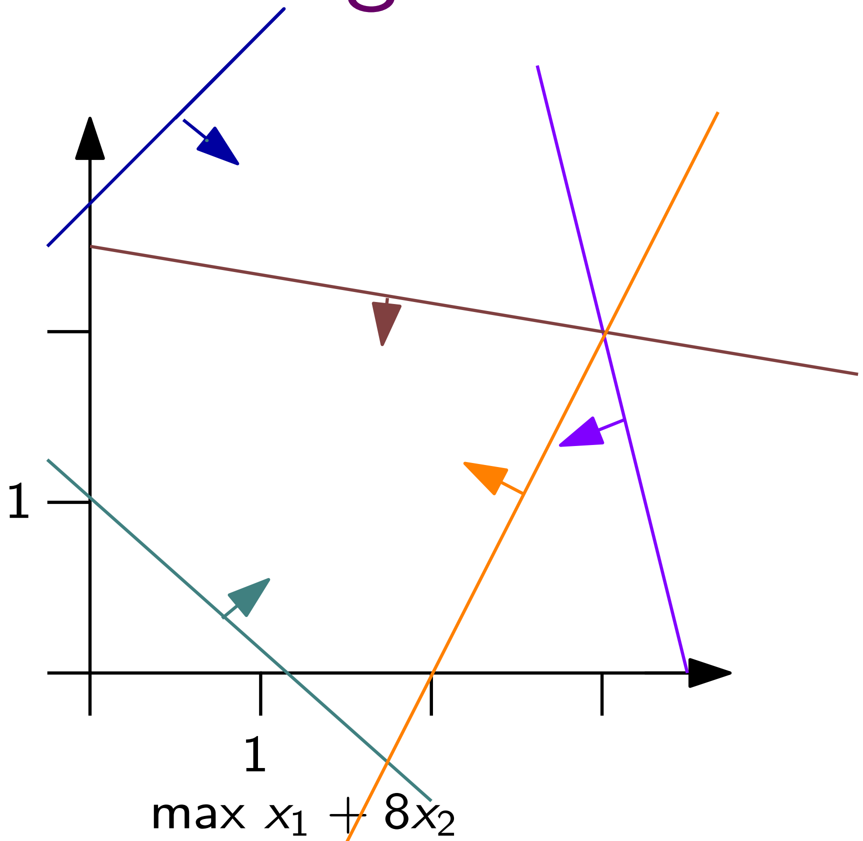
$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + 8x_2 \\
\text{so dass}\ & \boxed{-4x_1 + 4x_2 \leq 11} \\
& \boxed{x_1 + x_2 \geq 1} \\
& \boxed{-4x_1 + x_2 \leq 14} \\
& x_1 + 6x_2 \leq 15 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 2 \\
& x_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + 8x_2 \\
\text{so dass}\ & \boxed{-4x_1 + 4x_2 \leq 11} \\
& \boxed{x_1 + x_2 \geq 1} \\
& \boxed{-4x_1 + x_2 \leq 14} \\
& \boxed{x_1 + 6x_2 \leq 15} \\
& 2x_1 - x_2 \leq 2 \\
& x_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



$$\max\ x_1 + 8x_2$$

so dass $\boxed{-4x_1 + 4x_2 \leq 11}$

$\boxed{x_1 + x_2 \geq 1}$

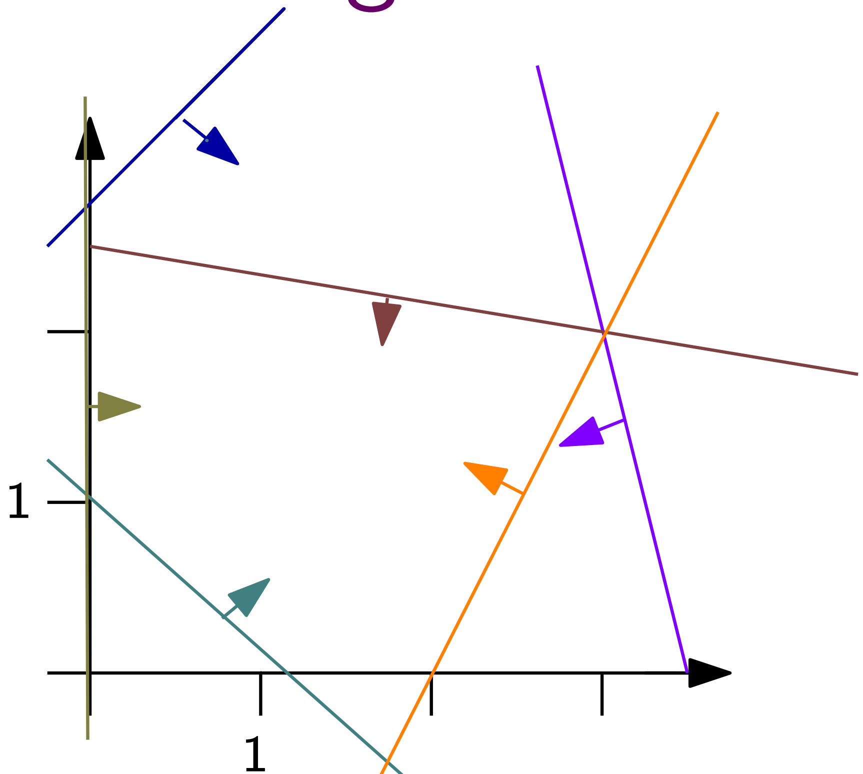
$\boxed{-4x_1 + x_2 \leq 14}$

$\boxed{x_1 + 6x_2 \leq 15}$

$\boxed{2x_1 - x_2 \leq 2}$

$x_1 \geq 0$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



$$\max\ x_1 + 8x_2$$

so dass

$$\boxed{-4x_1 + 4x_2 \leq 11}$$

$$\boxed{x_1 + x_2 \geq 1}$$

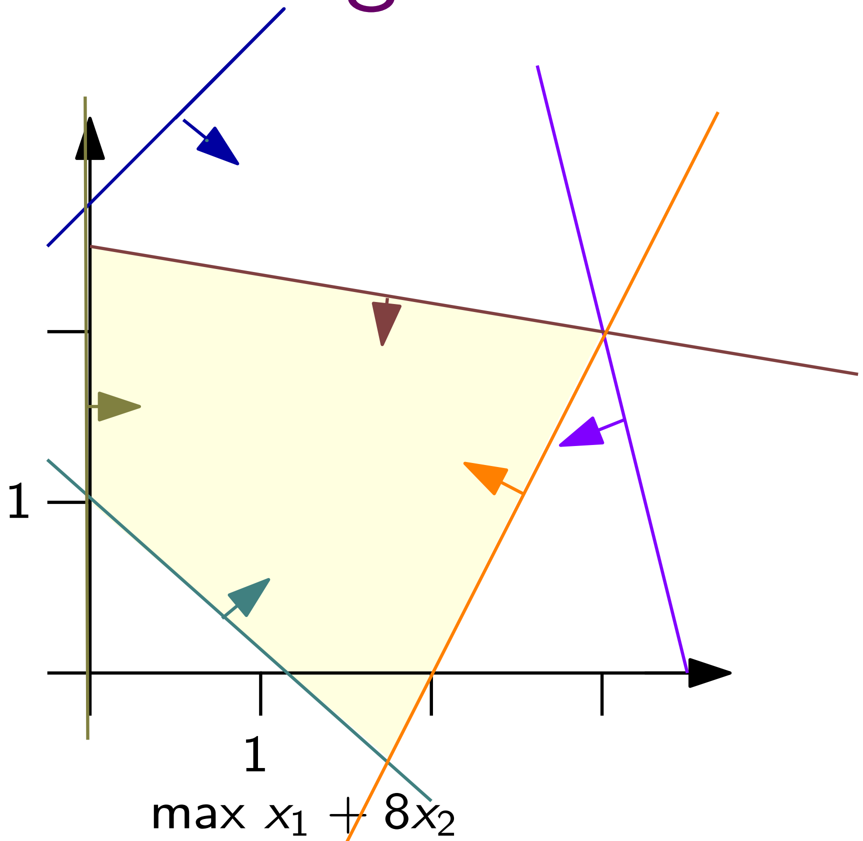
$$\boxed{-4x_1 + x_2 \leq 14}$$

$$\boxed{x_1 + 6x_2 \leq 15}$$

$$\boxed{2x_1 - x_2 \leq 2}$$

$$\boxed{x_1 \geq 0}$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



$$\max\ x_1 + 8x_2$$

so dass

$$\boxed{-4x_1 + 4x_2 \leq 11}$$

$$\boxed{x_1 + x_2 \geq 1}$$

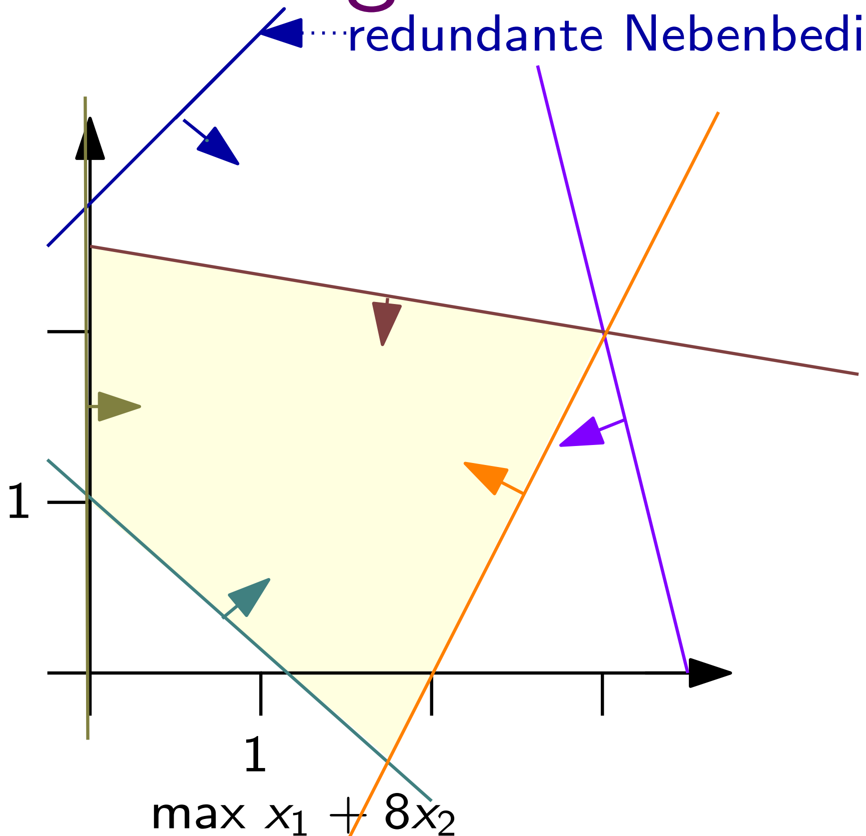
$$\boxed{-4x_1 + x_2 \leq 14}$$

$$\boxed{x_1 + 6x_2 \leq 15}$$

$$\boxed{2x_1 - x_2 \leq 2}$$

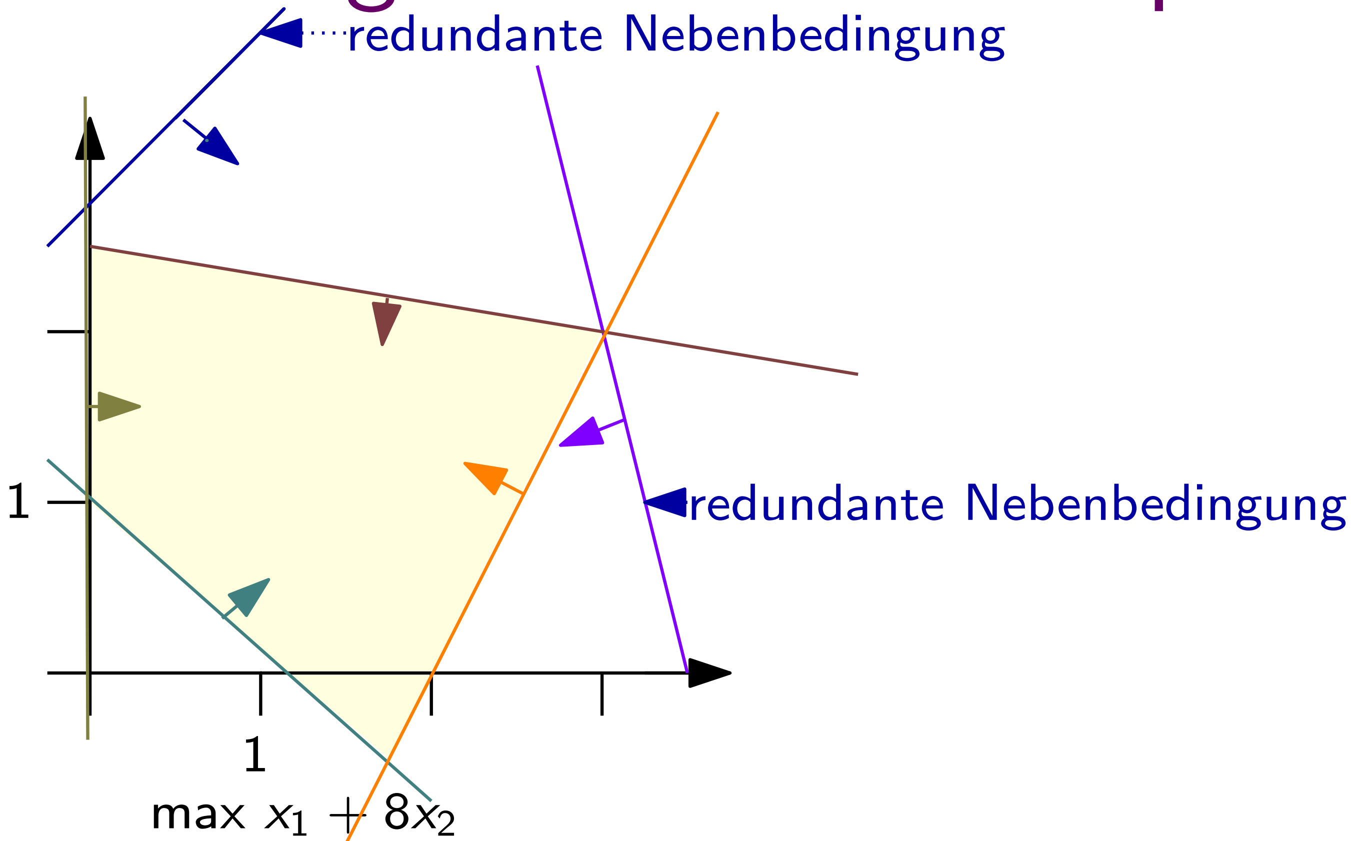
$$\boxed{x_1 \geq 0}$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 8x_2 \\ \text{so dass}\ & \boxed{-4x_1 + 4x_2 \leq 11} \\ & \boxed{x_1 + x_2 \geq 1} \\ & \boxed{-4x_1 + x_2 \leq 14} \\ & \boxed{x_1 + 6x_2 \leq 15} \\ & \boxed{2x_1 - x_2 \leq 2} \\ & \boxed{x_1 \geq 0} \end{aligned}$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



$$\max\ x_1 + 8x_2$$

so dass $\boxed{-4x_1 + 4x_2 \leq 11}$

$\boxed{x_1 + x_2 \geq 1}$

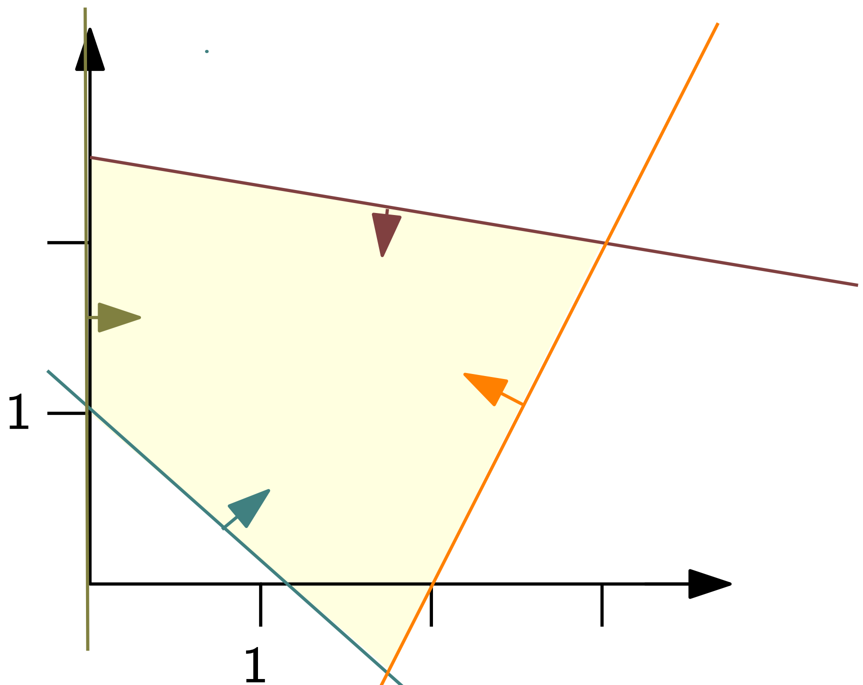
$\boxed{-4x_1 + x_2 \leq 14}$

$\boxed{x_1 + 6x_2 \leq 15}$

$\boxed{2x_1 - x_2 \leq 2}$

$\boxed{x_1 \geq 0}$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



$$\max\ x_1 + 8x_2$$

so dass

$$\boxed{-4x_1 + 4x_2 \leq 11}$$

$$\boxed{x_1 + x_2 \geq 1}$$

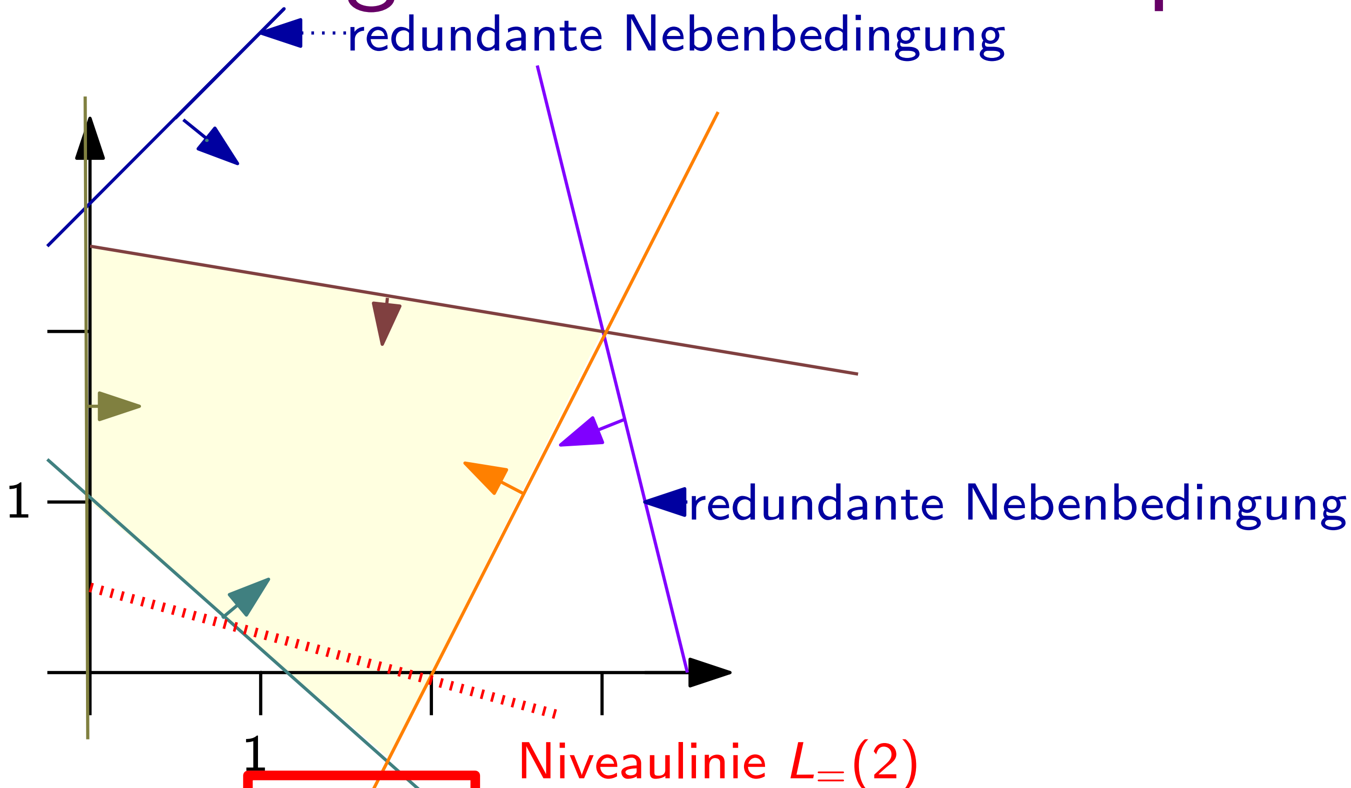
$$\boxed{-4x_1 + x_2 \leq 14}$$

$$\boxed{x_1 + 6x_2 \leq 15}$$

$$\boxed{2x_1 - x_2 \leq 2}$$

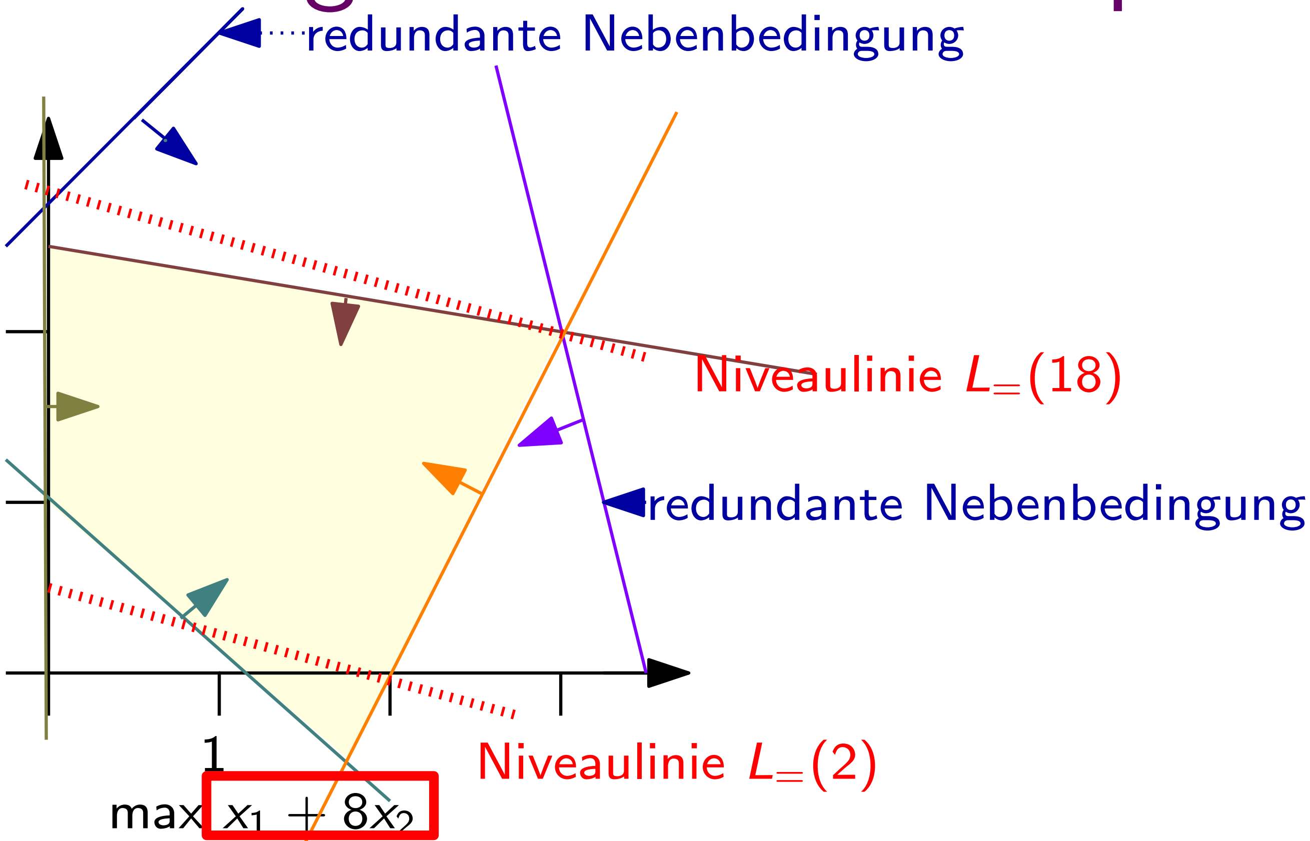
$$\boxed{x_1 \geq 0}$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



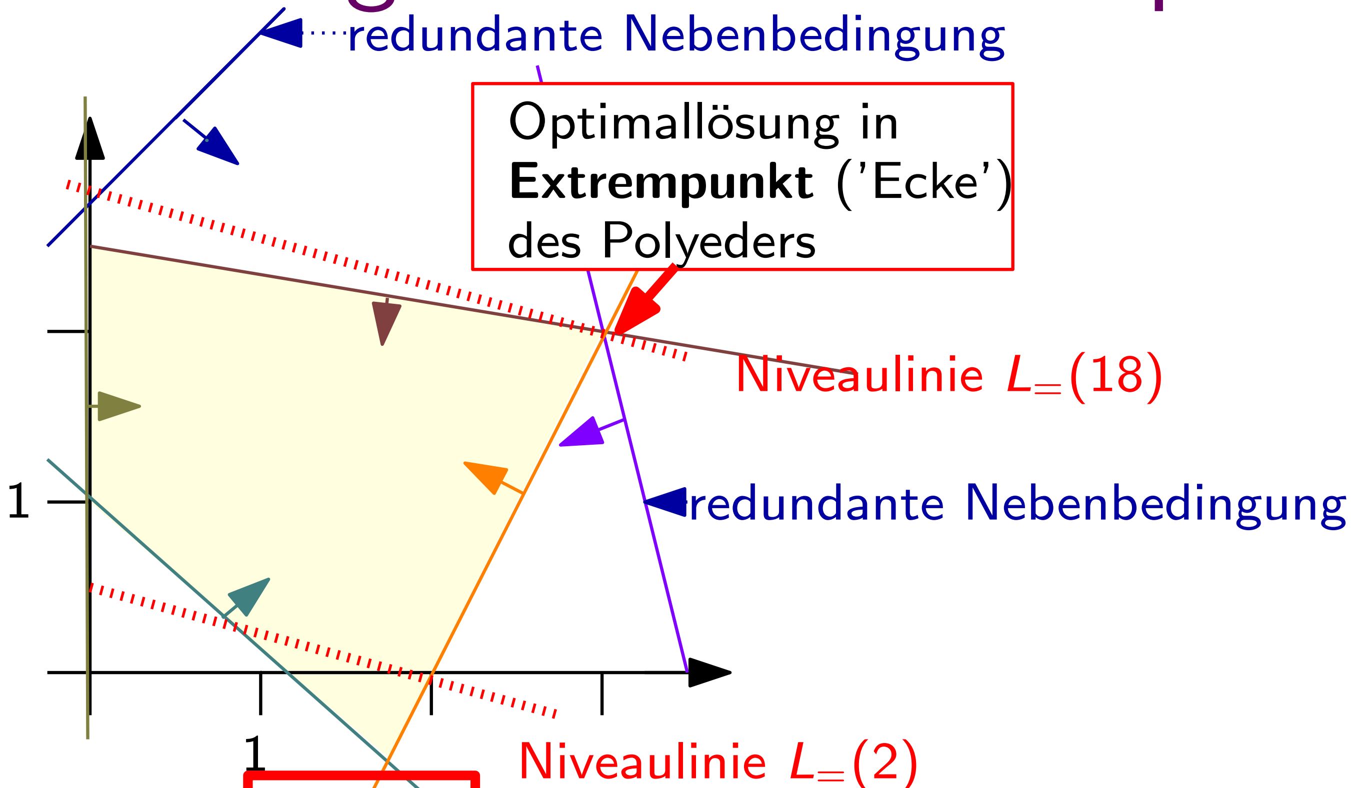
$$
\begin{aligned}
\max\ & \boxed{x_1 + 8x_2} \\
\text{so dass}\ & \boxed{-4x_1 + 4x_2 \leq 11} \\
& \boxed{x_1 + x_2 \geq 1} \\
& \boxed{-4x_1 + x_2 \leq 14} \\
& \boxed{x_1 + 6x_2 \leq 15} \\
& \boxed{2x_1 - x_2 \leq 2} \\
& \boxed{x_1 \geq 0}
\end{aligned}
$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



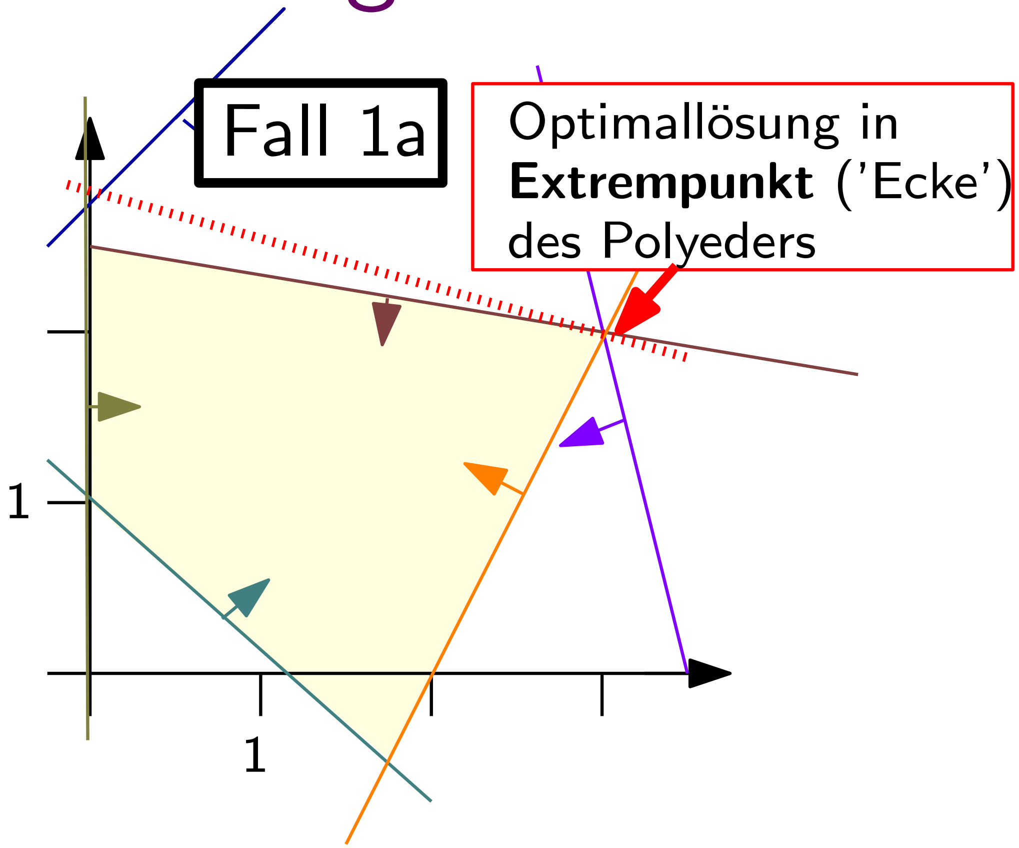
$$
\begin{aligned}
\max\ & \boxed{x_1 + 8x_2} \\
\text{so dass}\ & \boxed{-4x_1 + 4x_2 \leq 11} \\
& \boxed{x_1 + x_2 \geq 1} \\
& \boxed{-4x_1 + x_2 \leq 14} \\
& \boxed{x_1 + 6x_2 \leq 15} \\
& \boxed{2x_1 - x_2 \leq 2} \\
& \boxed{x_1 \geq 0}
\end{aligned}
$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung

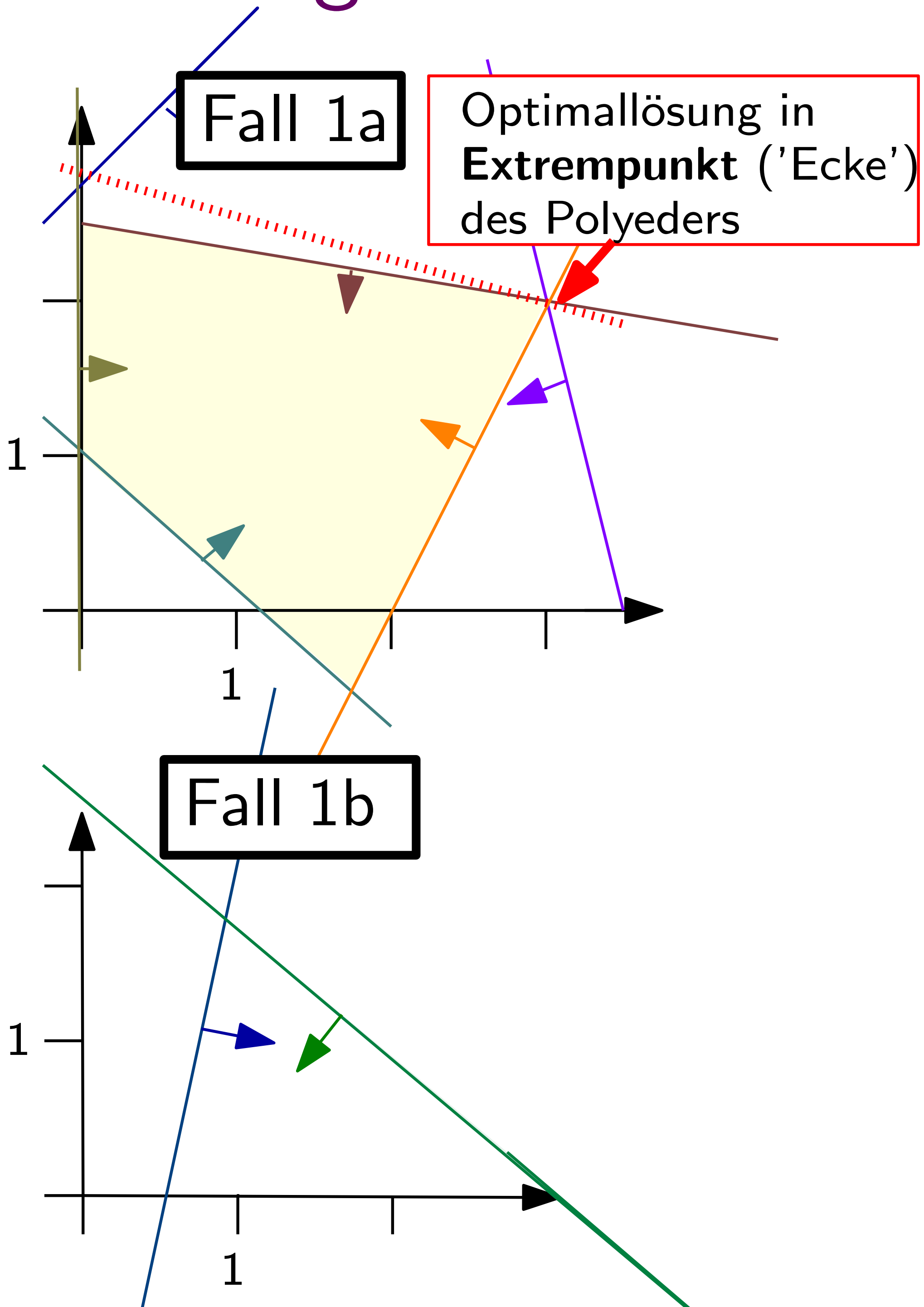


$$
\begin{aligned}
\max\ & \boxed{x_1 + 8x_2} \\
\text{so dass}\ & \boxed{-4x_1 + 4x_2 \leq 11} \\
& \boxed{x_1 + x_2 \geq 1} \\
& \boxed{-4x_1 + x_2 \leq 14} \\
& \boxed{x_1 + 6x_2 \leq 15} \\
& \boxed{2x_1 - x_2 \leq 2} \\
& \boxed{x_1 \geq 0}
\end{aligned}
$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



Zulässiger Bereich und Optimallösung

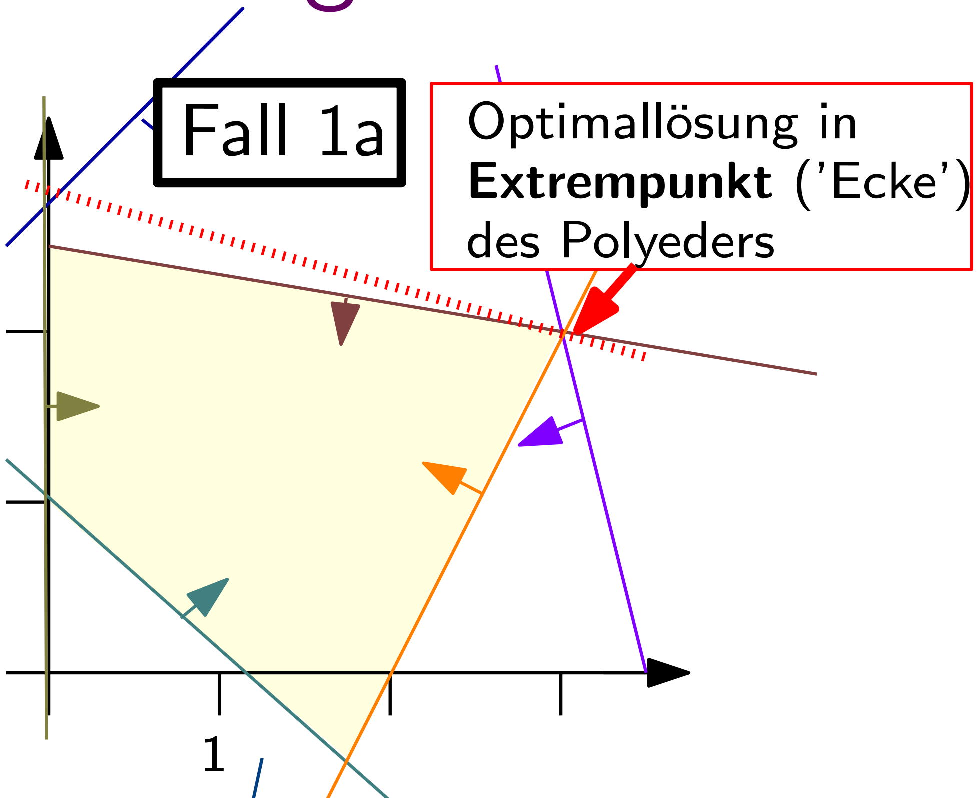


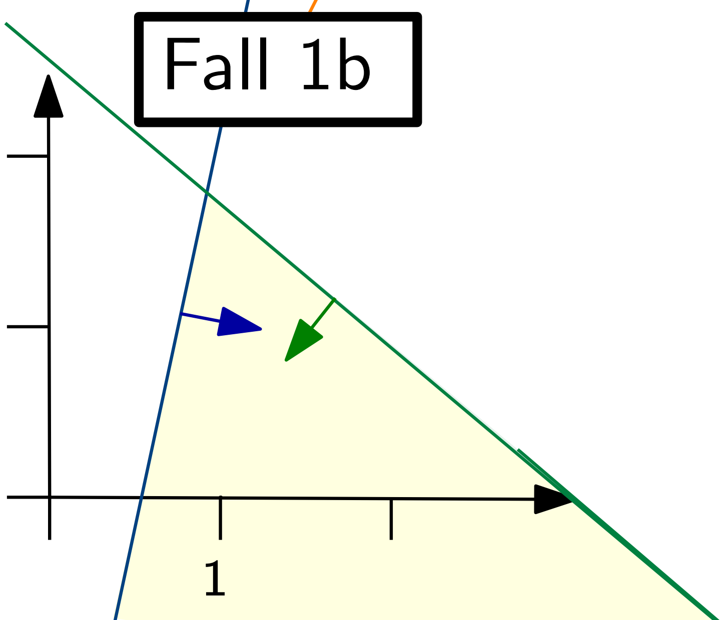
$$\max\ x_1 + 2x_2$$

so dass $\boxed{4x_1 - x_2 \geq 2}$

$\boxed{3x_1 + 4x_2 \leq 10}$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



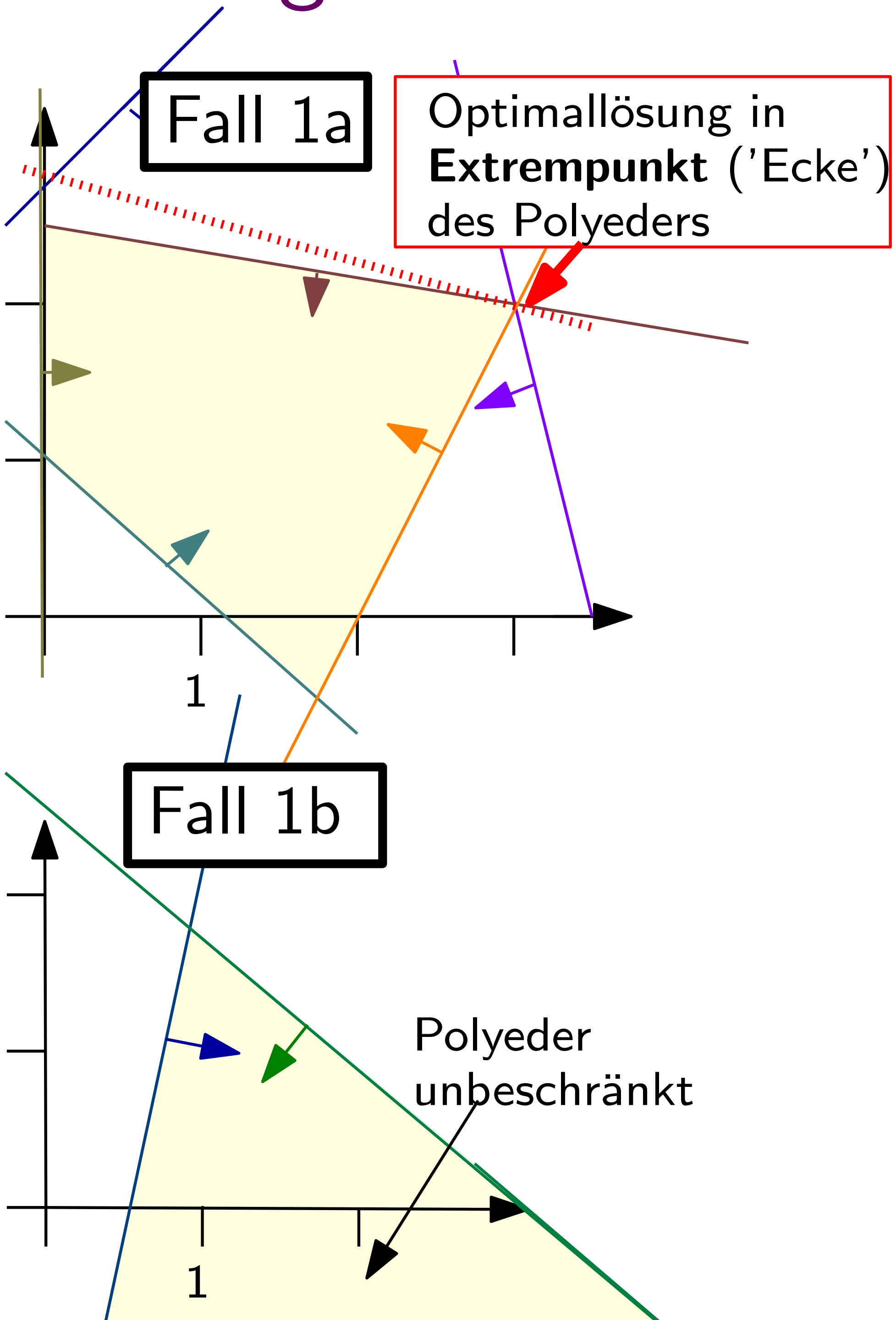


$$\max\ x_1 + 2x_2$$

so dass $\boxed{4x_1 - x_2 \geq 2}$

$\boxed{3x_1 + 4x_2 \leq 10}$

Zulässiger Bereich und Optimallösung

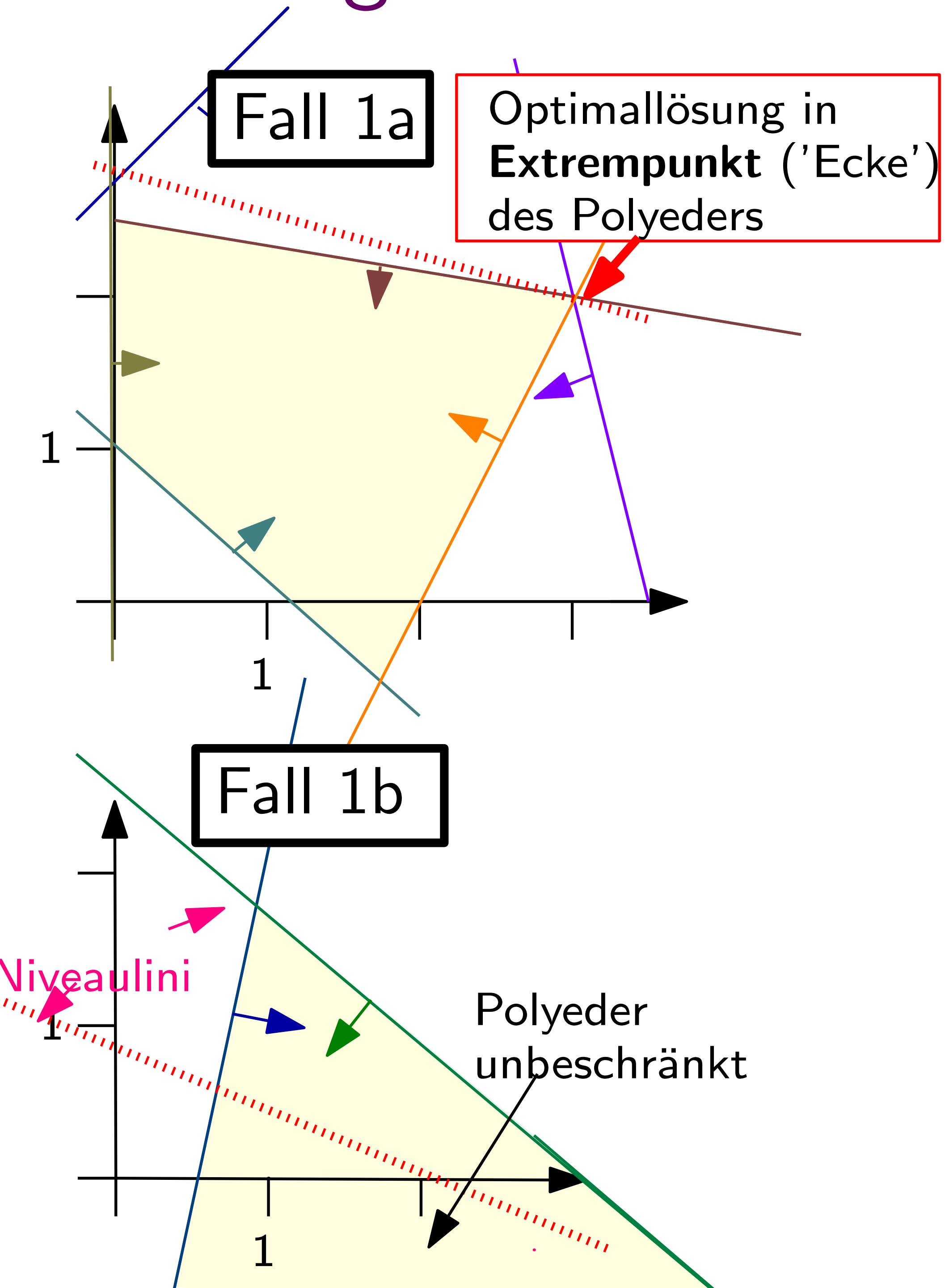


$$\max\ x_1 + 2x_2$$

so dass $\boxed{4x_1 - x_2 \geq 2}$

$\boxed{3x_1 + 4x_2 \leq 10}$

Zulässiger Bereich und Optimallösung

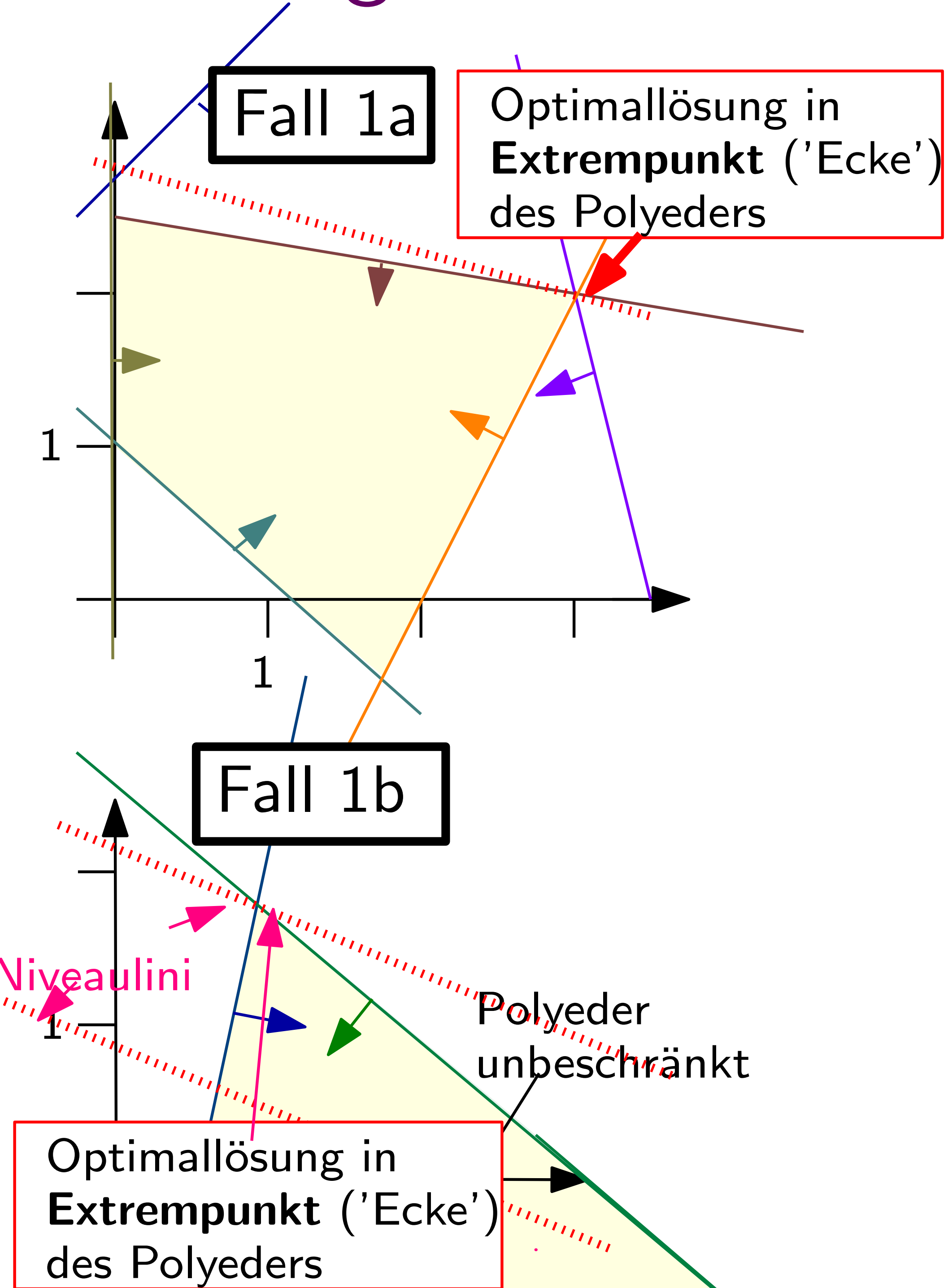


$$\max\ x_1 + 2x_2$$

so dass $\boxed{4x_1 - x_2 \geq 2}$

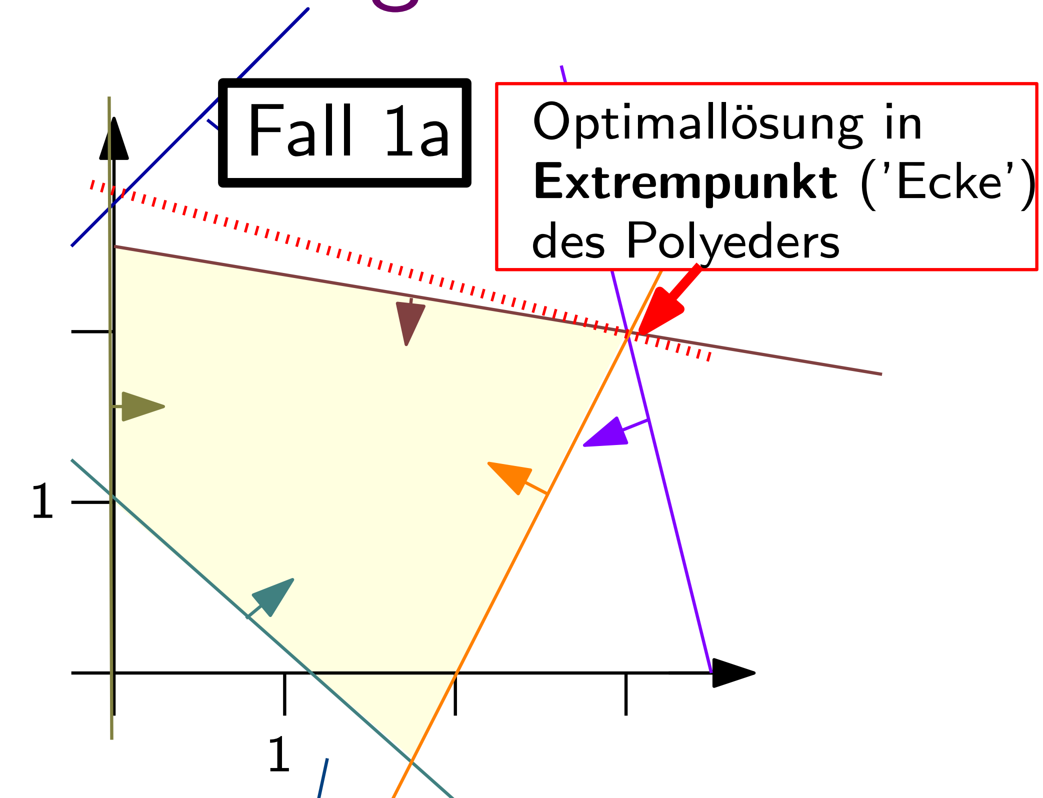
$\boxed{3x_1 + 4x_2 \leq 10}$

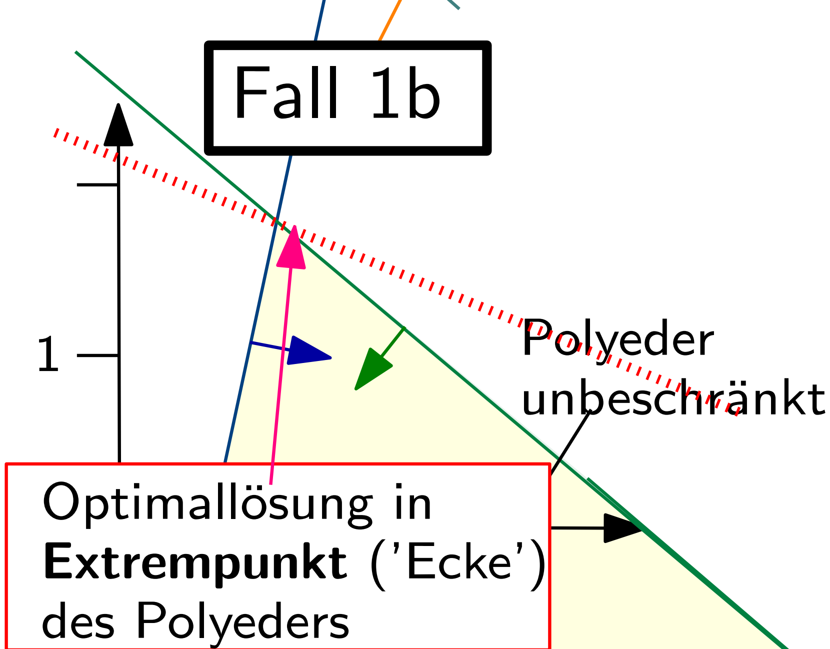
Zulässiger Bereich und Optimallösung



$$\max\ x_1 + 2x_2$$
$$\text{so dass } \boxed{4x_1 - x_2 \geq 2}$$
$$\boxed{3x_1 + 4x_2 \leq 10}$$

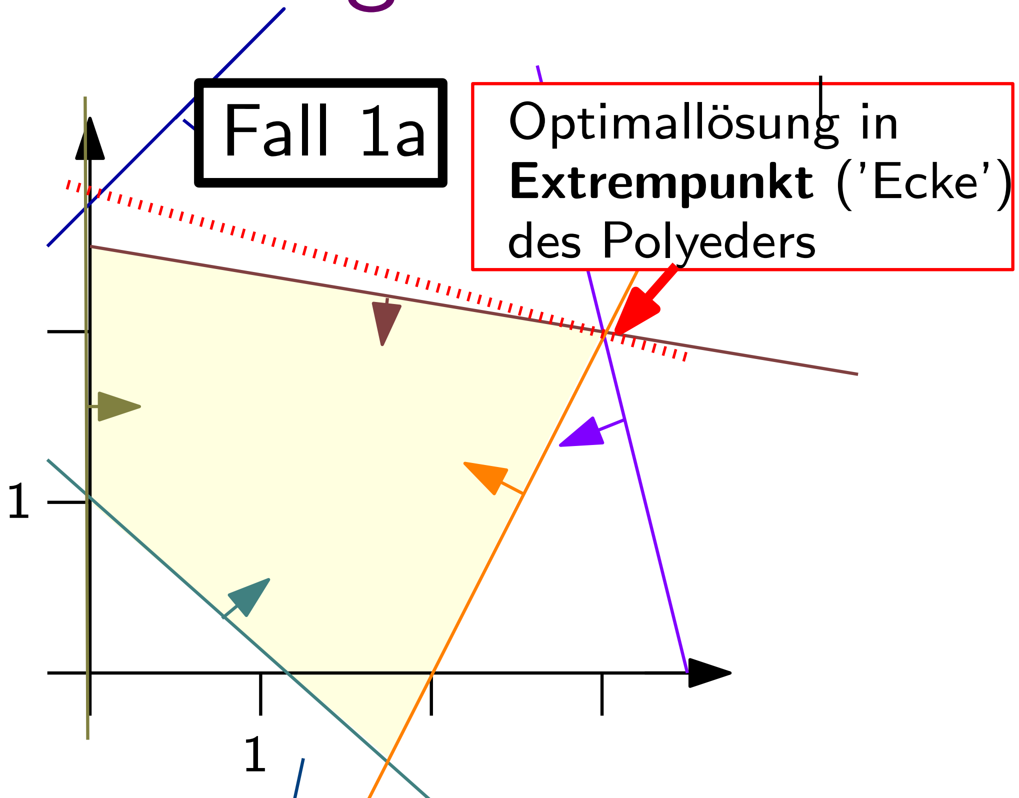
Zulässiger Bereich und Optimallösung

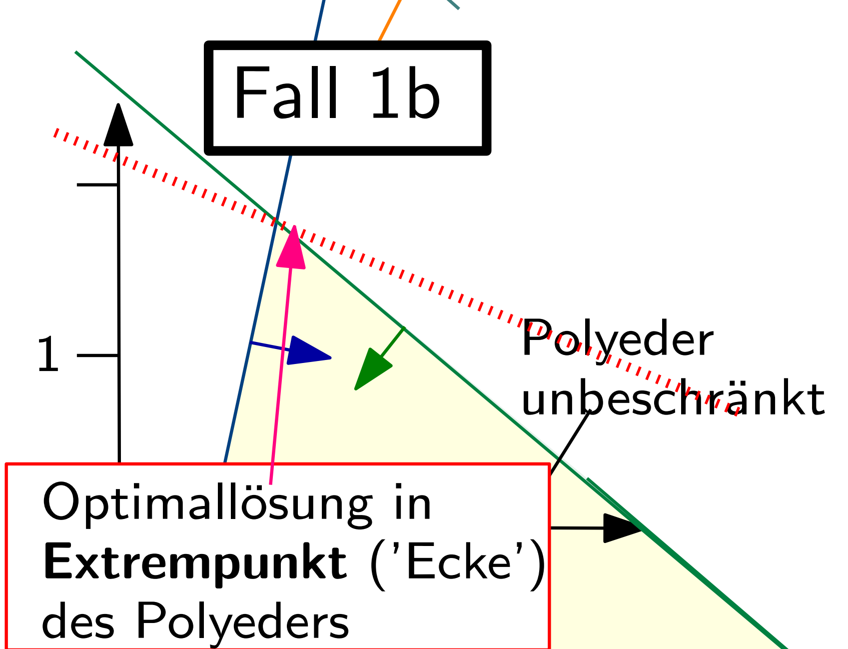


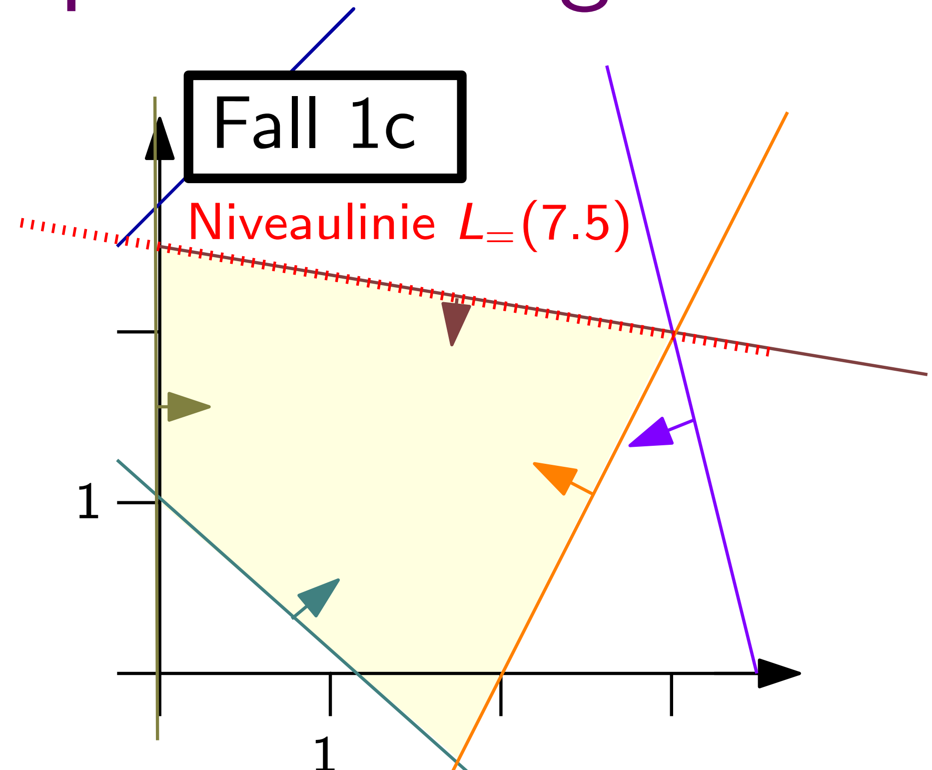


$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 2x_2 \\ \text{so dass}\ & \boxed{4x_1 - x_2 \geq 2} \\ & \boxed{3x_1 + 4x_2 \leq 10} \end{aligned}$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung

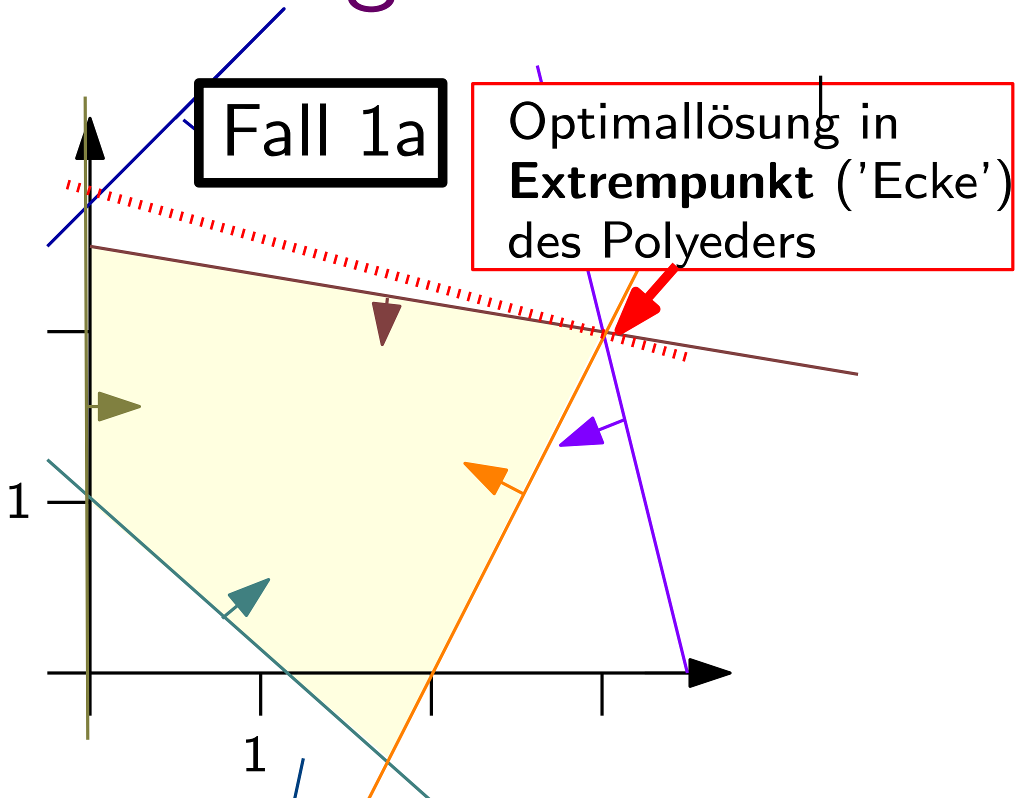


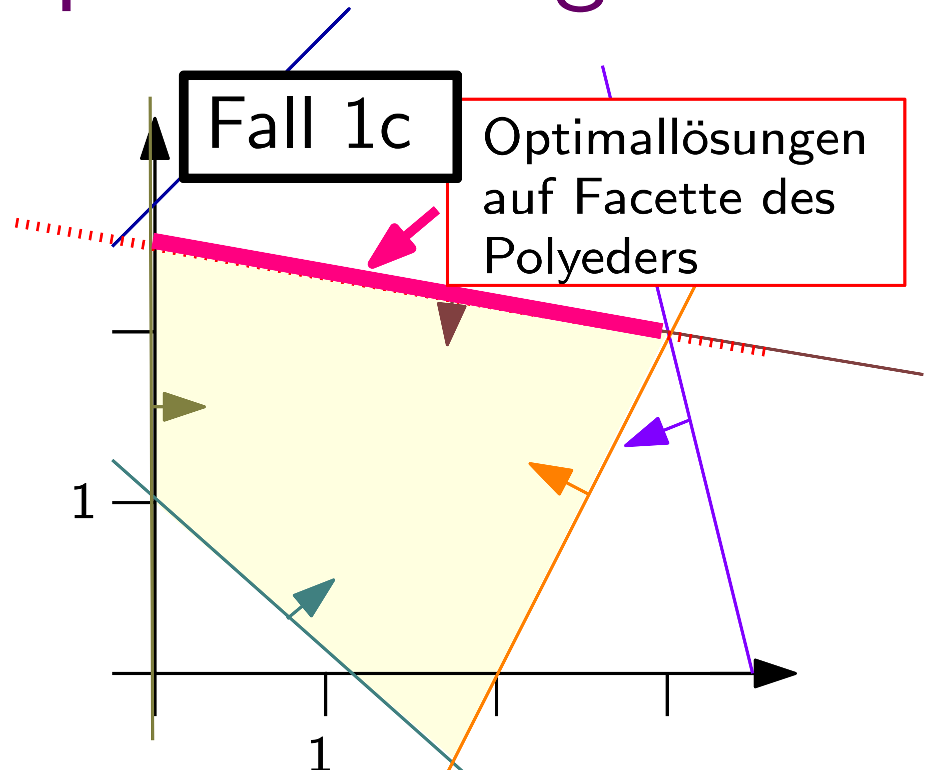


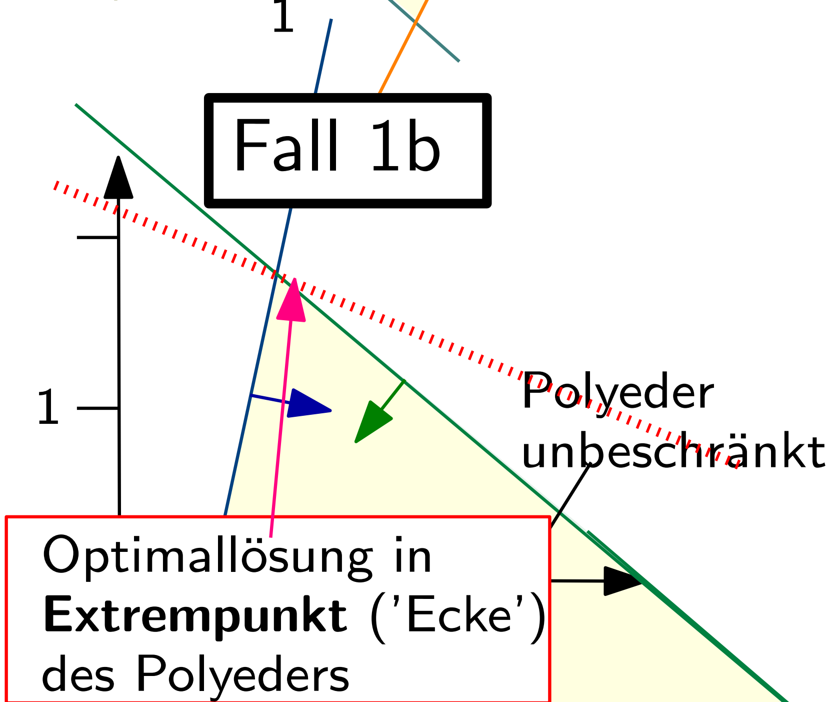


$$
\begin{aligned}
\max\ & \boxed{0.5x_1 + 3x_2} \\
\text{so dass}\ & -4x_1 + 4x_2 \le 11 \\
& x_1 + x_2 \ge 1 \\
& -4x_1 + x_2 \le 14 \\
& x_1 + 6x_2 \le 15 \\
& 2x_1 - x_2 \le 2 \\
& x_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung





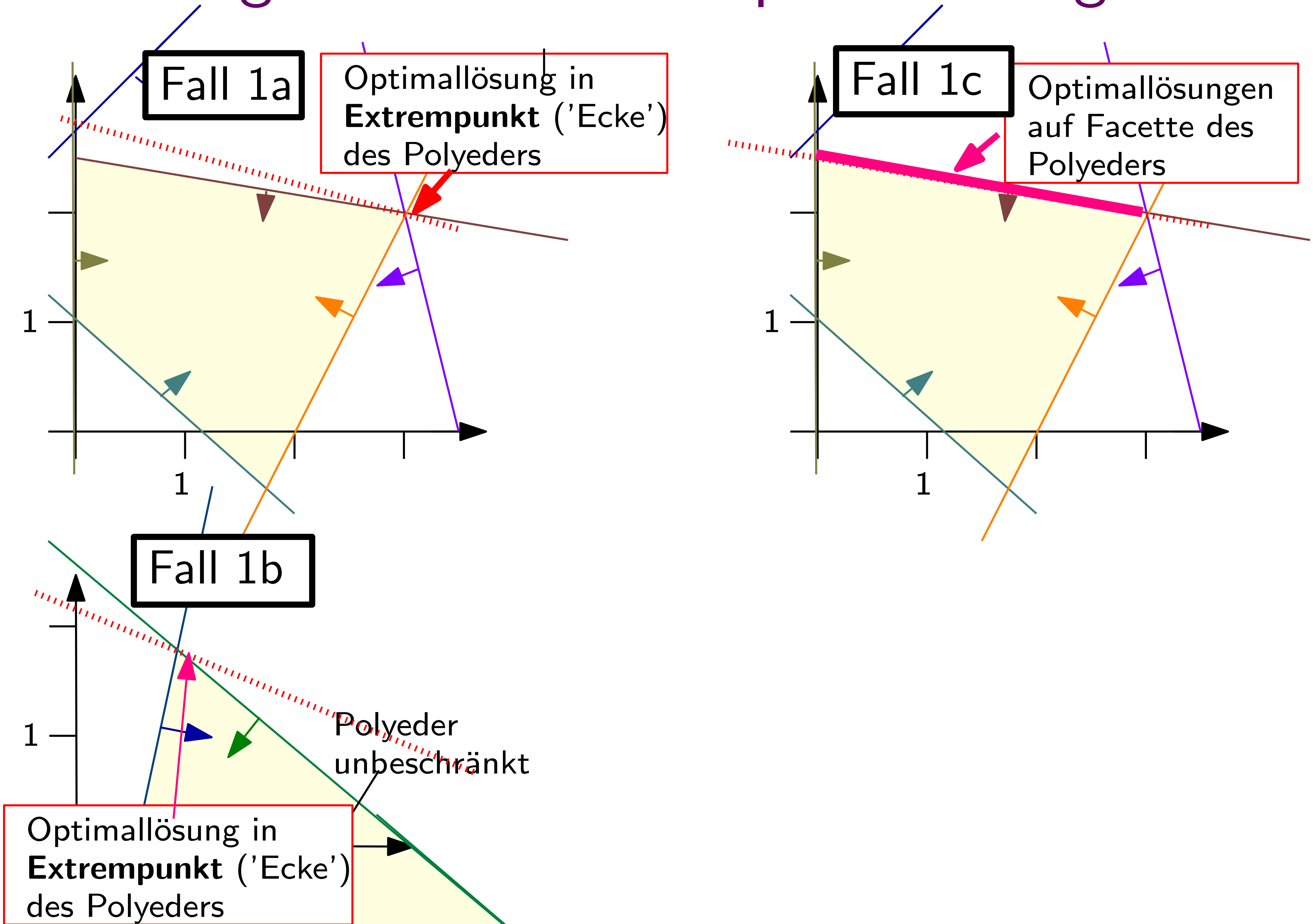


$$\max \quad 0.5x_1 + 3x_2$$

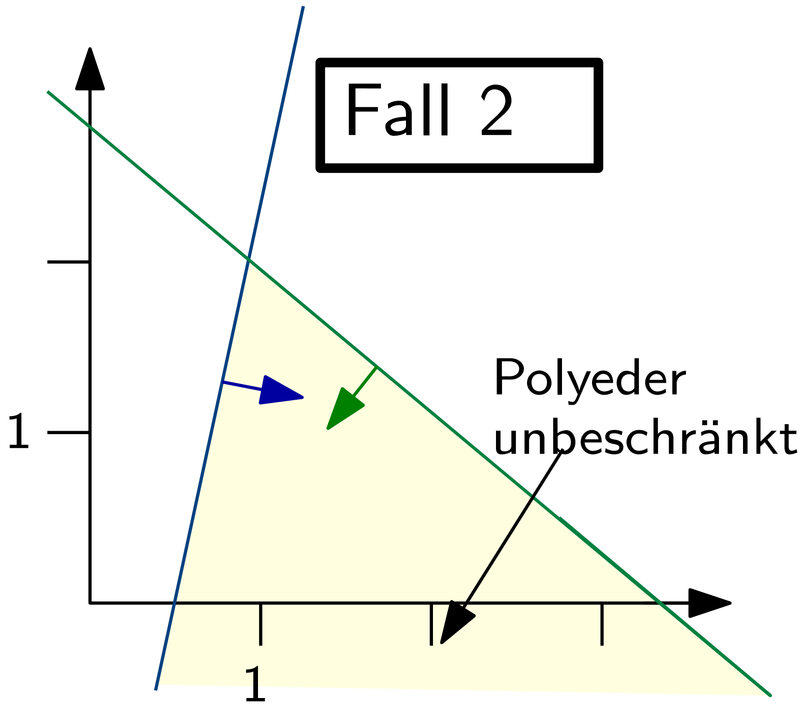
so dass

$$-4x_1 + 4x_2 \leq 11$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$-4x_1 + x_2 \leq 14$$
$$x_1 + 6x_2 \leq 15$$
$$2x_1 - x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung

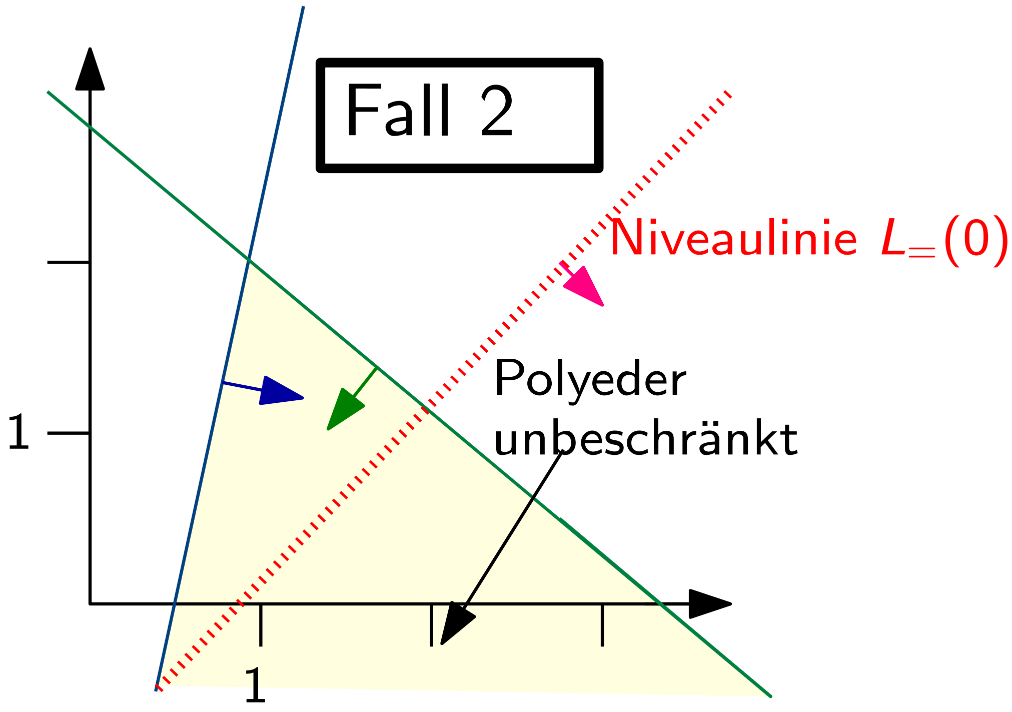


Zulässiger Bereich und Optimallösung



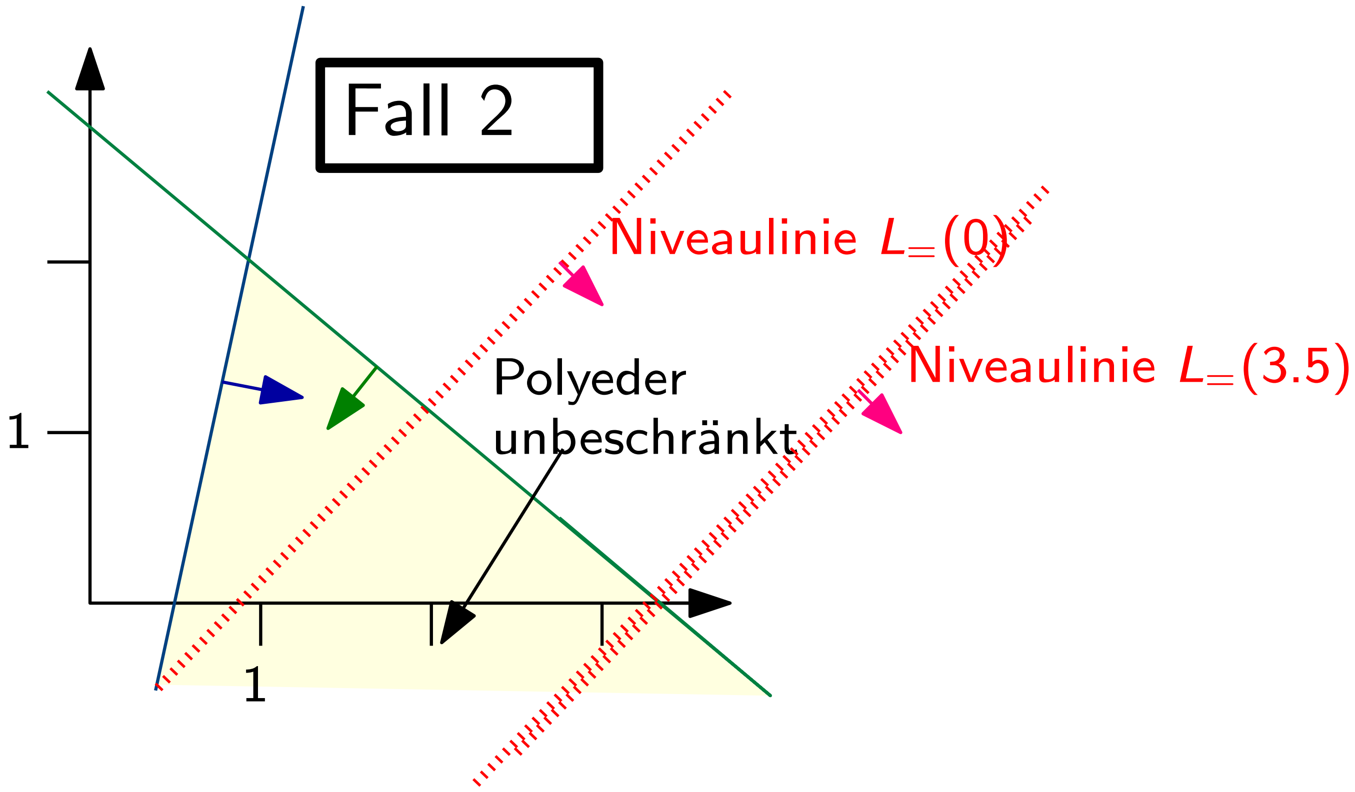
$$\begin{aligned} \max\ & x_1 - x_2 \\ \text{so dass } & \boxed{4x_1 - x_2 \geq 2} \\ & \boxed{3x_1 + 4x_2 \leq 10} \end{aligned}$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



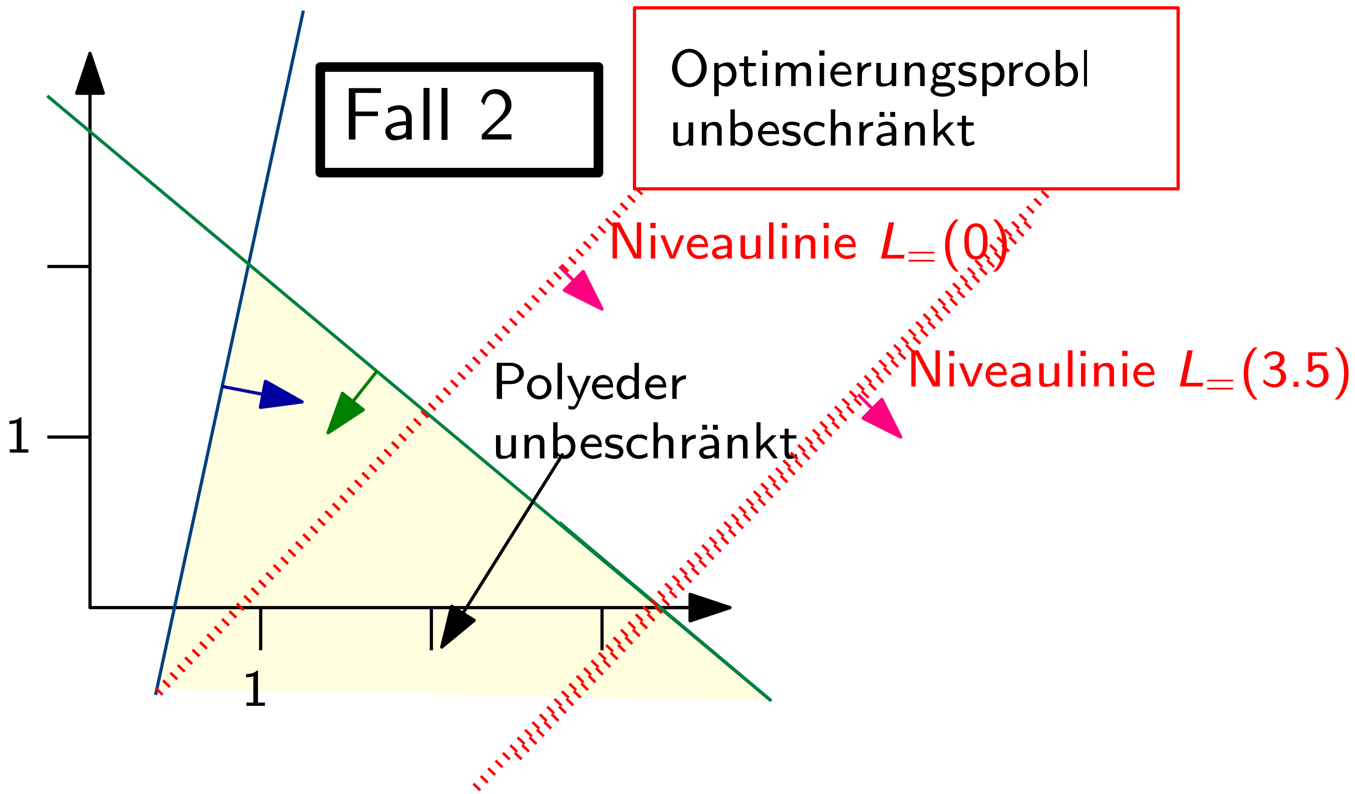
$$\begin{array}{rl} \max & x_1 - x_2 \\ \text{so dass} & \boxed{4x_1 - x_2 \geq 2} \\ & \boxed{3x_1 + 4x_2 \leq 10} \end{array}$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



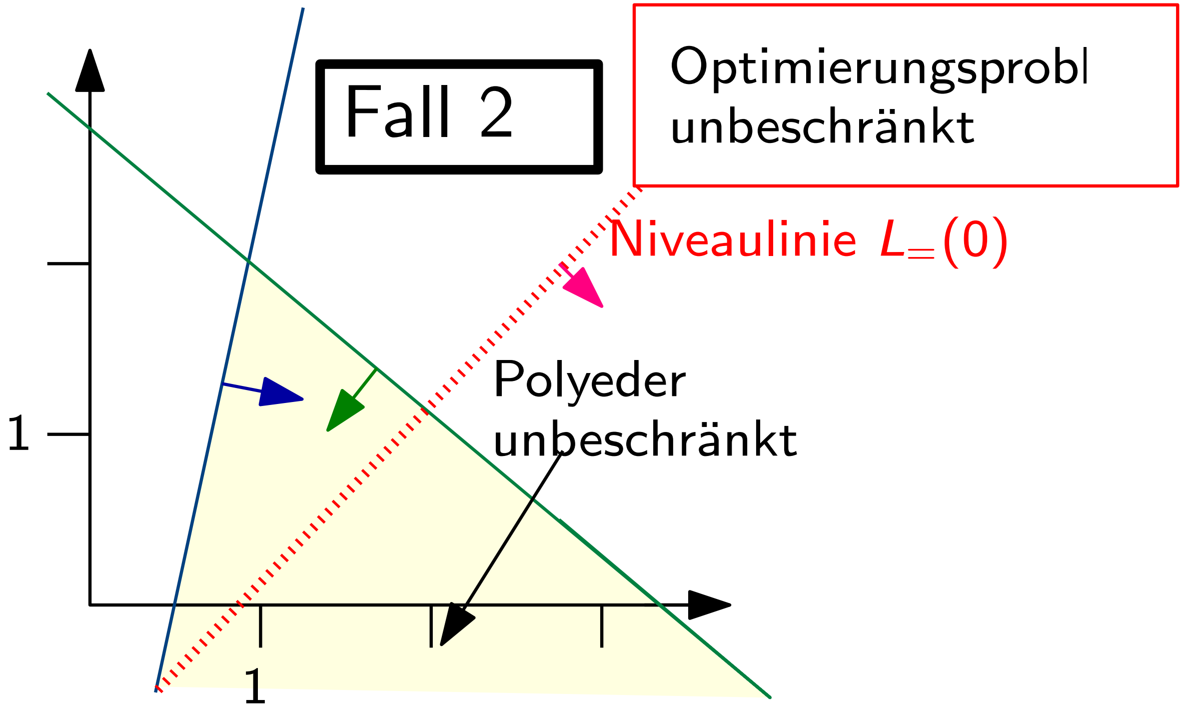
$$\begin{aligned} &\max\ x_1 - x_2 \\ \text{so dass } &\boxed{4x_1 - x_2 \geq 2} \\ &\boxed{3x_1 + 4x_2 \leq 10} \end{aligned}$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung

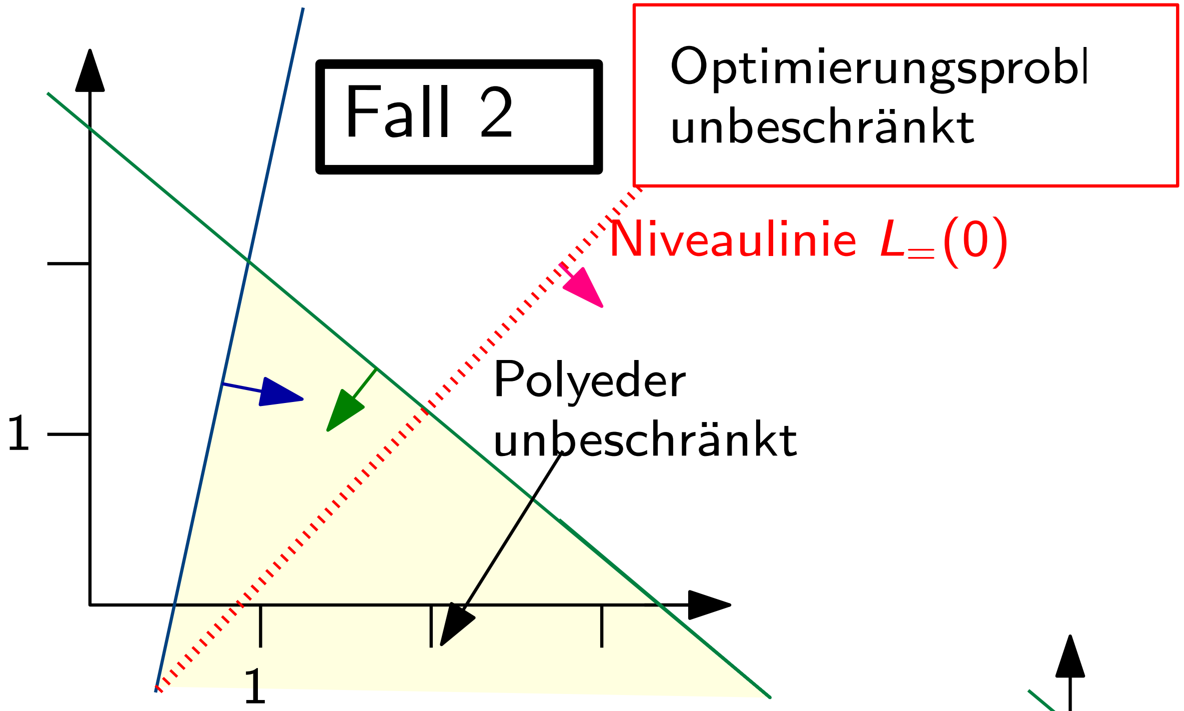


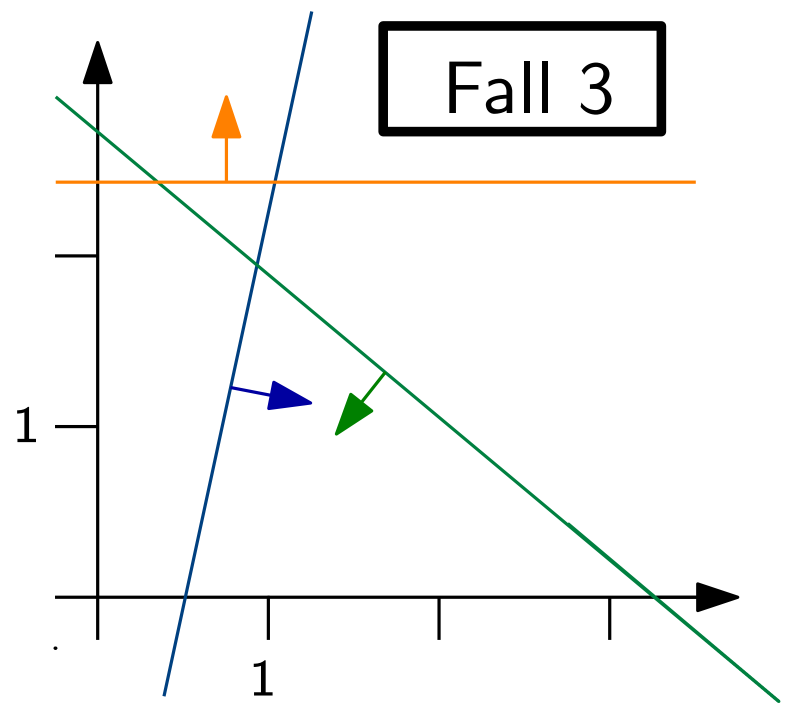
$$\begin{aligned} \max\ & x_1 - x_2 \\ \text{so dass}\ & \boxed{4x_1 - x_2 \geq 2} \\ & \boxed{3x_1 + 4x_2 \leq 10} \end{aligned}$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



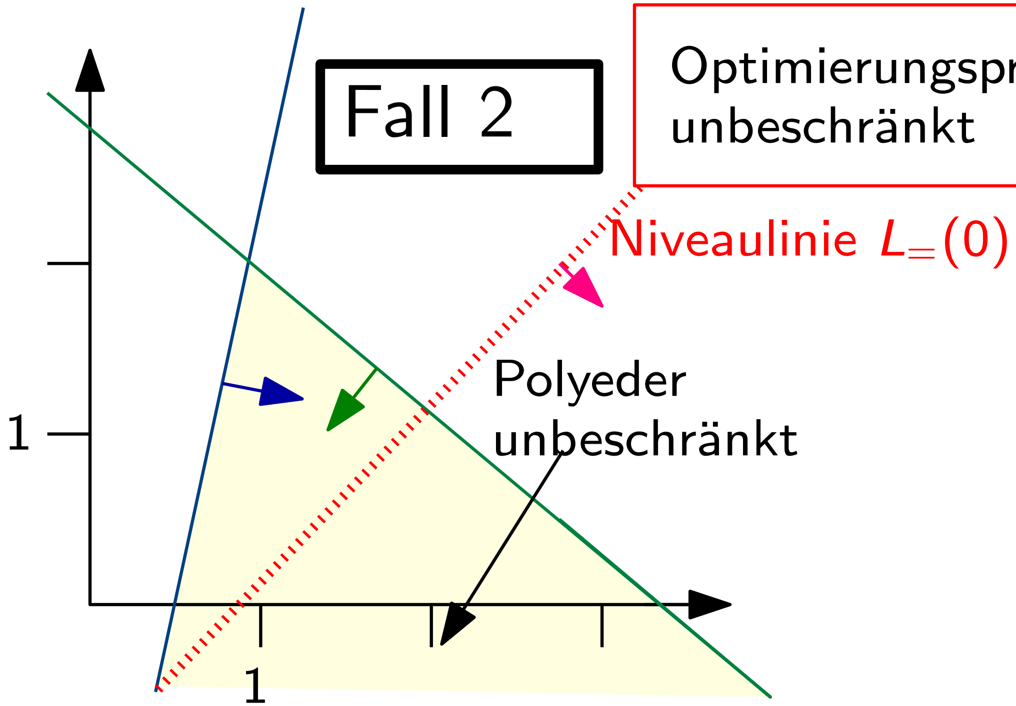
Zulässiger Bereich und Optimallösung





$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 - x_2 \\
\text{so dass}\ & \boxed{4x_1 - x_2 \geq 2} \\
& \boxed{3x_1 + 4x_2 \leq 10} \\
& \boxed{x_2 \geq 2.5}
\end{aligned}
$$

Zulässiger Bereich und Optimallösung



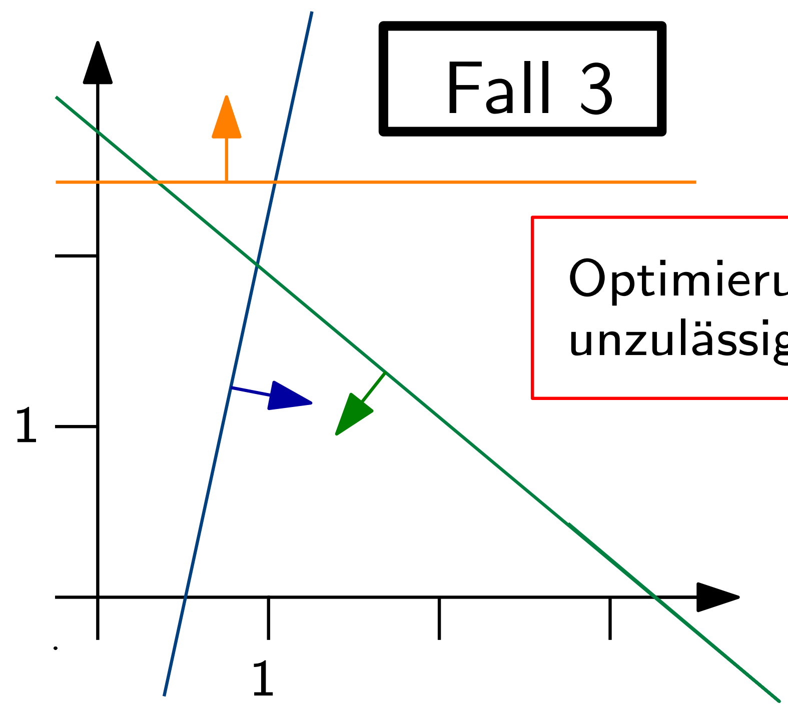
Optimierungsprobl
unbeschränkt

$$\max\ x_1 - x_2$$

so dass $\boxed{4x_1 - x_2 \geq 2}$

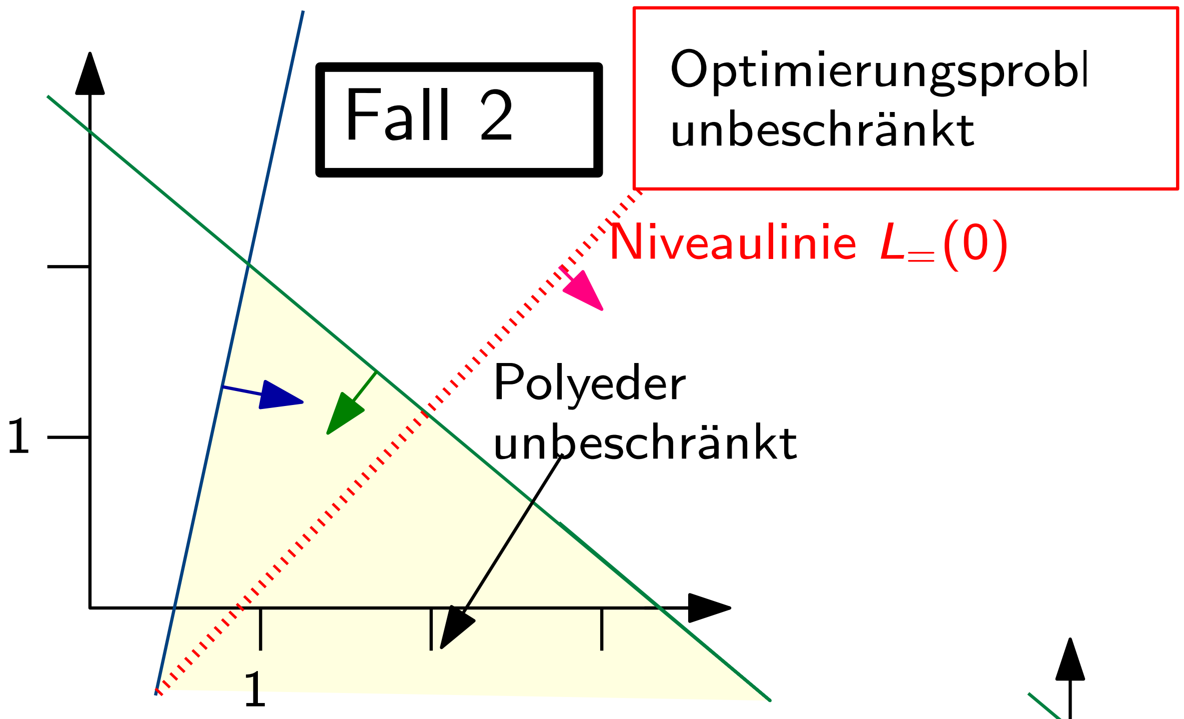
$\boxed{3x_1 + 4x_2 \leq 10}$

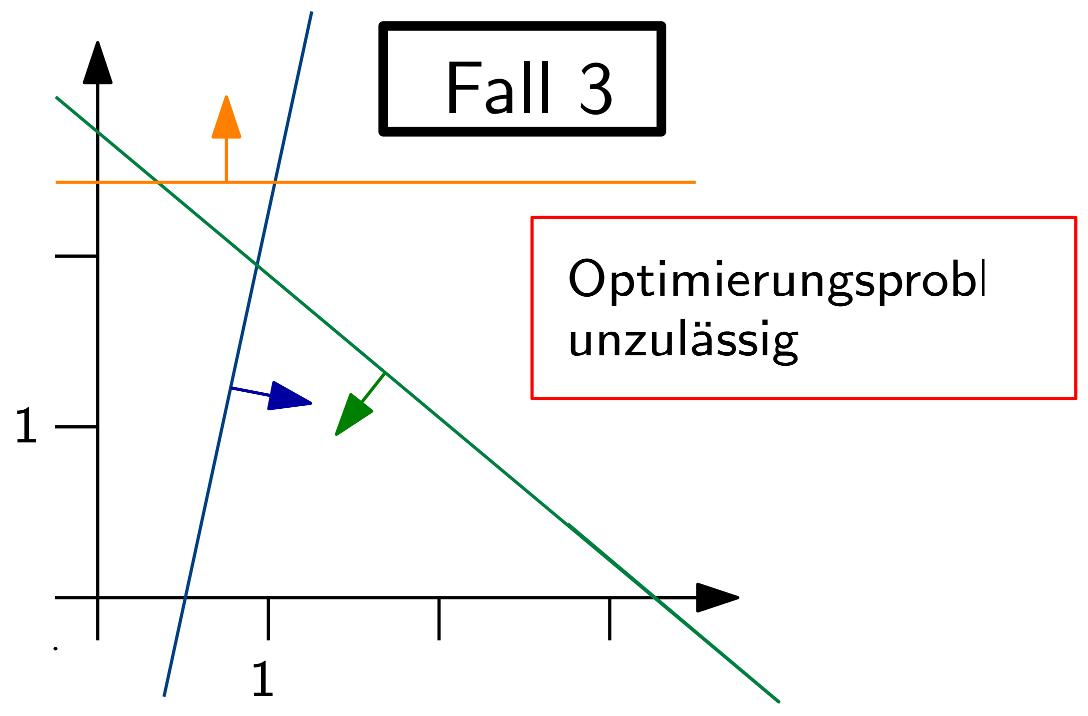
$\boxed{x_2 \geq 2.5}$



Optimierungsprobl
unzulässig

Zulässiger Bereich und Optimallösung





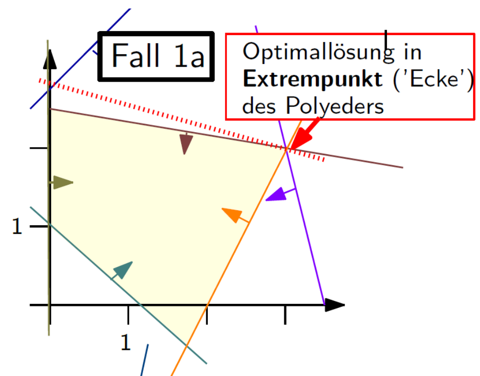
Hauptsatz der linearen Optimierung

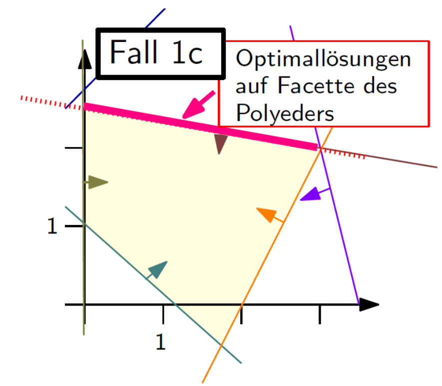
Ein lineares Programm ist entweder unzulässig, unbeschränkt, oder hat eine Optimallösung, die in einem Extrempunkt ('Ecke') des Zulässigkeitspolyeders liegt.

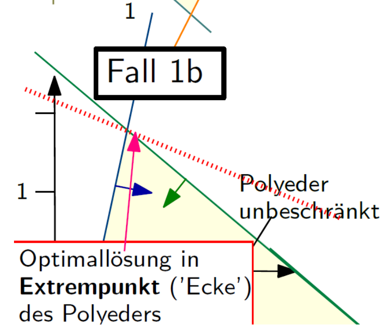
Hauptsatz der linearen Optimierung

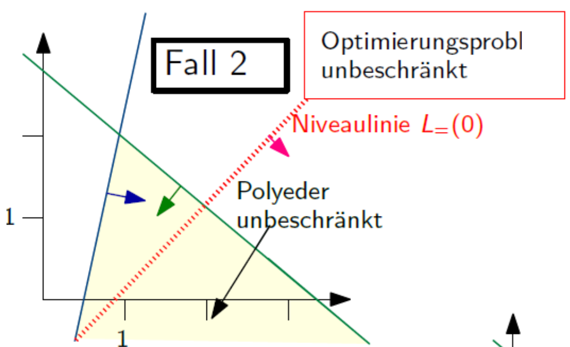
Ein lineares Programm ist entweder unzulässig, unbeschränkt, oder hat eine Optimallösung, die in einem Extrempunkt ('Ecke') des Zulässigkeitspolyeders liegt.

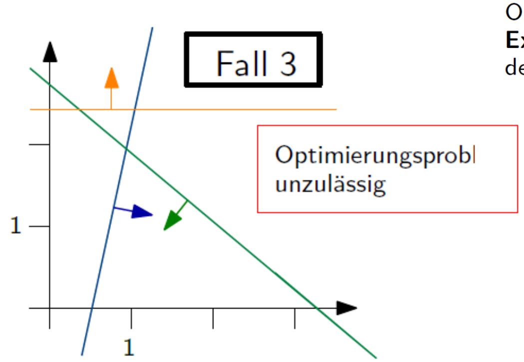
Anschaulich gemacht in 2D.







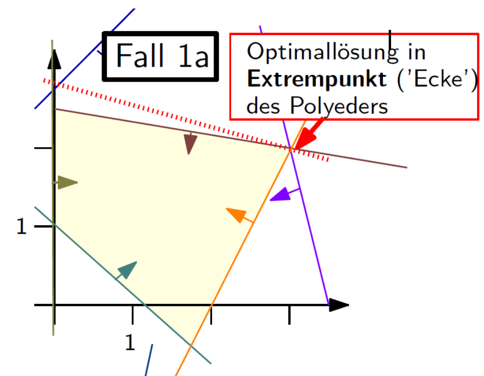


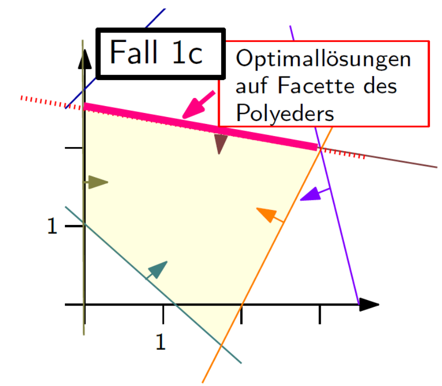


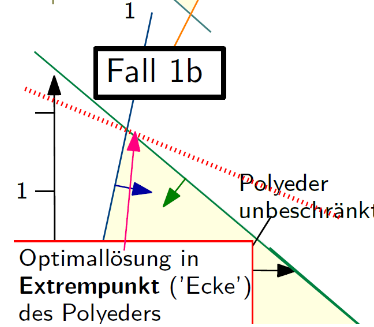
Hauptsatz der linearen Optimierung

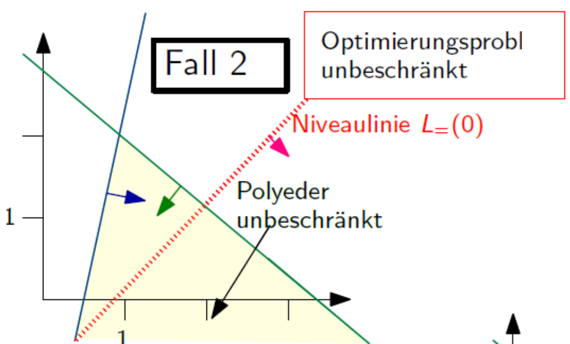
Ein lineares Programm ist entweder unzulässig, unbeschränkt, oder hat eine Optimallösung, die in einem Extrempunkt ('Ecke') des Zulässigkeitspolyeders liegt.

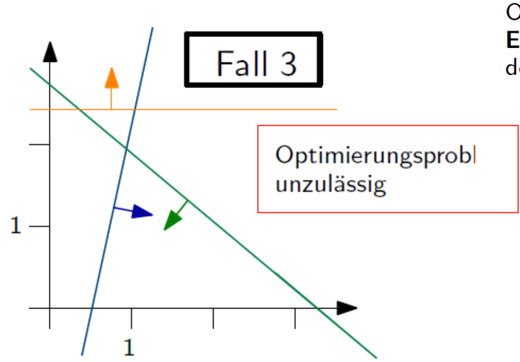
Anschaulich gemacht in 2D.







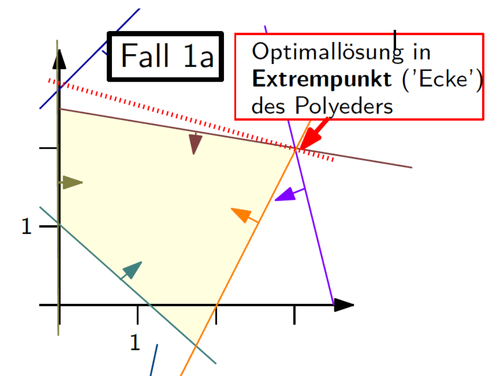


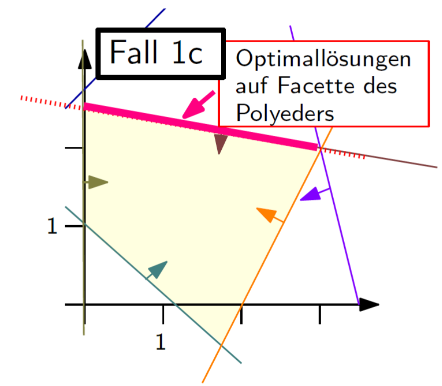


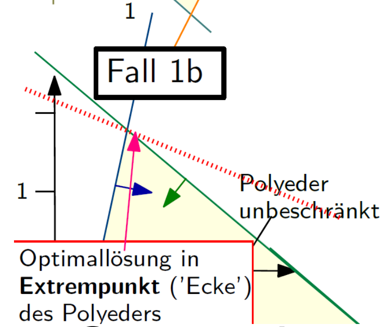
Hauptsatz der linearen Optimierung

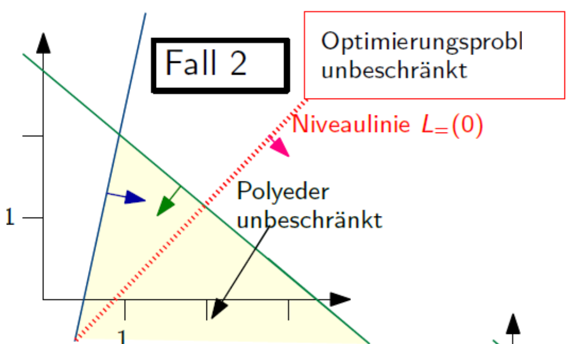
Ein lineares Programm ist entweder unzulässig, unbeschränkt, oder hat eine Optimallösung, die in einem Extrempunkt ('Ecke') des Zulässigkeitspolyeders liegt.

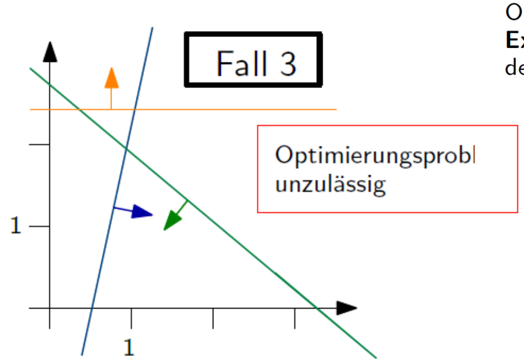
Anschaulich gemacht in 2D.











Gilt auch in höheren Dimensionen (für Beweis siehe z.B. Burkard/ Zimmermann). Bei n-dimensionalen Polyedern sind die Niveaumengen $n-1$-dimensionale Hyperebenen.

Wie lösen wir lineare Programme?

Wie lösen wir lineare Programme?

Hauptsatz der linearen Optimierung schränkt unsere Kandidatenmenge auf die Polyedereckpunkte ein.

Wie lösen wir lineare Programme?

Hauptsatz der linearen Optimierung schränkt unsere Kandidatenmenge auf die Polyedereckpunkte ein.

Wie finden wir möglichst effizient einen optimalen Polyedereckpunkt?

Wie lösen wir lineare Programme?

Hauptsatz der linearen Optimierung schränkt unsere Kandidatenmenge auf die Polyedereckpunkte ein.

Wie finden wir möglichst effizient einen optimalen Polyedereckpunkt?

Idee 1: Graphisches Verfahren

Wie lösen wir lineare Programme?

Hauptsatz der linearen Optimierung schränkt unsere Kandidatenmenge auf die Polyedereckpunkte ein.

Wie finden wir möglichst effizient einen optimalen Polyedereckpunkt?

Idee 1: Graphisches Verfahren

$\rightarrow$ klappt in 2D gut, aber nicht in höheren Dimensionen

Wie lösen wir lineare Programme?

Hauptsatz der linearen Optimierung schränkt unsere Kandidatenmenge auf die Polyedereckpunkte ein.

Wie finden wir möglichst effizient einen optimalen Polyedereckpunkt?

Idee 1: Graphisches Verfahren

$\rightarrow$ klappt in 2D gut, aber nicht in höheren Dimensionen

Idee 2: Polyedereckpunkte durchprobieren

Wie lösen wir lineare Programme?

Hauptsatz der linearen Optimierung schränkt unsere Kandidatenmenge auf die Polyedereckpunkte ein.

Wie finden wir möglichst effizient einen optimalen Polyedereckpunkt?

Idee 1: Graphisches Verfahren

$\rightarrow$ klappt in 2D gut, aber nicht in höheren Dimensionen

Idee 2: Polyedereckpunkte durchprobieren

Wie viele sind das?

Wie lösen wir lineare Programme?

Hauptsatz der linearen Optimierung schränkt unsere Kandidatenmenge auf die Polyedereckpunkte ein.

Wie finden wir möglichst effizient einen optimalen Polyedereckpunkt?

Idee 1: Graphisches Verfahren

$\rightarrow$ klappt in 2D gut, aber nicht in höheren Dimensionen

Idee 2: Polyedereckpunkte durchprobieren

$\rightarrow$ bei n Variablen und m Nebenbedingungen $\begin{pmatrix} n-1 \\ m \end{pmatrix}$ Schnittpunkte von $(n-1)$-dimensionalen Hyperebenen, die mögliche Eckpunkte sind und $O(\begin{pmatrix} n-1 \\ m \end{pmatrix})$ Eckpunkte

Wie lösen wir lineare Programme?

Hauptsatz der linearen Optimierung schränkt unsere Kandidatenmenge auf die Polyedereckpunkte ein.

Wie finden wir möglichst effizient einen optimalen Polyedereckpunkt?

Idee 1: Graphisches Verfahren

$\rightarrow$ klappt in 2D gut, aber nicht in höheren Dimensionen

Idee 2: Polyedereckpunkte durchprobieren

$\rightarrow$ ziemlich ineffizient!

Wie lösen wir lineare Programme?

Hauptsatz der linearen Optimierung schränkt unsere Kandidatenmenge auf die Polyedereckpunkte ein.

Wie finden wir möglichst effizient einen optimalen Polyedereckpunkt?

Idee 1: Graphisches Verfahren

$\rightarrow$ klappt in 2D gut, aber nicht in höheren Dimensionen

Idee 2: Polyedereckpunkte durchprobieren

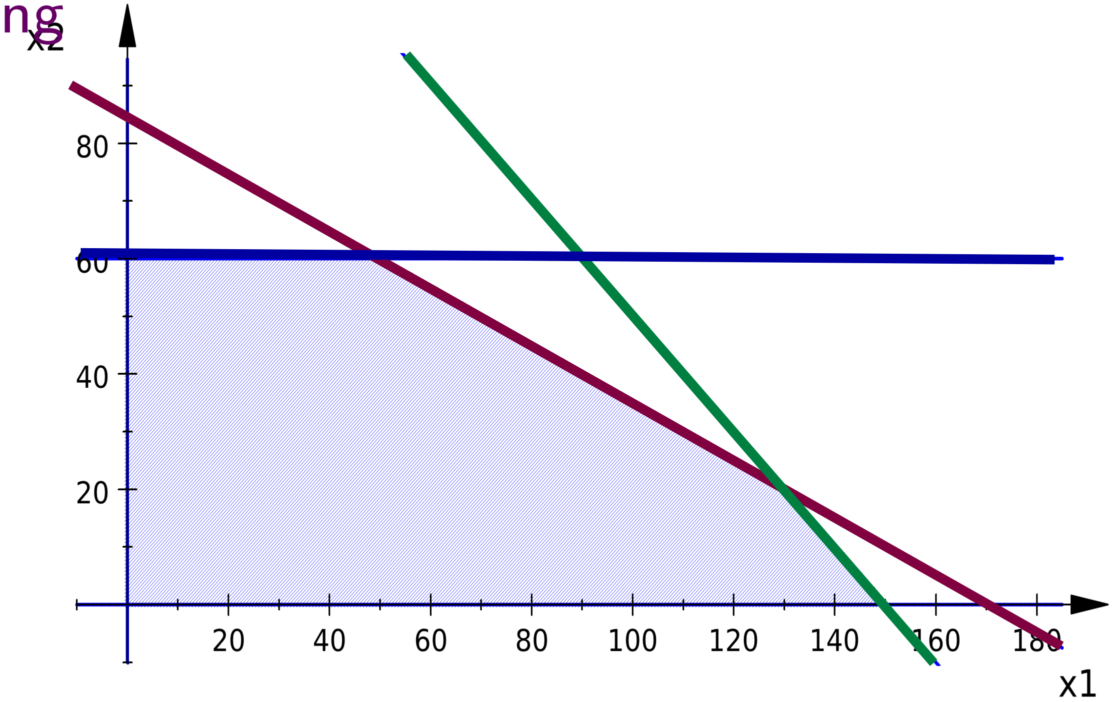
$\rightarrow$ ziemlich ineffizient!

Idee 3: Polyedereckpunkte *clever*/zielgerichtet durchprobieren: das **Simplexverfahren**

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8)

$$
\begin{aligned}
\text{(P)} \quad & \max\ 3x_1 + 5x_2 \\
\text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 \leq 170 \\
& x_1 + x_2 \leq 150 \\
& 3x_2 \leq 180 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Simplexverfahren am Beispiel

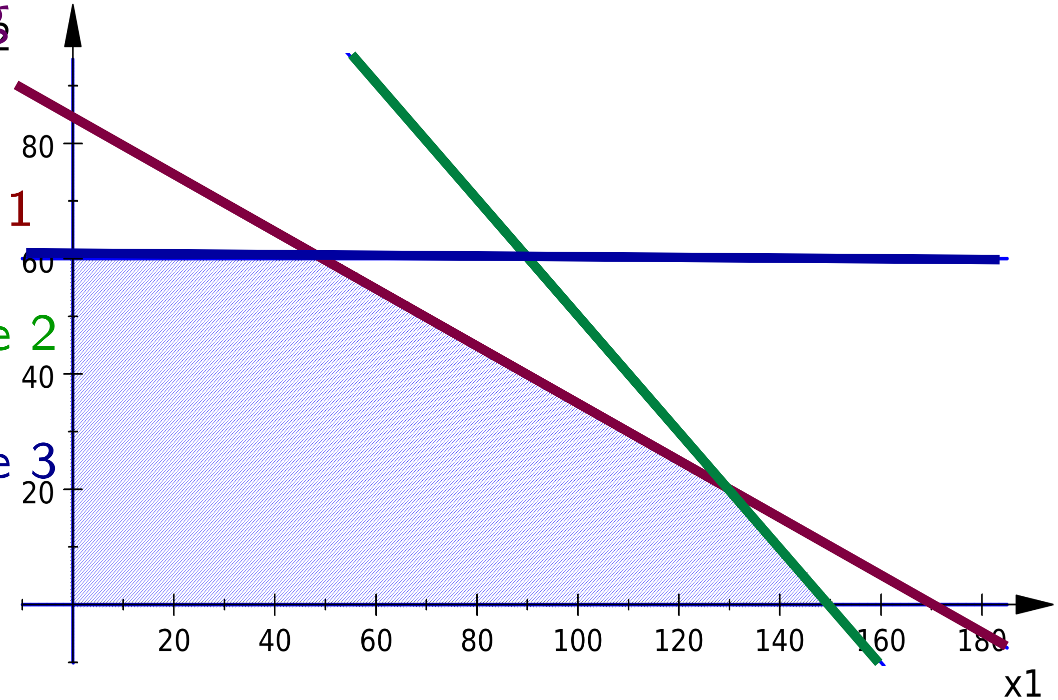
LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8)

$$
\begin{aligned}
\text{(P)} \quad & \max\ 3x_1 + 5x_2 \\
\text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 \leq 170 \\
& x_1 + x_2 \leq 150 \\
& 3x_2 \leq 180 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Zeit auf Maschine 1

Zeit auf Maschine 2

Zeit auf Maschine 3



Simplexverfahren am Beispiel

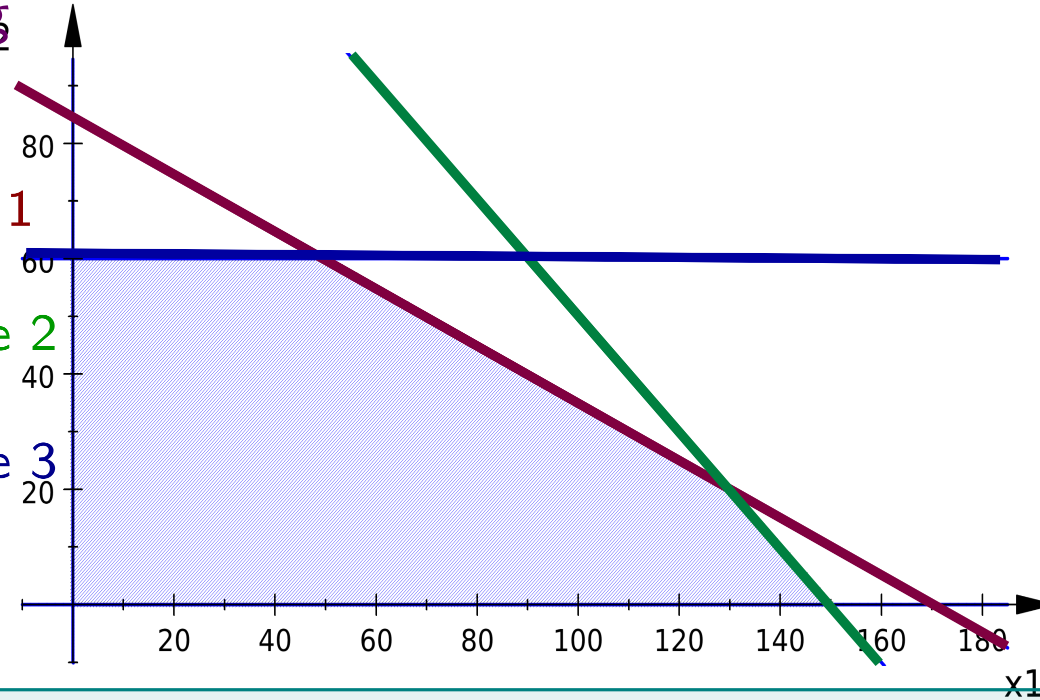
LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8)

$$
\begin{aligned}
\text{(P)}\quad & \max\ 3x_1 + 5x_2 \\
\text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 \le 170 \\
& x_1 + x_2 \le 150 \\
& 3x_2 \le 180 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Zeit auf Maschine 1

Zeit auf Maschine 2

Zeit auf Maschine 3



Schritt 1: Führe für jede Ungleichung i eine **Schlupfvariable** y_i ein.

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8)

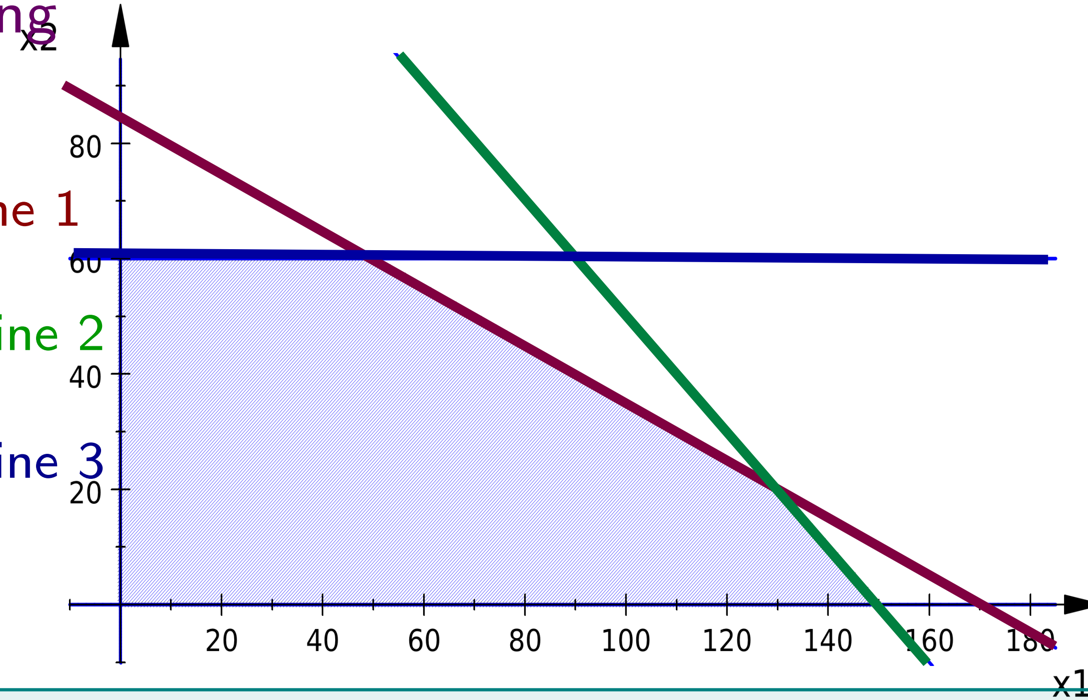
$$
\text{(P)} \qquad \max\ 3x_1 + 5x_2
$$

$$
\begin{aligned}
\text{so dass } x_1 + 2x_2 &\le 170 \\
x_1 + x_2 &\le 150 \\
3x_2 &\le 180 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Zeit auf Maschine 1

Zeit auf Maschine 2

Zeit auf Maschine 3



Schritt 1: Führe für jede Ungleichung i eine **Schlupfvariable** y_i ein.

$$
\max\ 3x_1 + 5x_2
$$

$$
\begin{aligned}
\text{so dass } x_1 + 2x_2 \boxed{+\, y_1} &= 170 \\
x_1 + x_2 \boxed{+\, y_2} &= 150 \\
3x_2 \boxed{+\, y_3} &= 180 \\
x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Simplexverfahren am Beispiel

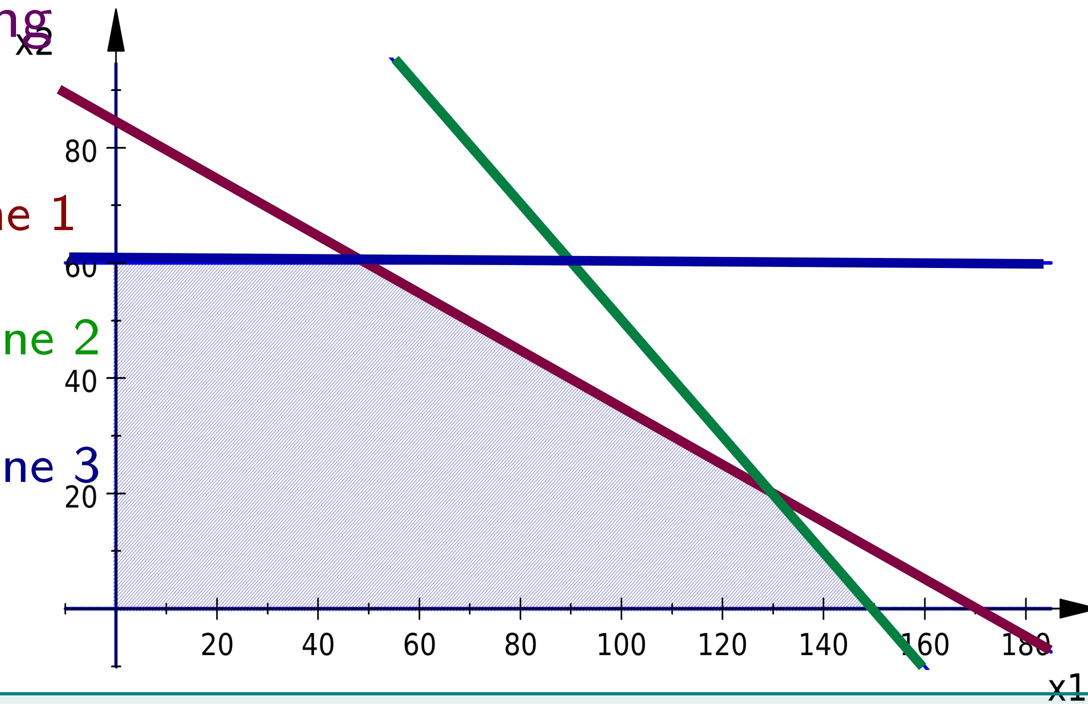
LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8)

$$
\begin{aligned}
\text{(P)} \quad & \max\ 3x_1 + 5x_2 \\
\text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 \leq 170 \\
& x_1 + x_2 \leq 150 \\
& 3x_2 \leq 180 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Zeit auf Maschine 1

Zeit auf Maschine 2

Zeit auf Maschine 3



Schritt 1: Führe für jede Ungleichung i eine **Schlupfvariable** y_i ein.

$$
\begin{aligned}
& \max\ 3x_1 + 5x_2 \\
\text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 \boxed{+ y_1} = 170 \\
& x_1 + x_2 \boxed{+ y_2} = 150 \\
& 3x_2 \boxed{+ y_3} = 180 \\
& x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Die Schlupfvariable y_i repräsentiert die übrig gebliebene Zeit auf Maschine i.

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8)

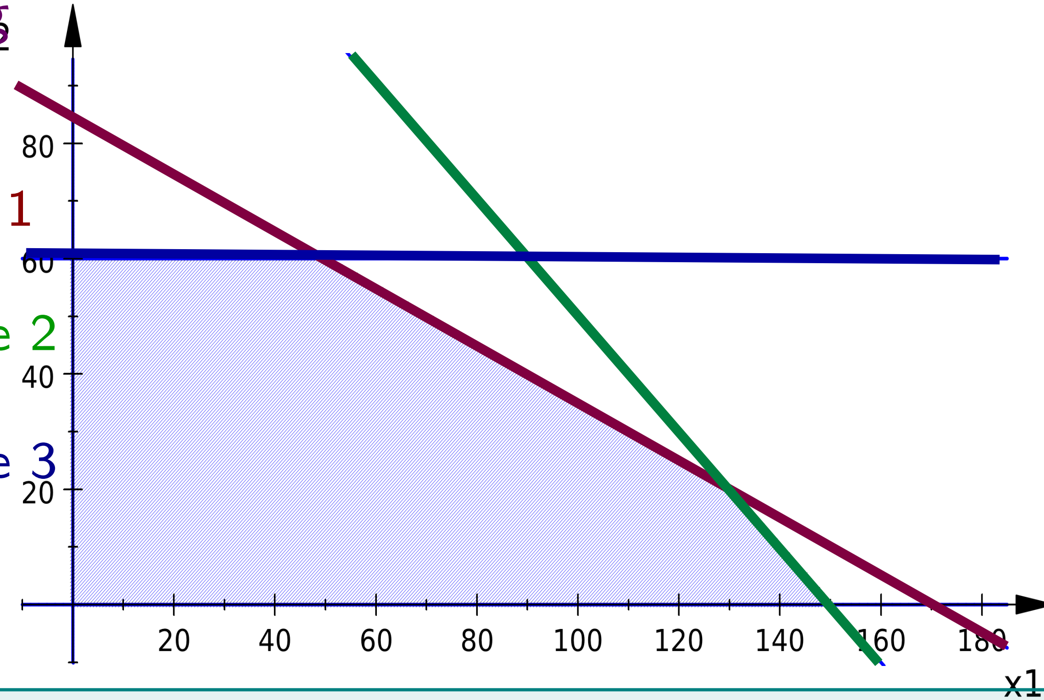
$$(P) \quad \max\ 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{so dass } x_1 + 2x_2 \le 170$$
Zeit auf Maschine 1

$$x_1 + x_2 \le 150$$
Zeit auf Maschine 2

$$3x_2 \le 180$$
Zeit auf Maschine 3

$$x_1, x_2 \ge 0$$



Schritt 1: Führe für jede Ungleichung i eine **Schlupfvariable** y_i ein.

$$\max\ 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{so dass } x_1 + 2x_2 \boxed{+ y_1} = 170$$

$$x_1 + x_2 \boxed{+ y_2} = 150$$

$$3x_2 \boxed{+ y_3} = 180$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

Die Schlupfvariable y_i repräsentiert die übrig gebliebene Zeit auf Maschine i.

Das neue lineare Programm in 5 Variablen hat den gleichen optimalen Zielfunktionswert wie (P).

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8)

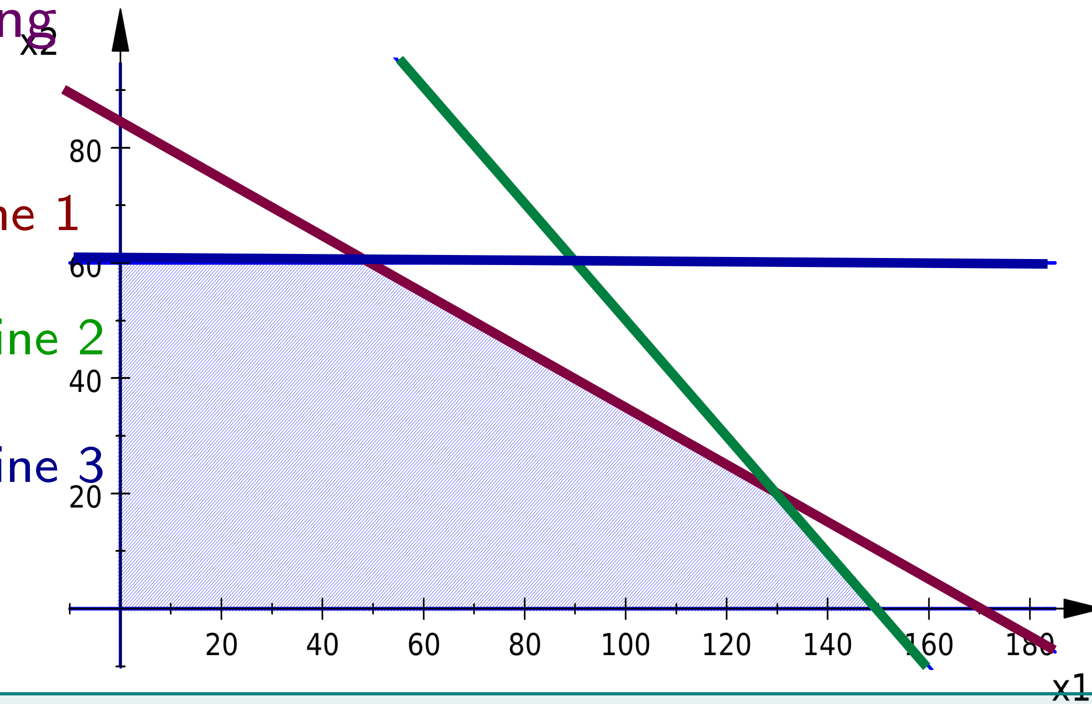
(P) $\max 3x_1 + 5x_2$

so dass $x_1 + 2x_2 \leq 170$ Zeit auf Maschine 1

$x_1 + x_2 \leq 150$ Zeit auf Maschine 2

$3x_2 \leq 180$ Zeit auf Maschine 3

$x_1, x_2 \geq 0$



Schritt 1: Führe für jede Ungleichung i eine **Schlupfvariable** y_i ein.

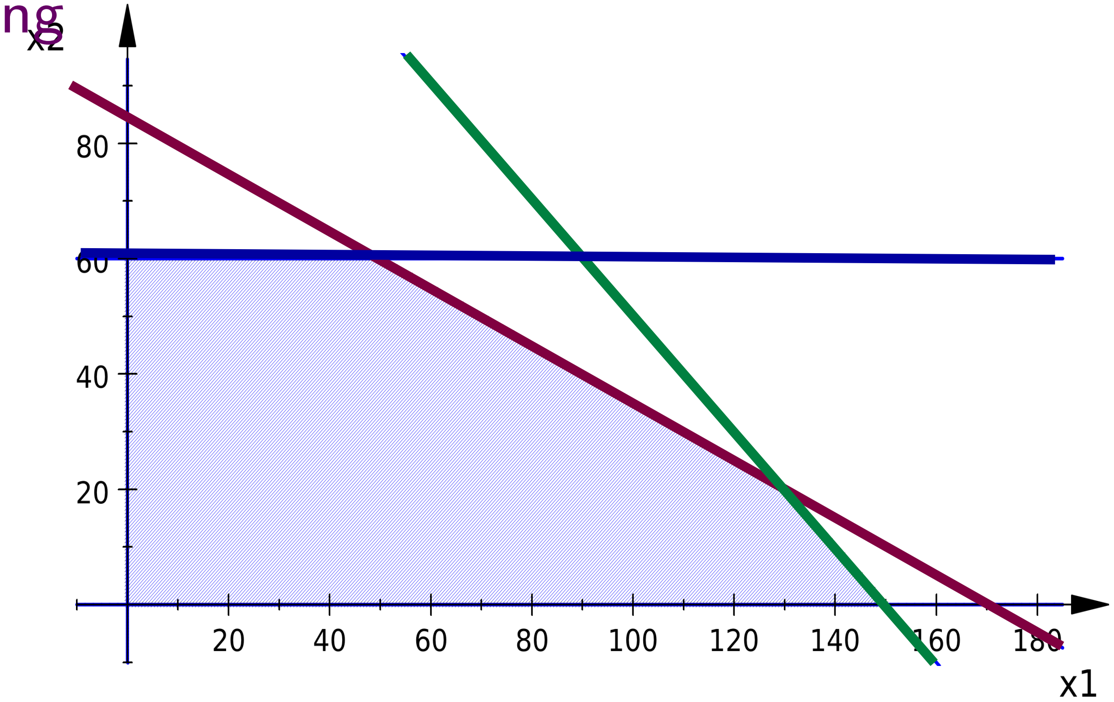
$$
\begin{aligned}
&\max 3x_1 + 5x_2 \\
\text{so dass } &x_1 + 2x_2 \boxed{+\, y_1} = 170 \\
&x_1 + x_2 \boxed{+\, y_2} = 150 \\
&3x_2 \boxed{+\, y_3} = 180 \\
&x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Normalform eines lineares Programms
(nur nicht-negative Variablen, Gleichheitsnebenbedingungen)

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8) in Normalform

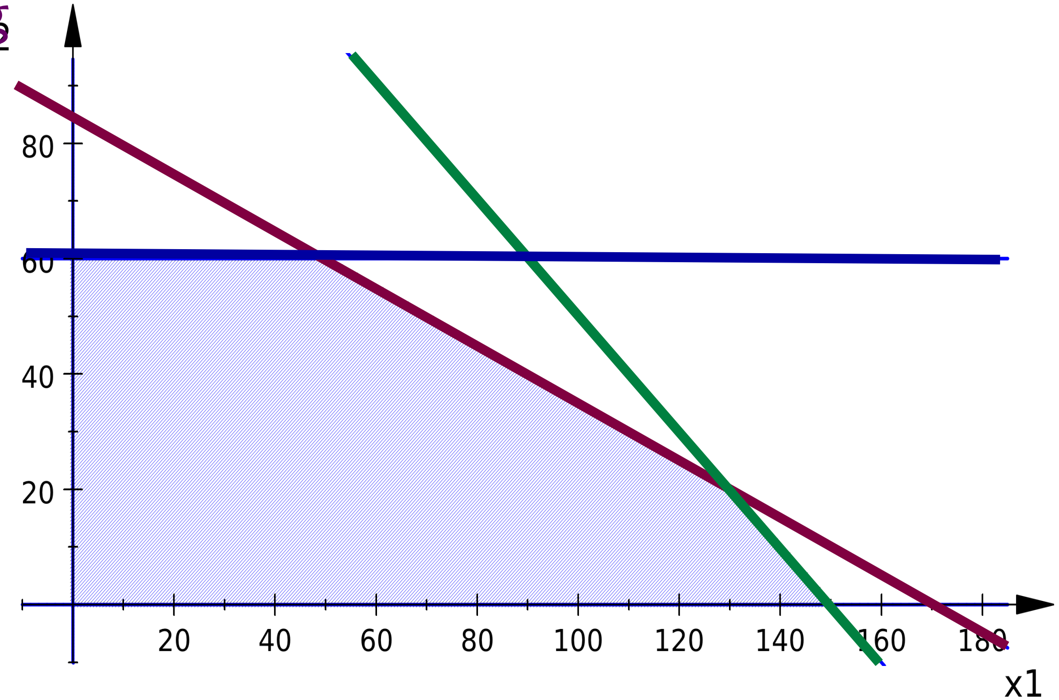
$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 + y_1 = 170 \\
& x_1 + x_2 + y_2 = 150 \\
& 3x_2 + y_3 = 180 \\
& x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$



Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8) in Normalform

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 + y_1 = 170 \\
& x_1 + x_2 + y_2 = 150 \\
& 3x_2 + y_3 = 180 \\
& x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

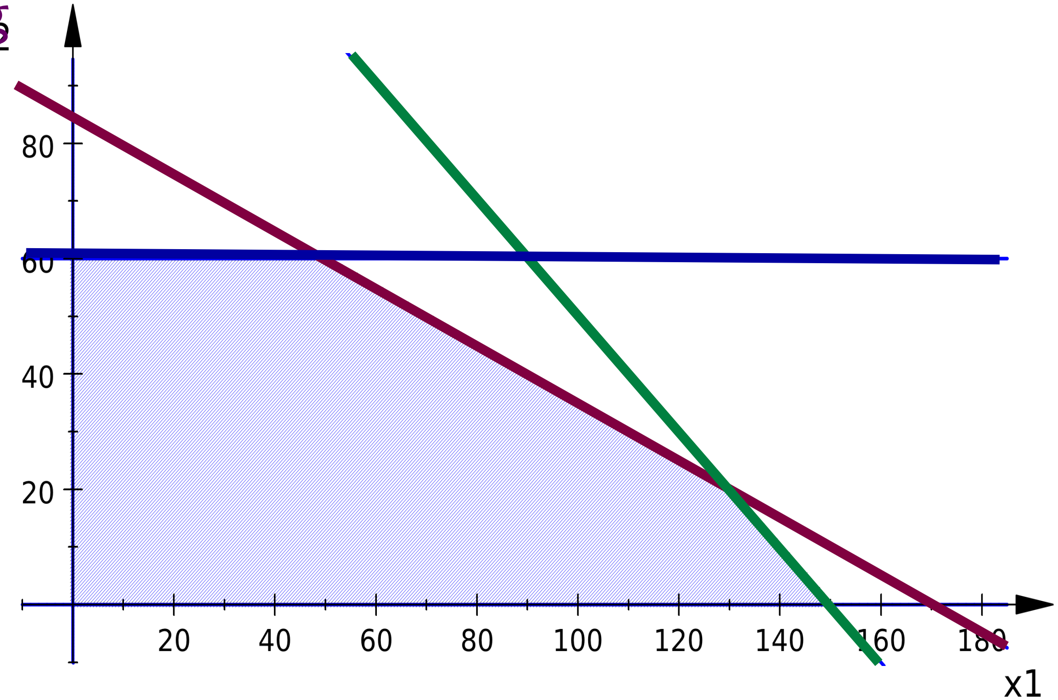


Wir nennen die Lösungen, die den Extrempunkten (Eckpunkten) des Polyeders entsprechen '**Basislösungen**'.

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8) in Normalform

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 + y_1 = 170 \\ & x_1 + x_2 + y_2 = 150 \\ & 3x_2 + y_3 = 180 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$



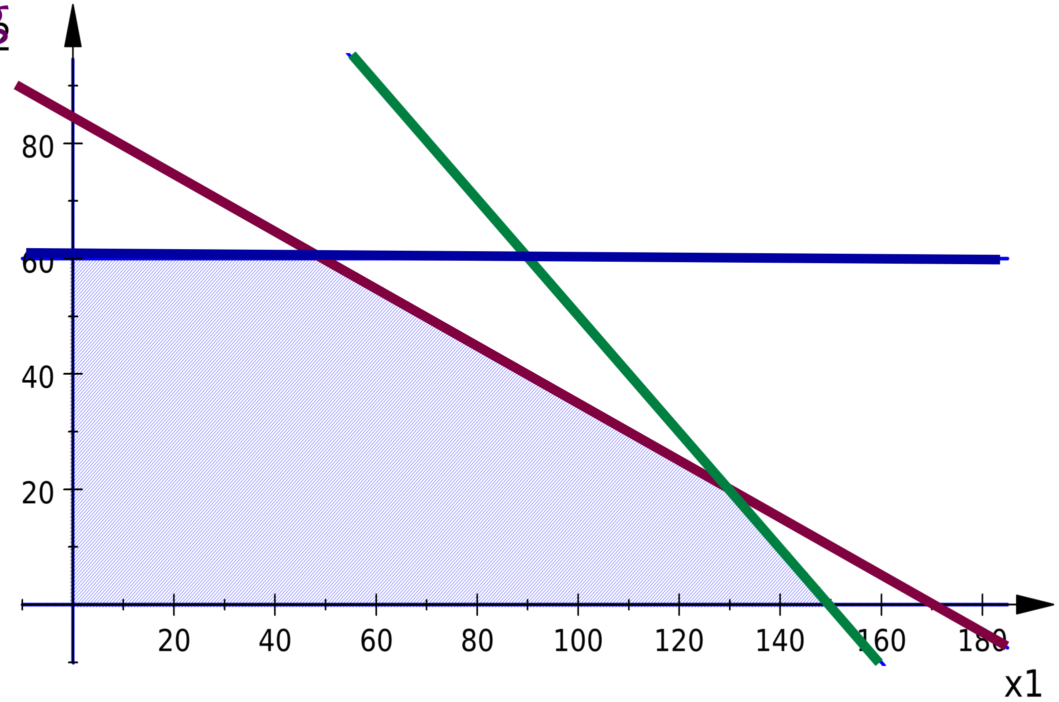
Wir nennen die Lösungen, die den Extrempunkten (Eckpunkten) des Polyeders entsprechen '**Basislösungen**'.

Warum, wird später deutlich.

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8) in Normalform

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 + y_1 = 170 \\ & x_1 + x_2 + y_2 = 150 \\ & 3x_2 + y_3 = 180 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$



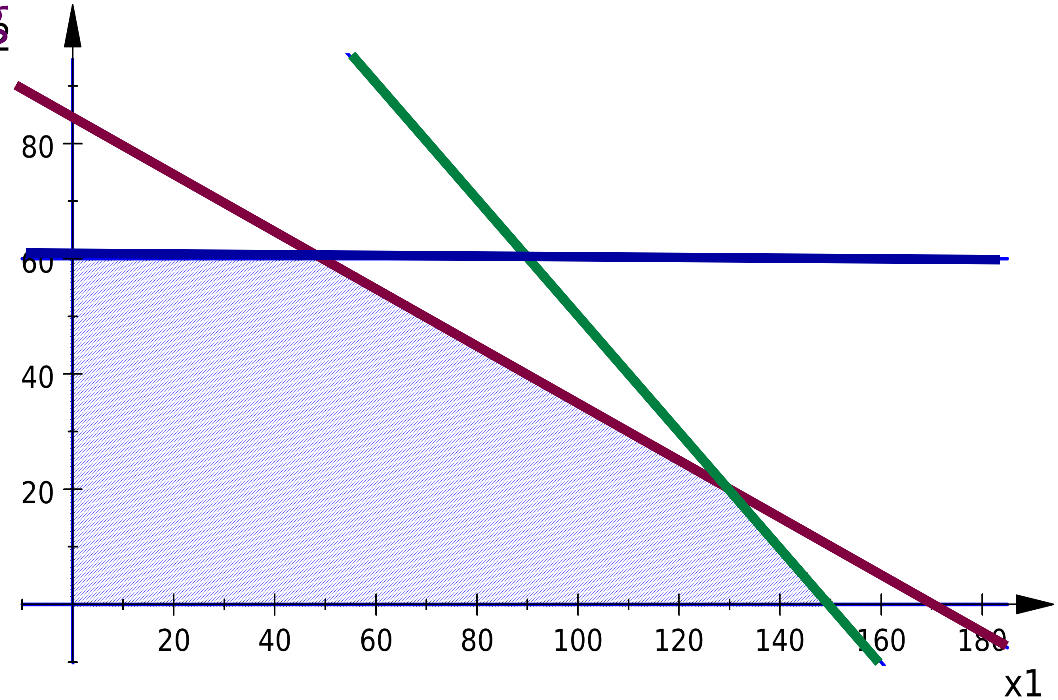
Wir nennen die Lösungen, die den Extrempunkten (Eckpunkten) des Polyeders entsprechen '**Basislösungen**'.

Wir starten mit einer *einfach zu bestimmenden* Basislösung.

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8) in Normalform

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 + y_1 = 170 \\ & x_1 + x_2 + y_2 = 150 \\ & 3x_2 + y_3 = 180 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$



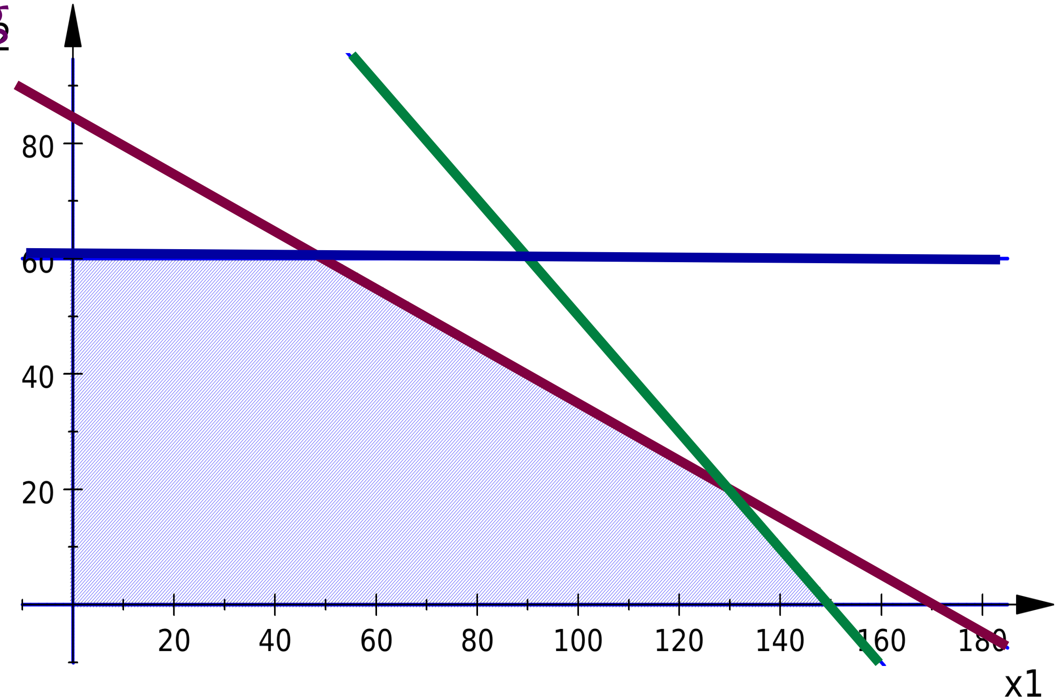
Wir nennen die Lösungen, die den Extrempunkten (Eckpunkten) des Polyeders entsprechen '**Basislösungen**'.

Wir starten mit einer *einfach zu bestimmenden* Basislösung.
$x_1 = 0, x_2 = 0,$

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8) in Normalform

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{so dass } & x_1 + 2x_2 + y_1 = 170 \\ & x_1 + x_2 + y_2 = 150 \\ & 3x_2 + y_3 = 180 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$



Wir nennen die Lösungen, die den Extrempunkten (Eckpunkten) des Polyeders entsprechen '**Basislösungen**'.

Wir starten mit einer *einfach zu bestimmenden* Basislösung.

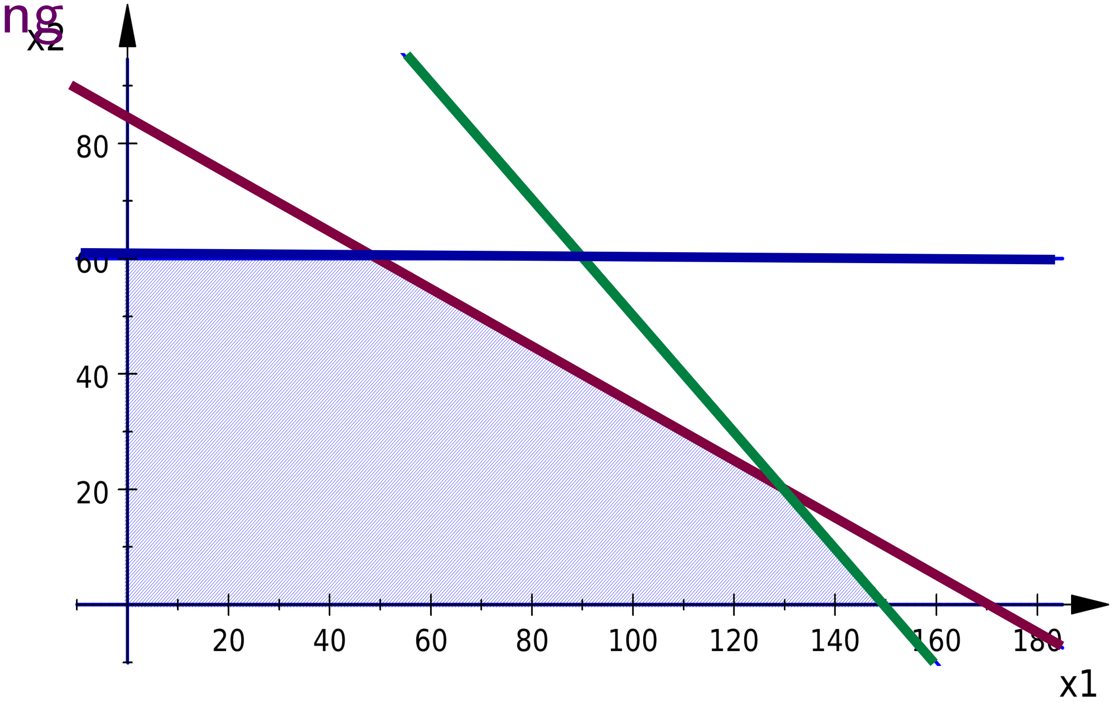
$x_1 = 0, x_2 = 0,$

$$\begin{aligned} y_1 &= 170 - x_1 - 2x_2 \\ y_2 &= 150 - x_1 - x_2 \\ y_3 &= 180 - 3x_2 \end{aligned}$$

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8) in Normalform

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 + y_1 = 170 \\ & x_1 + x_2 + y_2 = 150 \\ & 3x_2 + y_3 = 180 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$



Wir nennen die Lösungen, die den Extrempunkten (Eckpunkten) des Polyeders entsprechen '**Basislösungen**'.

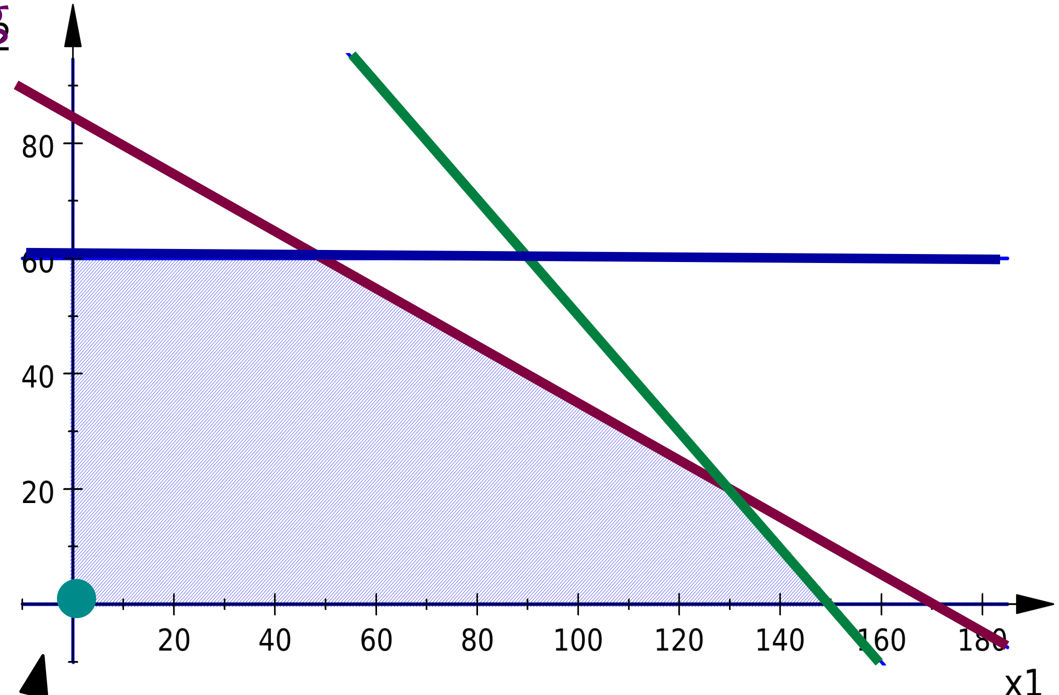
Wir starten mit einer *einfach zu bestimmenden* Basislösung.

$x_1 = 0, x_2 = 0, \quad y_1 = 170, y_2 = 150, y_3 = 180$

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8) in Normalform

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 + y_1 = 170 \\ & x_1 + x_2 + y_2 = 150 \\ & 3x_2 + y_3 = 180 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$



Wir nennen die Lösungen, die den Extrempunkten (Eckpunkten) des Polyeders entsprechen '**Basislösungen**'.

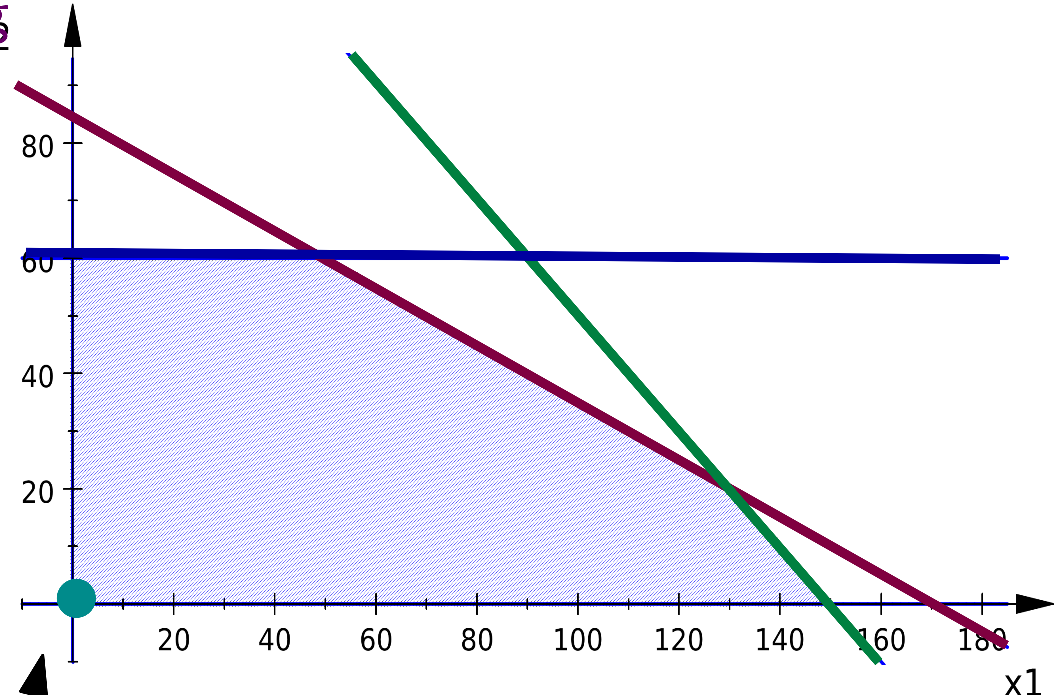
Wir starten mit einer *einfach zu bestimmenden* Basislösung.

$x_1 = 0, x_2 = 0, \quad y_1 = 170, y_2 = 150, y_3 = 180$

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8) in Normalform

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 + y_1 = 170 \\ & x_1 + x_2 + y_2 = 150 \\ & 3x_2 + y_3 = 180 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$



Wir nennen die Lösungen, die den Extrempunkten (Eckpunkten) des Polyeders entsprechen '**Basislösungen**'.

Wir starten mit einer *einfach zu bestimmenden* Basislösung.

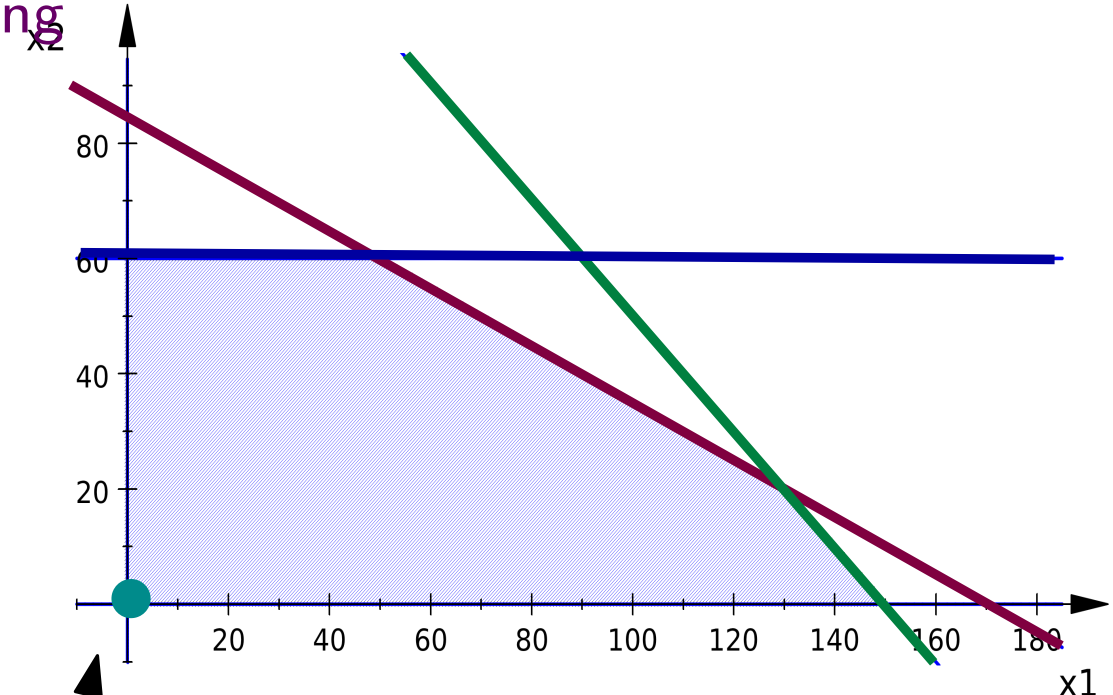
$x_1 = 0, x_2 = 0, \quad y_1 = 170, y_2 = 150, y_3 = 180$

In einer Basislösung nennen wir Variablen, die gleich 0 sind **Nicht-Basis-Variablen** und die Variablen, die ungleich 0 sind **Basisvariablen**.

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8) in Normalform

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 + y_1 = 170 \\ & x_1 + x_2 + y_2 = 150 \\ & 3x_2 + y_3 = 180 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$



Wir nennen die Lösungen, die den Extrempunkten (Eckpunkten) des Polyeders entsprechen '**Basislösungen**'.

Wir starten mit einer *einfach zu bestimmenden* Basislösung.

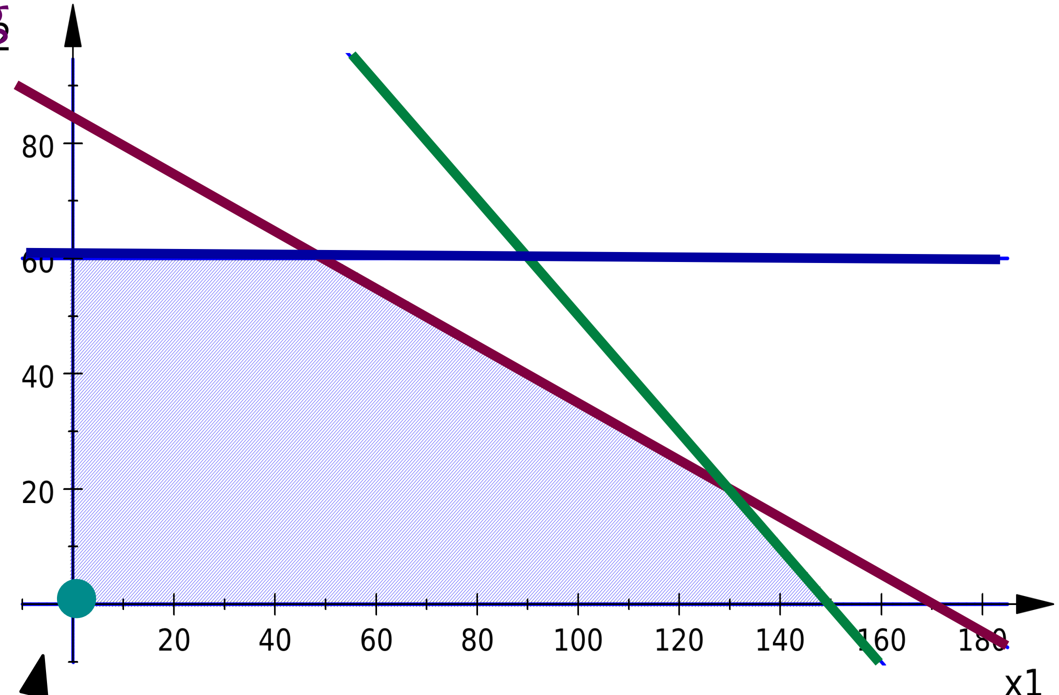
$\boxed{x_1 = 0, x_2 = 0,}$ $\boxed{y_1 = 170, y_2 = 150, y_3 = 180}$

In einer Basislösung nennen wir Variablen, die gleich 0 sind **Nicht-Basis-Variablen** und die Variablen, die ungleich 0 sind **Basisvariablen**.

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8) in Normalform

$$\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{so dass } & x_1 + 2x_2 + y_1 = 170 \\
& x_1 + x_2 + y_2 = 150 \\
& 3x_2 + y_3 = 180 \\
& x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}$$



Wir nennen die Lösungen, die den Extrempunkten (Eckpunkten) des Polyeders entsprechen '**Basislösungen**'.

Wir starten mit einer *einfach zu bestimmenden* Basislösung.

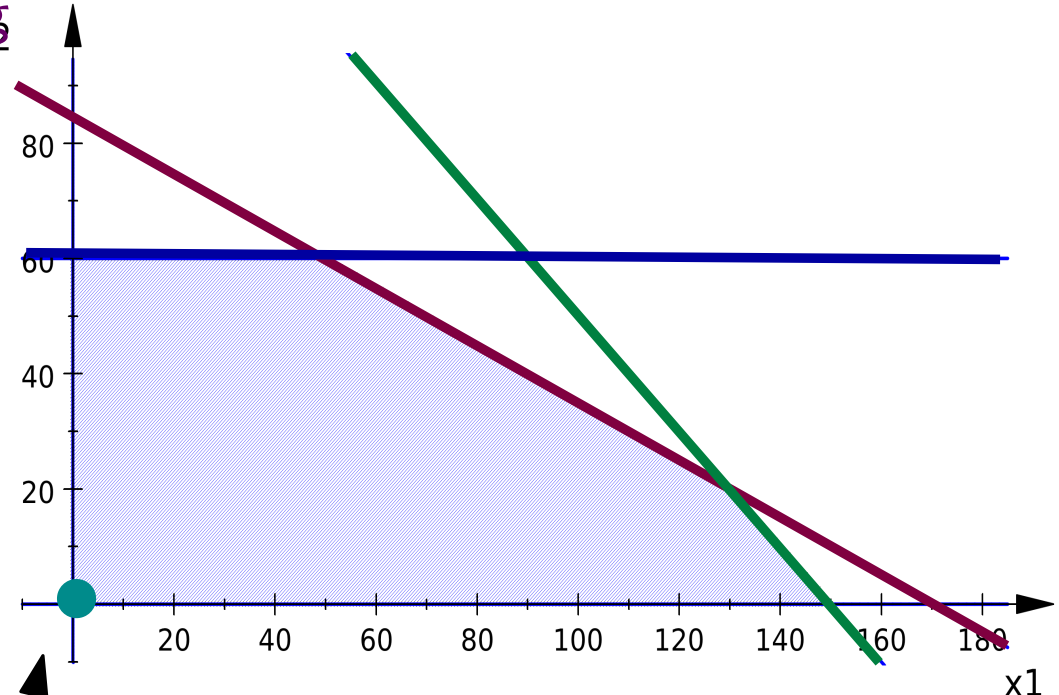
$x_1 = 0, x_2 = 0, \quad y_1 = 170, y_2 = 150, y_3 = 180$

Zielfunktionswert (ZFW)?

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8) in Normalform

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 + y_1 = 170 \\ & x_1 + x_2 + y_2 = 150 \\ & 3x_2 + y_3 = 180 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$



Wir nennen die Lösungen, die den Extrempunkten (Eckpunkten) des Polyeders entsprechen '**Basislösungen**'.

Wir starten mit einer *einfach zu bestimmenden* Basislösung.

$x_1 = 0, x_2 = 0, \quad y_1 = 170, y_2 = 150, y_3 = 180 \quad$ mit ZFW 0

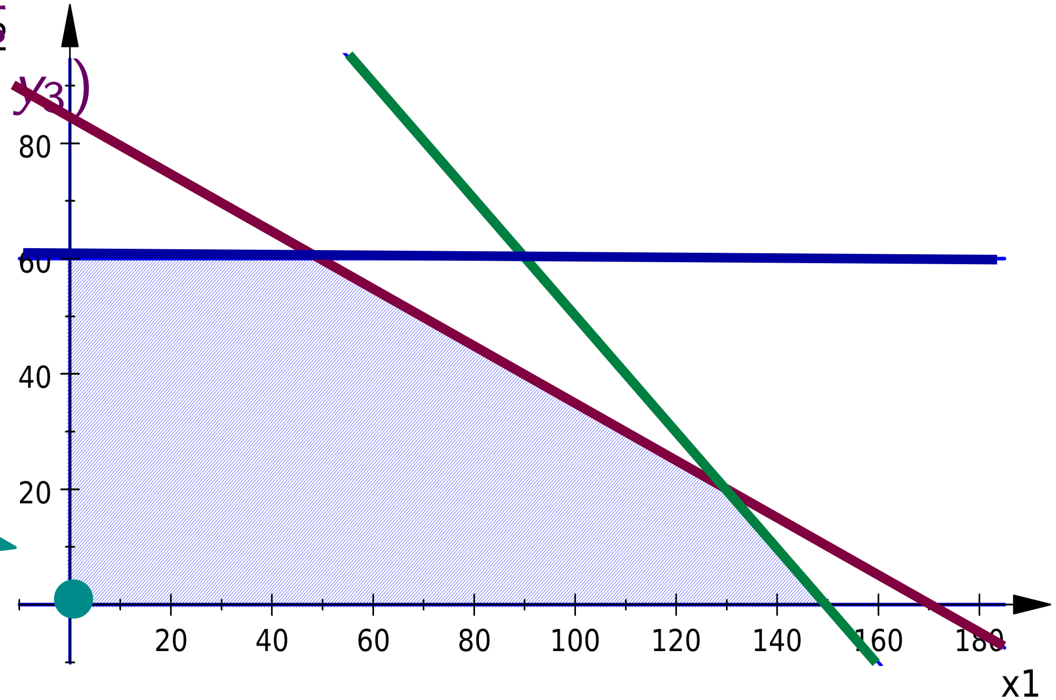
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, y_3)

(LP0)

$$\max\ 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{so dass}\quad \begin{aligned} y_1 &= 170 - x_1 - 2x_2 \\ y_2 &= 150 - x_1 - x_2 \\ y_3 &= 180 - 3x_2 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

Simplexverfahren am Beispiel

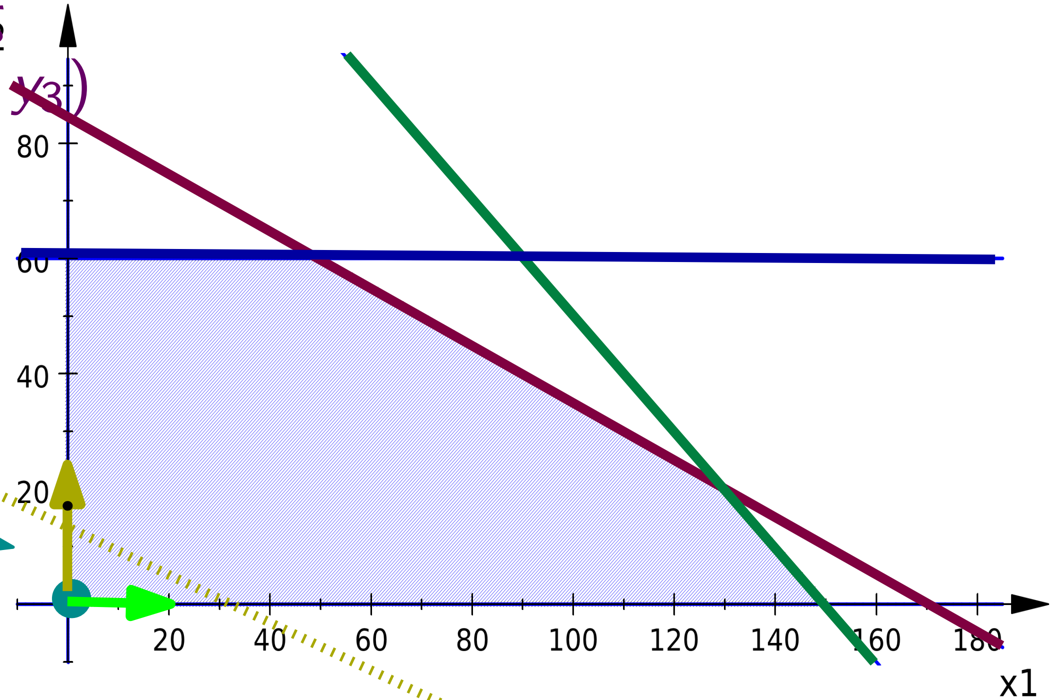
LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, y_3)

(LP0)

$$\max\ 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{so dass}\quad \boxed{\begin{aligned} y_1 &= 170 \\ y_2 &= 150 \\ y_3 &= 180 \end{aligned}} \begin{aligned} &- x_1 - 2x_2 \\ &- x_1 - x_2 \\ &- 3x_2 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) und um 5 pro mehr produzierte Einheit $P2$ (x_2)

Simplexverfahren am Beispiel

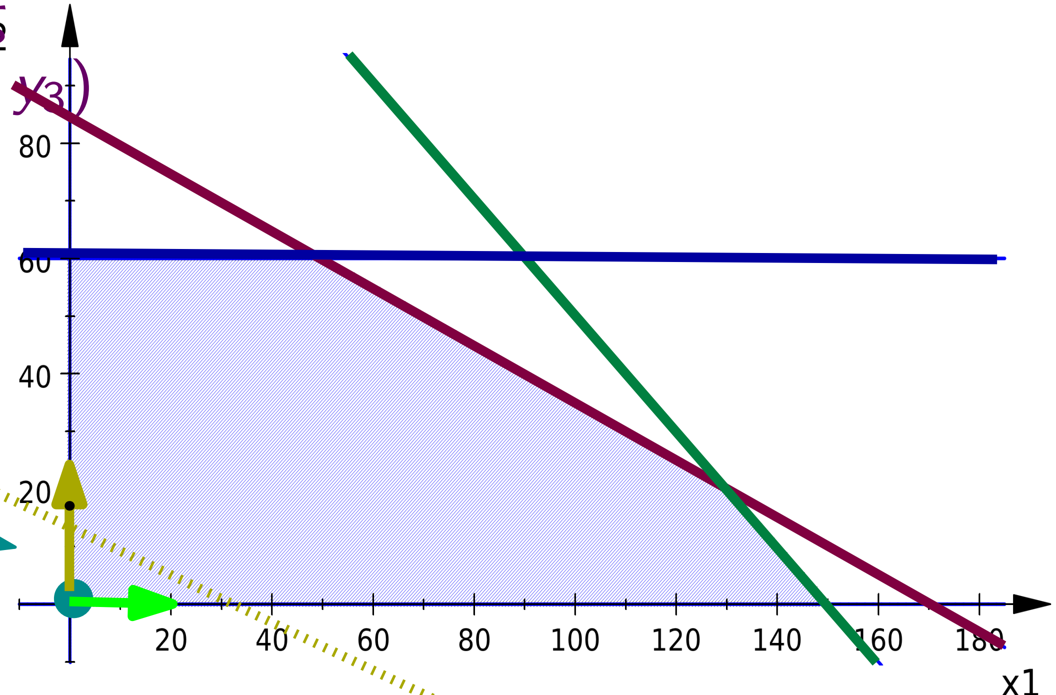
LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, y_3)

(LP0)

$$\max\ 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{so dass}\quad \begin{aligned} y_1 &= 170 - x_1 - 2x_2 \\ y_2 &= 150 - x_1 - x_2 \\ y_3 &= 180 - 3x_2 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

→ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) und um 5 pro mehr produzierte Einheit $P2$ (x_2) → Will x_2 erhöhen

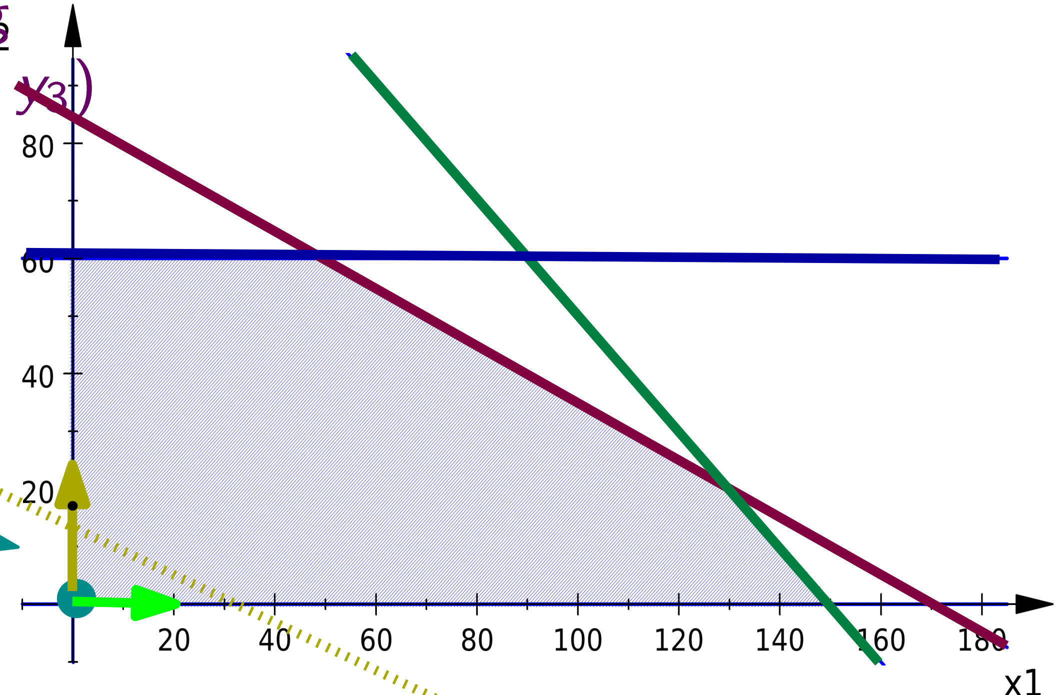
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, y_3)
(LP0)

$$\max\ 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{so dass}\quad \begin{aligned} y_1 &= 170 - x_1 - 2x_2 \\ y_2 &= 150 - x_1 - x_2 \\ y_3 &= 180 - 3x_2 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



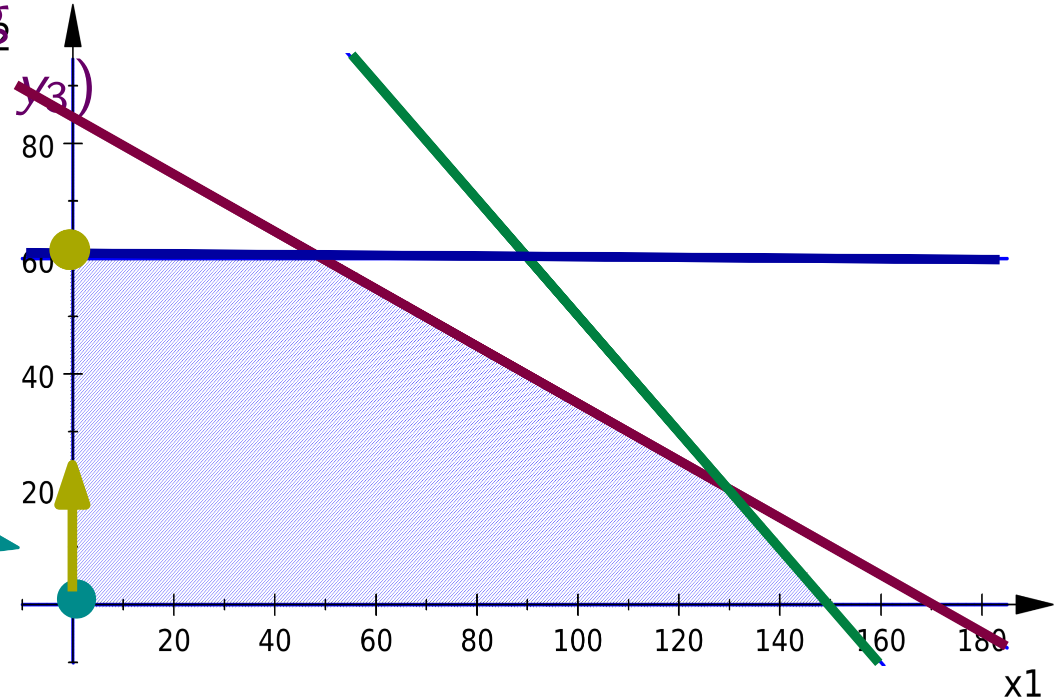
Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

→ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) und um 5 pro mehr produzierte Einheit $P2$ (x_2) → Will x_2 erhöhen

An dieser Stelle erzielt man einen höheren Zielfunktionswert auch, wenn man stattdessen x_1 erhöht.
Eine Auswahlregel (was in einer solchen Situation zu erhöhen ist) nennt man **Pivotregel**.

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, y_3)



(LP0)

$$\max\ 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{so dass}\quad \begin{aligned} y_1 &= 170 - x_1 - 2x_2 \\ y_2 &= 150 - x_1 - x_2 \\ y_3 &= 180 - 3x_2 \\ x_1, x_2,& y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) und um 5 pro mehr produzierte Einheit $P2$ (x_2) $\rightarrow$ Will x_2 erhöhen

Um wieviel kann x_2 erhöht werden?

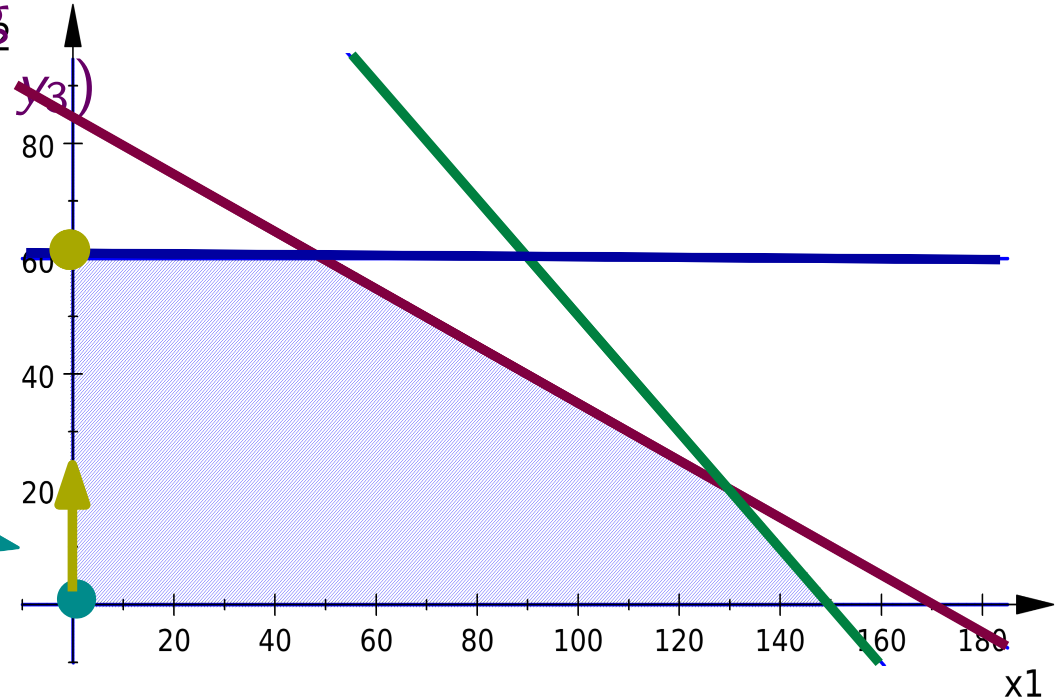
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, y_3)
(LP0)

$$\max\ 3x_1 + 5x_2$$

so dass
$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 170 \\ y_2 &= 150 \\ y_3 &= 180 \end{aligned}} \begin{aligned} &- x_1 - 2x_2 \\ &- x_1 - x_2 \\ &- 3x_2 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) und um 5 pro mehr produzierte Einheit $P2$ (x_2) $\rightarrow$ Will x_2 erhöhen

Um wieviel kann x_2 erhöht werden?

$$x_2 = \frac{170 - x_1 - y_1}{2} = 85 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1$$
$$x_2 = 150 - x1 - y_2$$
$$x_2 = \frac{180 - y_3}{3} = 60 - \frac{1}{3}y_3$$

Simplexverfahren am Beispiel

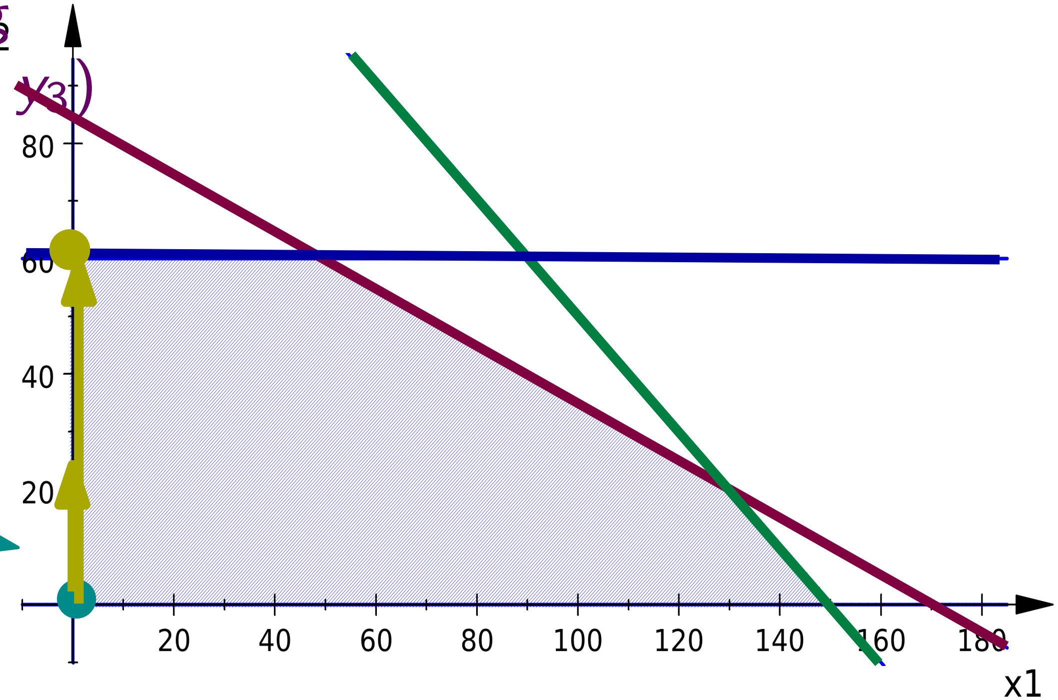
LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, y_3)

(LP0)

$$\max \; 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{so dass} \quad \begin{aligned} y_1 &= 170 - x_1 - 2x_2 \\ y_2 &= 150 - x_1 - x_2 \\ y_3 &= 180 - 3x_2 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) und um 5 pro mehr produzierte Einheit $P2$ (x_2) $\rightarrow$ Will x_2 erhöhen

Um wieviel kann x_2 erhöht werden?

$$x_2 = \frac{170 - x_1 - y_1}{2} = 85 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1$$

$$x_2 = 150 - x1 - y_2$$

$$x_2 = \frac{180 - y_3}{3} = 60 - \frac{1}{3}y_3 \leftarrow \text{höchstens um 60}$$

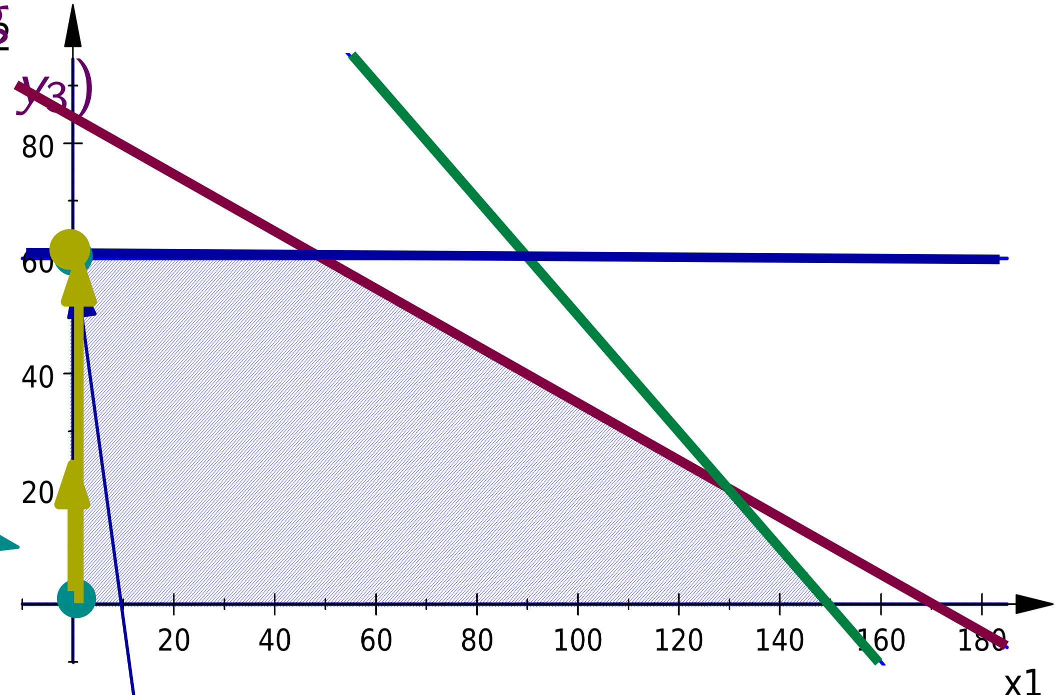
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, y_3)
(LP0)

$$\max\ 3x_1 + 5x_2$$

so dass
$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 170 \\ y_2 &= 150 \\ y_3 &= 180 \end{aligned}} \begin{aligned} &- x_1 - 2x_2 \\ &- x_1 - x_2 \\ &- 3x_2 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) und um 5 pro mehr produzierte Einheit $P2$ (x_2) $\rightarrow$ Will x_2 erhöhen

Um wieviel kann x_2 erhöht werden?

$x_2 = \frac{170 - x_1 - y_1}{2} = 85 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1$
$x_2 = 150 - x1 - y_2$
$x_2 = \frac{180 - y_3}{3} = 60 - \frac{1}{3}y_3 \leftarrow$ höchstens um 60

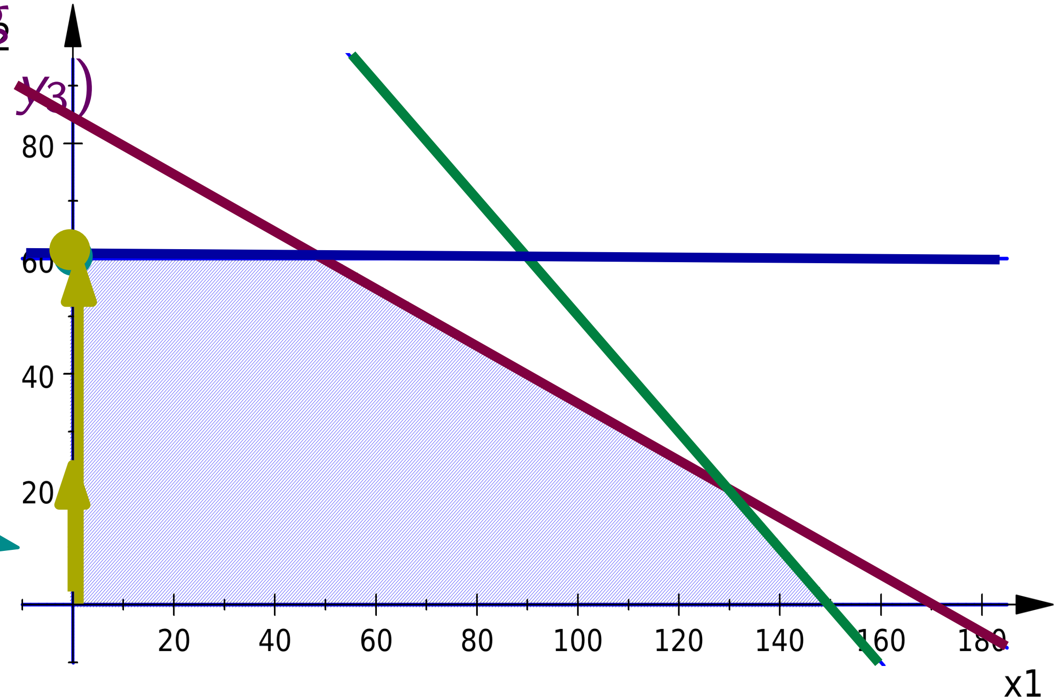
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, y_3)
(LP0)

$$\max 3x_1 + 5x_2$$

so dass
$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 170 \\ y_2 &= 150 \\ y_3 &= 180 \end{aligned}} \begin{aligned} &- x_1 - 2x_2 \\ &- x_1 - x_2 \\ &- 3x_2 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) und um 5 pro mehr produzierte Einheit $P2$ (x_2) $\rightarrow$ Will x_2 erhöhen

Um wieviel kann x_2 erhöht werden?

Berechne neue Basisdarstellung.

$$x_2 = \frac{170 - x_1 - y_1}{2} = 85 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1$$
$$x_2 = 150 - x1 - y_2$$
$$x_2 = \frac{180 - y_3}{3} = 60 - \frac{1}{3}y_3 \leftarrow \text{höchstens um 60}$$

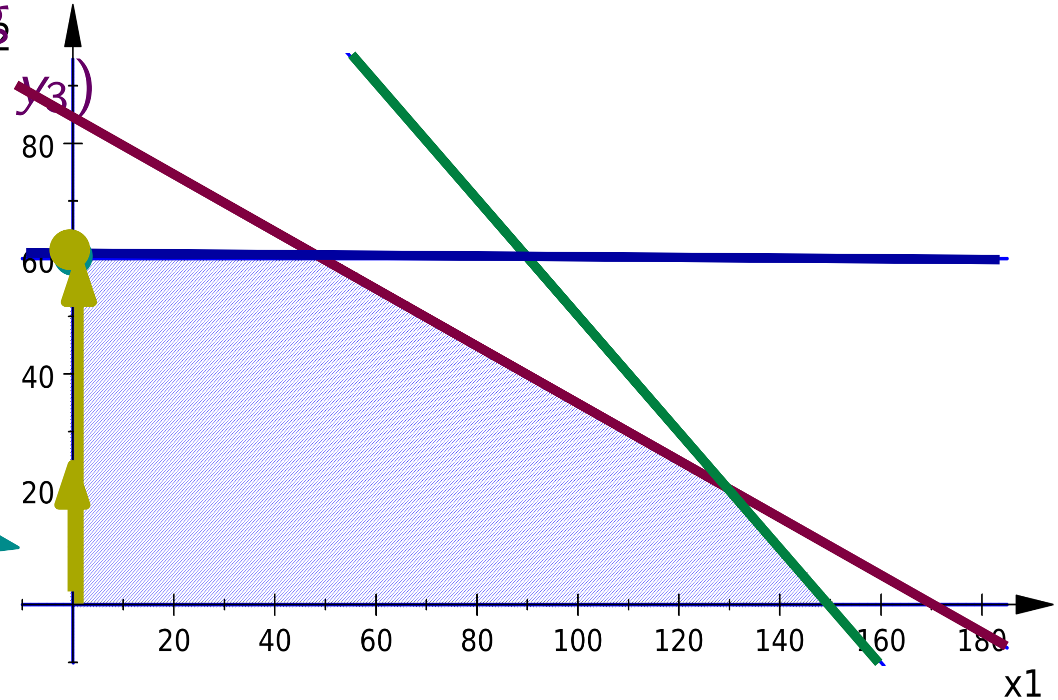
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, y_3)
(LP0)

$$\max\ 3x_1 + 5x_2$$

so dass
$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 170 \\ y_2 &= 150 \\ y_3 &= 180 \end{aligned}} \begin{aligned} &- x_1 - 2x_2 \\ &- x_1 - x_2 \\ &- 3x_2 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) und um 5 pro mehr produzierte Einheit $P2$ (x_2) $\rightarrow$ Will x_2 erhöhen

Um wieviel kann x_2 erhöht werden?

Berechne neue Basisdarstellung.

$x_2 = \frac{170 - x_1 - y_1}{2} = 85 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1$

$x_2 = 150 - x1 - y_2$

$x_2 = \frac{180 - y_3}{3} = 60 - \frac{1}{3}y_3 \leftarrow$ höchstens um 60

$x_2 = 60 - \frac{1}{3}y_3$

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, y_3)

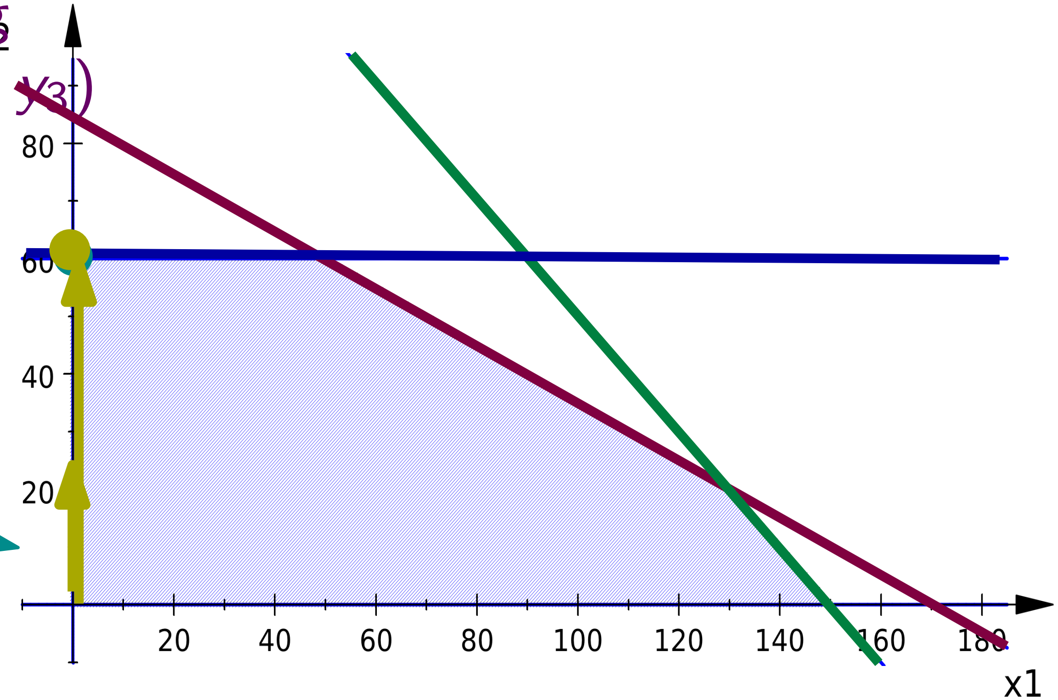
(LP0)

$$\max\ 3x_1 + 5x_2$$

so dass

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 170 \\ y_2 &= 150 \\ y_3 &= 180 \end{aligned}} \begin{aligned} &- x_1 - 2x_2 \\ &- x_1 - x_2 \\ &- 3x_2 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) und um 5 pro mehr produzierte Einheit $P2$ (x_2) $\rightarrow$ Will x_2 erhöhen

Um wieviel kann x_2 erhöht werden?

$$x_2 = \frac{170 - x_1 - y_1}{2} = 85 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1$$

$$x_2 = 150 - x1 - y_2$$

$$x_2 = \frac{180 - y_3}{3} = 60 - \frac{1}{3}y_3$$

Berechne neue Basisdarstellung.

$$\begin{aligned} y_1 &= 170 - x_1 - 2(60 - \tfrac{1}{3}y_3) \\ &= 50 - x_1 + \tfrac{2}{3}y_3 \end{aligned}$$

$$x_2 = 60 - \frac{1}{3}y_3$$

Simplexverfahren am Beispiel

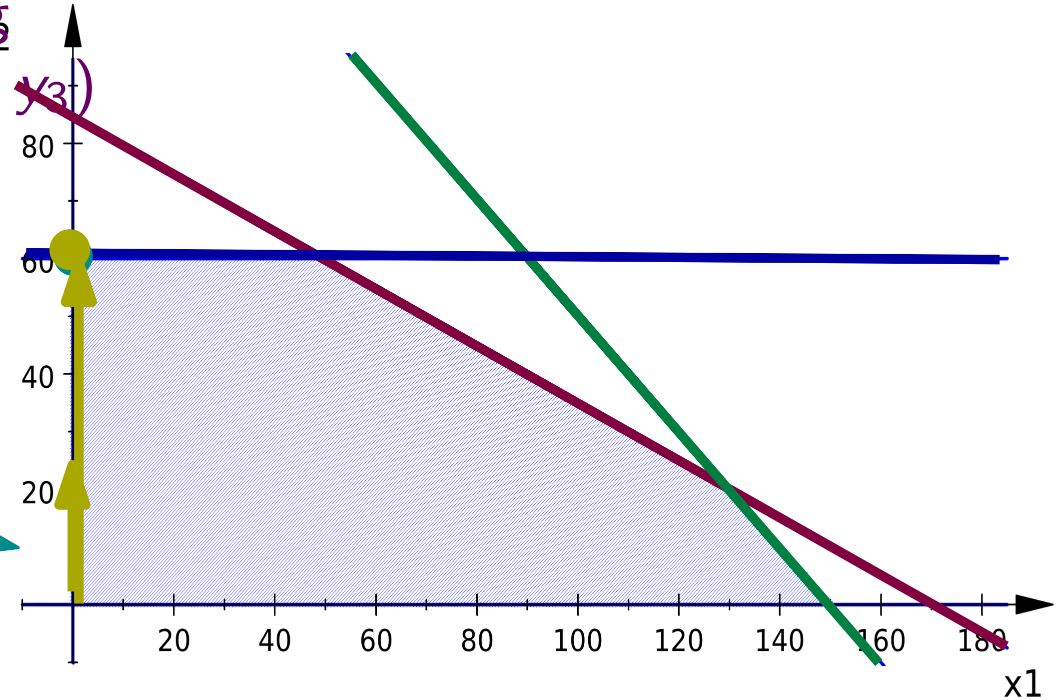
LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, y_3)

(LP0)

$$\max\ 3x_1 + 5x_2$$

so dass
$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 170 \\ y_2 &= 150 \\ y_3 &= 180 \end{aligned}}\begin{aligned} &- x_1 - 2x_2 \\ &- x_1 - x_2 \\ &- 3x_2 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

→ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) und um 5 pro mehr produzierte Einheit $P2$ (x_2) → Will x_2 erhöhen

Um wieviel kann x_2 erhöht werden?

$$x_2 = \frac{170 - x_1 - y_1}{2} = 85 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1$$
$$x_2 = 150 - x1 - y_2$$
$$x_2 = \frac{180 - y_3}{3} = 60 - \frac{1}{3}y_3$$

Berechne neue Basisdarstellung.

$$y_1 = 170 - x_1 - 2(60 - \tfrac{1}{3}y_3)$$
$$= 50 - x_1 + \tfrac{2}{3}y_3$$
$$y_2 = 150 - x_1 - (60 - \tfrac{1}{3}y_3)$$
$$= 90 - x_1 + \tfrac{1}{3}y_3$$
$$x_2 = 60 - \tfrac{1}{3}y_3$$

Simplexverfahren am Beispiel

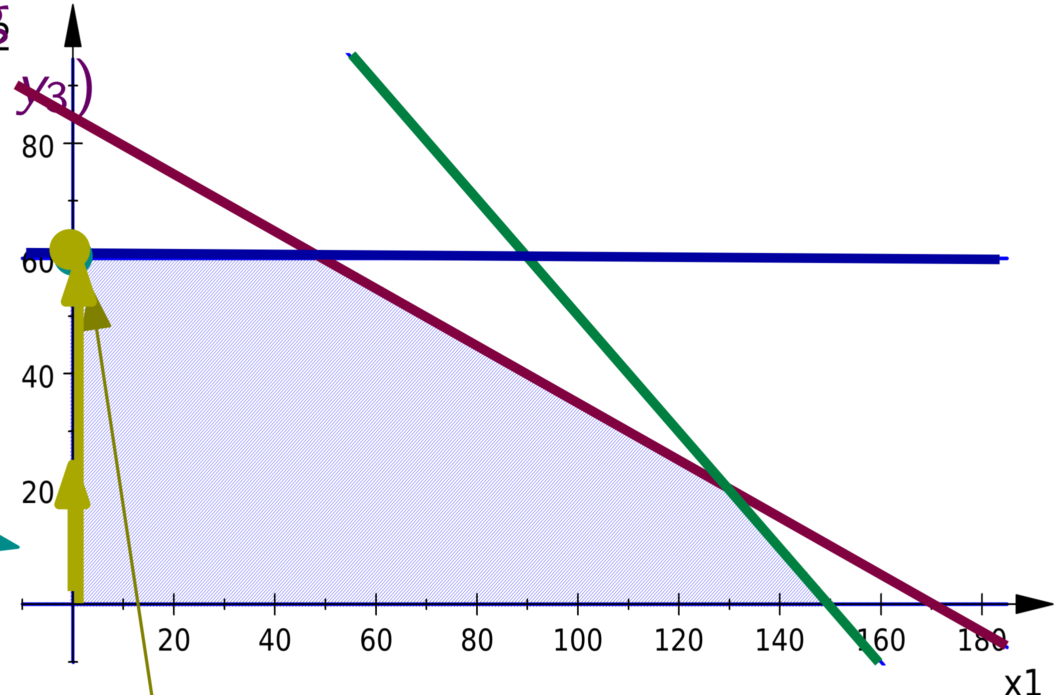
LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, y_3)

(LP0)

$$\max\ 3x_1 + 5x_2$$

so dass
$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 170 \\ y_2 &= 150 \\ y_3 &= 180 \end{aligned}} \begin{aligned} &- x_1 - 2x_2 \\ &- x_1 - x_2 \\ &- 3x_2 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) und um 5 pro mehr produzierte Einheit $P2$ (x_2) $\rightarrow$ Will x_2 erhöhen

Um wieviel kann x_2 erhöht werden?

$$x_2 = \frac{170 - x_1 - y_1}{2} = 85 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1$$
$$x_2 = 150 - x1 - y_2$$
$$x_2 = \frac{180 - y_3}{3} = 60 - \frac{1}{3}y_3$$

Berechne neue Basisdarstellung.

$$\boxed{y_1} = 170 - x_1 - 2(60 - \tfrac{1}{3}y_3)$$
$$\boxed{= 50} - x_1 + \tfrac{2}{3}y_3$$
$$\boxed{y_2} = 150 - x_1 - (60 - \tfrac{1}{3}y_3)$$
$$\boxed{= 90} - x_1 + \tfrac{1}{3}y_3$$
$$\boxed{x_2 = 60} - \frac{1}{3}y_3$$

Simplexverfahren am Beispiel

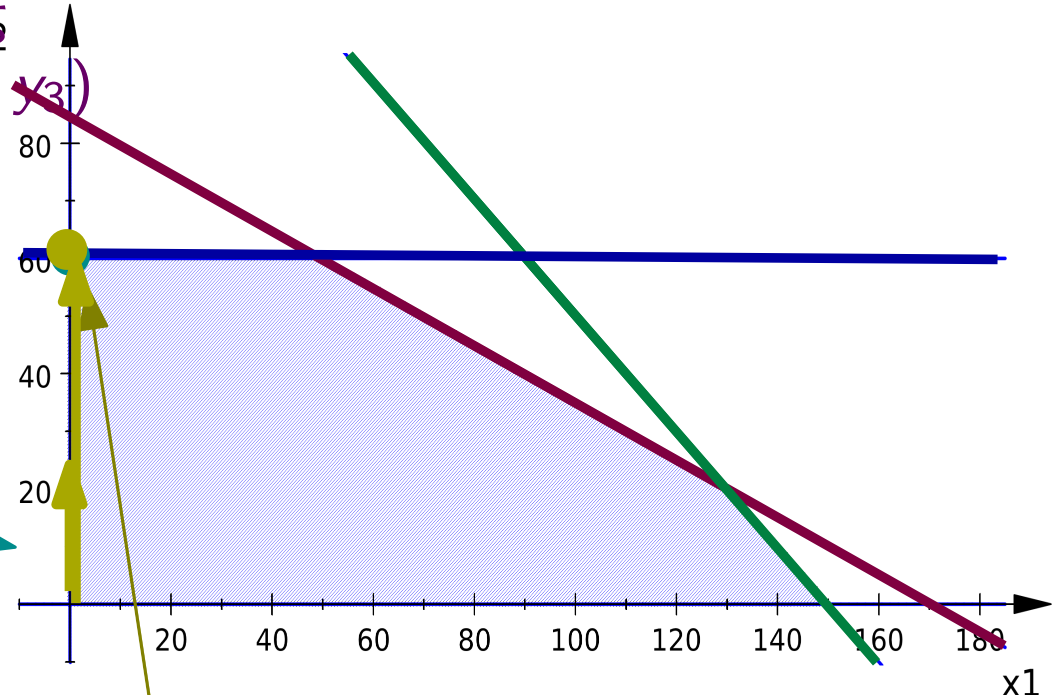
LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, y_3)
(LP0)

$$\max\ 3x_1 + 5x_2$$

so dass

$$\begin{aligned} y_1 &= 170 - x_1 - 2x_2 \\ y_2 &= 150 - x_1 - x_2 \\ y_3 &= 180 - 3x_2 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) und um 5 pro mehr produzierte Einheit $P2$ (x_2) $\rightarrow$ Will x_2 erhöhen

Um wieviel kann x_2 erhöht werden?

$$x_2 = \frac{170 - x_1 - y_1}{2} = 85 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1$$

$$x_2 = 150 - x1 - y_2$$

$$x_2 = \frac{180 - y_3}{3} = 60 - \frac{1}{3}y_3$$

$$\boxed{x_1 = 0, y_3 = 0}$$

Berechne neue Basisdarstellung.

$$\boxed{y_1} = 170 - x_1 - 2(60 - \tfrac{1}{3}y_3)$$

$$\boxed{= 50} - x_1 + \tfrac{2}{3}y_3$$

$$\boxed{y_2} = 150 - x_1 - (60 - \tfrac{1}{3}y_3)$$

$$\boxed{= 90} - x_1 + \tfrac{1}{3}y_3$$

$$\boxed{x_2 = 60} - \tfrac{1}{3}y_3$$

Simplexverfahren am Beispiel

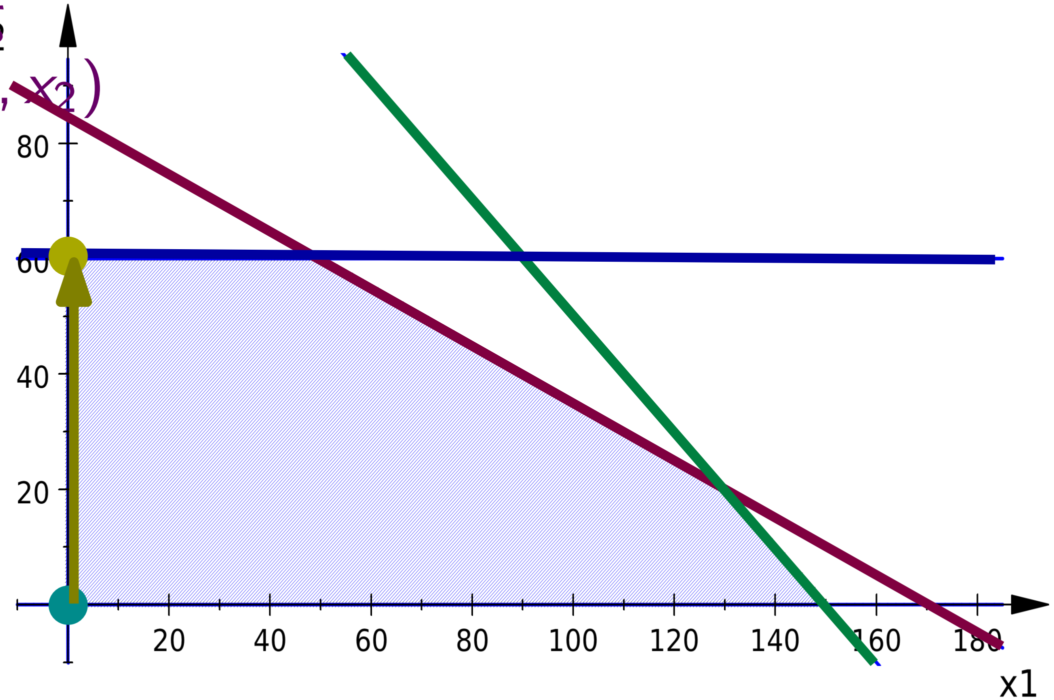
LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

so dass $\boxed{y_1 = 50} - x_1 + \frac{2}{3} y_3$

$$\boxed{\begin{aligned} y_2 &= 90 \\ x_2 &= 60 \end{aligned}}$$

$y_2 = 90 - x_1 + \frac{1}{3} y_3$

$x_2 = 60 - \frac{1}{3} y_3$



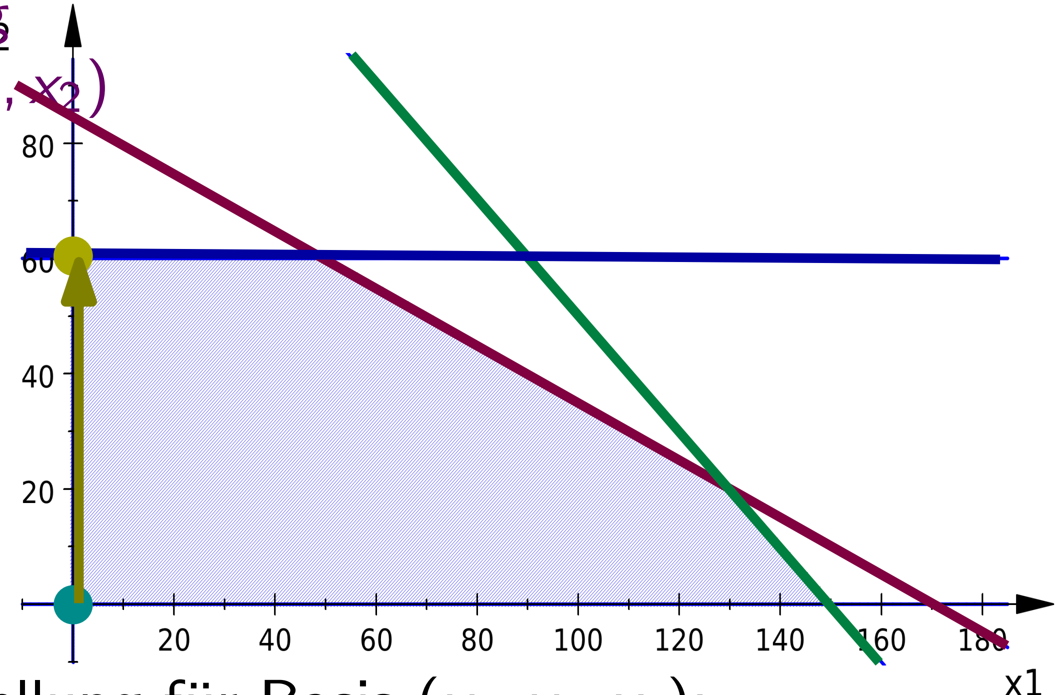
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

so dass $\boxed{y_1 = 50} - x_1 + \frac{2}{3} y_3$

$\boxed{y_2 = 90} - x_1 + \frac{1}{3} y_3$

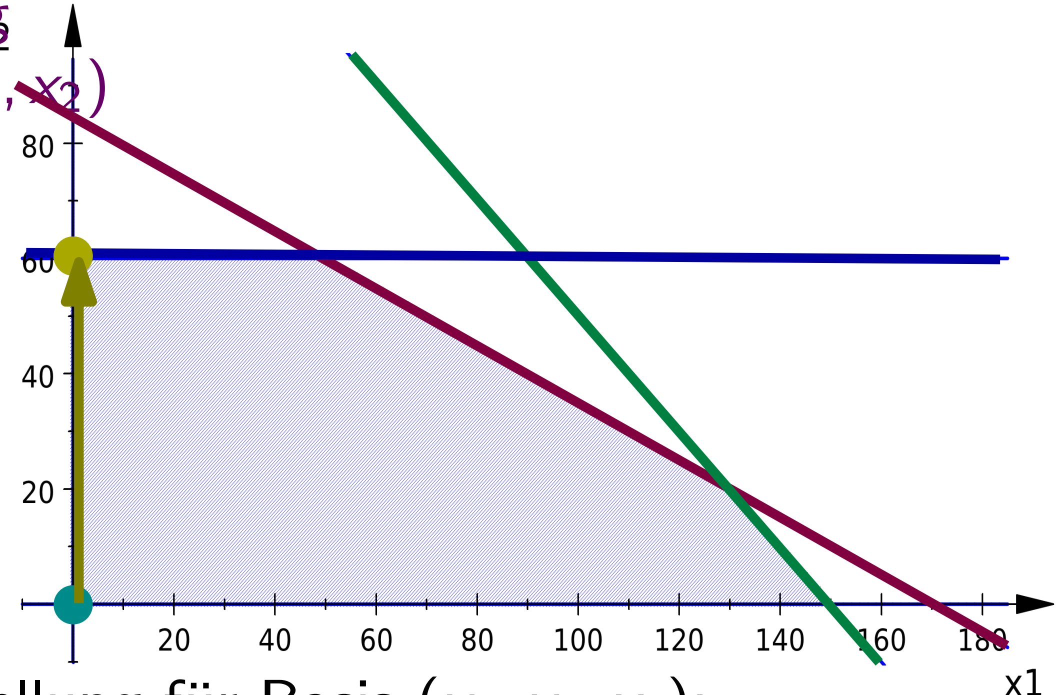
$\boxed{x_2 = 60} - \frac{1}{3} y_3$



Berechne Zielfunktion in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, x_2):

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)



so dass $\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 50 \\ y_2 &= 90 \\ x_2 &= 60 \end{aligned}}$ $\begin{aligned} &- x_1 + \tfrac{2}{3} y_3 \\ &- x_1 + \tfrac{1}{3} y_3 \\ &- \tfrac{1}{3} y_3 \end{aligned}$

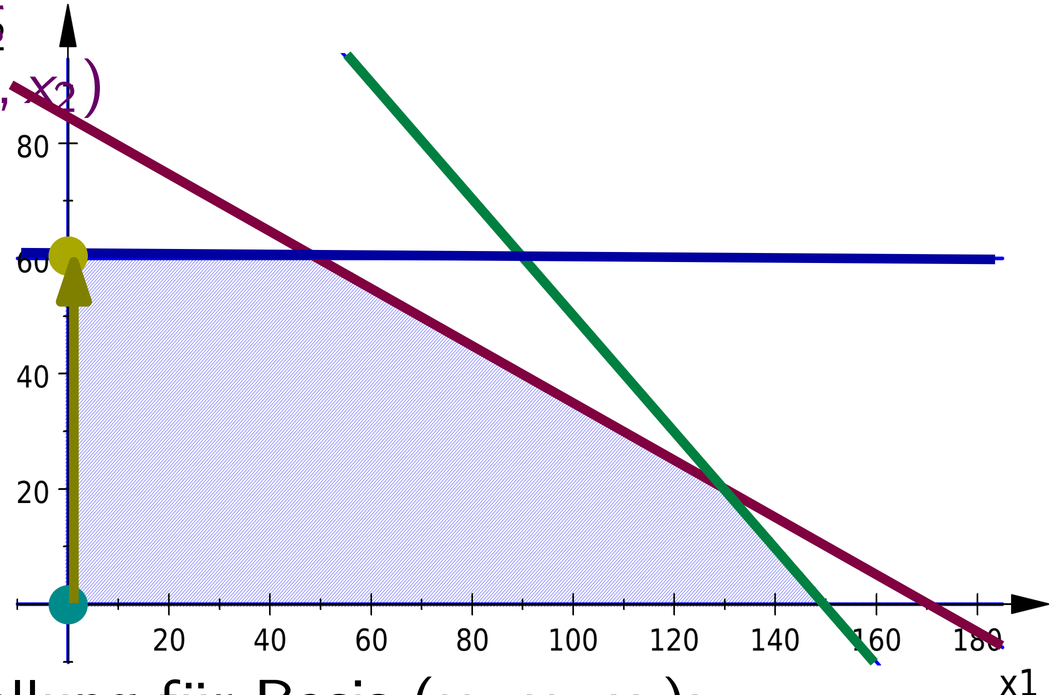
Berechne Zielfunktion in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, x_2):

$3x_1 + 5(60 - \frac{1}{3} y_3) = 300 + 3x_1 - \frac{5}{3} y_3$

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

so dass
$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 50 \\ y_2 &= 90 \\ x_2 &= 60 \end{aligned}} \begin{aligned} &- x_1 + \tfrac{2}{3} y_3 \\ &- x_1 + \tfrac{1}{3} y_3 \\ &- \tfrac{1}{3} y_3 \end{aligned}$$



Berechne Zielfunktion in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, x_2):

$$3x_1 + 5(60 - \tfrac{1}{3} y_3) = \boxed{300} + 3x_1 - \tfrac{5}{3} y_3$$

Zielfunktionswert

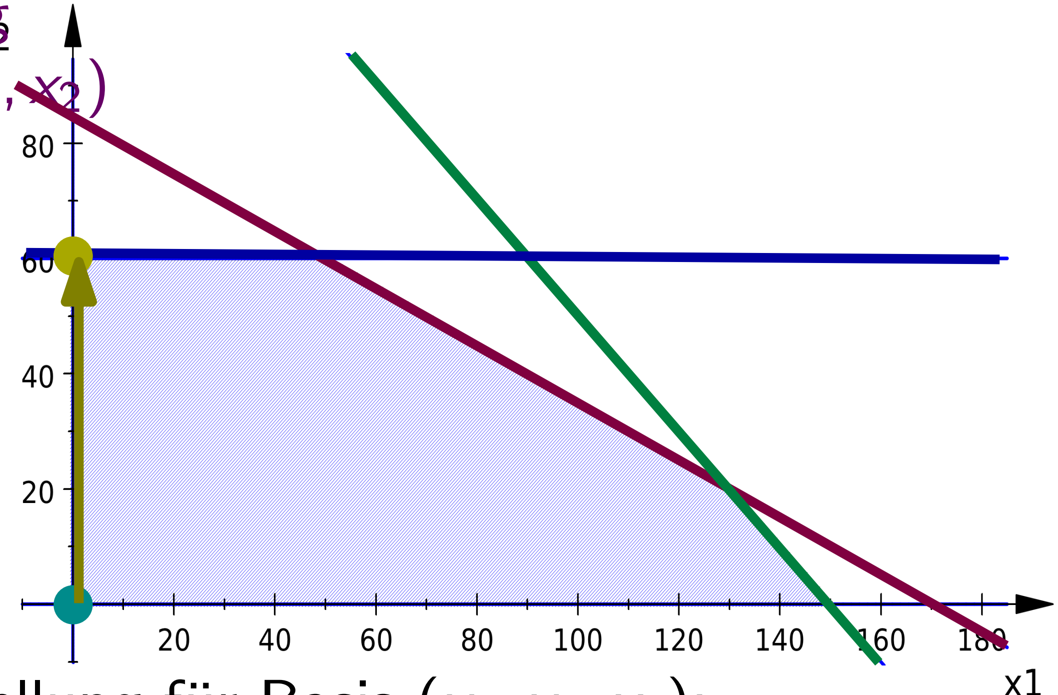
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

LP1)

$$\max \boxed{300} + 3x_1 - \frac{5}{3}y_3$$

so dass
$$y_1 = 50 - x_1 + \frac{2}{3}y_3$$
$$y_2 = 90 - x_1 + \frac{1}{3}y_3$$
$$x_2 = 60 - \frac{1}{3}y_3$$



Berechne Zielfunktion in Basisdarstellung für Basis (y_1, y_2, x_2):

$$3x_1 + 5(60 - \frac{1}{3}y_3) = \boxed{300} + 3x_1 - \frac{5}{3}y_3$$

Zielfunktionswert

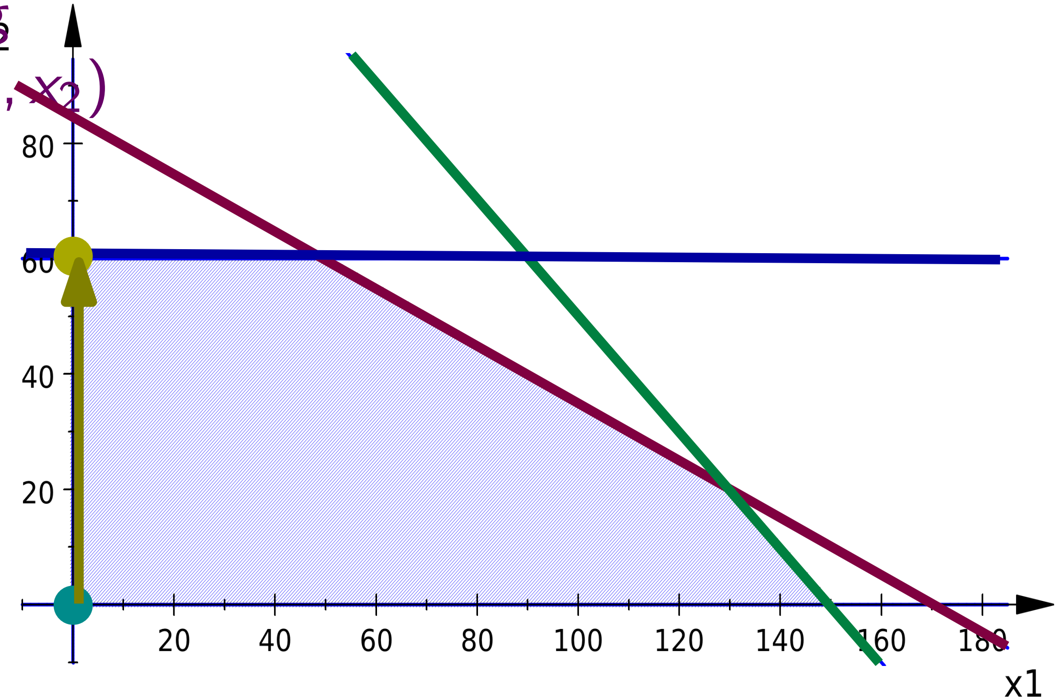
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

LP1)

$$\max \boxed{300} + 3x_1 - \frac{5}{3}y_3$$

$$\text{so dass } \begin{aligned} y_1 &= 50 - x_1 + \frac{2}{3}y_3 \\ y_2 &= 90 - x_1 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= 60 - \frac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$



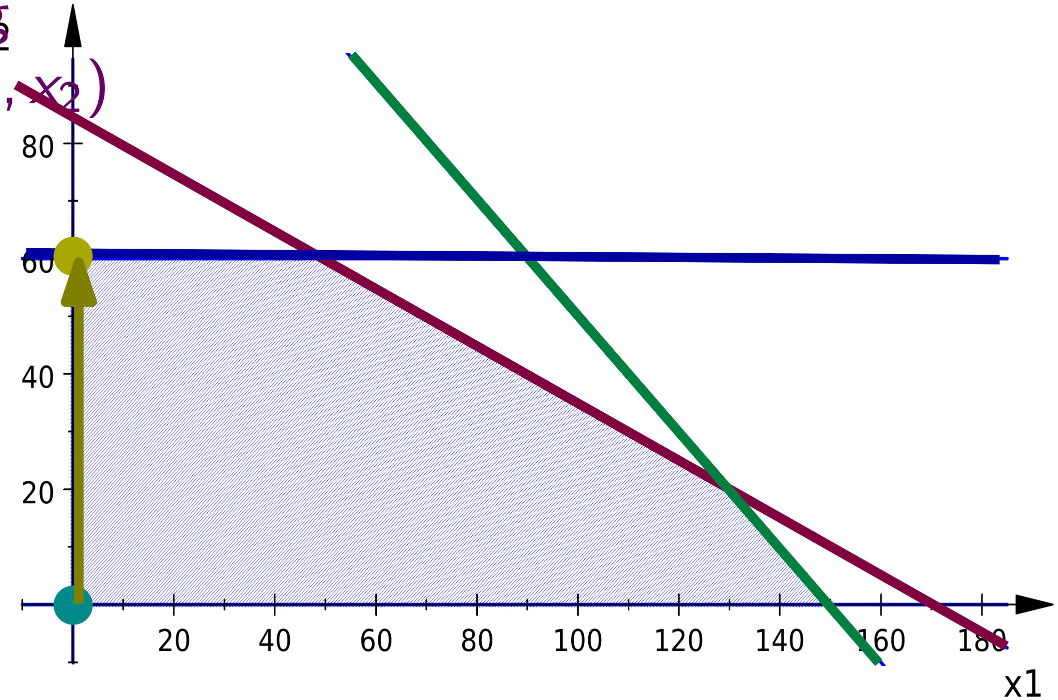
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

LP1)

$$\max \boxed{300} + 3x_1 - \tfrac{5}{3}y_3$$

$$\text{so dass}\quad \boxed{\begin{aligned} y_1 &= 50 \\ y_2 &= 90 \\ x_2 &= 60 \end{aligned}}\begin{aligned} &- x_1 + \tfrac{2}{3}y_3 \\ &- x_1 + \tfrac{1}{3}y_3 \\ &- \tfrac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

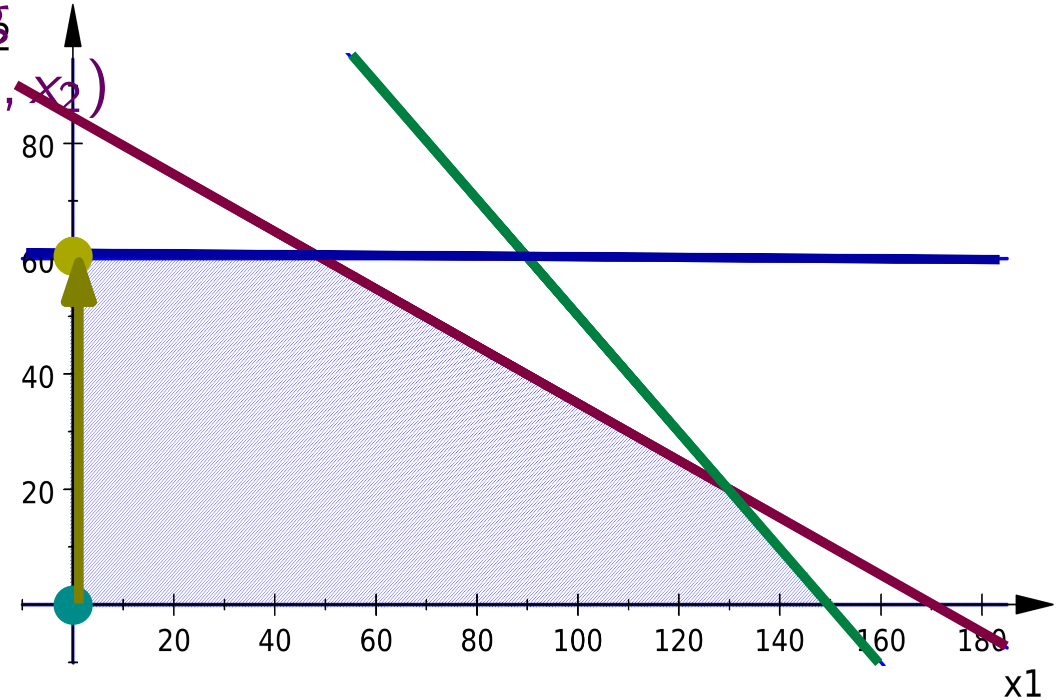
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

LP1)

$$\max \boxed{300} + 3x_1 - \frac{5}{3}y_3$$

$$\text{so dass } \begin{aligned} y_1 &= 50 - x_1 + \frac{2}{3}y_3 \\ y_2 &= 90 - x_1 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= 60 - \frac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1)

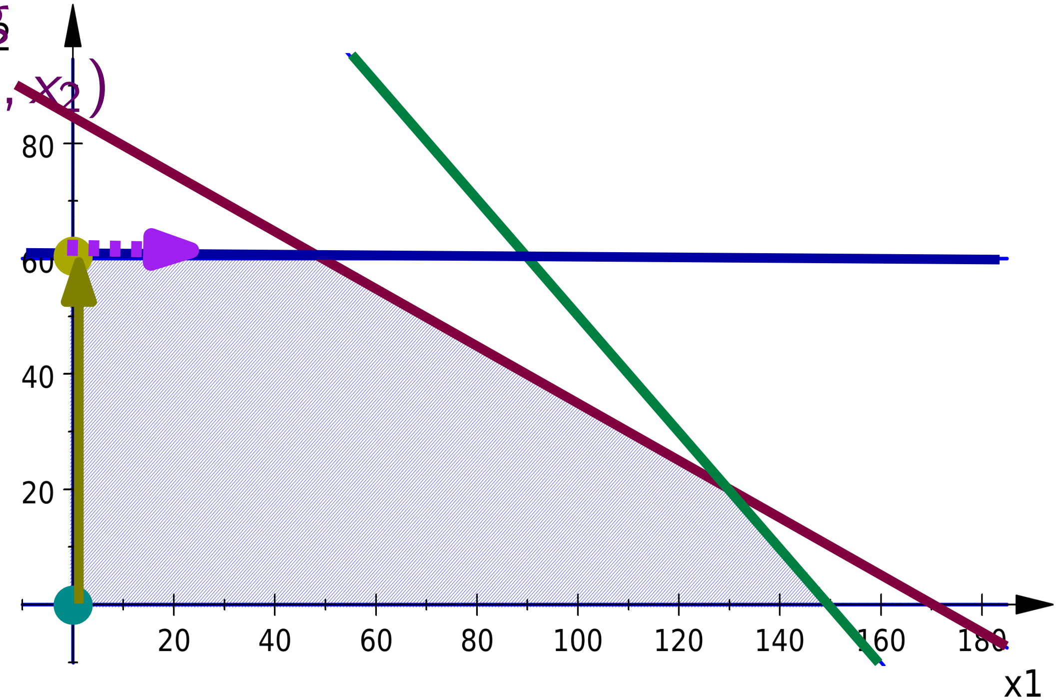
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

LP1)

$$\max \boxed{300} + 3x_1 - \frac{5}{3}y_3$$

$$\text{so dass } \begin{aligned} y_1 &= 50 - x_1 + \tfrac{2}{3}y_3 \\ y_2 &= 90 - x_1 + \tfrac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= 60 - \tfrac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) $\rightarrow$ Will x_1 erhöhen

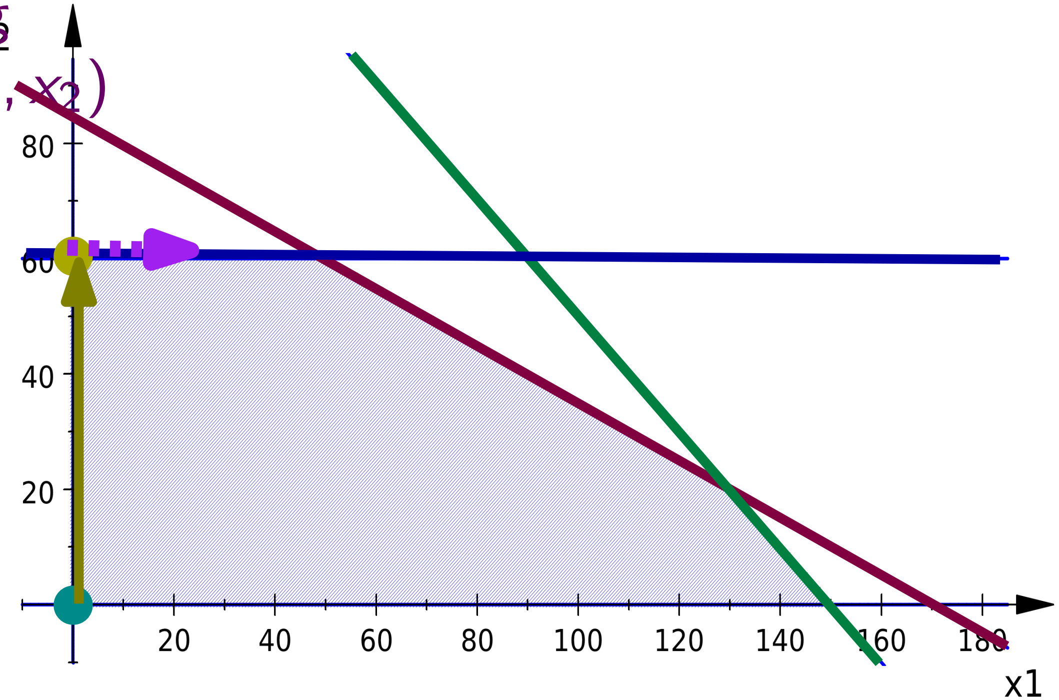
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

LP1)

$$\max \boxed{300} + 3x_1 - \frac{5}{3} y_3$$

so dass
$$y_1 = 50 - x_1 + \frac{2}{3} y_3$$
$$y_2 = 90 - x_1 + \frac{1}{3} y_3$$
$$x_2 = 60 - \frac{1}{3} y_3$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

→ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) → Will x_1 erhöhen

Um wieviel kann x_1 erhöht werden?

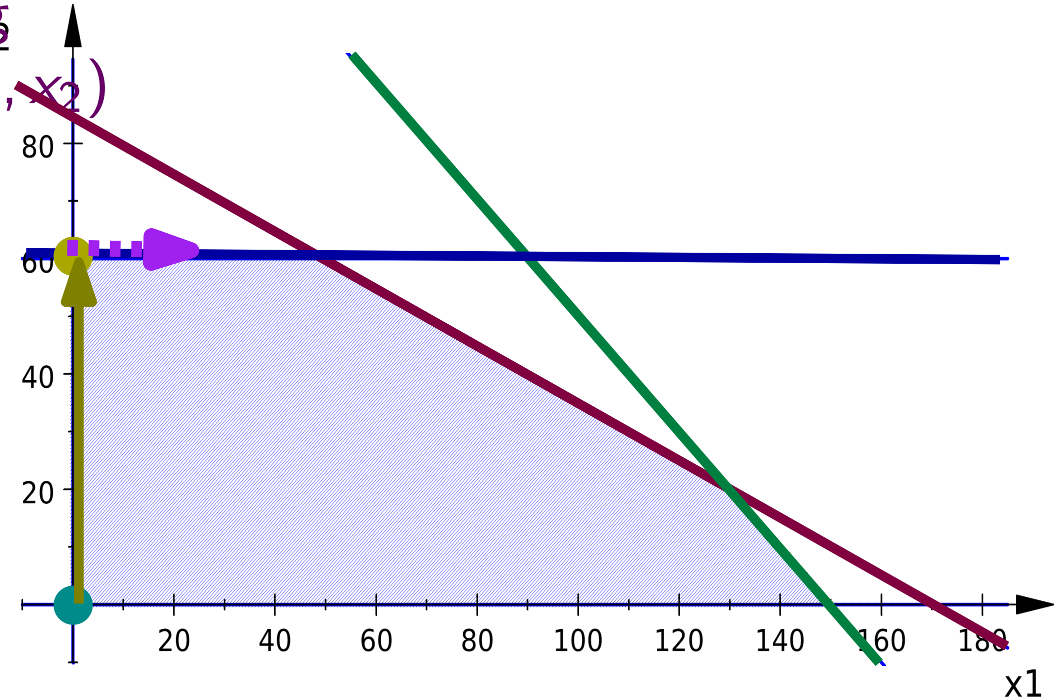
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

LP1)

$$\max \boxed{300} + 3x_1 - \frac{5}{3}y_3$$

$$\text{so dass } \boxed{\begin{aligned} y_1 &= 50 \\ y_2 &= 90 \\ x_2 &= 60 \end{aligned}} \begin{aligned} &- x_1 + \tfrac{2}{3}y_3 \\ &- x_1 + \tfrac{1}{3}y_3 \\ &- \tfrac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) $\rightarrow$ Will x_1 erhöhen

Um wieviel kann x_1 erhöht werden?

$$x_1 = 50 - y_1 + \frac{2}{3}y_3$$

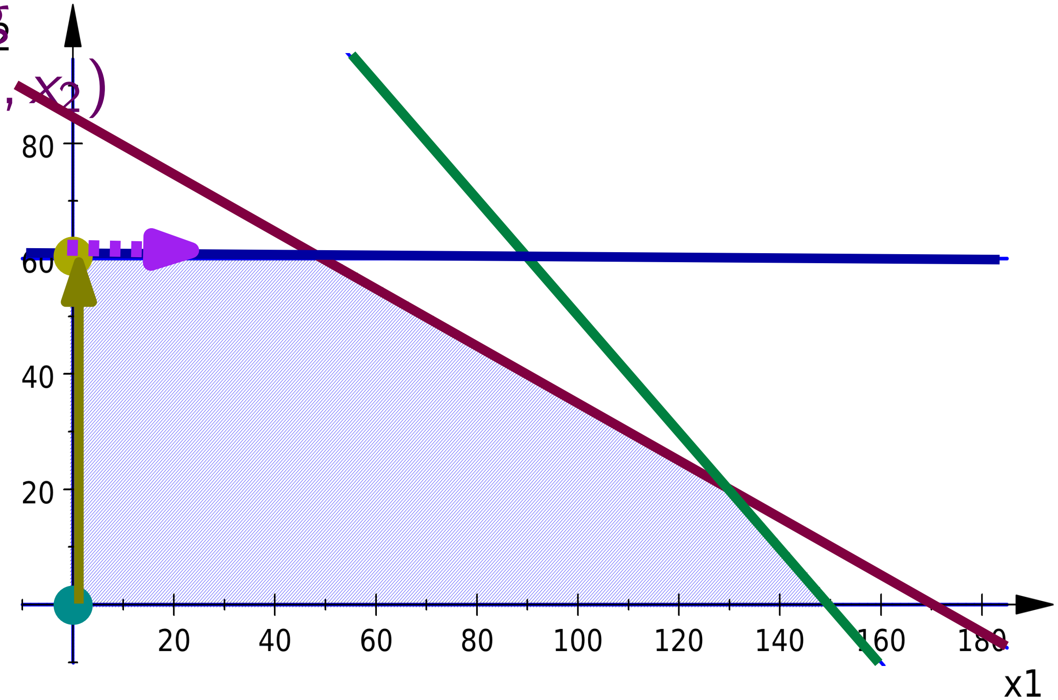
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

LP1)

$$\max \boxed{300} + 3x_1 - \frac{5}{3}y_3$$

so dass
$$\begin{aligned} y_1 &= 50 - x_1 + \tfrac{2}{3}y_3 \\ y_2 &= 90 - x_1 + \tfrac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= 60 - \tfrac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) $\rightarrow$ Will x_1 erhöhen

Um wieviel kann x_1 erhöht werden?

$$x_1 = 50 - y_1 + \frac{2}{3}y_3$$

$$x_1 = 90 - y_2 + \frac{1}{3}y_3$$

Simplexverfahren am Beispiel

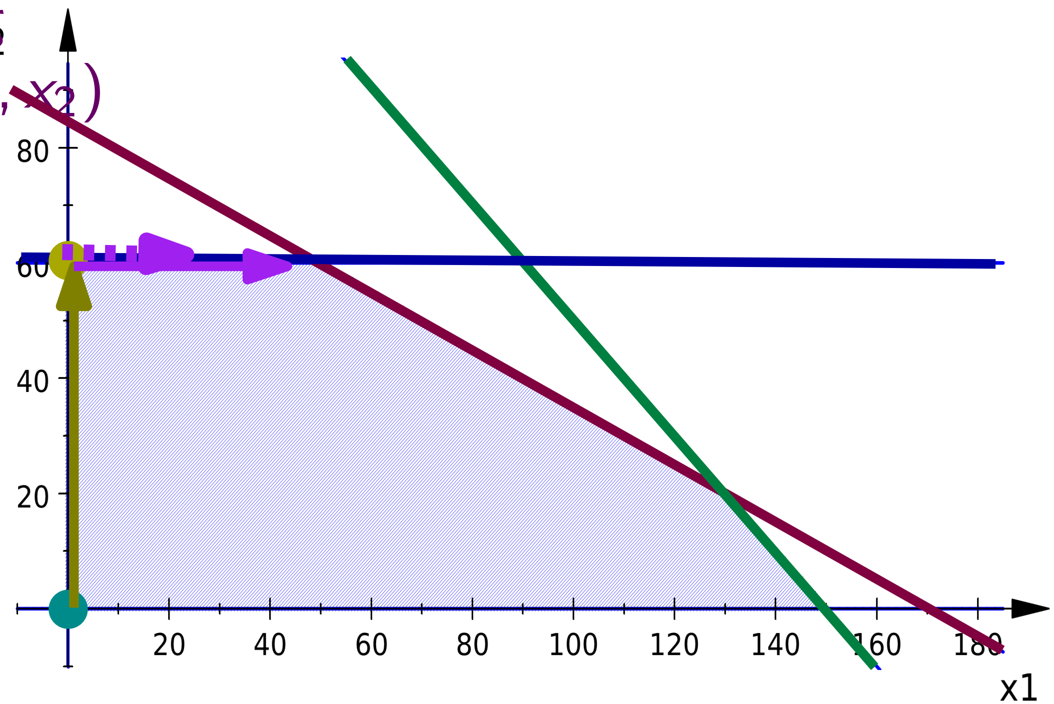
LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

LP1)

$$\max \boxed{300} + 3x_1 - \frac{5}{3} y_3$$

so dass

$$\begin{aligned} y_1 &= 50 - x_1 + \tfrac{2}{3} y_3 \\ y_2 &= 90 - x_1 + \tfrac{1}{3} y_3 \\ x_2 &= 60 - \tfrac{1}{3} y_3 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) $\rightarrow$ Will x_1 erhöhen

Um wieviel kann x_1 erhöht werden?

$$x_1 = 50 - y_1 + \frac{2}{3} y_3$$

$$x_1 = 90 - y_2 + \frac{1}{3} y_3$$

dritte Gleichung stellt keine
Einschränkung dar

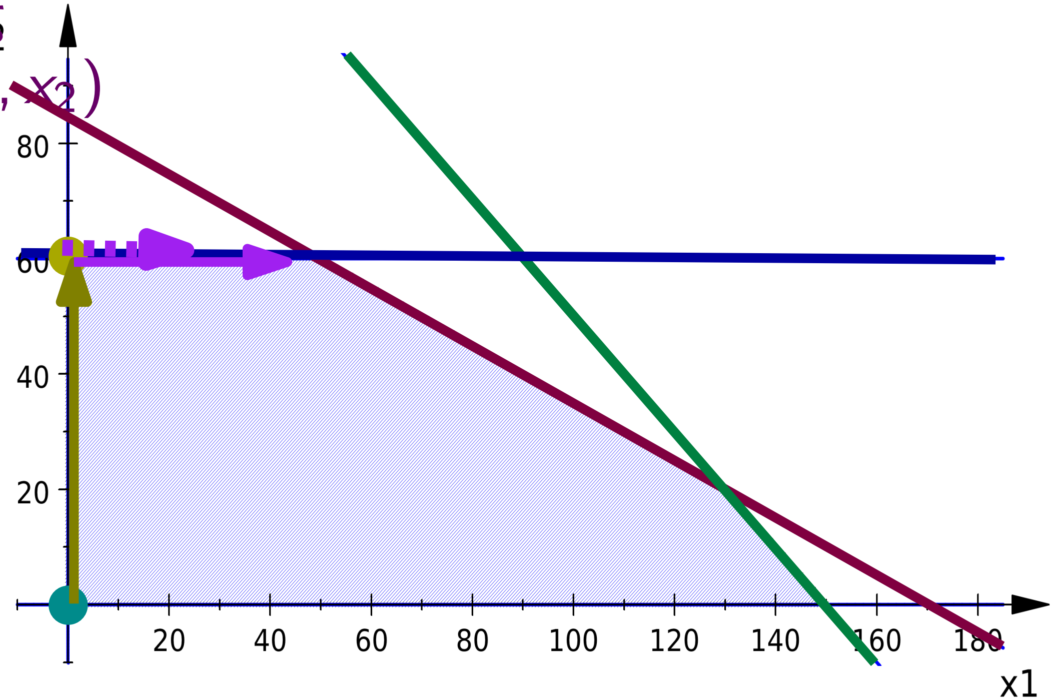
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

LP1)

$$\max \boxed{300} + 3x_1 - \frac{5}{3} y_3$$

so dass
$$\begin{aligned} y_1 &= 50 - x_1 + \frac{2}{3} y_3 \\ y_2 &= 90 - x_1 + \frac{1}{3} y_3 \\ x_2 &= 60 - \frac{1}{3} y_3 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) $\rightarrow$ Will x_1 erhöhen

Um wieviel kann x_1 erhöht werden?

$x_1 = \boxed{50} - y_1 + \frac{2}{3} y_3$ $\leftarrow$ höchstens um 50

$x_1 = \boxed{90} - y_2 + \frac{1}{3} y_3$

dritte Gleichung stellt keine Einschränkung dar

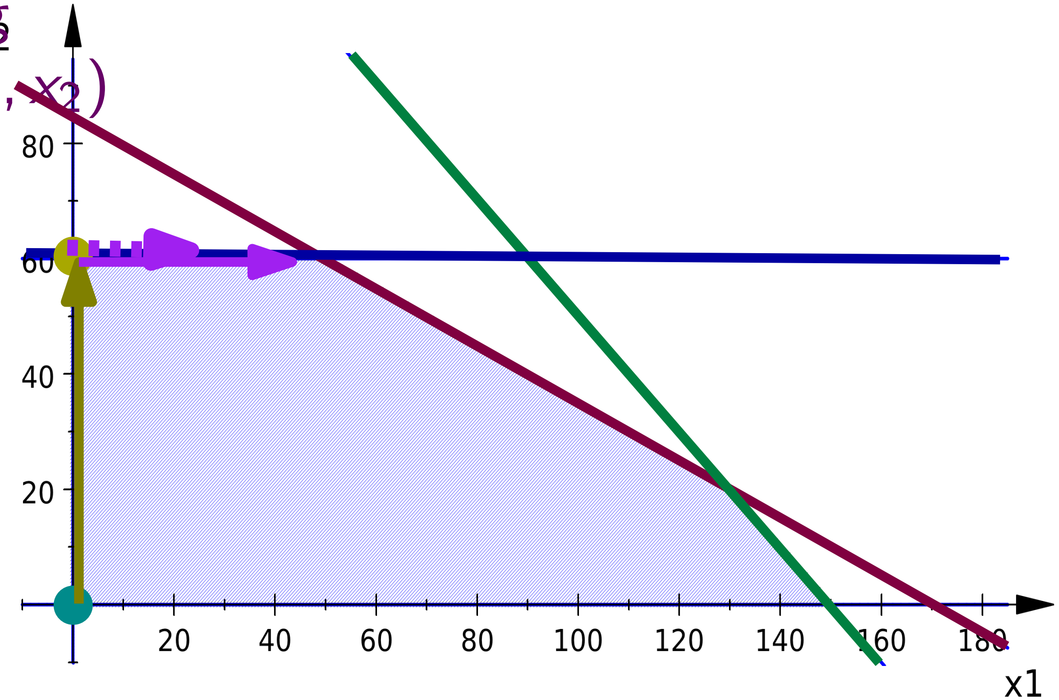
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

LP1)

$$\max \boxed{300} + 3x_1 - \frac{5}{3}y_3$$

so dass
$$y_1 = 50 - x_1 + \frac{2}{3}y_3$$
$$y_2 = 90 - x_1 + \frac{1}{3}y_3$$
$$x_2 = 60 - \frac{1}{3}y_3$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) $\rightarrow$ Will x_1 erhöhen

Um wieviel kann x_1 erhöht werden?

Berechne neue Basisdarstellung.

$x_1 = \boxed{50} - y_1 + \frac{2}{3}y_3$ $\leftarrow$ höchstens um 50

$x_1 = \boxed{90} - y_2 + \frac{1}{3}y_3$

dritte Gleichung stellt keine Einschränkung dar

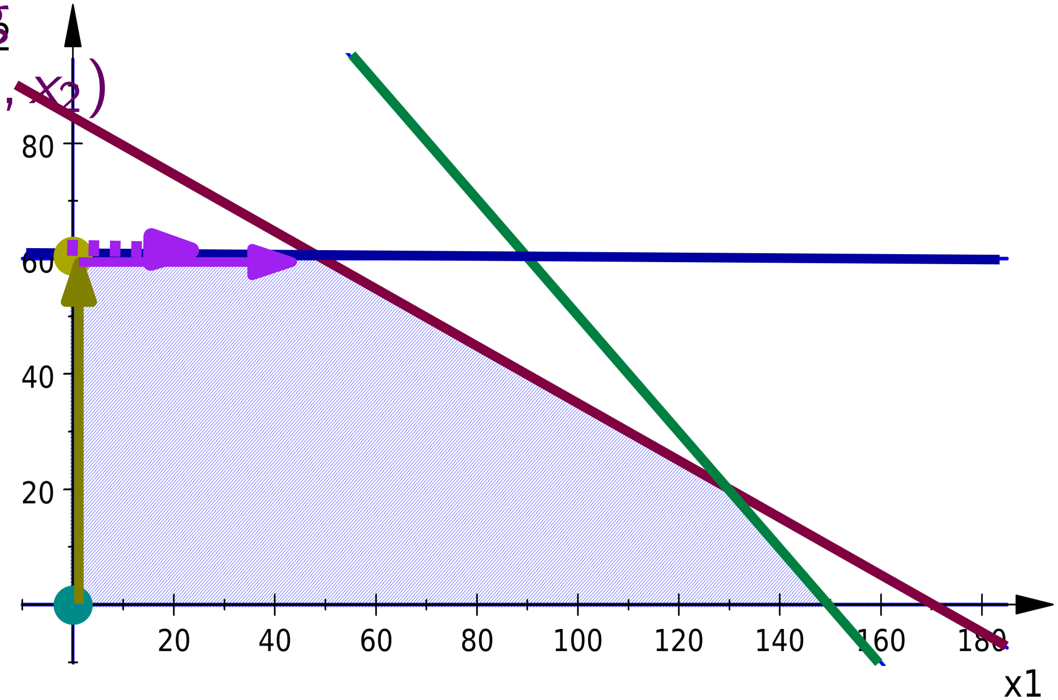
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

LP1)

$$\max \boxed{300} + 3x_1 - \frac{5}{3} y_3$$

so dass
$$y_1 = 50 - x_1 + \frac{2}{3} y_3$$
$$y_2 = 90 - x_1 + \frac{1}{3} y_3$$
$$x_2 = 60 - \frac{1}{3} y_3$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) $\rightarrow$ Will x_1 erhöhen

Um wieviel kann x_1 erhöht werden?

$$x_1 = \boxed{50} - y_1 + \frac{2}{3} y_3 \quad \leftarrow \text{höchstens um 50}$$
$$x_1 = \boxed{90} - y_2 + \frac{1}{3} y_3$$

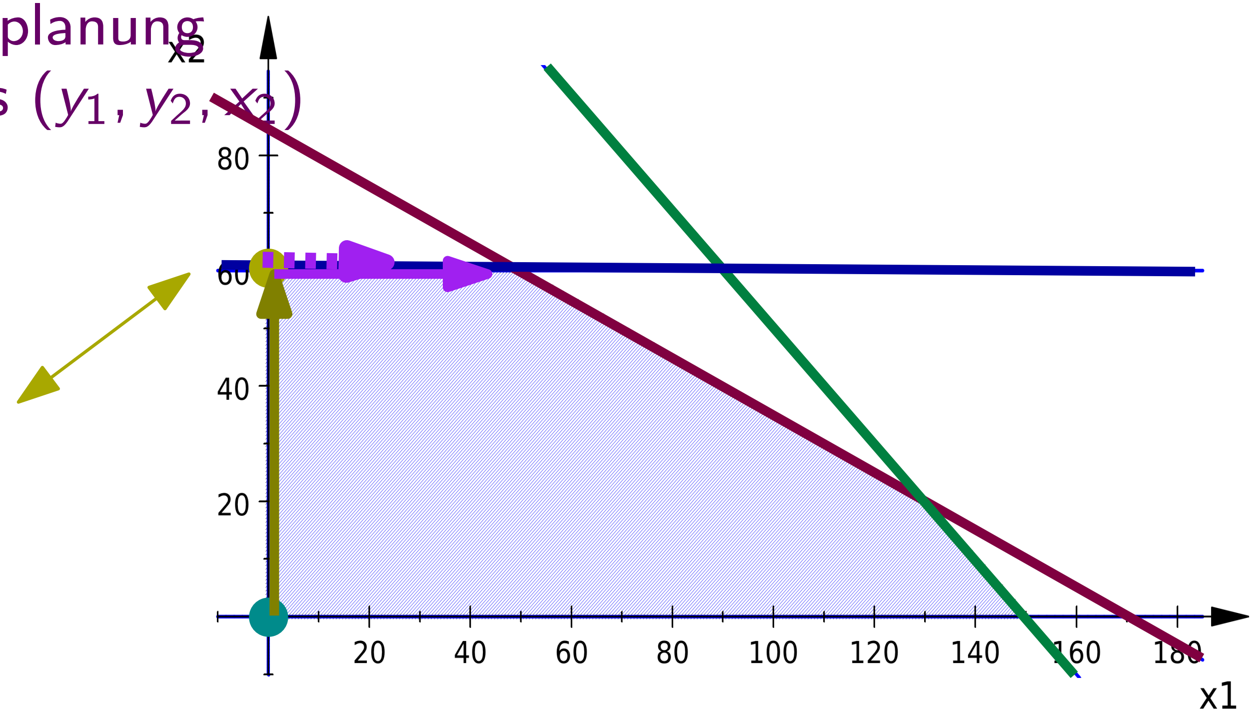
dritte Gleichung stellt keine Einschränkung dar

Berechne neue Basisdarstellung.

$$x_1 = 50 - y_1 + \frac{2}{3} y_3$$

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)



LP1)

$$\max \boxed{300} + 3x_1 - \frac{5}{3}y_3$$

so dass
$$\begin{aligned} y_1 &= 50 - x_1 + \tfrac{2}{3}y_3 \\ y_2 &= 90 - x_1 + \tfrac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= 60 - \tfrac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$

Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) $\rightarrow$ Will x_1 erhöhen

Um wieviel kann x_1 erhöht werden?

$x_1 = \boxed{50} - y_1 + \frac{2}{3}y_3$ $\leftarrow$ höchstens um 50

$x_1 = \boxed{90} - y_2 + \frac{1}{3}y_3$

dritte Gleichung stellt keine Einschränkung dar

Berechne neue Basisdarstellung.

$$x_1 = 50 - y_1 + \frac{2}{3}y_3$$

$$y_2 = 90 - (50 - y_1 + \frac{2}{3}y_3) + \frac{1}{3}y_3$$

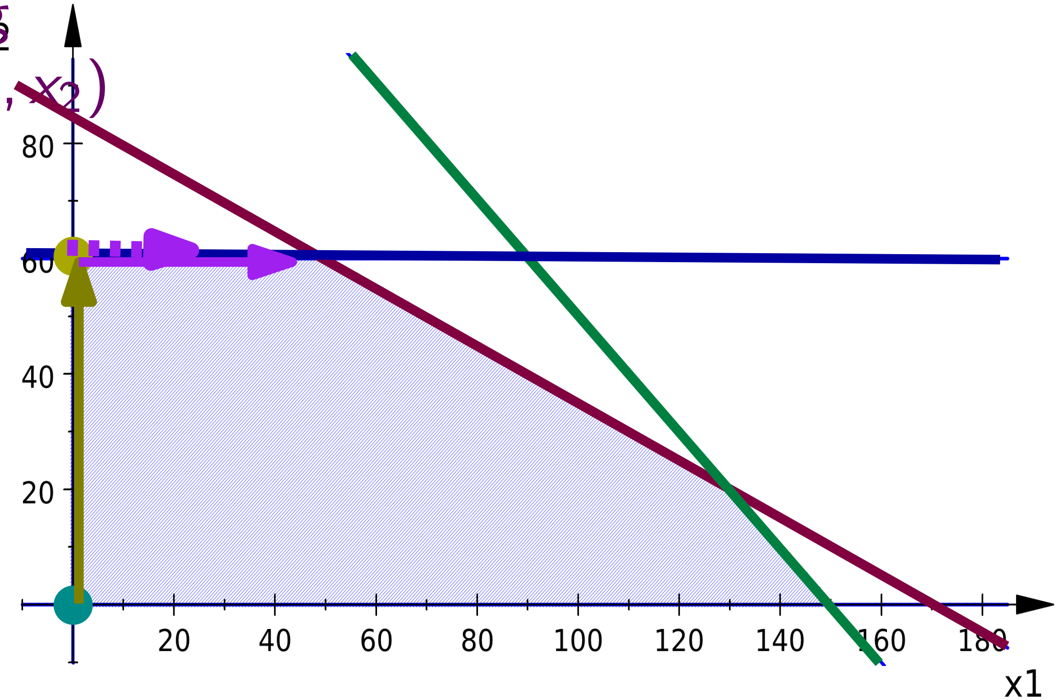
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

LP1)

$$\max \boxed{300} + 3x_1 - \frac{5}{3}y_3$$

$$\text{so dass } \begin{aligned} y_1 &= 50 - x_1 + \frac{2}{3}y_3 \\ y_2 &= 90 - x_1 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= 60 - \frac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) $\rightarrow$ Will x_1 erhöhen

Um wieviel kann x_1 erhöht werden?

$x_1 = \boxed{50} - y_1 + \frac{2}{3}y_3$ $\leftarrow$ höchstens um 50

$x_1 = \boxed{90} - y_2 + \frac{1}{3}y_3$

dritte Gleichung stellt keine Einschränkung dar

Berechne neue Basisdarstellung.

$$x_1 = 50 - y_1 + \frac{2}{3}y_3$$

$$\begin{aligned} y_2 &= 90 - (50 - y_1 + \frac{2}{3}y_3) + \frac{1}{3}y_3 \\ &= 40 + y_1 - \frac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$

Simplexverfahren am Beispiel

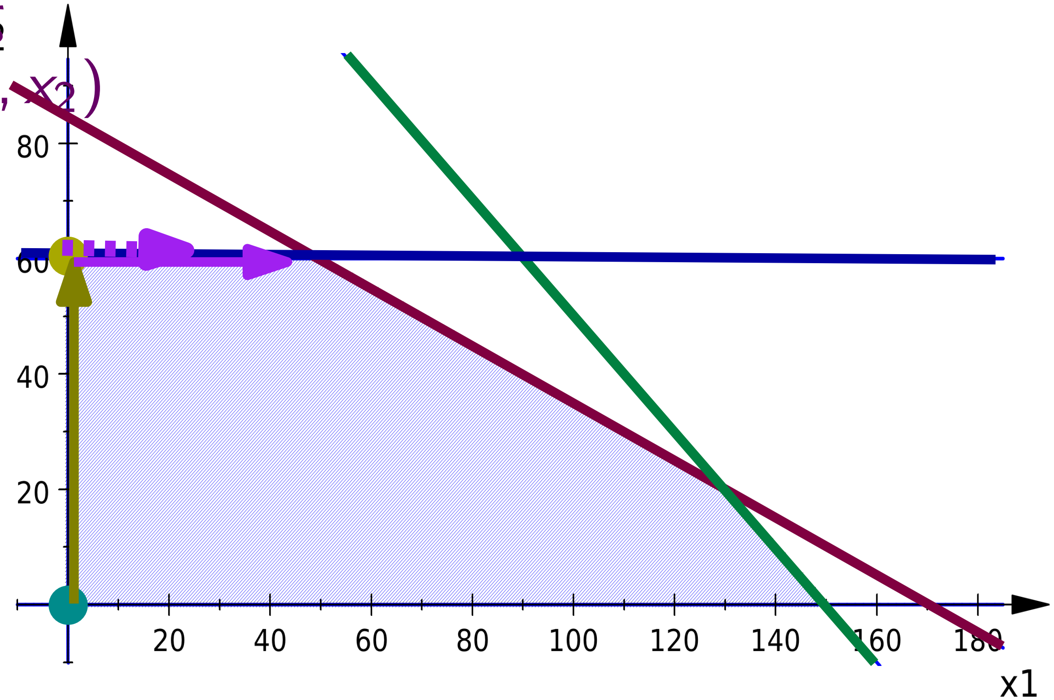
LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

LP1)

$$\max \boxed{300} + 3x_1 - \frac{5}{3}y_3$$

so dass

$$\begin{aligned} y_1 &= 50 - x_1 + \frac{2}{3}y_3 \\ y_2 &= 90 - x_1 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= 60 - \frac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) $\rightarrow$ Will x_1 erhöhen

Um wieviel kann x_1 erhöht werden?

$x_1 = \boxed{50} - y_1 + \frac{2}{3}y_3$ $\leftarrow$ höchstens um 50

$x_1 = \boxed{90} - y_2 + \frac{1}{3}y_3$

dritte Gleichung stellt keine Einschränkung dar

Berechne neue Basisdarstellung.

$$x_1 = 50 - y_1 + \frac{2}{3}y_3$$

$$\begin{aligned} y_2 &= 90 - (50 - y_1 + \frac{2}{3}y_3) + \frac{1}{3}y_3 \\ &= 40 + y_1 - \frac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$

$$x_2 = 60 - \frac{1}{3}y_3$$

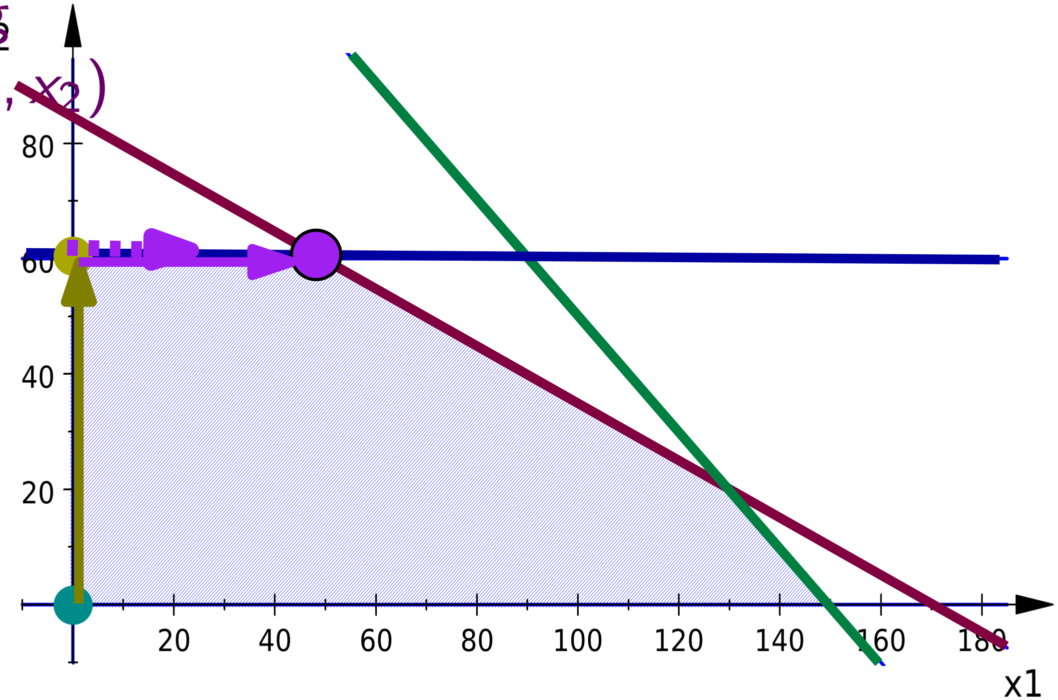
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Bases (y_1, y_2, x_2)

LP1)

$$\max \boxed{300} + 3x_1 - \tfrac{5}{3}y_3$$

so dass
$$\begin{aligned} y_1 &= 50 - x_1 + \tfrac{2}{3}y_3 \\ y_2 &= 90 - x_1 + \tfrac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= 60 - \tfrac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um 3 pro mehr produzierte Einheit P1 (x_1) $\rightarrow$ Will x_1 erhöhen

Um wieviel kann x_1 erhöht werden?

$x_1 = \boxed{50} - y_1 + \frac{2}{3}y_3$ $\leftarrow$ höchstens um 50

$x_1 = \boxed{90} - y_2 + \frac{1}{3}y_3$

dritte Gleichung stellt keine Einschränkung dar

Berechne neue Basisdarstellung.

$$\boxed{x_1 = 50} - y_1 + \tfrac{2}{3}y_3$$

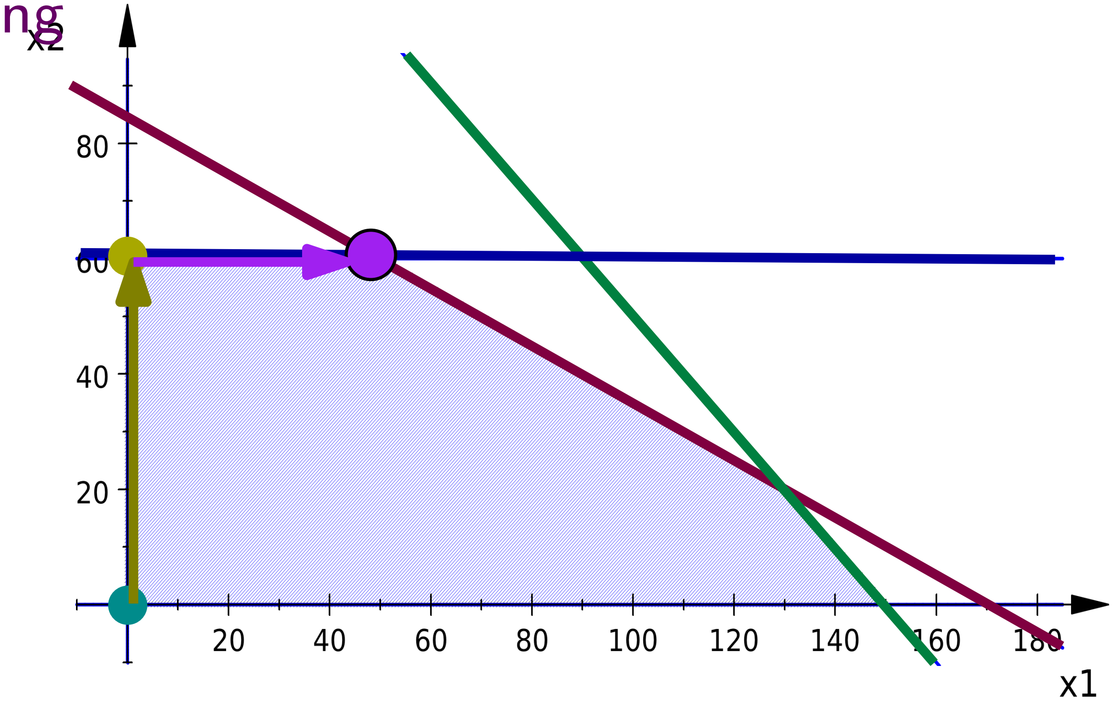
$$\begin{aligned} \boxed{y_2} &= 90 - (50 - y_1 + \tfrac{2}{3}y_3) + \tfrac{1}{3}y_3 \\ &= \boxed{40} + y_1 - \tfrac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$

$$\boxed{x_2 = 60} - \tfrac{1}{3}y_3$$

Simplexverfahren am Beispiel

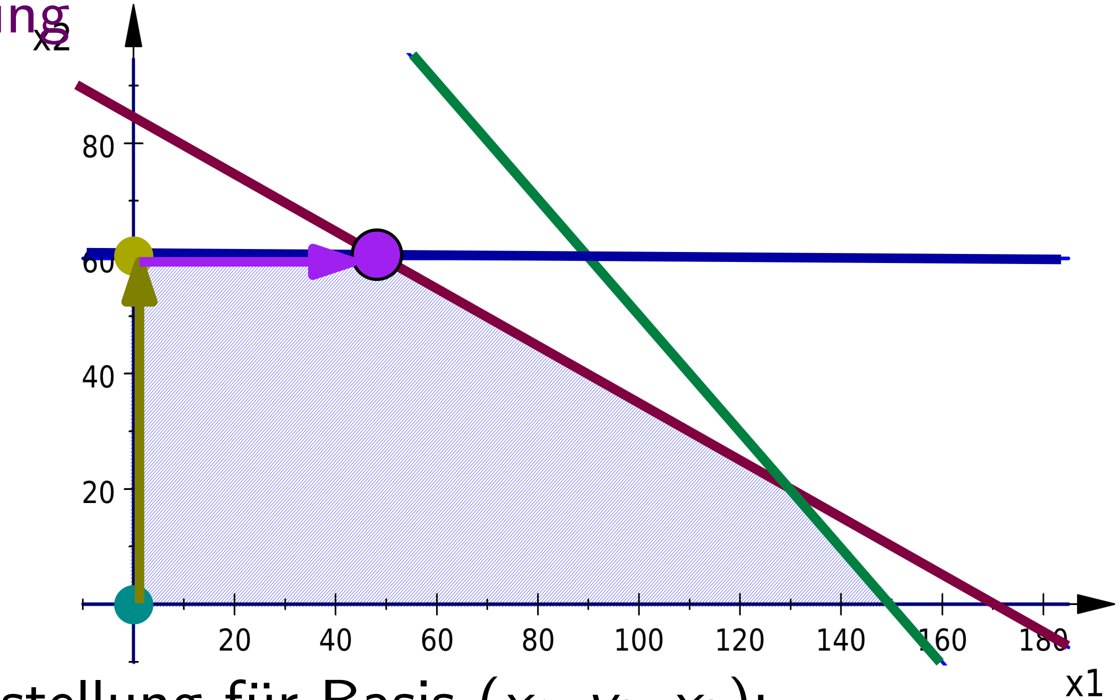
LP aus Beispiel Produktionsplanung
umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)

$$\begin{aligned} \text{so dass } x_1 &= 50 - y_1 + \tfrac{2}{3} y_3 \\ y_2 &= 40 + y_1 - \tfrac{1}{3} y_3 \\ x_2 &= 60 - \tfrac{1}{3} y_3 \end{aligned}$$



Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)

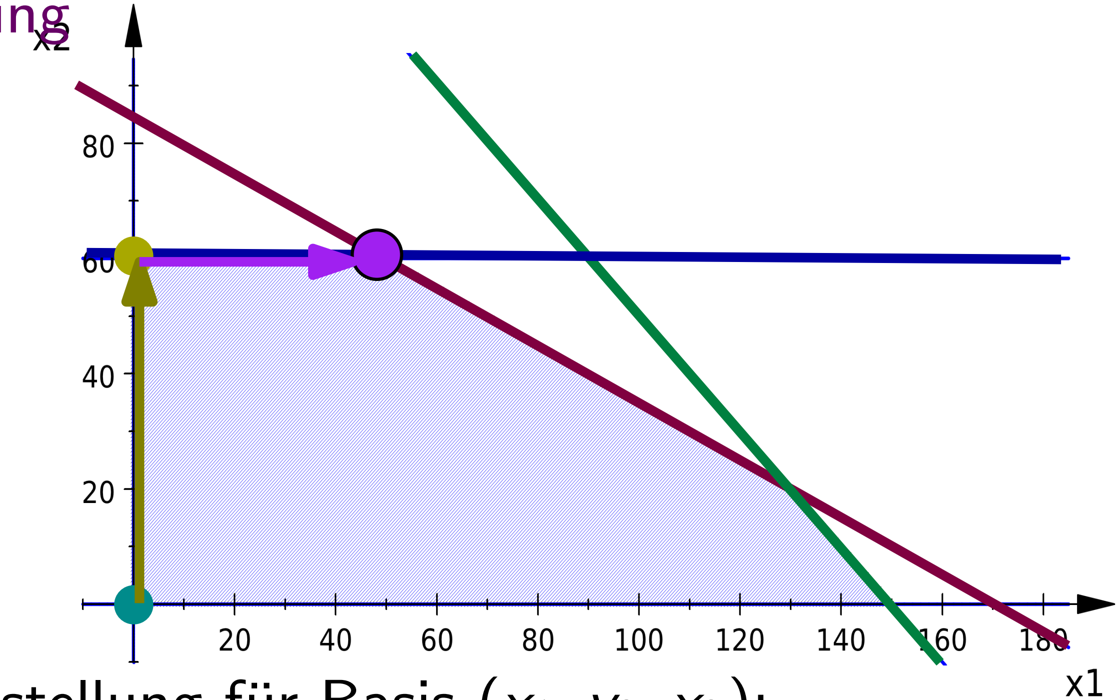


so dass
$$x_1 = 50 - y_1 + \tfrac{2}{3} y_3$$
$$y_2 = 40 + y_1 - \tfrac{1}{3} y_3$$
$$x_2 = 60 - \tfrac{1}{3} y_3$$

Berechne Zielfunktion in Basisdarstellung für Basis (x_1, y_2, x_2):

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)



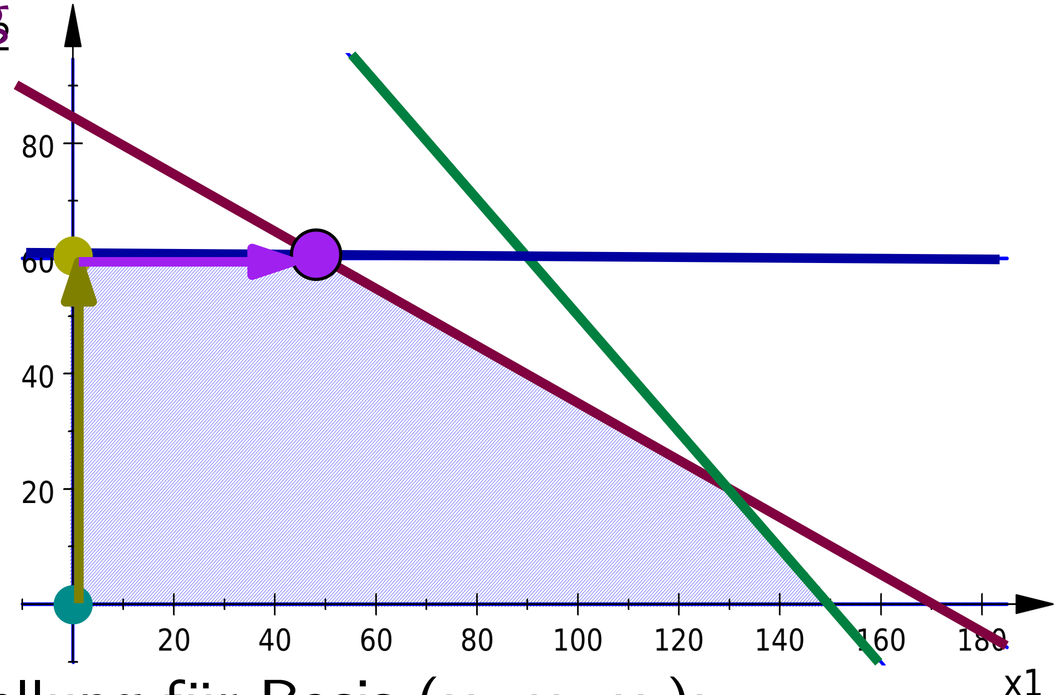
so dass $x_1 = 50 - y_1 + \frac{2}{3}y_3$

$$y_2 = 40 + y_1 - \frac{1}{3}y_3$$
$$x_2 = 60 - \frac{1}{3}y_3$$

Berechne Zielfunktion in Basisdarstellung für Basis (x_1, y_2, x_2):
$300 + 3(50 - y_1 + \frac{2}{3}y_3) - \frac{5}{3}y_3 = 450 - 3y_1 + \frac{1}{3}y_3$

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)



so dass $x_1 = 50 - y_1 + \frac{2}{3}y_3$

$$y_2 = 40 + y_1 - \frac{1}{3}y_3$$

$$x_2 = 60 - \frac{1}{3}y_3$$

Berechne Zielfunktion in Basisdarstellung für Basis (x_1, y_2, x_2):

$$300 + 3(50 - y_1 + \frac{2}{3}y_3) - \frac{5}{3}y_3 = \boxed{450} - 3y_1 + \frac{1}{3}y_3$$

Zielfunktionswert

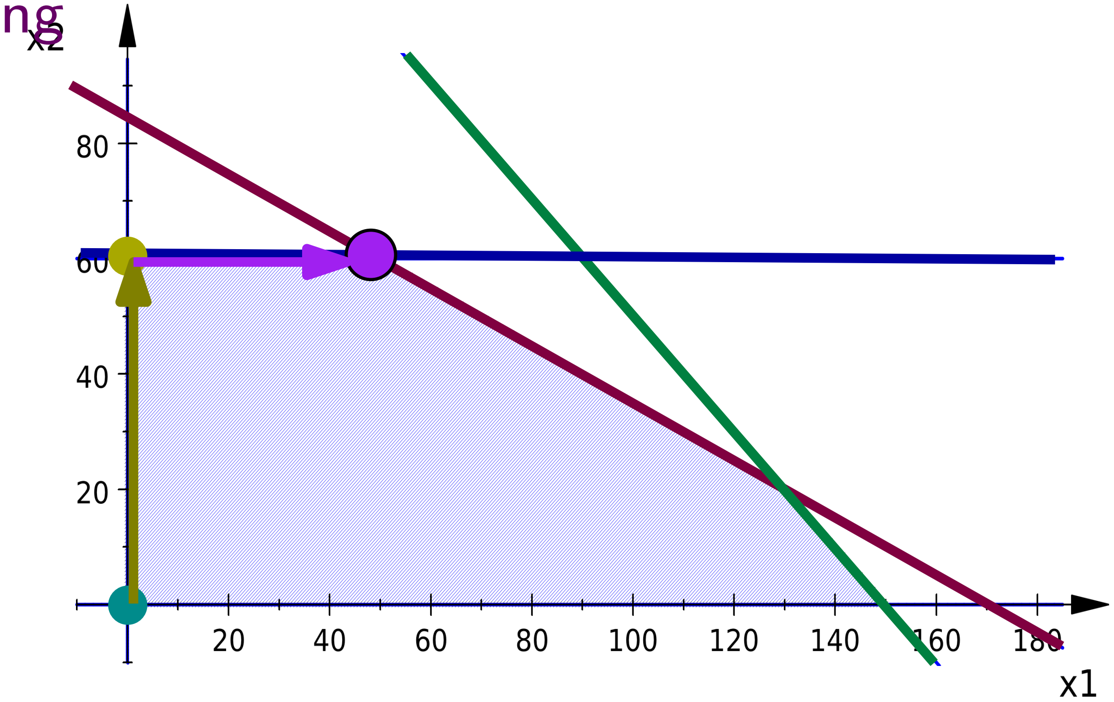
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)

(LP2)

$$\max \boxed{450} - 3y_1 + \tfrac{1}{3}y_3$$

$$\text{so dass } x_1 = 50 - y_1 + \tfrac{2}{3}y_3$$
$$y_2 = 40 + y_1 - \tfrac{1}{3}y_3$$
$$x_2 = 60 - \tfrac{1}{3}y_3$$



Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)

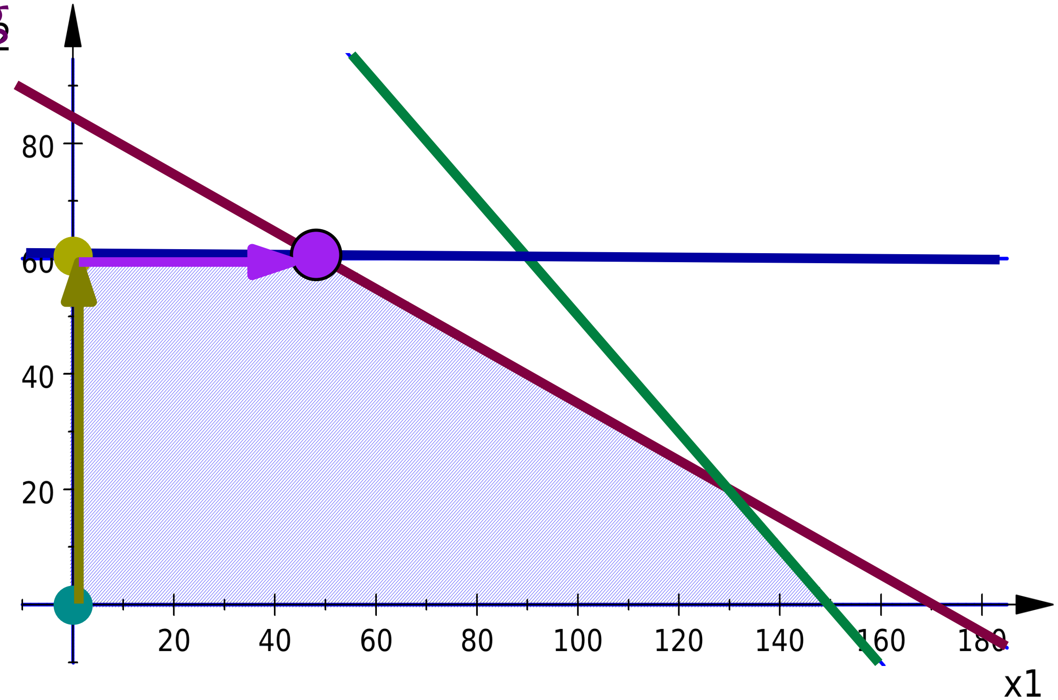
(LP2)

$$\max \boxed{450} - 3y_1 + \tfrac{1}{3}y_3$$

$$\text{so dass } x_1 = 50 - y_1 + \tfrac{2}{3}y_3$$

$$y_2 = 40 + y_1 - \tfrac{1}{3}y_3$$

$$x_2 = 60 - \tfrac{1}{3}y_3$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)

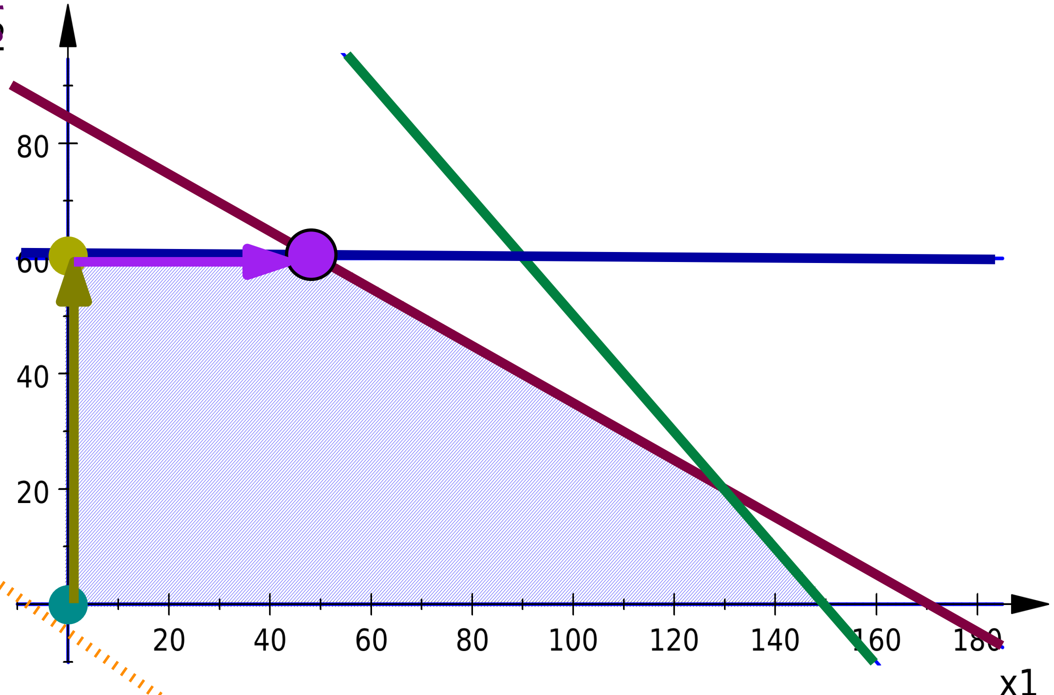
(LP2)

$$\max \boxed{450} - 3y_1 + \frac{1}{3}y_3$$

$$\text{so dass } x_1 = 50 - y_1 + \frac{2}{3}y_3$$

$$y_2 = 40 + y_1 - \frac{1}{3}y_3$$

$$x_2 = 60 - \frac{1}{3}y_3$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)

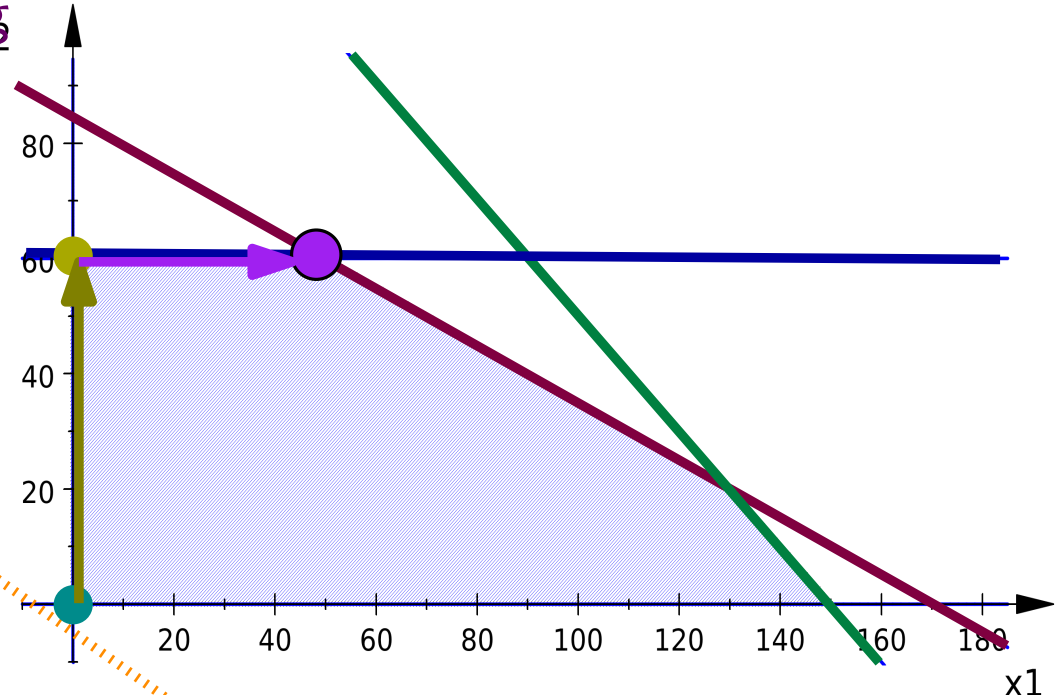
(LP2)

$$\max \boxed{450} - 3y_1 + \frac{1}{3}y_3$$

$$\text{so dass } x_1 = 50 - y_1 + \frac{2}{3}y_3$$

$$y_2 = 40 + y_1 - \frac{1}{3}y_3$$

$$x_2 = 60 - \frac{1}{3}y_3$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um $\frac{1}{3}$ mehr pro Einheit y_3 (übrig bleibende Minuten auf Maschine 3)

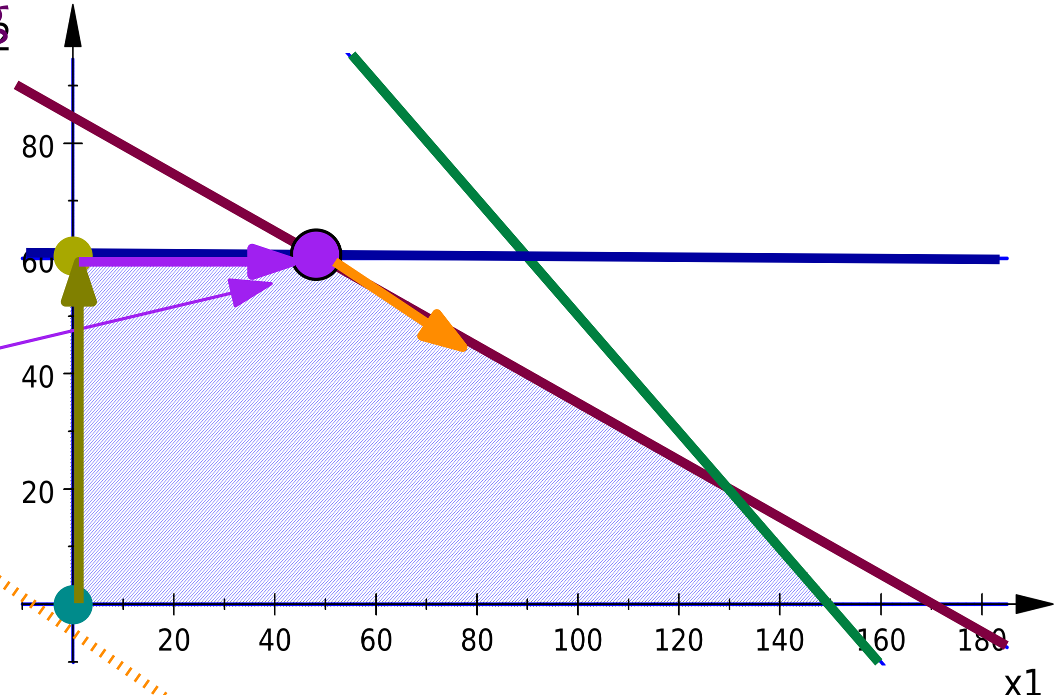
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)

(LP2)

$$\max \boxed{450} - 3y_1 + \frac{1}{3}y_3$$

$$\text{so dass } \boxed{\begin{aligned} x_1 &= 50 \\ y_2 &= 40 \\ x_2 &= 60 \end{aligned}} \begin{aligned} &- y_1 + \tfrac{2}{3}y_3 \\ &+ y_1 - \tfrac{1}{3}y_3 \\ &- \tfrac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um $\frac{1}{3}$ mehr pro Einheit y_3 (übrig bleibende Minuten auf Maschine 3)

$\rightarrow$ Will y_3 erhöhen

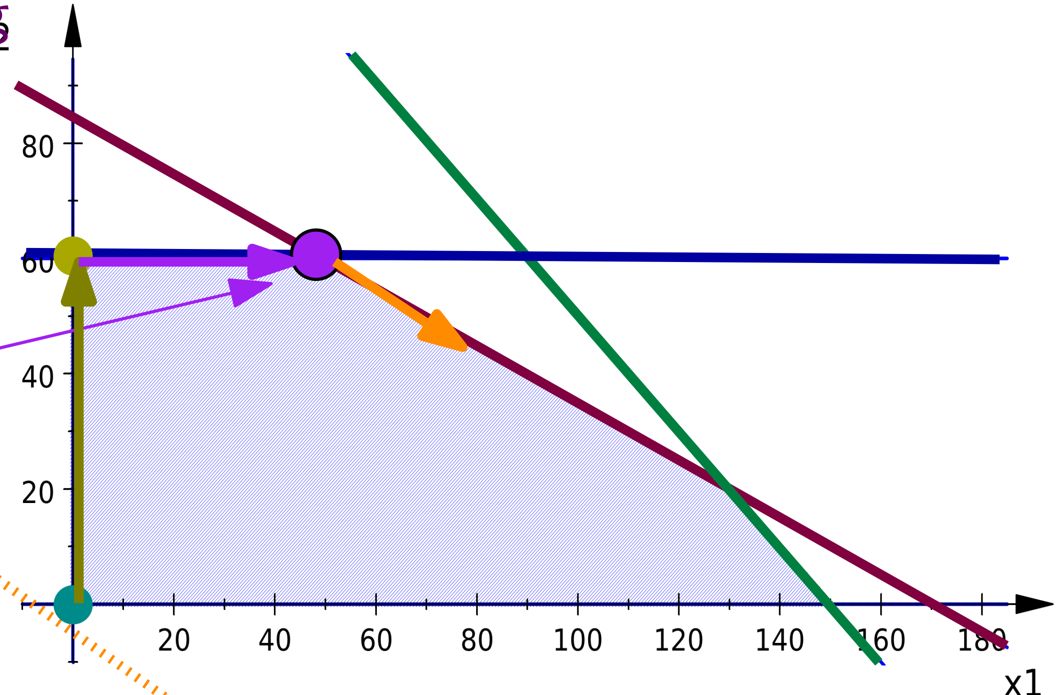
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)

(LP2)

$$\max \boxed{450} - 3y_1 + \frac{1}{3}y_3$$

so dass
$$\begin{aligned} x_1 &= 50 - y_1 + \frac{2}{3}y_3 \\ y_2 &= 40 + y_1 - \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= 60 - \frac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um $\frac{1}{3}$ mehr pro Einheit y_3 (übrig bleibende Minuten auf Maschine 3)

Um wieviel kann y_3 erhöht werden? $\rightarrow$ Will y_3 erhöhen

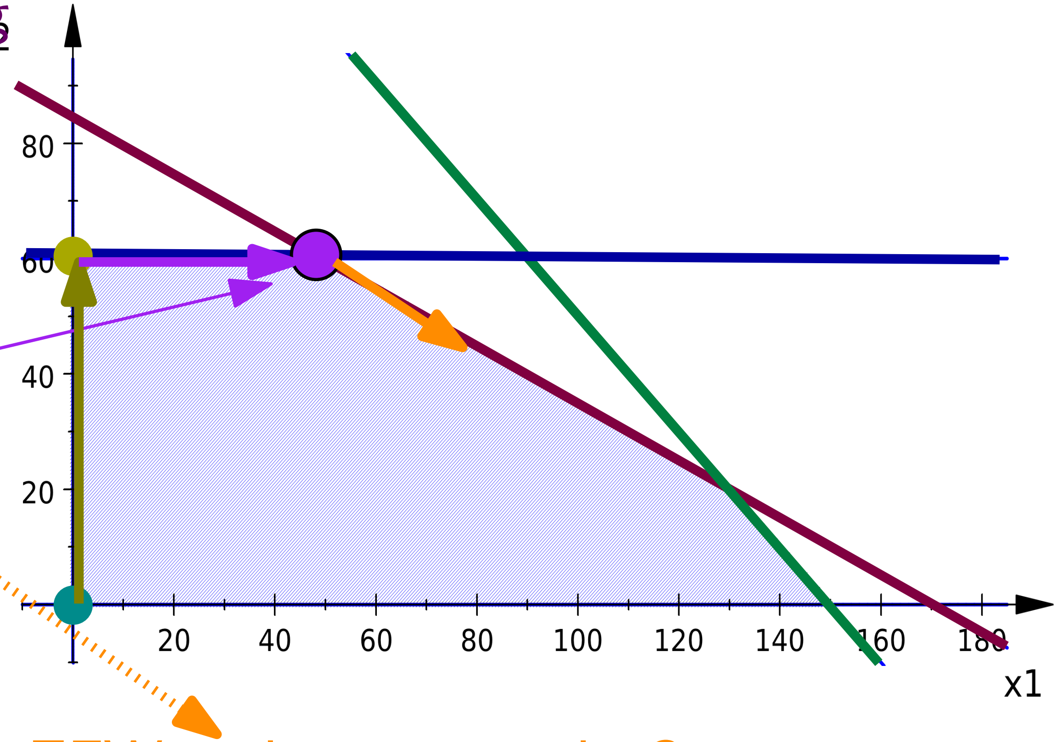
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)

(LP2)

$$\max \boxed{450} - 3y_1 + \frac{1}{3}y_3$$

so dass
$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 50 - y_1 + \tfrac{2}{3}y_3 \\ y_2 &= 40 + y_1 - \tfrac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= 60 - \tfrac{1}{3}y_3 \end{aligned}}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um $\frac{1}{3}$ mehr pro Einheit y_3 (übrig bleibende Minuten auf Maschine 3)

Um wieviel kann y_3 erhöht werden? $\rightarrow$ Will y_3 erhöhen

$$y_3 = \frac{3}{2}(x_1 - 50 + y_1) = -75 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}y_1$$

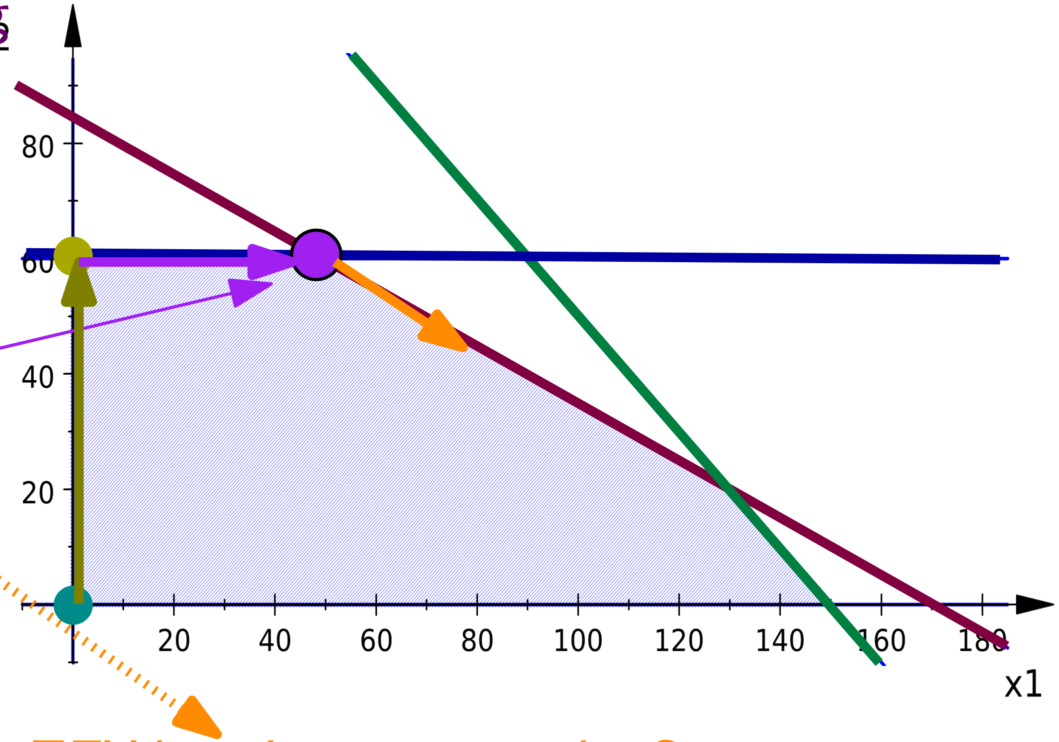
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)

(LP2)

$$\max \boxed{450} - 3y_1 + \frac{1}{3}y_3$$

so dass
$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 50 - y_1 + \tfrac{2}{3}y_3 \\ y_2 &= 40 + y_1 - \tfrac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= 60 - \tfrac{1}{3}y_3 \end{aligned}}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um $\frac{1}{3}$ mehr pro Einheit y_3 (übrig bleibende Minuten auf Maschine 3)

Um wieviel kann y_3 erhöht werden? $\rightarrow$ Will y_3 erhöhen

$$y_3 = \frac{3}{2}(x_1 - 50 + y_1) = -75 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}y_1$$
$$y_3 = 3 \cdot (40 + y_1 - y_2) = 120 + 3y_1 - 3y_2$$

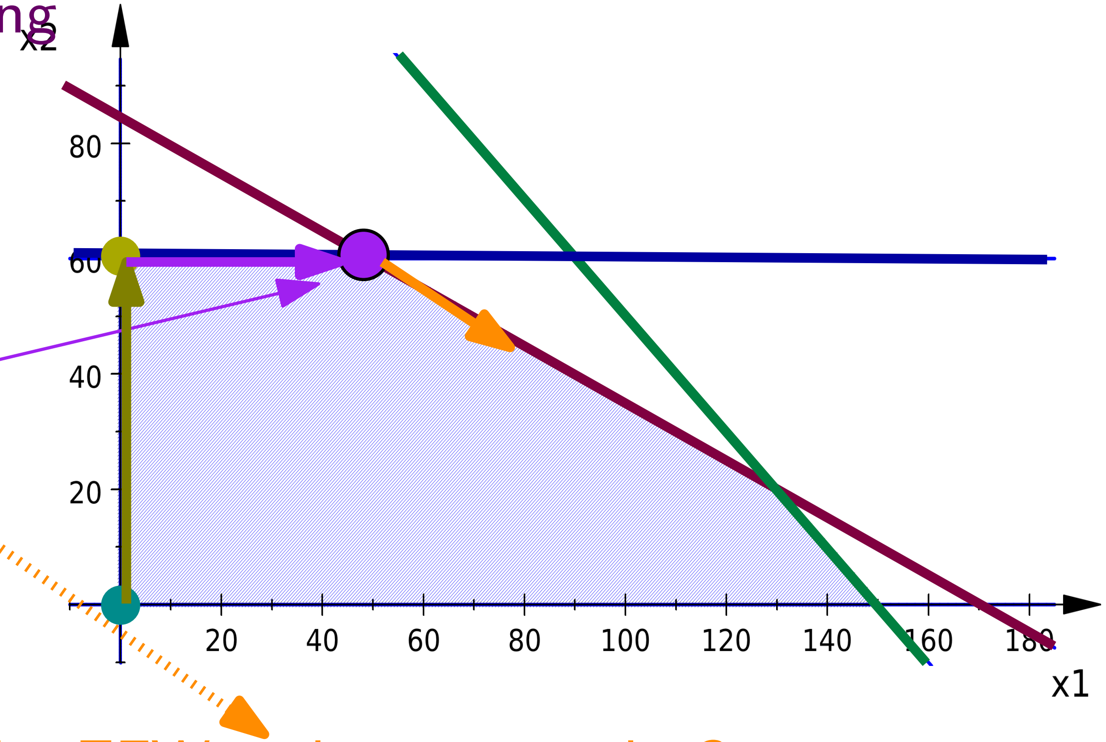
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)

(LP2)

$$\max \boxed{450} - 3y_1 + \frac{1}{3}y_3$$

$$\text{so dass } \boxed{\begin{aligned} x_1 &= 50 \\ y_2 &= 40 \\ x_2 &= 60 \end{aligned}} \begin{aligned} &- y_1 + \tfrac{2}{3}y_3 \\ &+ y_1 - \tfrac{1}{3}y_3 \\ &- \tfrac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um $\frac{1}{3}$ mehr pro Einheit y_3 (übrig bleibende Minuten auf Maschine 3)

Um wieviel kann y_3 erhöht werden? $\rightarrow$ Will y_3 erhöhen

$$y_3 = \frac{3}{2}(x_1 - 50 + y_1) = -75 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}y_1$$

$$y_3 = 3 \cdot (40 + y_1 - y_2) = 120 + 3y_1 - 3y_2$$

$$y_3 = 3 \cdot (60 - x_2) = 180 - 3x_2$$

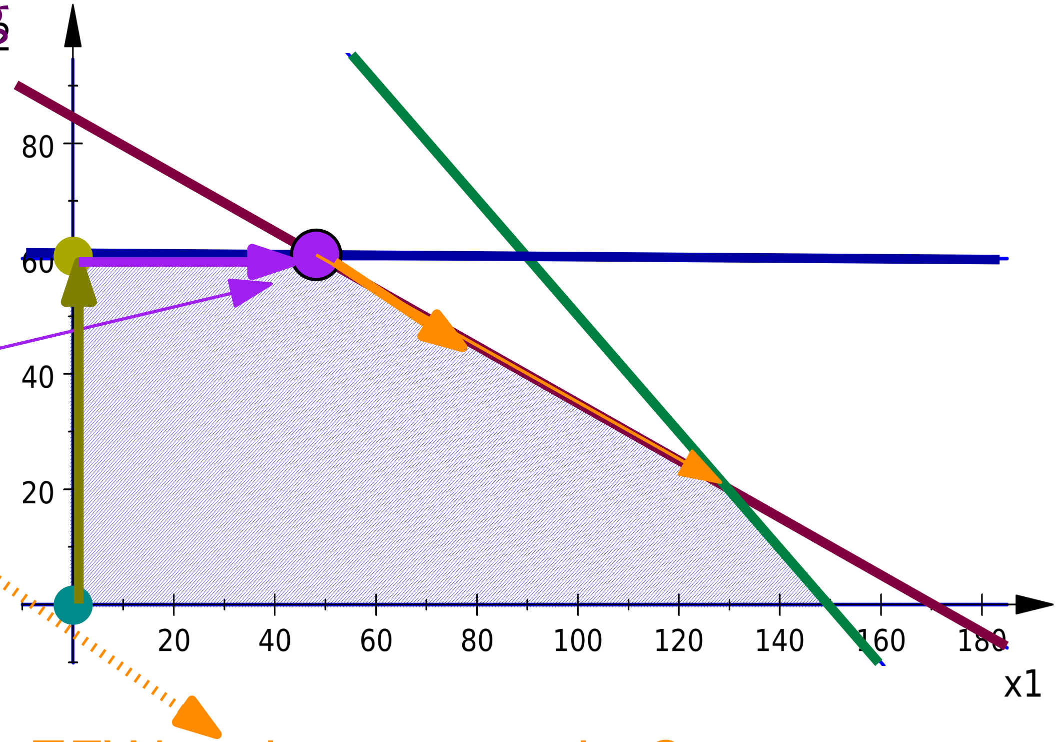
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)

(LP2)

$$\max \boxed{450} - 3y_1 + \frac{1}{3}y_3$$

$$\text{so dass } \begin{aligned} x_1 &= 50 - y_1 + \tfrac{2}{3}y_3 \\ y_2 &= 40 + y_1 - \tfrac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= 60 - \tfrac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um $\frac{1}{3}$ mehr pro Einheit y_3 (übrig bleibende Minuten auf Maschine 3)

Um wieviel kann y_3 erhöht werden? $\rightarrow$ Will y_3 erhöhen

$$y_3 = \tfrac{3}{2}(x_1 - 50 + y_1) = \boxed{-75} + \tfrac{3}{2}x_1 + \tfrac{3}{2}y_1$$

$$y_3 = 3 \cdot (40 + y_1 - y_2) = \boxed{120} + 3y_1 - 3y_2 \quad \leftarrow \text{höchstens um } 120$$

$$y_3 = 3 \cdot (60 - x_2) = \boxed{180} - 3x_2$$

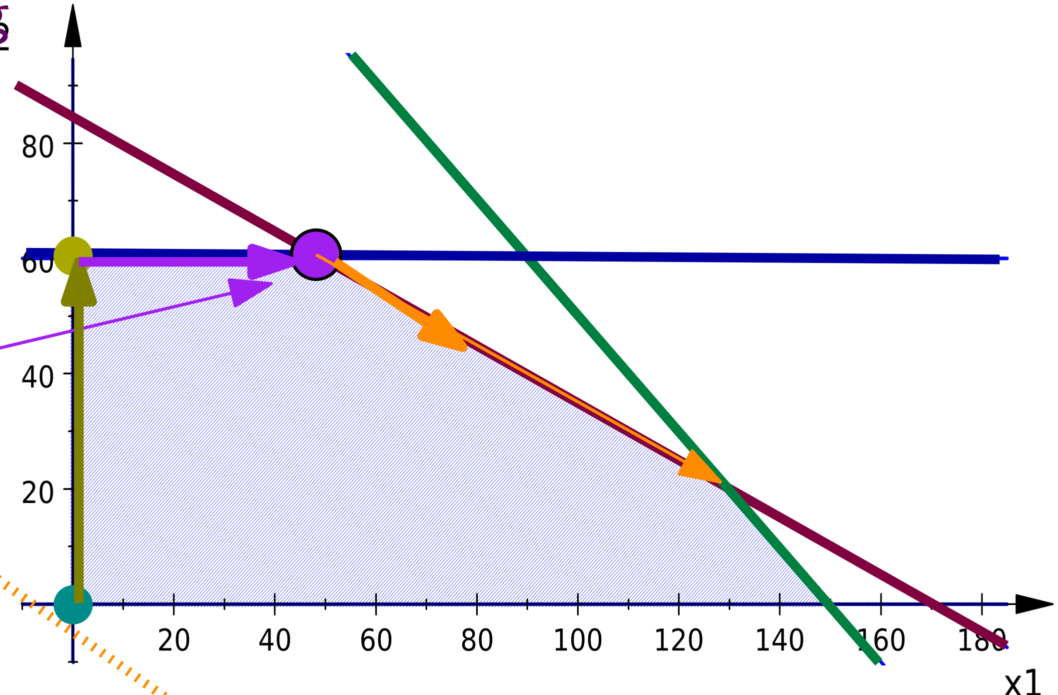
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)

(LP2)

$$\max \boxed{450} - 3y_1 + \frac{1}{3}y_3$$

$$\text{so dass } \begin{aligned} x_1 &= 50 - y_1 + \tfrac{2}{3}y_3 \\ y_2 &= 40 + y_1 - \tfrac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= 60 - \tfrac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

→ Ja, um $\frac{1}{3}$ mehr pro Einheit y_3 (übrig bleibende Minuten auf Maschine 3)
Um wieviel kann y_3 erhöht werden?

$$y_3 = \frac{3}{2}(x_1 - 50 + y_1) = \boxed{-75} + \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}y_1$$

$$y_3 = 3 \cdot (40 + y_1 - y_2) = \boxed{120} + 3y_1 - 3y_2$$

$$y_3 = 3 \cdot (60 - x_2) = \boxed{180} - 3x_2$$

Berechne neue Basisdarstellung.

$$x_1 = 50 - y_1 + \frac{2}{3}(120 + 3y_1 - 3y_2) = 130 - 2y_2$$

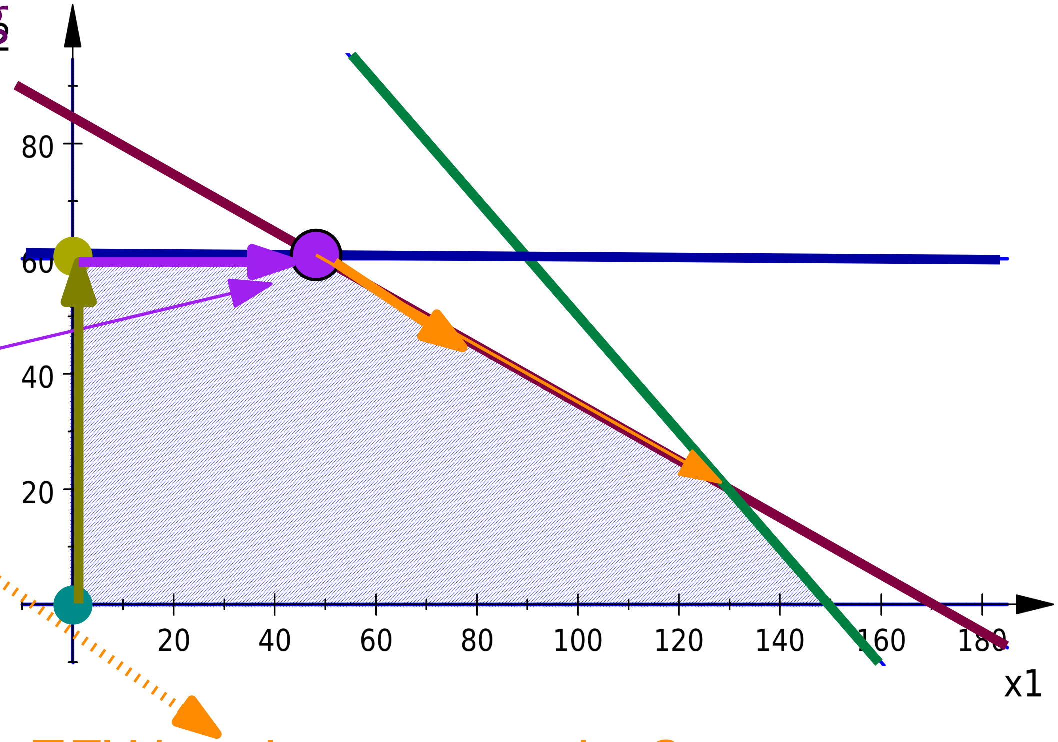
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)

(LP2)

$$\max \boxed{450} - 3y_1 + \frac{1}{3}y_3$$

$$\text{so dass } \begin{aligned} x_1 &= 50 - y_1 + \tfrac{2}{3}y_3 \\ y_2 &= 40 + y_1 - \tfrac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= 60 - \tfrac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um $\frac{1}{3}$ mehr pro Einheit y_3 (übrig bleibende Minuten auf Maschine 3)
Um wieviel kann y_3 erhöht werden?

$$y_3 = \tfrac{3}{2}(x_1 - 50 + y_1) = \boxed{-75} + \tfrac{3}{2}x_1 + \tfrac{3}{2}y_1$$

$$y_3 = 3 \cdot (40 + y_1 - y_2) = \boxed{120} + 3y_1 - 3y_2$$

$$y_3 = 3 \cdot (60 - x_2) = \boxed{180} - 3x_2$$

Berechne neue Basisdarstellung.

$$\begin{aligned} x_1 &= 50 - y_1 + \tfrac{2}{3}(120 + 3y_1 - 3y_2) \\ &= 130 - 2y_2 \end{aligned}$$

$$y_3 = 120 + 3y_1 - 3y_2$$

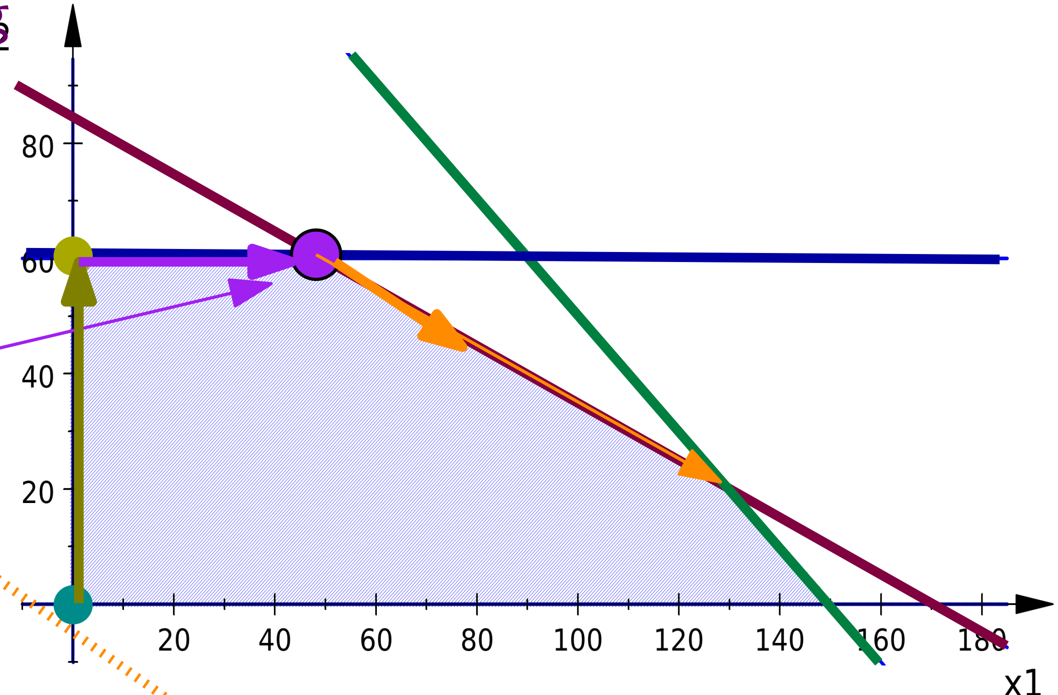
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)

(LP2)

$$\max \boxed{450} - 3y_1 + \frac{1}{3}y_3$$

so dass
$$\begin{aligned} x_1 &= 50 - y_1 + \frac{2}{3}y_3 \\ y_2 &= 40 + y_1 - \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= 60 - \frac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um $\frac{1}{3}$ mehr pro Einheit y_3 (übrig bleibende Minuten auf Maschine 3)

Um wieviel kann y_3 erhöht werden?

$$y_3 = \frac{3}{2}(x_1 - 50 + y_1) = \boxed{-75} + \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}y_1$$

$$y_3 = 3 \cdot (40 + y_1 - y_2) = \boxed{120} + 3y_1 - 3y_2$$

$$y_3 = 3 \cdot (60 - x_2) = \boxed{180} - 3x_2$$

Berechne neue Basisdarstellung.

$$\begin{aligned} x_1 &= 50 - y_1 + \frac{2}{3}(120 + 3y_1 - 3y_2) \\ &= 130 - 2y_2 \end{aligned}$$

$$y_3 = 120 + 3y_1 - 3y_2$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 60 - \frac{1}{3}(120 + 3y_1 - 3y_2) \\ &= 20 - y_1 + y_2 \end{aligned}$$

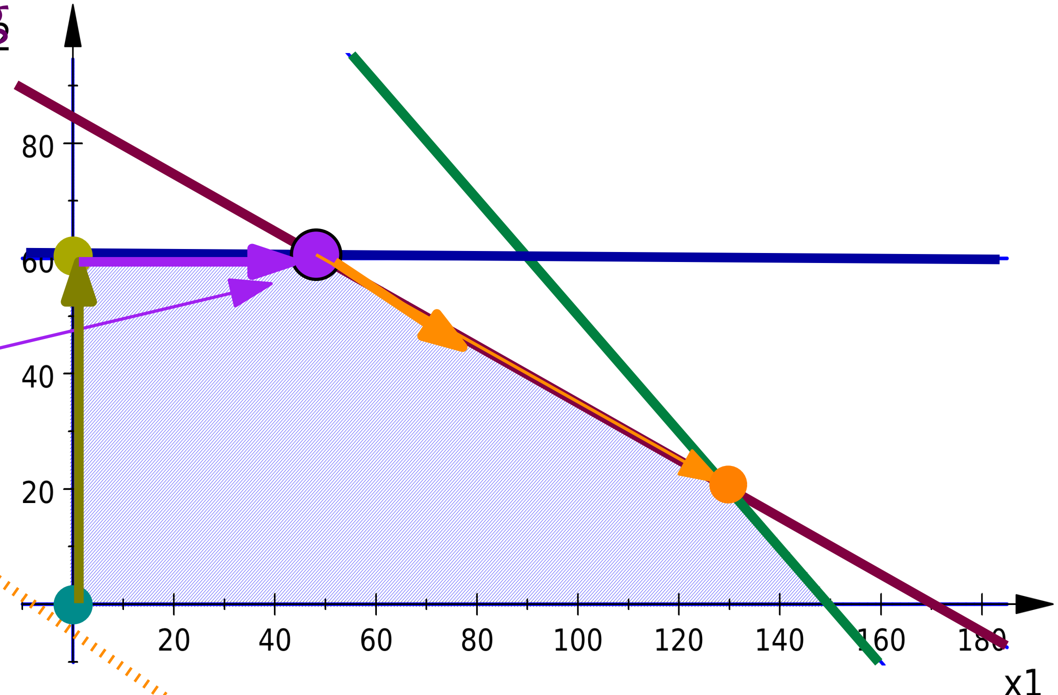
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
umgeformt für Basis (x_1, y_2, x_2)

(LP2)

$$\max \boxed{450} - 3y_1 + \frac{1}{3}y_3$$

so dass
$$x_1 = 50 - y_1 + \frac{2}{3}y_3$$
$$y_2 = 40 + y_1 - \frac{1}{3}y_3$$
$$x_2 = 60 - \frac{1}{3}y_3$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Ja, um $\frac{1}{3}$ mehr pro Einheit y_3 (übrig bleibende Minuten auf Maschine 3)

Um wieviel kann y_3 erhöht werden?

$$y_3 = \frac{3}{2}(x_1 - 50 + y_1) = \boxed{-75} + \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}y_1$$
$$y_3 = 3 \cdot (40 + y_1 - y_2) = \boxed{120} + 3y_1 - 3y_2$$
$$y_3 = 3 \cdot (60 - x_2) = \boxed{180} - 3x_2$$

Berechne neue Basisdarstellung.

$$\boxed{x_1} = 50 - y_1 + \frac{2}{3}(120 + 3y_1 - 3y_2) = \boxed{130} - 2y_2$$
$$\boxed{y_3 = 120} + 3y_1 - 3y_2$$
$$\boxed{x_2} = 60 - \frac{1}{3}(120 + 3y_1 - 3y_2) = \boxed{20} - y_1 + y_2$$

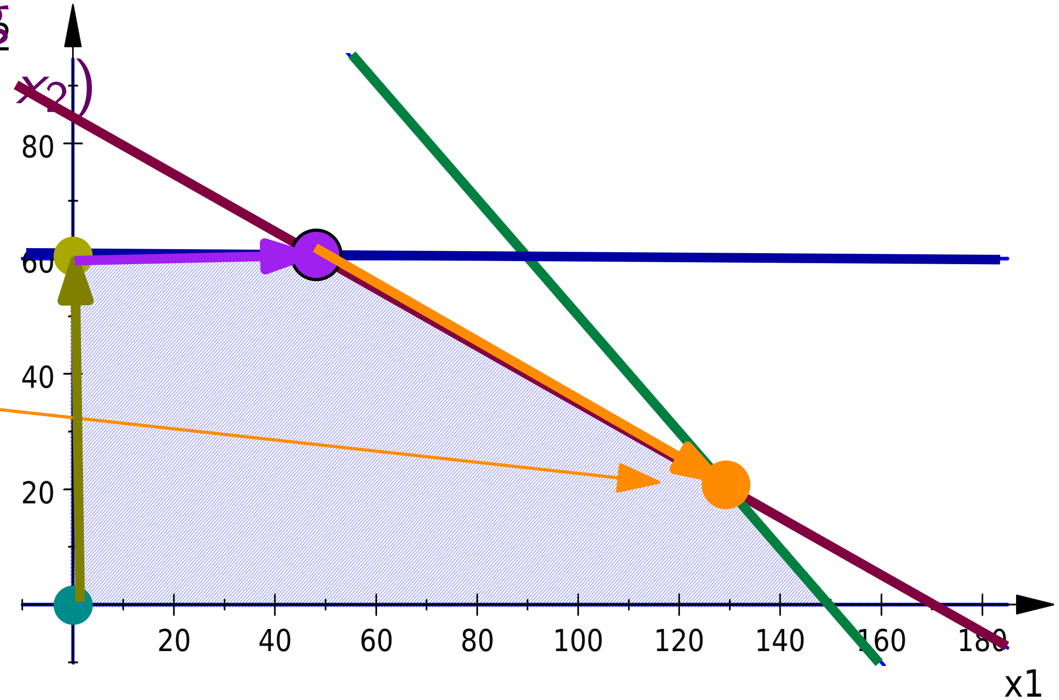
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (x_1, y_2, x_2)

so dass $x_1 = 130 - 2y_2$

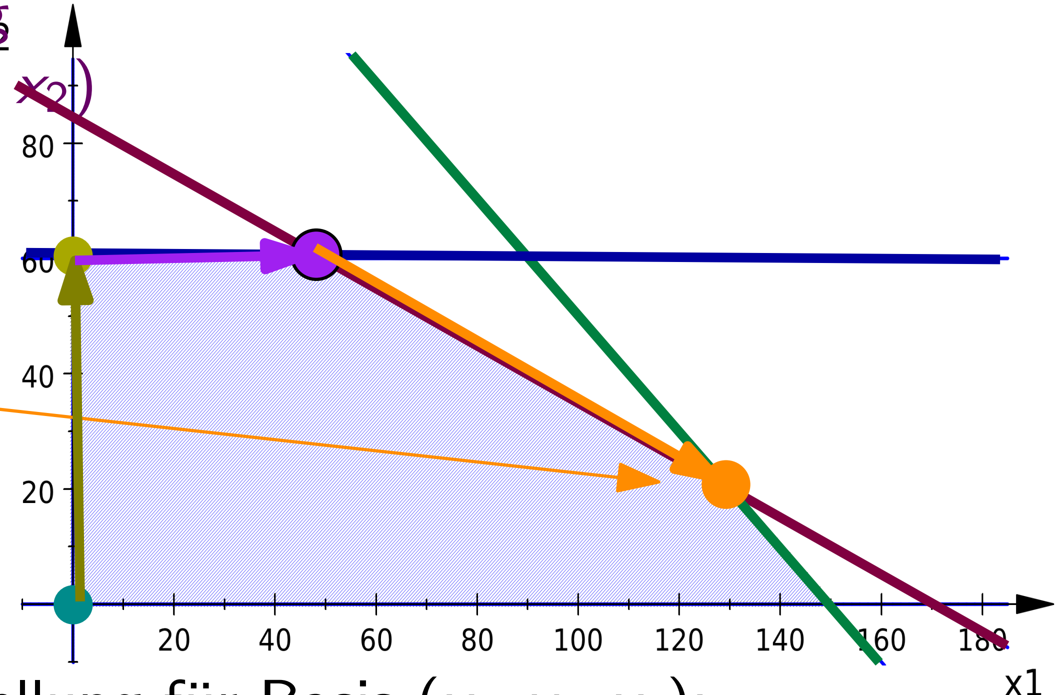
$$y_3 = 120 + 3y_1 - 3y_2$$

$$x_2 = 20 - y_1 + y_2$$



Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (x_1, y_2, x_2)



so dass $\boxed{x_1} = 130 - 2y_2$

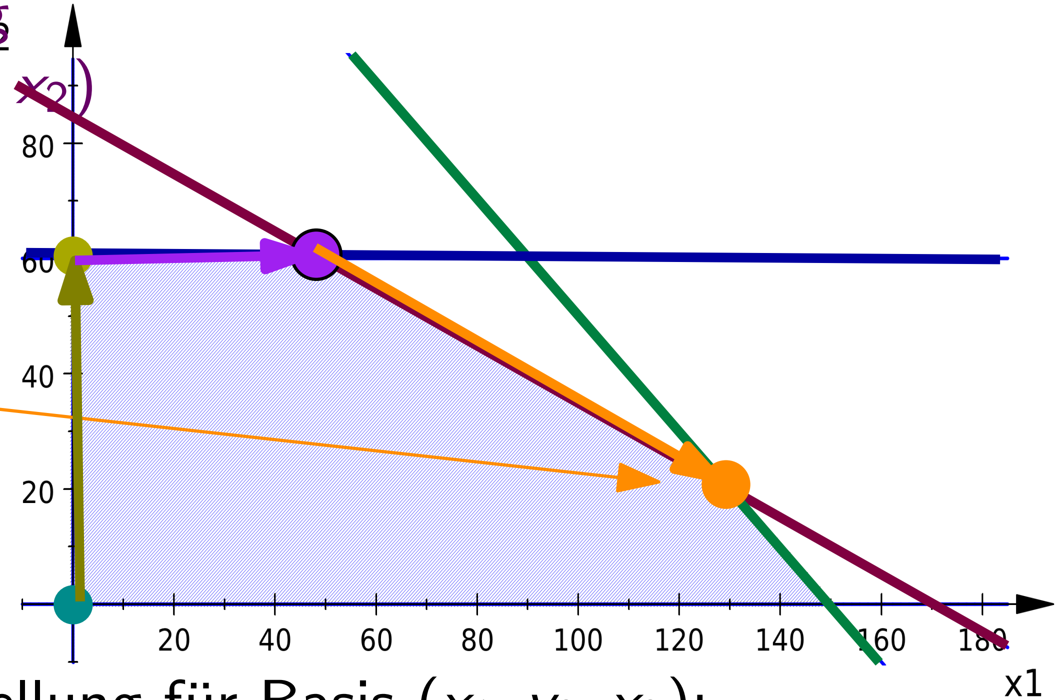
$$y_3 = 120 + 3y_1 - 3y_2$$

$$x_2 = 20 - y_1 + y_2$$

Berechne Zielfunktion in Basisdarstellung für Basis (x_1, y_3, x_2):

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (x_1, y_2, x_2)

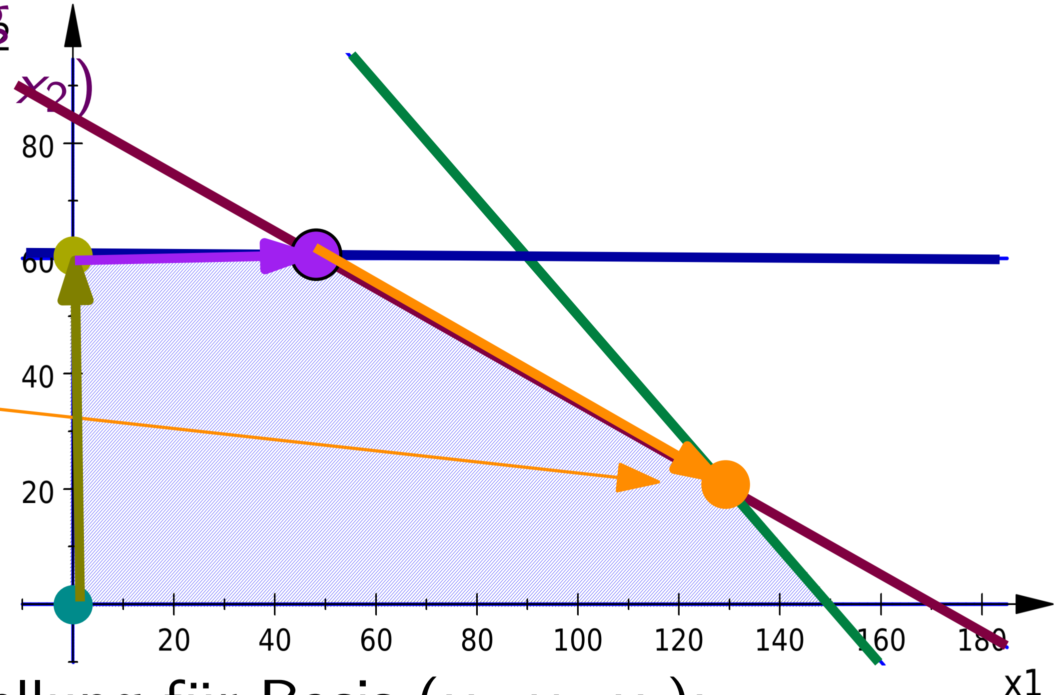


so dass
$$x_1 = 130 - 2y_2$$
$$y_3 = 120 + 3y_1 - 3y_2$$
$$x_2 = 20 - y_1 + y_2$$

Berechne Zielfunktion in Basisdarstellung für Basis (x_1, y_3, x_2):
$$450 - 3y_1 + \frac{1}{3}(120 + 3y_1 - 3y_2) = 490 - 2y_1 - y_2$$

Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (x_1, y_2, x_2)



so dass
$$x_1 = 130 - 2y_2$$
$$y_3 = 120 + 3y_1 - 3y_2$$
$$x_2 = 20 - y_1 + y_2$$

Berechne Zielfunktion in Basisdarstellung für Basis (x_1, y_3, x_2):

$$450 - 3y_1 + \frac{1}{3}(120 + 3y_1 - 3y_2) = \boxed{490} - 2y_1 - y_2$$

Zielfunktionswert

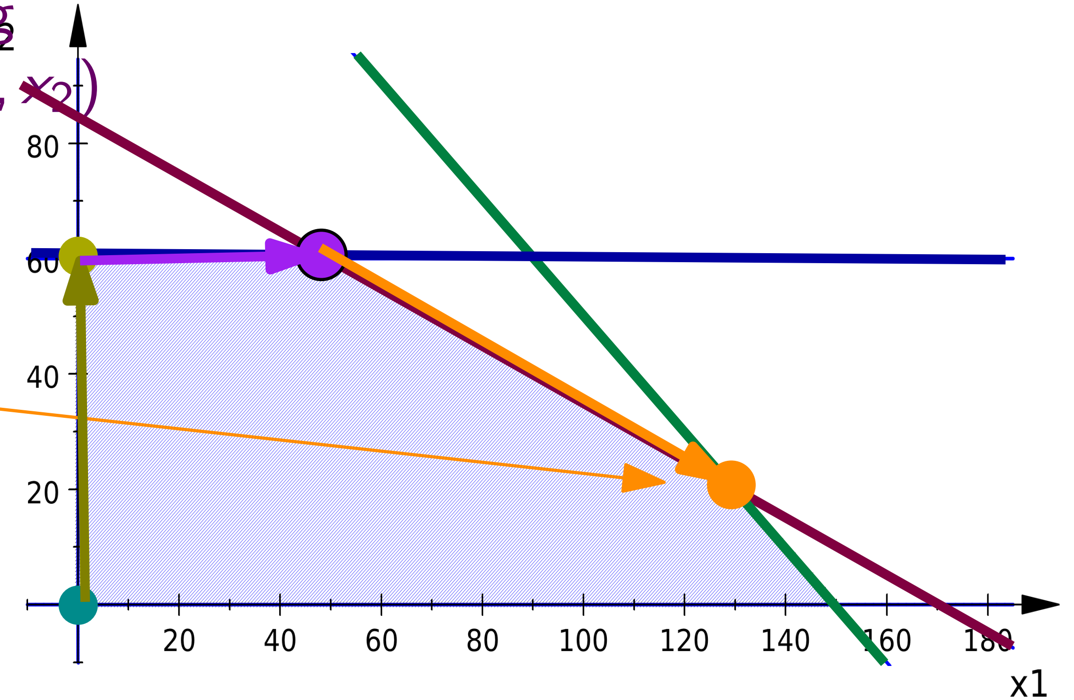
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (x_1, y_2, x_2)

(LP3)

$$\max \boxed{490} - 2y_1 - y_2$$

so dass
$$x_1 = 130 - 2y_2$$
$$y_3 = 120 + 3y_1 - 3y_2$$
$$x_2 = 20 - y_1 + y_2$$



Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (x_1, y_2, x_2)

(LP3)

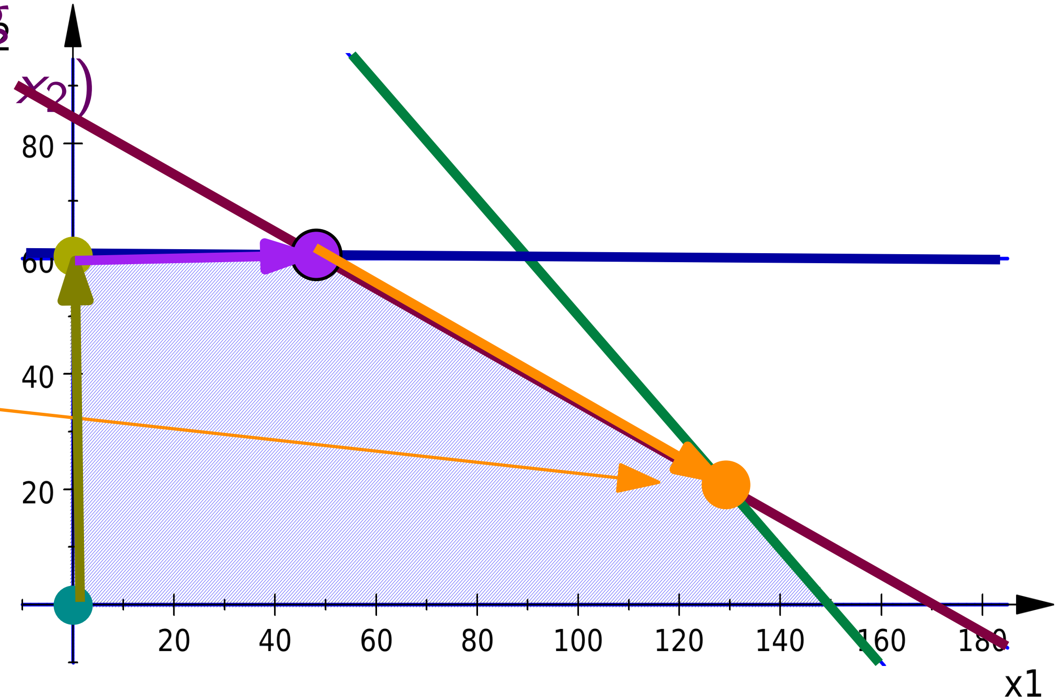
$$\max \boxed{490} - 2y_1 - y_2$$

so dass

$$x_1 = 130 - 2y_2$$

$$y_3 = 120 + 3y_1 - 3y_2$$

$$x_2 = 20 - y_1 + y_2$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

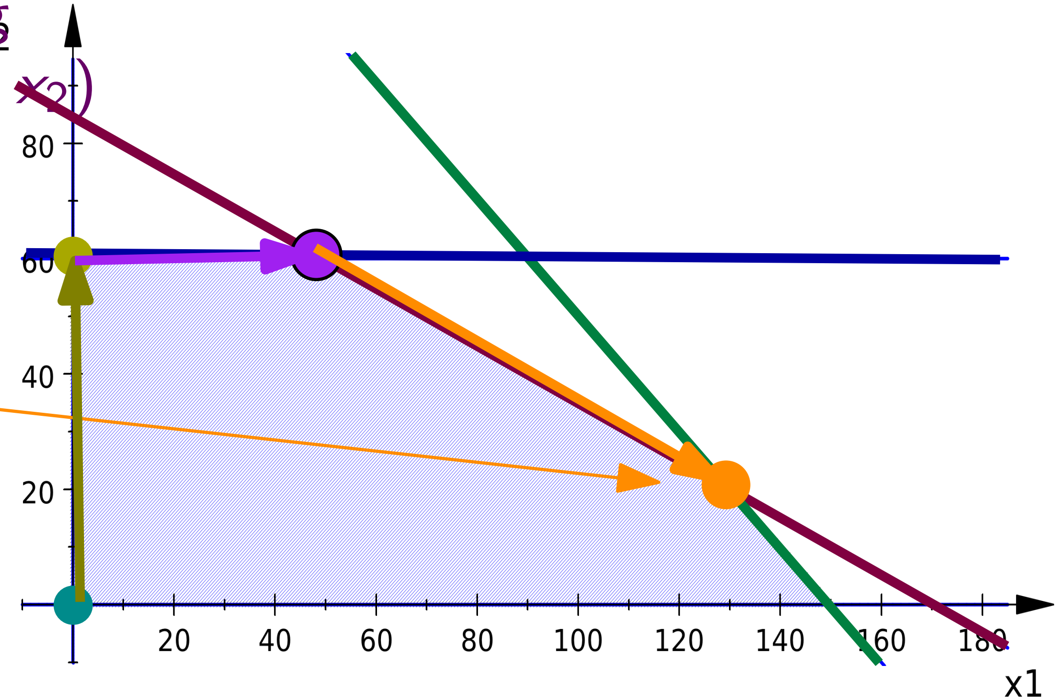
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (x_1, y_2, x_2)

(LP3)

$$\max \boxed{490} - 2y_1 - y_2$$

so dass
$$x_1 = 130 - 2y_2$$
$$y_3 = 120 + 3y_1 - 3y_2$$
$$x_2 = 20 - y_1 + y_2$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Nein

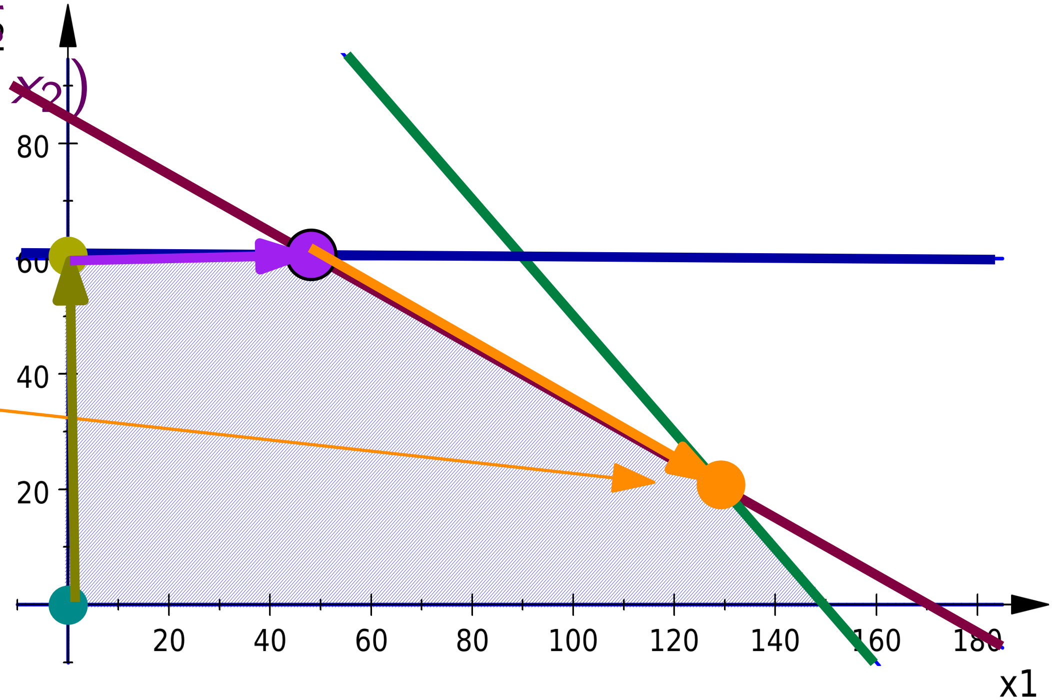
Simplexverfahren am Beispiel

LP aus Beispiel Produktionsplanung
in Basisdarstellung für Basis (x_1, y_2, x_2)

(LP3)

$$\max \boxed{490} - 2y_1 - y_2$$

so dass
$$\begin{aligned} x_1 &= 130 - 2y_2 \\ y_3 &= 120 + 3y_1 - 3y_2 \\ x_2 &= 20 - y_1 + y_2 \end{aligned}$$



Überprüfe anhand der ZF: Kann der ZFW verbessert werden?

$\rightarrow$ Nein

$\rightarrow$ Optimallösung gefunden!

Zusammengefasst: Algorithmus Simplexverfahren

Require: Optimierungsproblem (P) der Form $\max\{x : Ax = b, x \geq 0\}$
Ensure: optimale Basislösung von (P)

Finde zulässige Basislösung $x^{(0)}$ von (P).
Setze $i := 0$.
while keine Optimallösung gefunden wurde **do**
  Überprüfe anhand der Zielfunktion, ob sich $x^{(0)}$ durch Aufnehmen einer der Nicht-Basisvariablen in die Basis erhöhen lässt.
  if Zielfunktion lässt sich nicht verbessern **then**
    return $x^{(i)}$ ist optimale Basislösung
  else if Zielfunktion lässt sich durch Aufnahme von x_j verbessern **then**
    Überprüfe, um wieviel x_j maximal erhöht werden darf, ohne die Nebenbedingungen zu verletzen,
    Erhöhe x_j um diesen Betrag,
    Erstelle $LP^{(i+1)}$ durch Umformen der Nebenbedingungen: löse die beschränkende Nebenbedingungen nach x_j auf setze sie in die restlichen Nebenbedingungen und in die Zielfunktion ein.
    An $LP^{(i+1)}$ lässt sich die aktuelle zulässige Basislösung und der aktuelle Wert der Zielfunktion ablesen.
  end if
end while

Was ist hier eigentlich passiert?
- Für Fans der linearen Algebra

In Matrixschreibweise sieht unser LP in Normalform so aus:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^t x \\ \text{so dass } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Was ist hier eigentlich passiert?
- Für Fans der linearen Algebra

In Matrixschreibweise sieht unser LP in Normalform so aus:

$$\begin{aligned} \max \ \ & c^t x \\ \text{so dass } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Normalerweise ist $n >> m$, das Gleichungssystem ist also unterbestimmt.

Was ist hier eigentlich passiert?
- Für Fans der linearen Algebra

In Matrixschreibweise sieht unser LP in Normalform so aus:

$$\begin{aligned} \max\ & c^t x \\ \text{so dass } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Normalerweise ist $n >> m$, das Gleichungssystem ist also unterbestimmt.

Was ist hier eigentlich passiert?
- Für Fans der linearen Algebra

In Matrixschreibweise sieht unser LP in Normalform so aus:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^t x \\ \text{so dass } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

mit $A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right)$, $b = \left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{array} \right)$ und $c = \left(\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{array} \right)$.

Normalerweise ist $n >> m$, das Gleichungssystem ist also unterbestimmt. Hat die Matrix Rang m, dann können wir aus den Zeilen der Matrix unterschiedliche Basen des $\mathbb{R}^m$ bilden.

Was ist hier eigentlich passiert?
- Für Fans der linearen Algebra

In Matrixschreibweise sieht unser LP in Normalform so aus:

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & c^t x \\ \text{so dass } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Normalerweise ist $n >> m$, das Gleichungssystem ist also unterbestimmt. Hat die Matrix Rang m, dann können wir aus den Zeilen der Matrix unterschiedliche Basen des $\mathbb{R}^m$ bilden.
Bezeichnen wir für so eine Basis B die Matrix, die nur Basiszeilen enthält als A_B, dann erhalten wir die **zugehörige Basislösung** x_B als $x_B = A_B^{-1} b$.
Die restlichen Variablen (**Nichtbasisvariablen**) x_N sind dann 0.

Was ist hier eigentlich passiert?
- Für Fans der linearen Algebra

In Matrixschreibweise sieht unser LP in Normalform so aus:

$$\max \quad c^t x$$
$$\text{so dass } Ax = b$$
$$x \geq 0$$

mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Normalerweise ist $n >> m$, das Gleichungssystem ist also unterbestimmt.
Hat die Matrix Rang m, dann können wir aus den Zeilen der Matrix unterschiedliche Basen des $\mathbb{R}^m$ bilden.
Bezeichnen wir für so eine Basis B die Matrix, die nur Basiszeilen enthält als A_B, dann erhalten wir die **zugehörige Basislösung** x_B als $x_B = A_B^{-1} b$.
Die restlichen Variablen (**Nichtbasisvariablen**) x_N sind dann 0.

Ist $x_B > 0$, dann haben wir eine **zulässige** Basislösung, diese repräsentiert einen Extrempunkt des Zulässigkeitspolyeders.

Was ist hier eigentlich passiert?
- Für Fans der linearen Algebra

In Matrixschreibweise sieht unser LP in Normalform so aus:

$$\begin{aligned} \max \ & c^t x \\ \text{so dass } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Normalerweise ist $n >> m$, das Gleichungssystem ist also unterbestimmt. Hat die Matrix Rang m, dann können wir aus den Zeilen der Matrix unterschiedliche Basen des $\mathbb{R}^m$ bilden.
Bezeichnen wir für so eine Basis B die Matrix, die nur Basiszeilen enthält als A_B, dann erhalten wir die **zugehörige Basislösung** x_B als $x_B = A_B^{-1} b$. Die restlichen Variablen (**Nichtbasisvariablen**) x_N sind dann 0.

Für die Zielfunktion erhalten wir nach Basiswechsel die Darstellung
$c_B^t x_B + c_n^t x_N = c_B^t A_B^{-1} b + (c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N) x_N$

Was ist hier eigentlich passiert?

- Für Fans der linearen Algebra

In Matrixschreibweise sieht unser LP in Normalform so aus:

$$\max \quad c^t x$$

$$\text{so dass } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Normalerweise ist $n >> m$, das Gleichungssystem ist also unterbestimmt. Hat die Matrix Rang m, dann können wir aus den Zeilen der Matrix unterschiedliche Basen des $\mathbb{R}^m$ bilden.

Zielfunktionswert der Basislösung

... die Matrix, die nur Basiszeilen enthält als A_B, dann erhalten wir die **zugehörige Basislösung** x_B als $x_B = A_B^{-1} b$. Die restlichen Variablen (**Nichtbasisvariablen**) x_N sind dann 0.

Für die Zielfunktion erhalten wir nach Basiswechsel die Darstellung

$$c_B^t x_B + c_n^t x_N = \boxed{c_B^t A_B^{-1} b} + \boxed{(c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N)} x_N$$

reduzierte Kosten der Nichtbasisvariablen

Was ist hier eigentlich passiert?

- Für Fans der linearen Algebra

In Matrixschreibweise sieht unser LP in Normalform so aus:

$$\begin{aligned} \max\ & c^t x \\ \text{so dass } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Wir sehen: Sind die reduzierten Kosten für eine Nichtbasisvariable positiv, vergrößert sich durch erhöhen die Zielfunktion

unterschiedliche Basen des $\mathbb{R}^m$ bilden.

Zielfunktionswert der Basislösung

B die Matrix, die nur Basiszeilen enthält als A_B, dann erhalten wir die **zugehörige Basislösung** x_B als $x_B = A_B^{-1} b$. Die restlichen Variablen (**Nichtbasisvariablen**) x_N sind dann 0.

Für die Zielfunktion erhalten wir nach Basiswechsel die Darstellung

$$c_B^t x_B + c_n^t x_N = \boxed{c_B^t A_B^{-1} b} + \boxed{(c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N)} x_N$$

reduzierte Kosten der Nichtbasisvariablen

Simplextableaus

spare Schreibarbeit durch Nutzen der Tableauschreibweise

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8) in Normalform

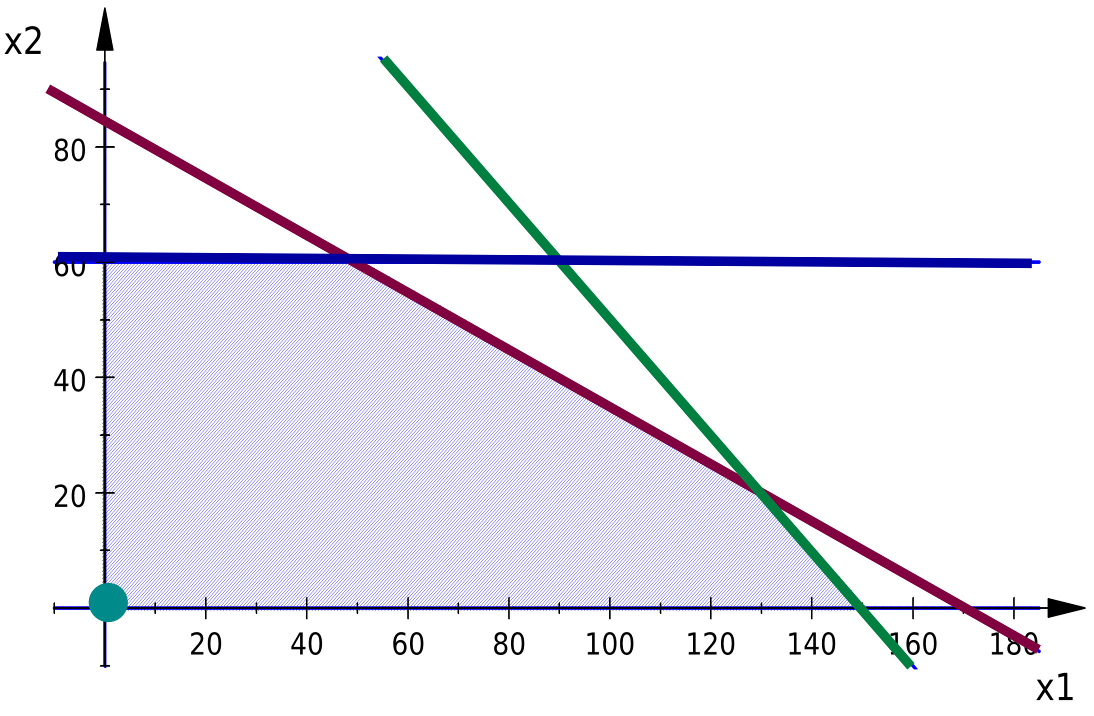
$$\max\ 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{so dass } x_1 + 2x_2 + y_1 = 170$$

$$x_1 + x_2 + y_2 = 150$$

$$3x_2 + y_3 = 180$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



Simplextableaus

spare Schreibarbeit durch Nutzen der Tableauschreibweise

LP aus Beispiel Produktionsplanung (VL 8) in Normalform

$$\max\ 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{so dass } x_1 + 2x_2 + y_1 = 170$$

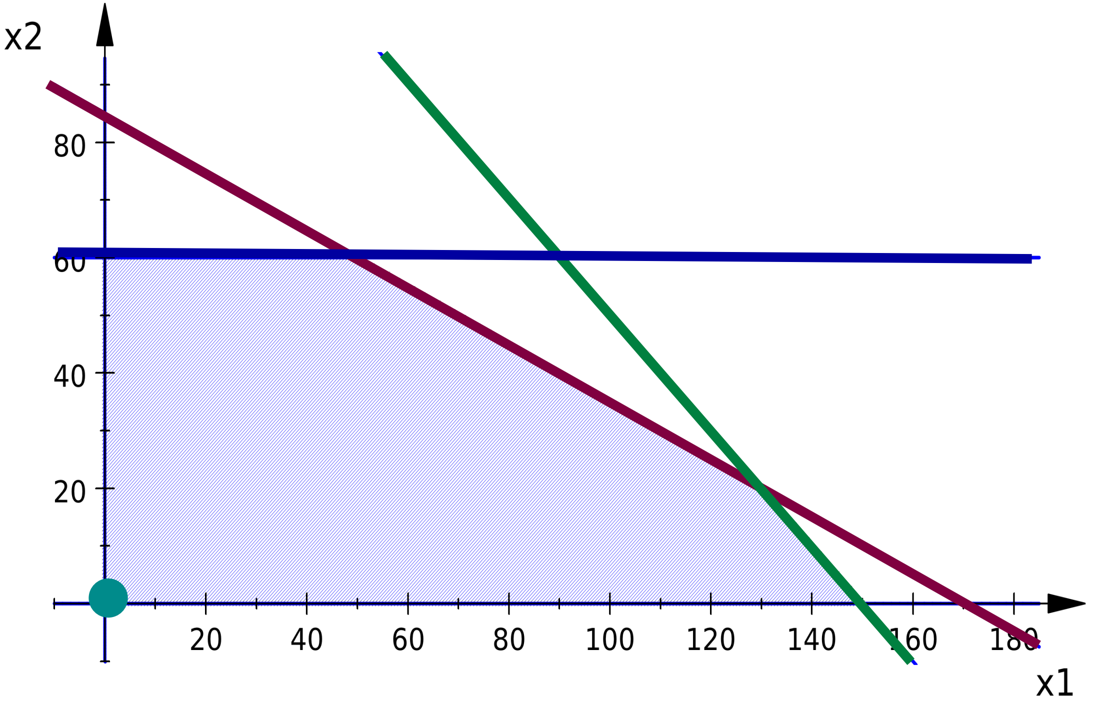
$$x_1 + x_2 + y_2 = 150$$

$$3x_2 + y_3 = 180$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Starttableau (LP0)

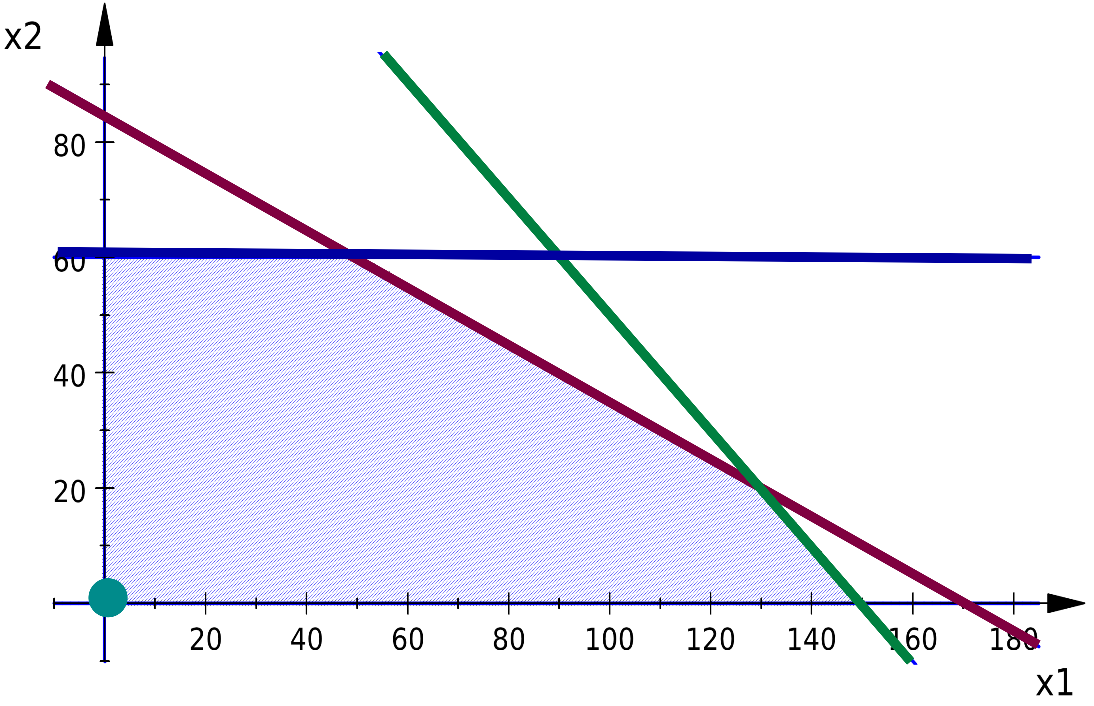
3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180



Simplextableaus

Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

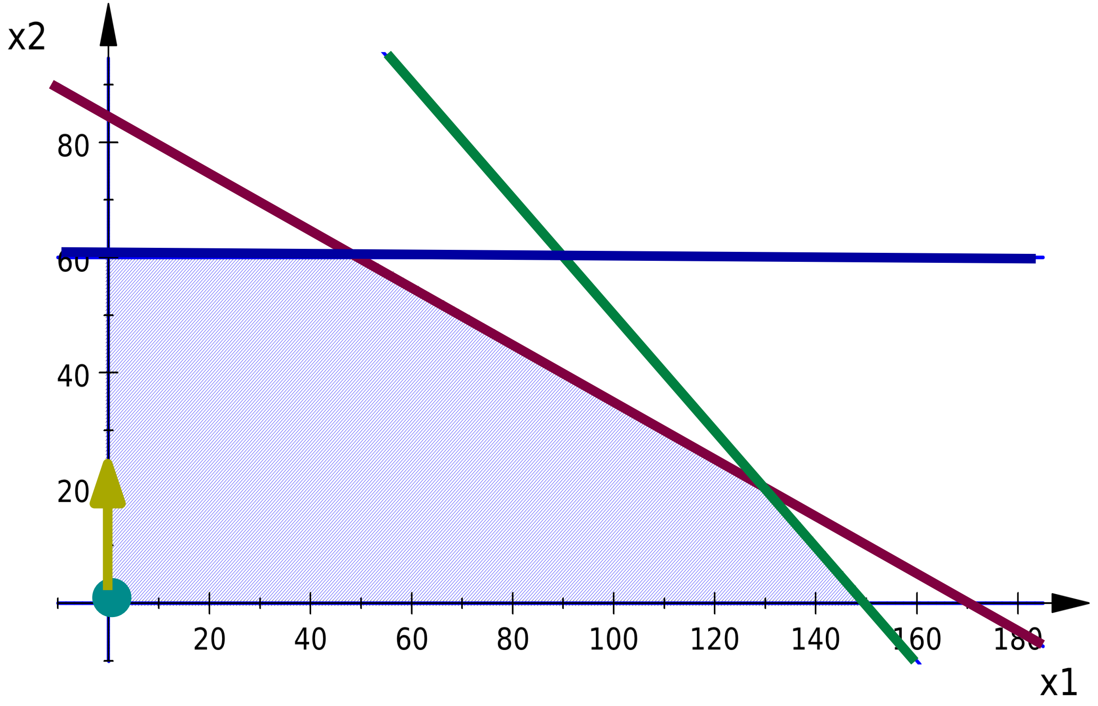


Simplextableaus

Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

Um zu entscheiden 'in welche Richtung ich gehe': Wähle **Pivotspalte** j mit positiven **reduzierten Kosten** c_j

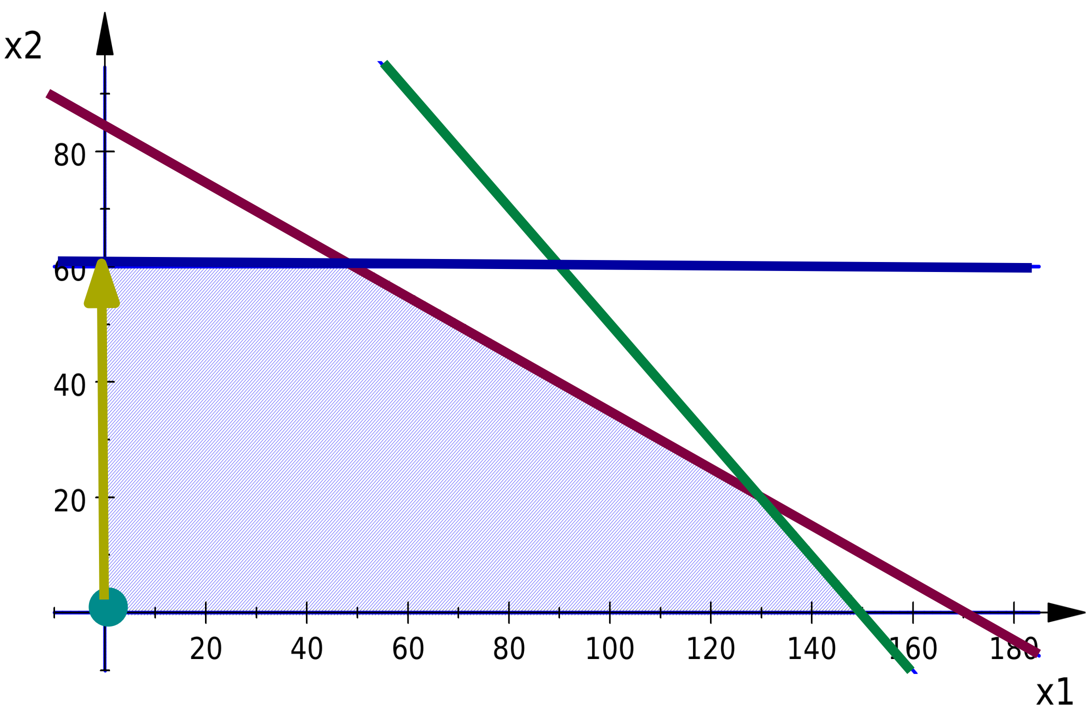


Simplextableaus

Starttableau (LP0)

$$
\begin{array}{ccccc|c}
3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 170 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 150 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 1 & \boxed{180}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\leq \frac{170}{2} \\
\leq 150 \\
\leq \boxed{\frac{180}{3}}
\end{array}
$$

Um zu entscheiden 'wie weit ich gehen darf': Wähle **Pivotzeile** i so dass $\frac{b_i}{a_{ij}}$ minimal

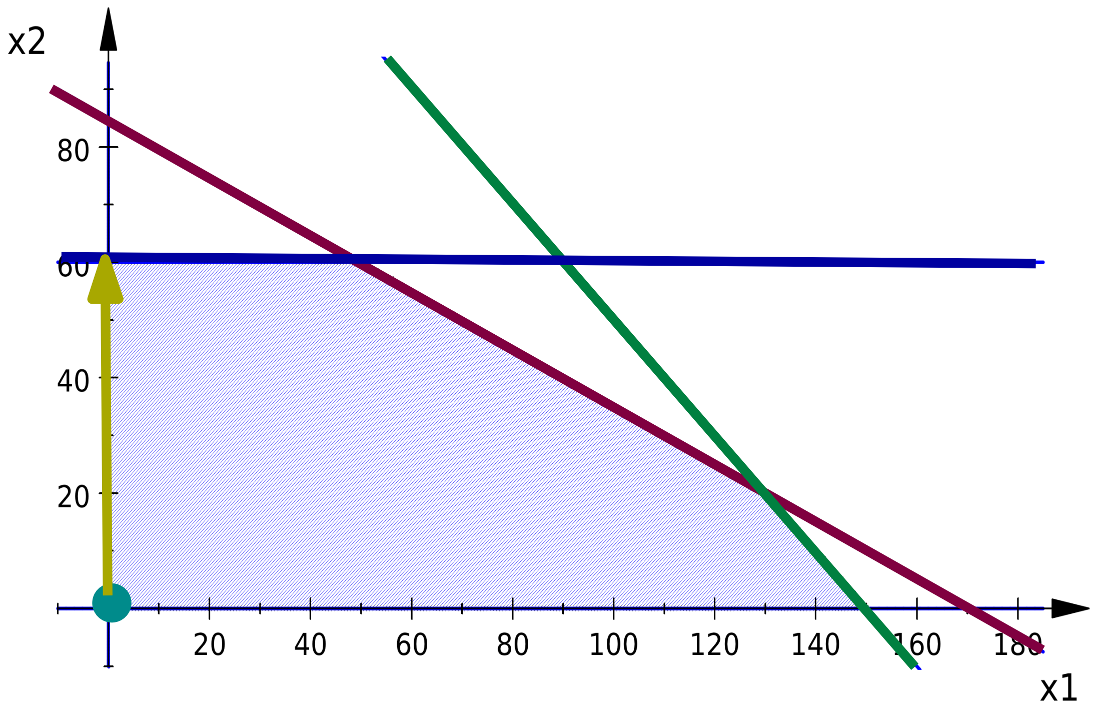


Simplextableaus

Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

Um Basislösung ('Ecke') zu finden: Mache **Pivotumformung** mit gewähltem **Pivotelement**.

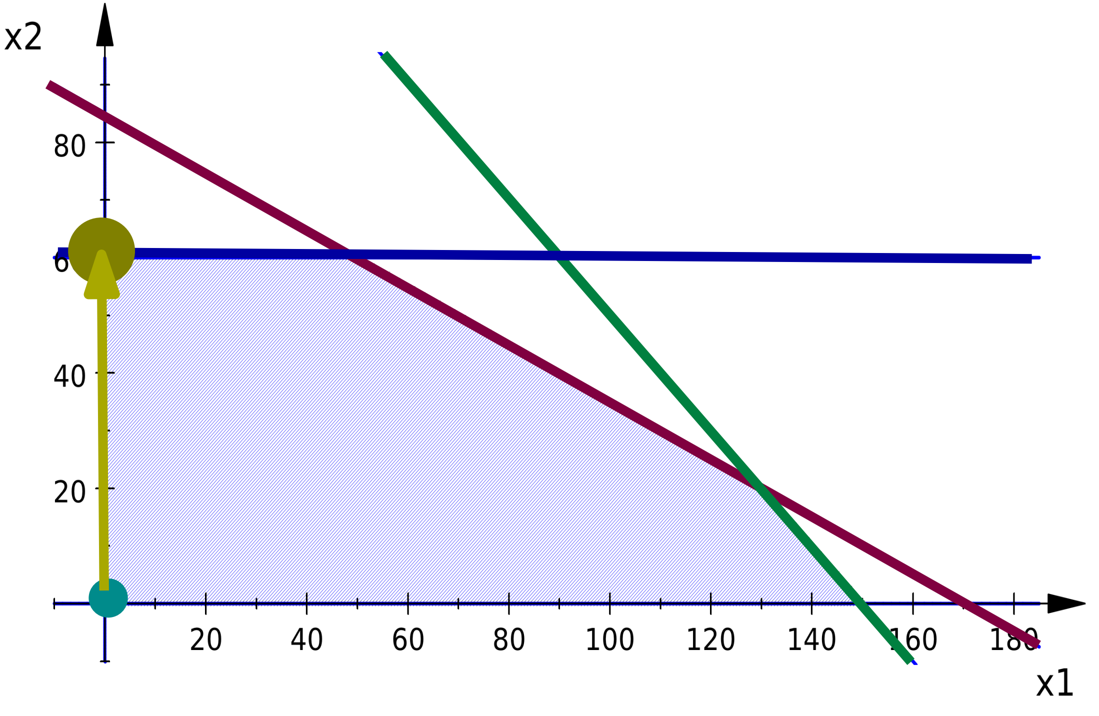


Simplextableaus

Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

Um Basislösung ('Ecke') zu finden: Mache **Pivotumformung** mit gewähltem **Pivotelement**.



Simplextableaus

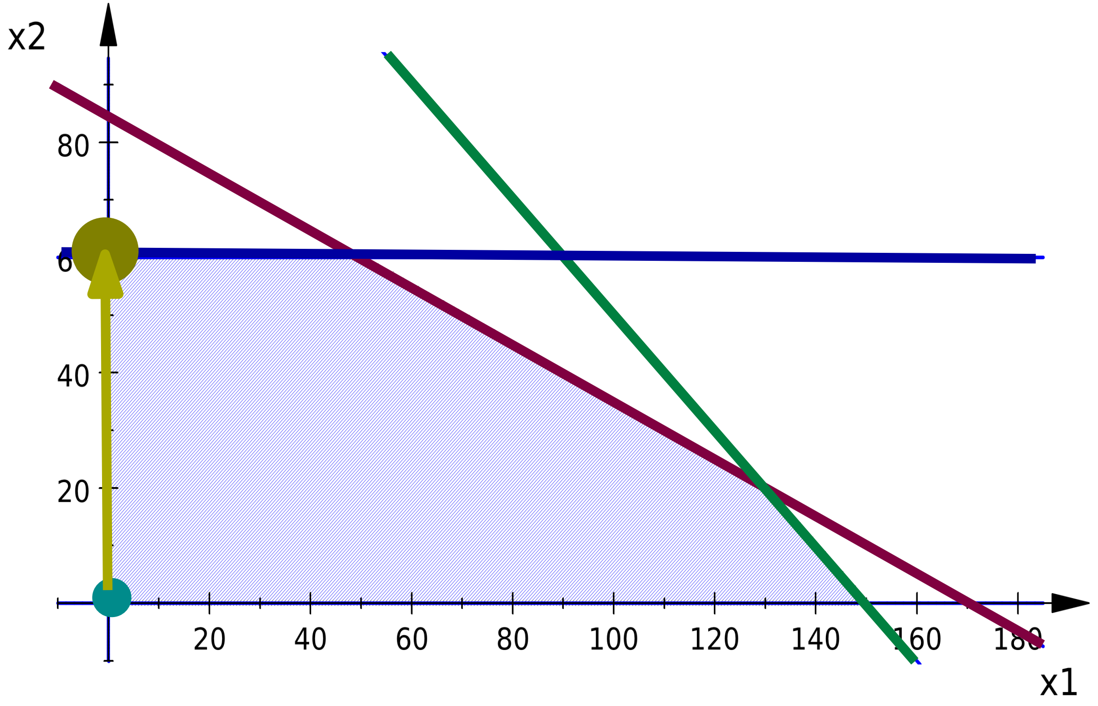
Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

Um Basislösung ('Ecke') zu finden: Mache **Pivotumformung** mit gewähltem **Pivotelement**.

(LP1)

0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Simplextableaus

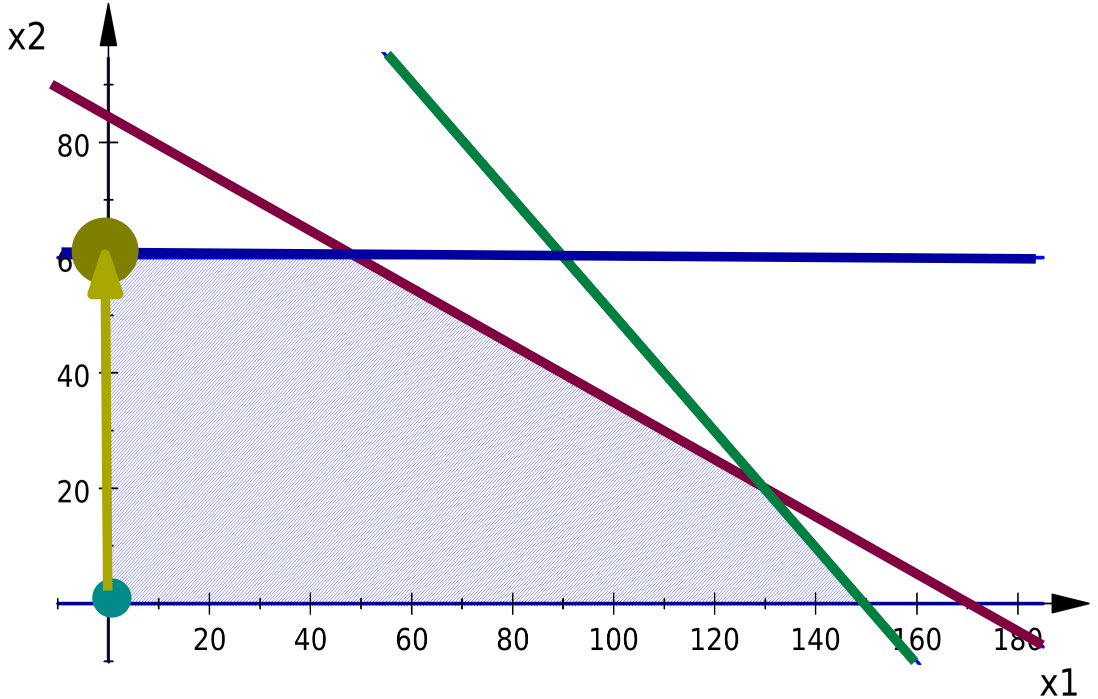
Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

Um Basislösung ('Ecke') zu finden: Mache **Pivotumformung** mit gewähltem **Pivotelement**.

(LP1)

1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Simplextableaus

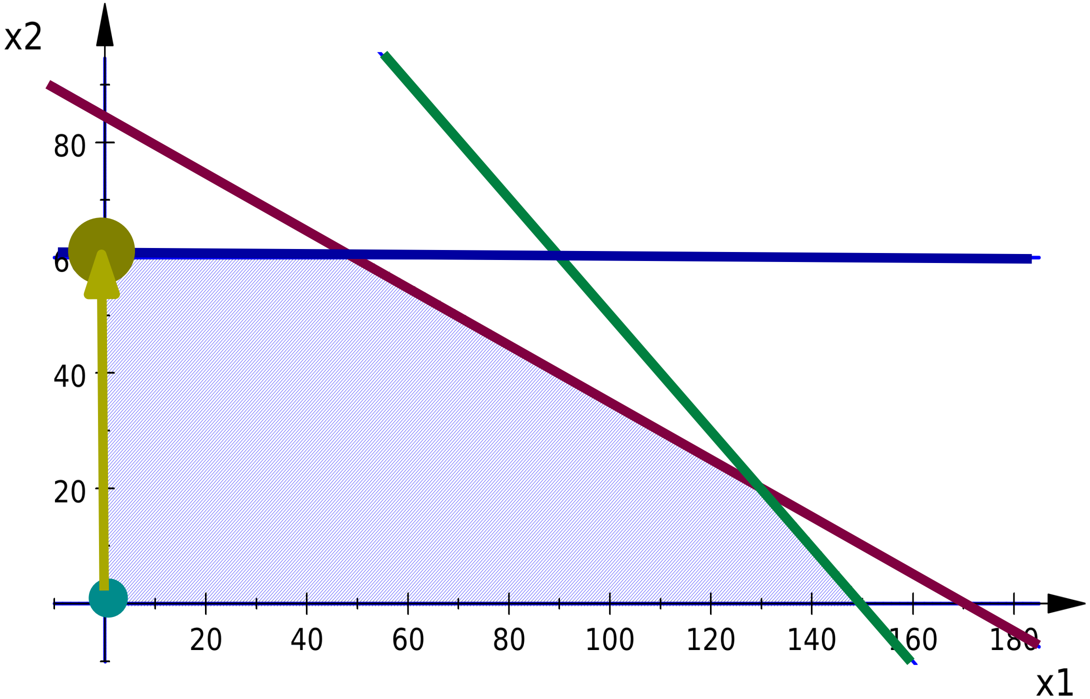
Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

Um Basislösung ('Ecke') zu finden: Mache **Pivotumformung** mit gewähltem **Pivotelement**.

(LP1)

1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Simplextableaus

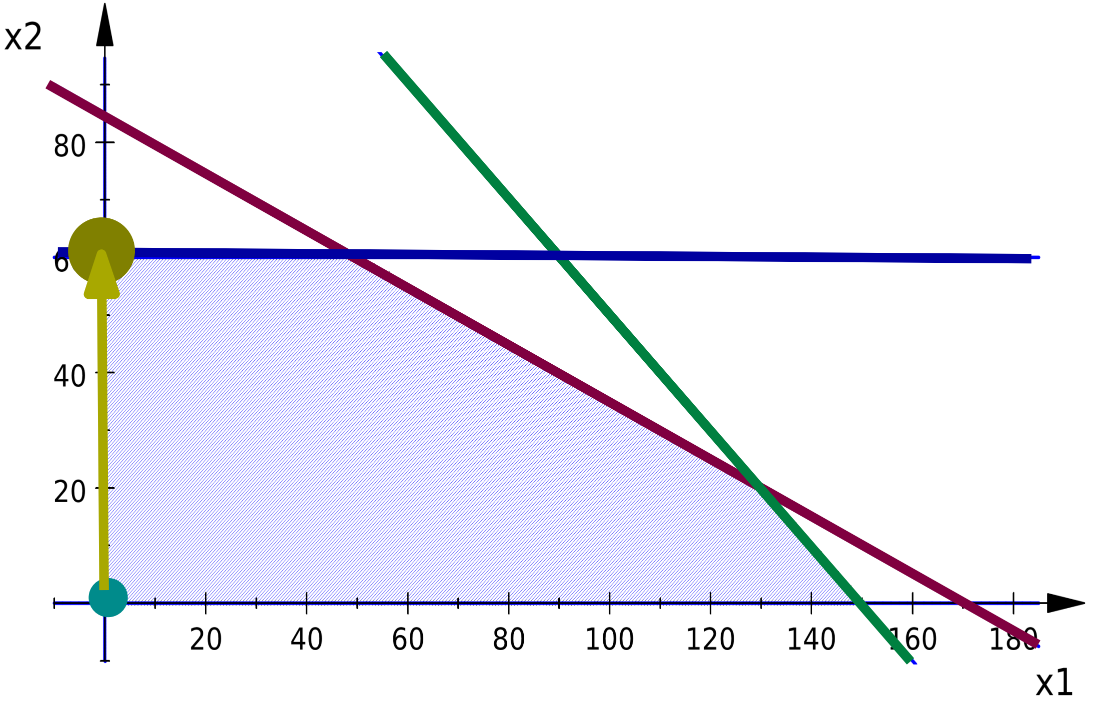
Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

Um Basislösung ('Ecke') zu finden: Mache **Pivotumformung** mit gewähltem **Pivotelement**.

(LP1)

3	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	-300
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Simplextableaus

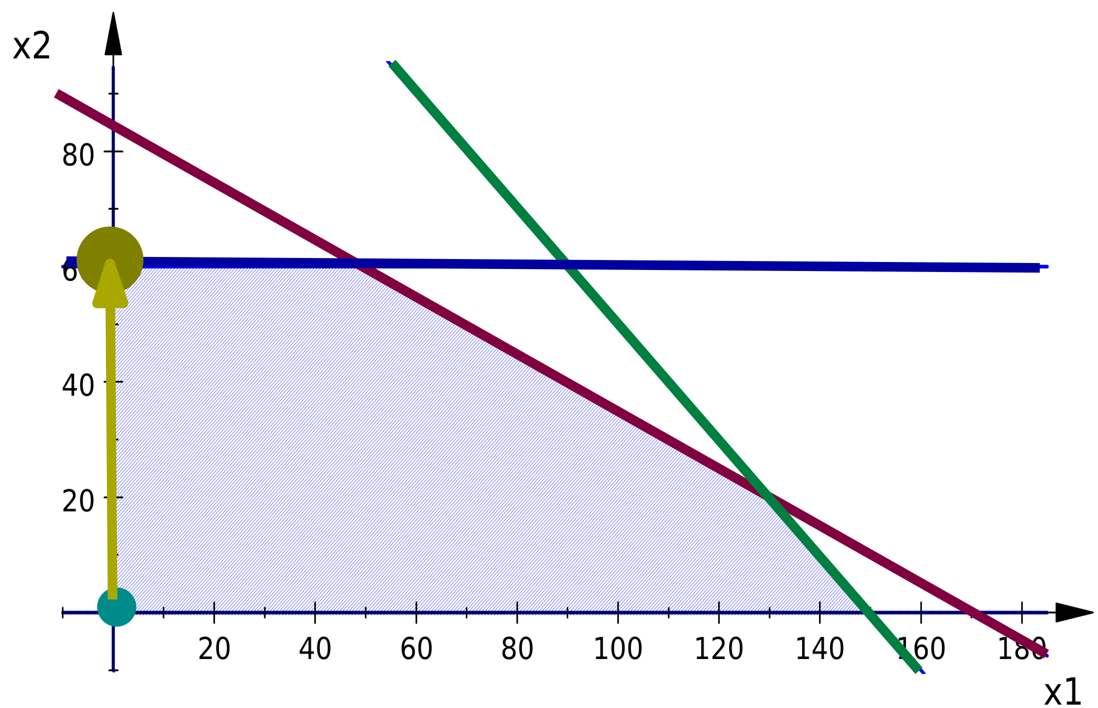
Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

Um Basislösung ('Ecke') zu finden: Mache **Pivotumformung** mit gewähltem **Pivotelement**.

(LP1)

3	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	-300
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Simplextableaus

Starttableau (LP0)

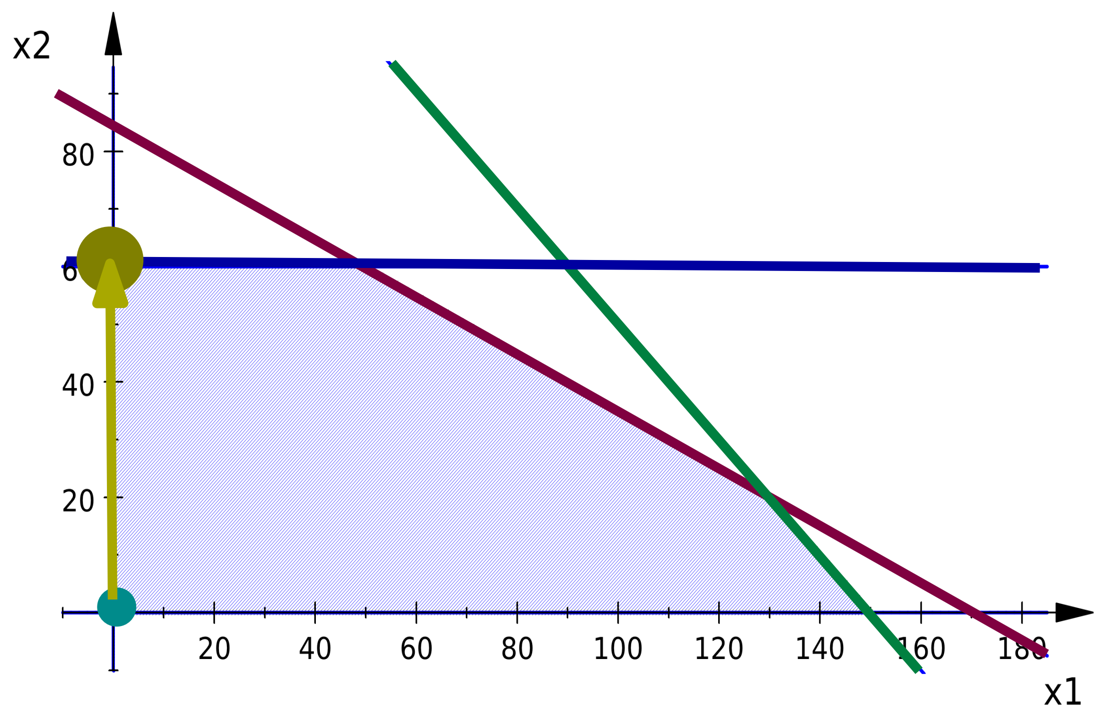
3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

Um Basislösung ('Ecke') zu finden: Mache **Pivotumformung** mit gewähltem **Pivotelement**.

(LP1)

3	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	-300
1	0	$\boxed{1}$	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	$\boxed{1}$	$-\frac{1}{3}$	90
0	$\boxed{1}$	0	0	$\frac{1}{3}$	60

Basis-lsg: x_2 y_1 y_2



Simplextableaus

Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

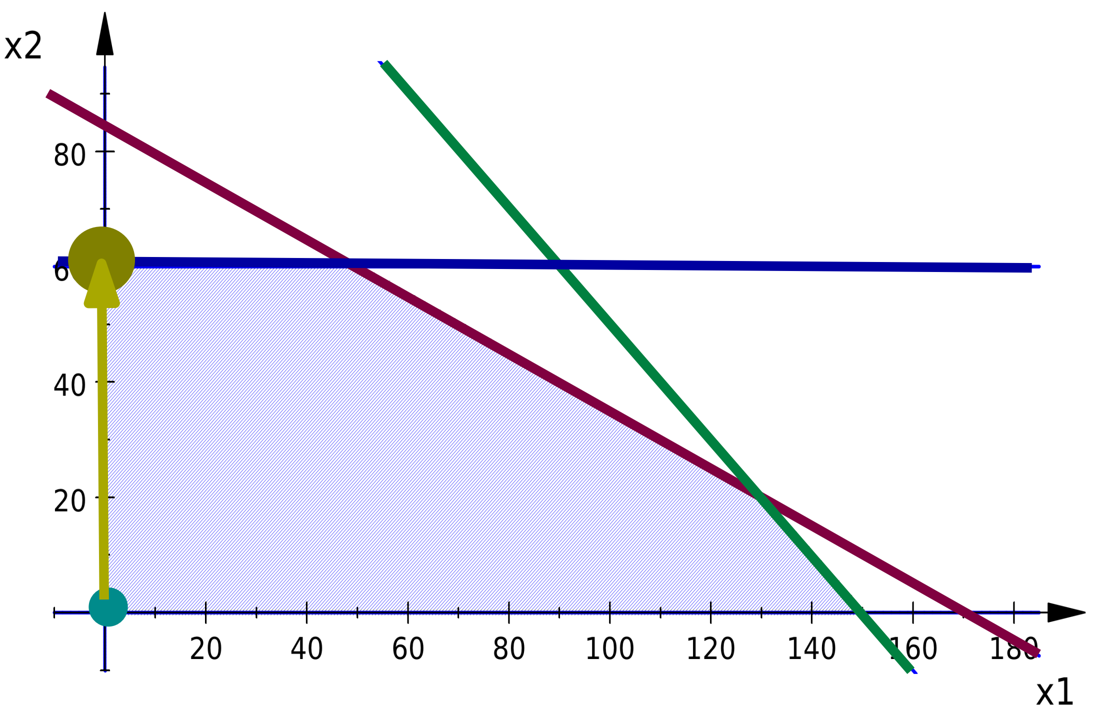
Um Basislösung ('Ecke') zu finden: Mache **Pivotumformung** mit gewähltem **Pivotelement**.

-(Zielfunktionswert der gewählten Basislösung)

(LP1)

3	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	-300
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60

Basis-lsg: x_2 y_1 y_2



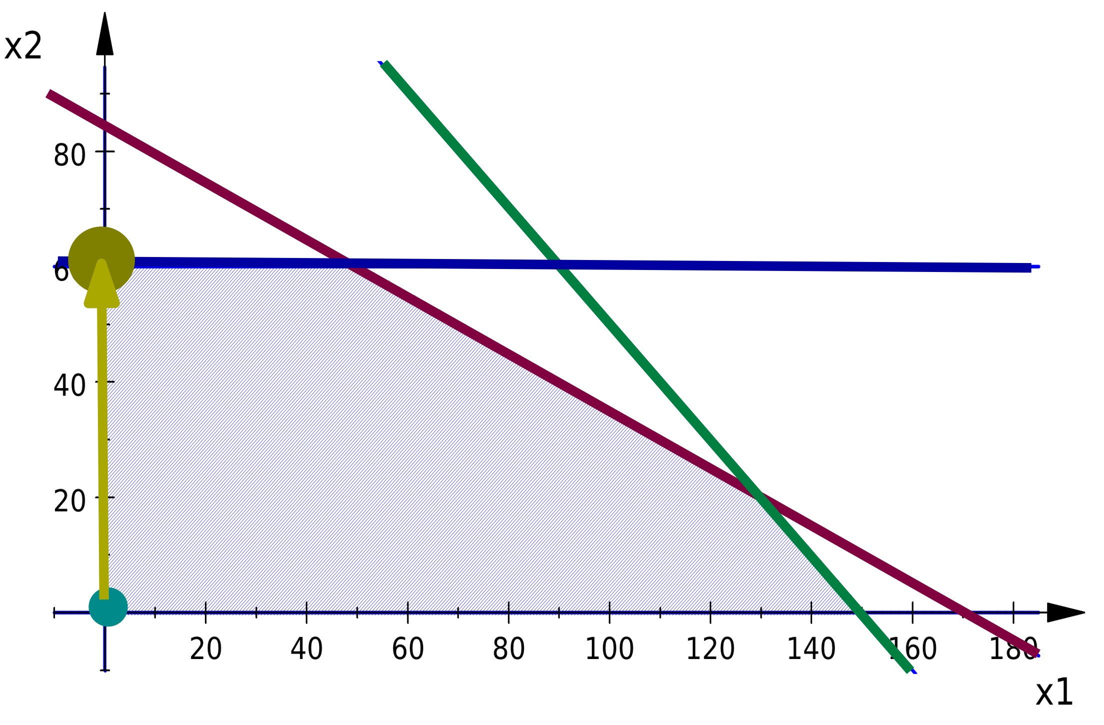
Simplextableaus

Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

(LP1)

3	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	-300
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Simplextableaus

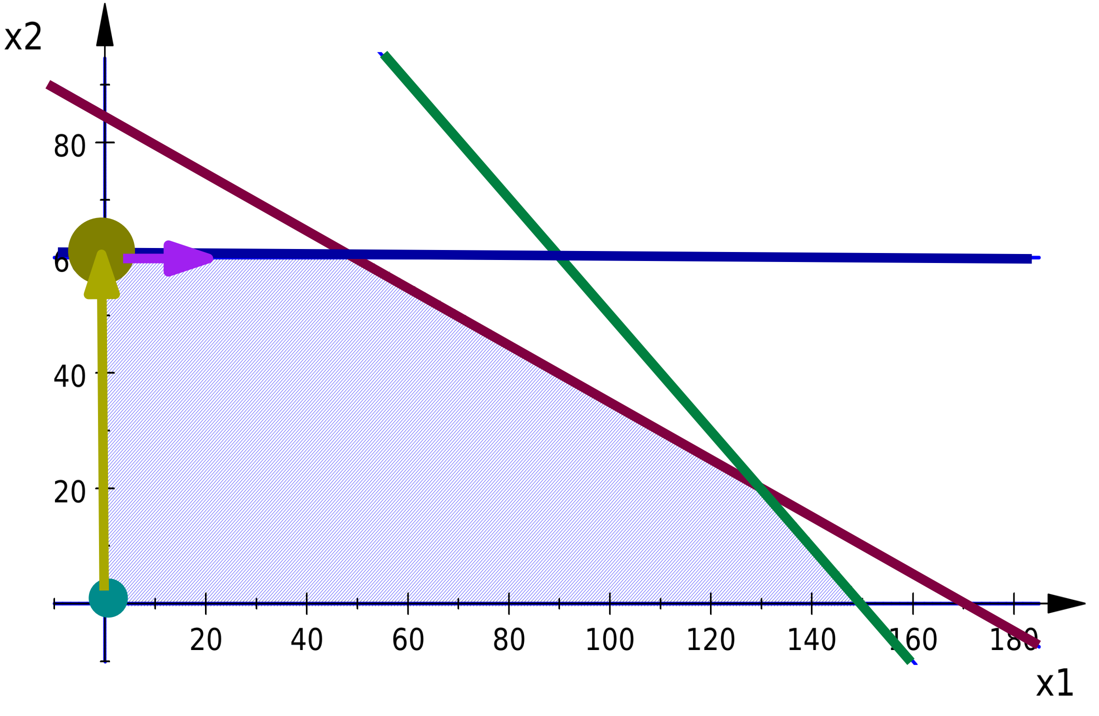
Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

Um zu entscheiden 'in welche Richtung ich gehe': Wähle **Pivotspalte** j mit positiven **reduzierten Kosten** c_j

(LP1)

3	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	-300
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Simplextableaus

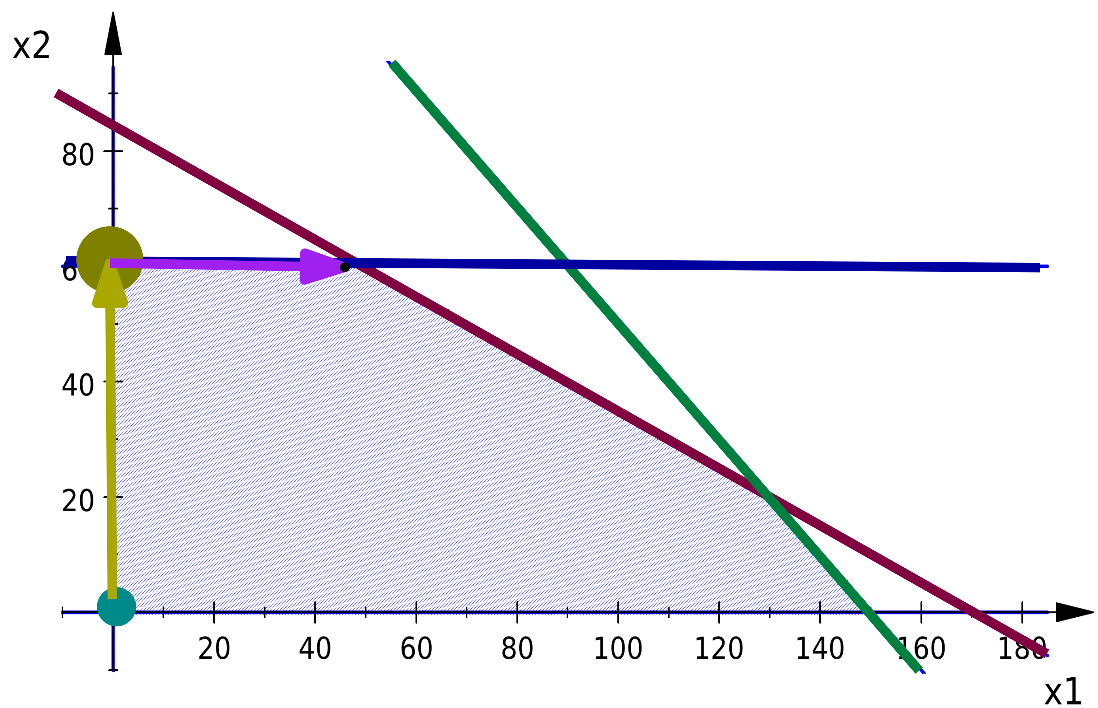
Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

Um zu entscheiden 'wie weit ich gehen darf': Wähle **Pivotzeile** i so dass $\frac{b_i}{a_{ij}}$ minimal

(LP1)

3	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	-300
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Simplextableaus

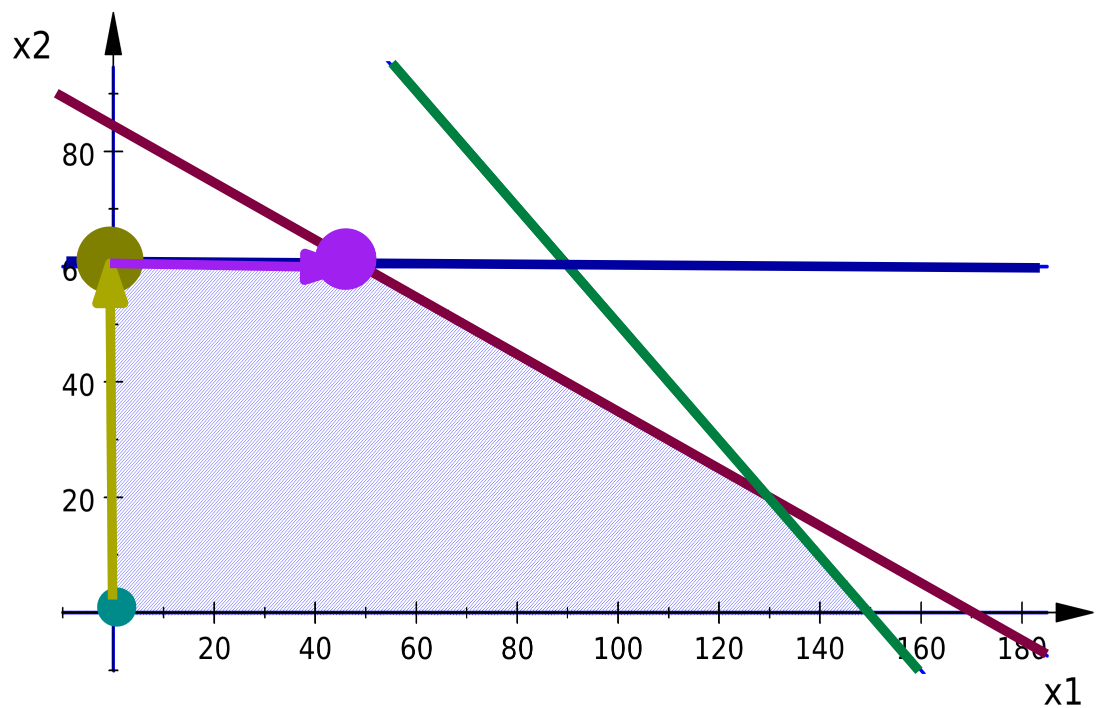
Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

Um Basislösung ('Ecke') zu finden: Mache **Pivotumformung** mit gewähltem **Pivotelement**.

(LP1)

3	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	-300
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Simplextableaus

Starttableau (LP0)

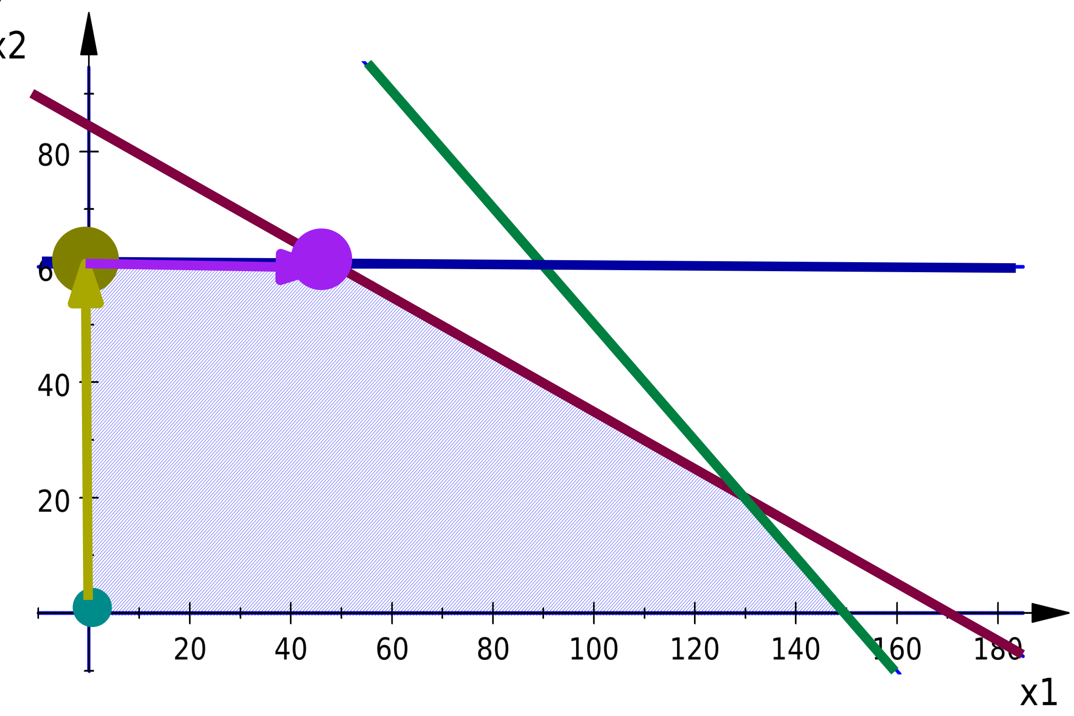
3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

(LP2)

0	0	-3	0	$\frac{1}{3}$	-450
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
0	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	40
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60

(LP1)

3	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	-300
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Simplextableaus

Basislösung
$x_1 = 50$, $y_3 = 40$, $x_2 = 60$ mit
Zielfunktionswert 450.

Starttableau (LP0)

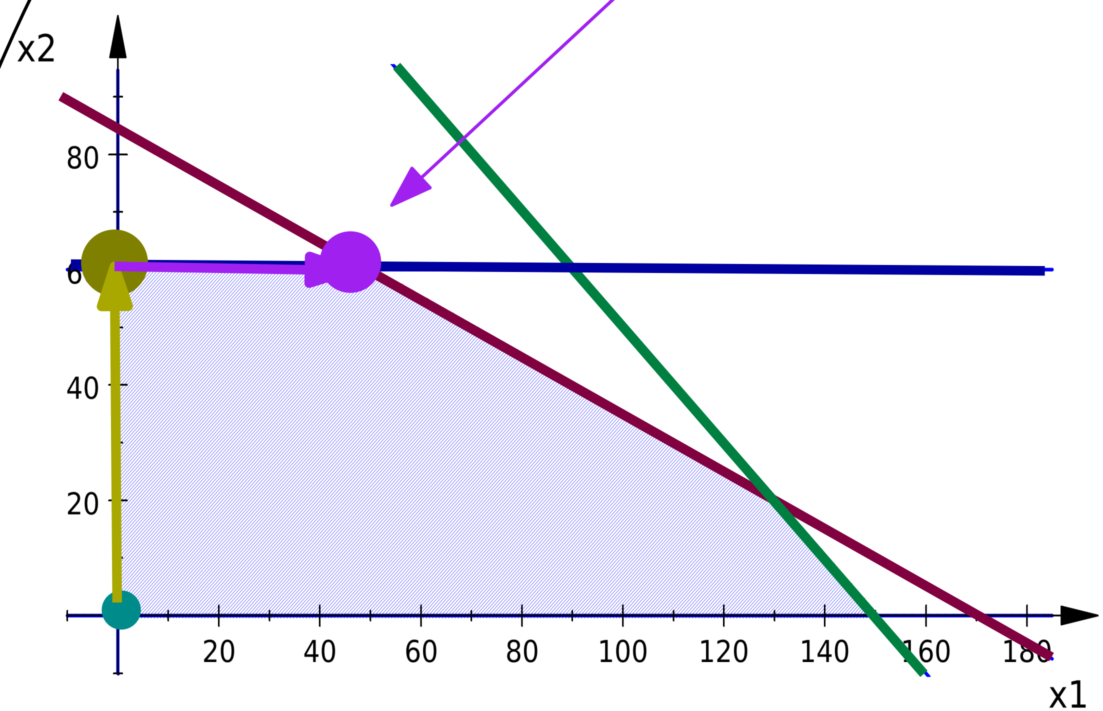
3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

(LP2)

0	0	-3	0	$\frac{1}{3}$	-450
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
0	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	40
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60

(LP1)

3	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	-300
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Simplextableaus

Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

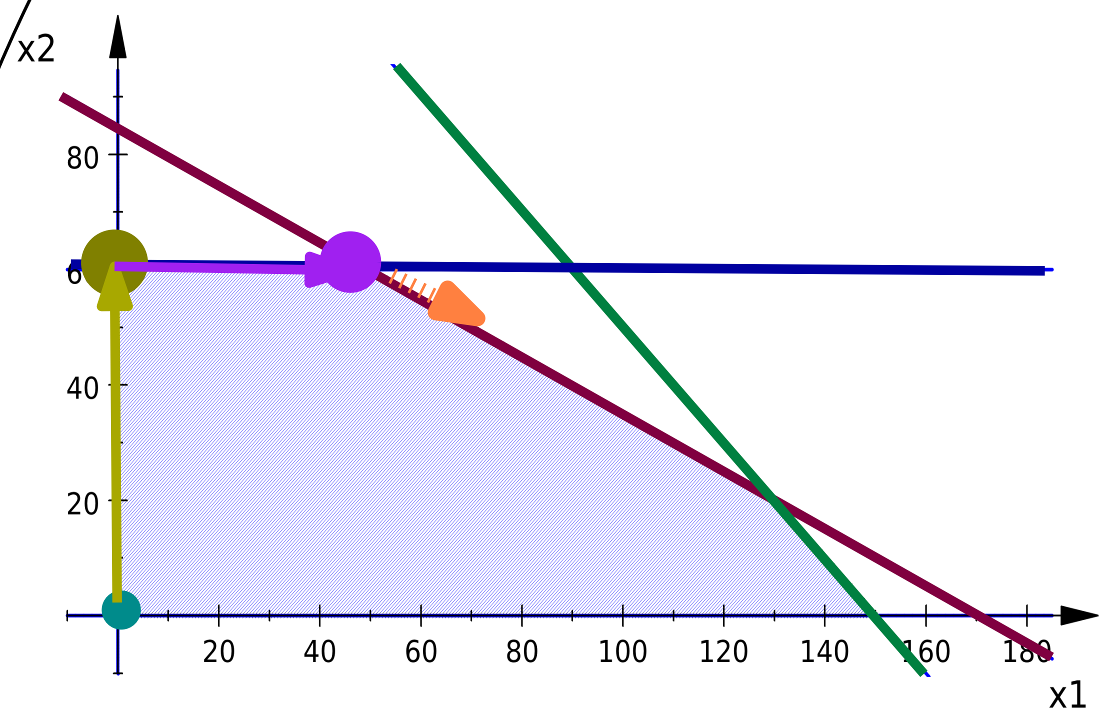
Um zu entscheiden 'in welche Richtung ich gehe': Wähle **Pivotspalte** j mit positiven **reduzierten Kosten** c_j

(LP1)

3	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	-300
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60

(LP2)

0	0	-3	0	$\frac{1}{3}$	-450
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
0	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	40
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Simplextableaus

Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

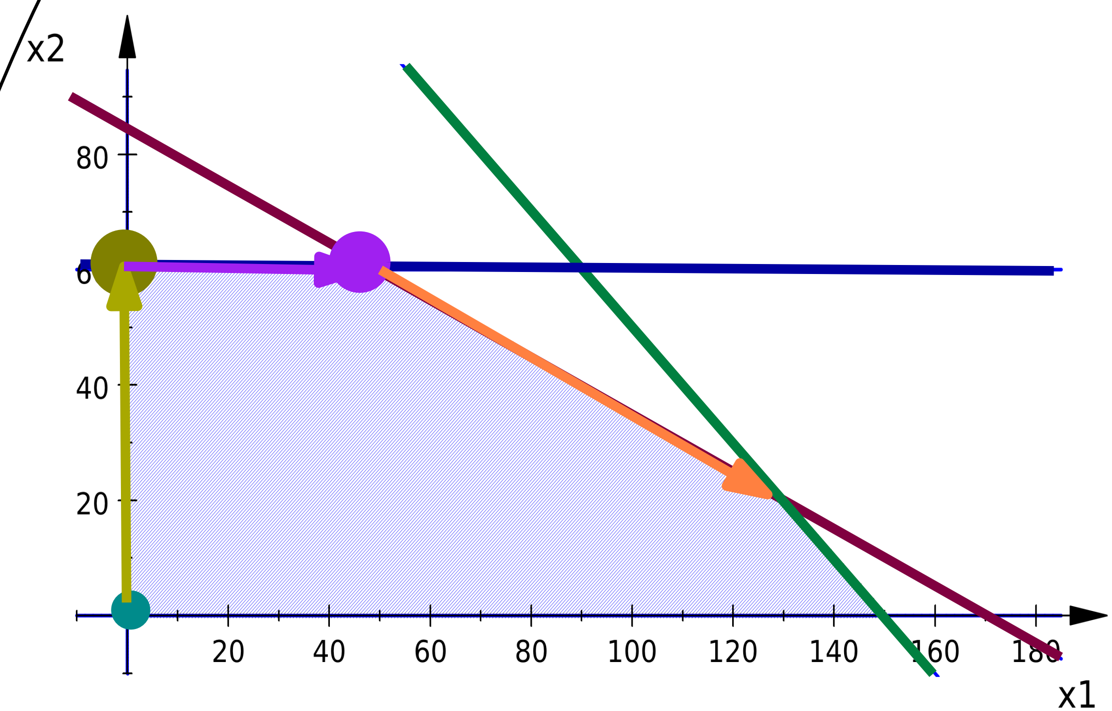
Um zu entscheiden 'wie weit ich gehen darf': Wähle **Pivotzeile** i so dass $\frac{b_i}{a_{ij}}$ minimal

(LP1)

3	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	-300
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60

(LP2)

0	0	-3	0	$\frac{1}{3}$	-450
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
0	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	40
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Simplextableaus

Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

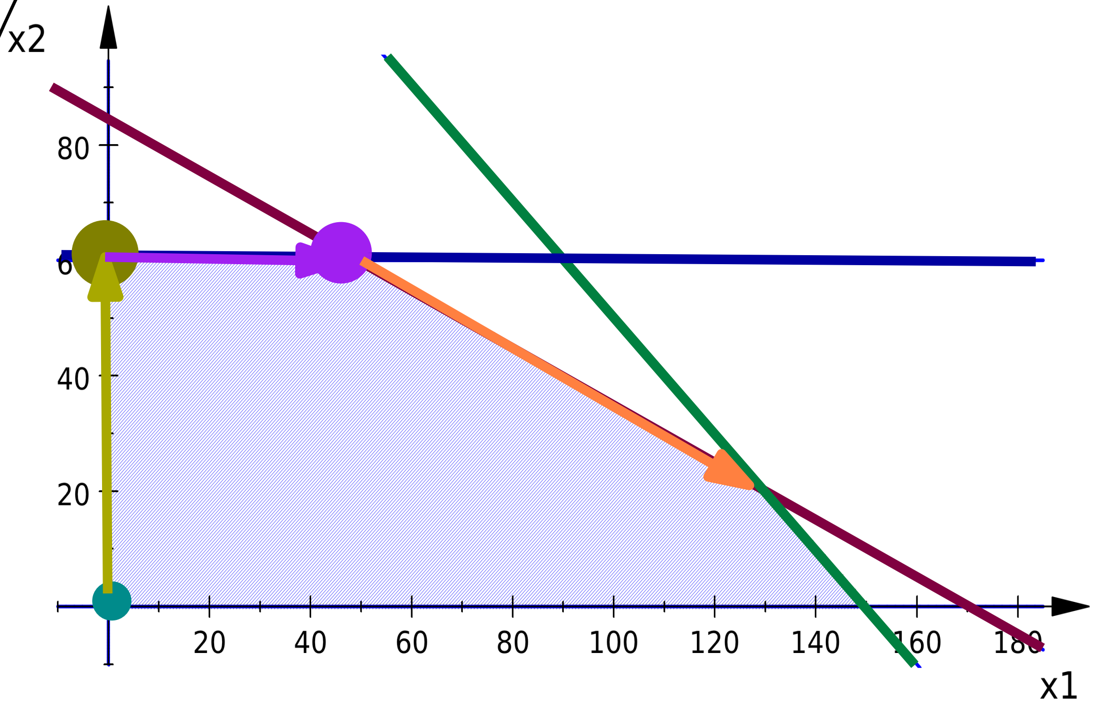
(LP2)

0	0	-3	0	$\frac{1}{3}$	-450
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
0	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	40
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60

Um Basislösung ('Ecke') zu finden: Mache **Pivotumformung** mit gewähltem **Pivotelement**.

(LP1)

3	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	-300
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Simplextableaus

Starttableau (LP0)

3	5	0	0	0	0
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180

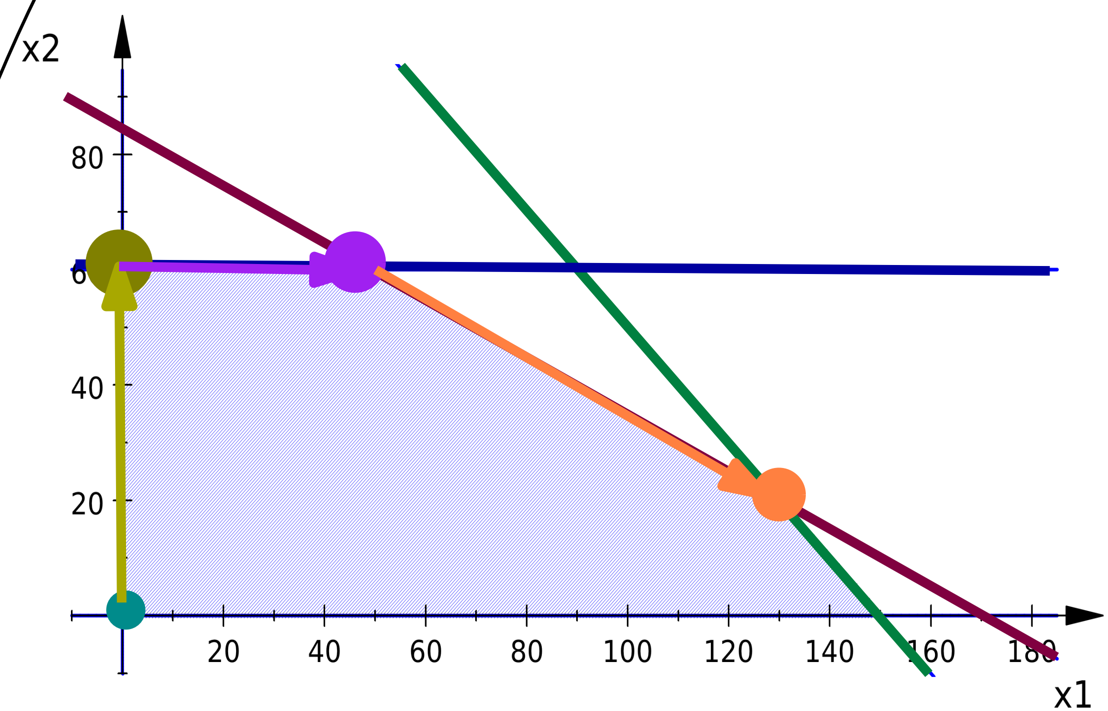
Um Basislösung ('Ecke') zu finden: Mache **Pivotumformung** mit gewähltem **Pivotelement**.

(LP1)

3	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	-300
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60

(LP2)

0	0	-3	0	$\frac{1}{3}$	-450
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
0	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	40
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Simplextableaus

(LP3)

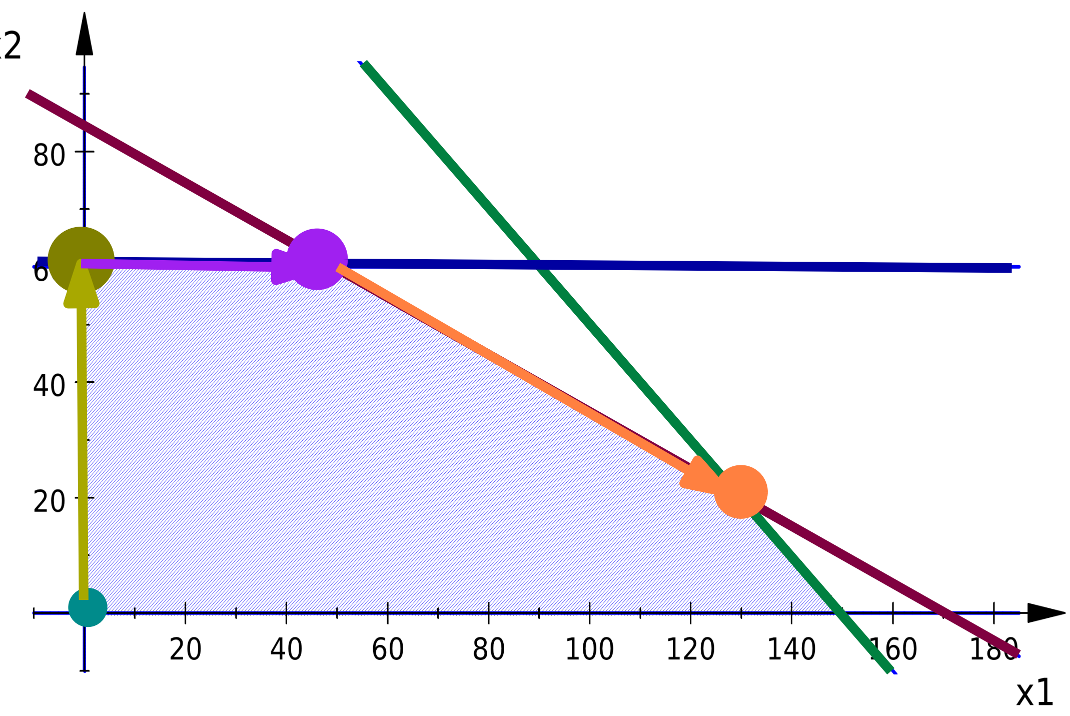
0	0	-2	-1	0	-490
1	0	0	2	0	130
0	0	-3	3	1	120
0	1	1	-1	0	20

(LP2)

0	0	-3	0	$\frac{1}{3}$	-450
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
0	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	40
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60

(LP1)

3	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	-300
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Simplextableaus

(LP3)

0	0	-2	-1	0	-490
1	0	0	2	0	130
0	0	-3	3	1	120
0	1	1	-1	0	20

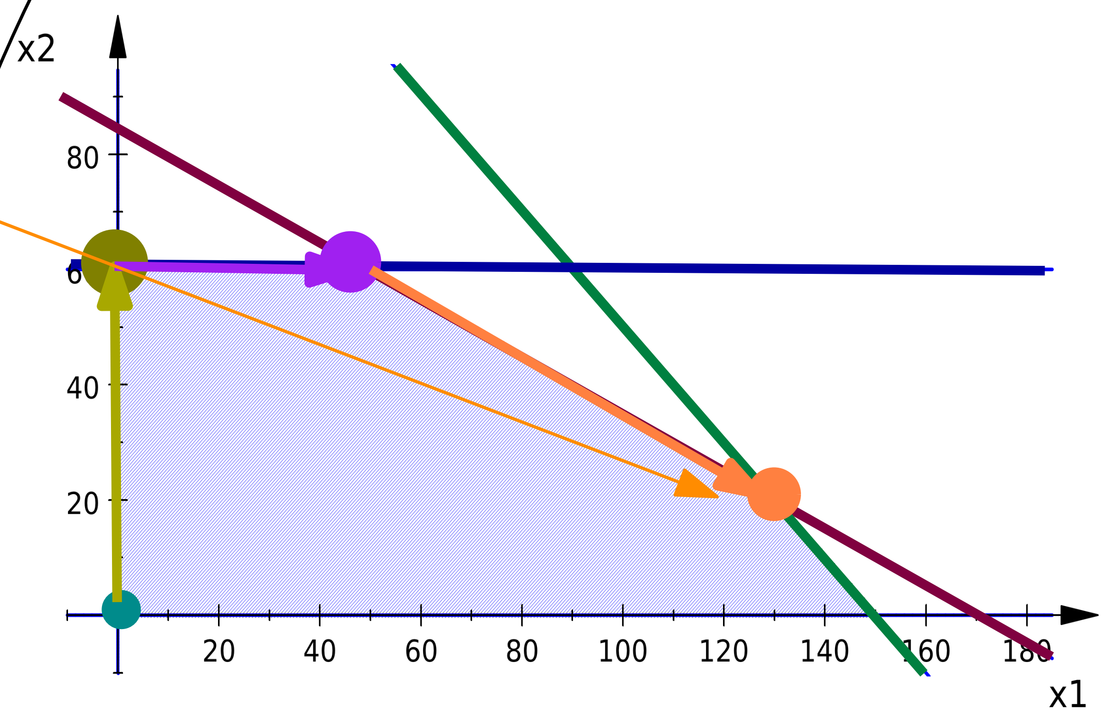
(LP2)

0	0	-3	0	$\frac{1}{3}$	-450
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
0	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	40
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60

Basislösung
$x_1 = 130$, $x_2 = 20$, $y_3 = 120$ mit
Zielfunktionswert 490.

(LP1)

3	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	-300
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Simplextableaus

(LP3)

0	0	-2	-1	0	-490
1	0	0	2	0	130
0	0	-3	3	1	120
0	1	1	-1	0	20

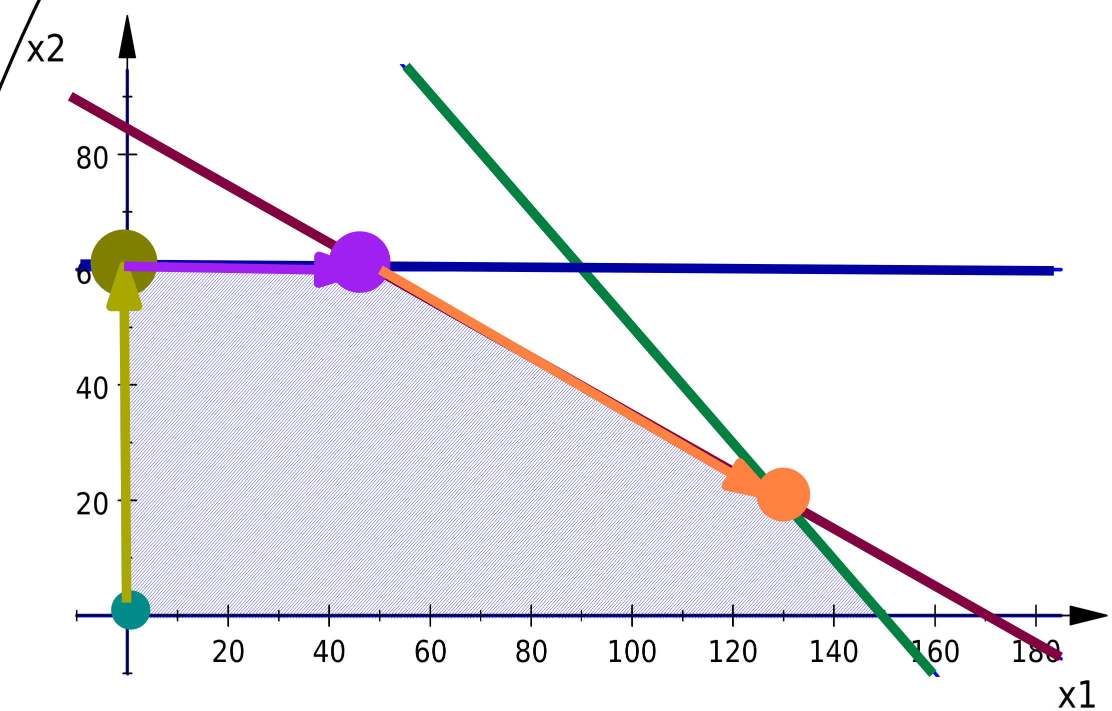
(LP2)

0	0	-3	0	$\frac{1}{3}$	-450
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
0	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	40
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60

Reduzierte Kosten sind alle nicht-positiv: Lösung kann nicht mehr verbessert werden!

(LP1)

3	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	-300
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60



Zusammengefasst: Algorithmus Simplexverfahren

Require: Optimierungsproblem (P) der Form $\max\{x : Ax = b, x \geq 0\}$
Ensure: optimale Basislösung von (P)

  Finde zulässige Basislösung $x^{(0)}$ von (P).
  Setze $i := 0$.
  while keine Optimallösung gefunden wurde **do**
    Überprüfe anhand der Zielfunktion, ob sich $x^{(0)}$ durch Aufnehmen einer der Nicht-Basisvariablen in die Basis erhöhen lässt.
    if Zielfunktion lässt sich nicht verbessern **then**
      return $x^{(i)}$ ist optimale Basislösung
    else if Zielfunktion lässt sich durch Aufnahme von x_j verbessern **then**
      Überprüfe, um wieviel x_j maximal erhöht werden darf, ohne die Nebenbedingungen zu verletzen,
      Erhöhe x_j um diesen Betrag,
      Erstelle $LP^{(i+1)}$ durch Umformen der Nebenbedingungen: löse die beschränkende Nebenbedingungen nach x_j auf setze sie in die restlichen Nebenbedingungen und in die Zielfunktion ein.
      An $LP^{(i+1)}$ lässt sich die aktuelle zulässige Basislösung und der aktuelle Wert der Zielfunktion ablesen.
    end if
  end while

Zusammengefasst: Algorithmus Simplexverfahren

Was, wenn wir eine andere Form haben?

Require: Optimierungsproblem (P) der Form $\boxed{\max\{x : Ax = b, x \geq 0\}}$
Ensure: optimale Basislösung von (P)

Finde zulässige Basislösung $x^{(0)}$ von (P).
Setze $i := 0$.
while keine Optimallösung gefunden wurde **do**
Überprüfe anhand der Zielfunktion, ob sich $x^{(0)}$ durch Aufnehmen einer der Nicht-Basisvariablen in die Basis erhöhen lässt.
if Zielfunktion lässt sich nicht verbessern **then**
return $x^{(i)}$ ist optimale Basislösung
else if Zielfunktion lässt sich durch Aufnahme von x_j verbessern **then**
Überprüfe, um wieviel x_j maximal erhöht werden darf, ohne die Nebenbedingungen zu verletzen,
Erhöhe x_j um diesen Betrag,
Erstelle $LP^{(i+1)}$ durch Umformen der Nebenbedingungen: löse die beschränkende Nebenbedingungen nach x_j auf setze sie in die restlichen Nebenbedingungen und in die Zielfunktion ein.
An $LP^{(i+1)}$ lässt sich die aktuelle zulässige Basislösung und der aktuelle Wert der Zielfunktion ablesen.
end if
end while

Normalform

Ein lineares Programm ist in **Normalform**, wenn es die Form

$$
\begin{array}{rlllll}
\max & c_1x_1 & +c_2x_2 + \dots & +c_nx_n & & \\
\text{so dass} & a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 + \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 & \\
 & a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 + \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 & \\
 & \dots & & & & \\
 & a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 + \dots & +a_{mn}x_n & = b_m & \\
 & x_1, & x_2, \dots & x_n & \geq 0 &
\end{array}
$$

$\boxed{\text{mit } b_i \geq 0 \text{ für alle } i}$

Normalform

Wird auch manchmal als **Standardform** bezeichnet.

Ein lineares Programm ist in **Normalform**, wenn es die Form

$$
\begin{array}{rlllll}
\max & c_1 x_1 & +c_2 x_2 + \dots & +c_n x_n & & \\
\text{so dass} & a_{11} x_1 & +a_{12} x_2 + \dots & +a_{1n} x_n & = b_1 & \\
& a_{21} x_1 & +a_{22} x_2 + \dots & +a_{2n} x_n & = b_2 & \\
& \dots & & & & \\
& a_{m1} x_1 & +a_{m2} x_2 + \dots & +a_{mn} x_n & = b_m & \\
& x_1, & x_2, \dots & x_n & \geq 0 &
\end{array}
$$

mit $b_i \geq 0$ für alle i

Normalform

Ein lineares Programm ist in **Normalform**, wenn es die Form

$$
\begin{array}{rlllll}
\max & c_1x_1 & +c_2x_2 + \dots & +c_nx_n & & \\
\text{so dass} & a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 + \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 & \\
& a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 + \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 & \\
& \dots & & & & \text{mit} \\
& a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 + \dots & +a_{mn}x_n & = b_m & b_i \geq 0 \text{ für alle } i \\
& x_1, & x_2, \dots & x_n & \geq 0 &
\end{array}
$$

Jedes lineare Programm kann in Normalform gebracht werden.

Normalform

Ein lineares Programm ist in **Normalform**, wenn es die Form

$$
\begin{array}{rllll}
\max & c_1x_1 & +c_2x_2+\dots & +c_nx_n & \\
\text{so dass} & a_{11}x_1 & +a_{12}x_2+\dots & +a_{1n}x_n = b_1 & \\
 & a_{21}x_1 & +a_{22}x_2+\dots & +a_{2n}x_n = b_2 & \\
 & \dots & & & \\
 & a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2+\dots & +a_{mn}x_n = b_m & \\
 & x_1, & x_2,\dots & x_n \geq 0 &
\end{array}
$$

mit $b_i \geq 0$ für alle i

Jedes lineare Programm kann in Normalform gebracht werden.

Falls Zielfunktion Minimierungsfunktion...

Normalform

Ein lineares Programm ist in **Normalform**, wenn es die Form

$$
\begin{array}{rllll}
\max & c_1x_1 & +c_2x_2 + \ldots & +c_nx_n & \\
\text{so dass} & a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 + \ldots & +a_{1n}x_n = b_1 & \\
& a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 + \ldots & +a_{2n}x_n = b_2 & \\
& \ldots & & & \\
& a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 + \ldots & +a_{mn}x_n = b_m & \\
& x_1, & x_2, \ldots & x_n \geq 0 &
\end{array}
$$

mit $b_i \geq 0$ für alle i

Jedes lineare Programm kann in Normalform gebracht werden.

Falls Zielfunktion Minimierungsfunktion...

$$\min c^t x \to \max (-c)^t x$$

Normalform

Ein lineares Programm ist in **Normalform**, wenn es die Form

$$
\begin{array}{rllll}
\max & c_1x_1 & +c_2x_2+\dots & +c_nx_n & \\
\text{so dass} & a_{11}x_1 & +a_{12}x_2+\dots & +a_{1n}x_n = b_1 & \\
& a_{21}x_1 & +a_{22}x_2+\dots & +a_{2n}x_n = b_2 & \\
& \dots & & & \\
& a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2+\dots & +a_{mn}x_n = b_m & \\
& x_1, & x_2,\dots & x_n \geq 0 &
\end{array}
$$

mit $b_i \geq 0$ für alle i

Jedes lineare Programm kann in Normalform gebracht werden.

Falls Zielfunktion Minimierungsfunktion...

$$\min c^t x \to \max(-c)^t x$$

Falls $\leq$ oder $\geq$ Nebenbedingung vorliegt:

Normalform

Ein lineares Programm ist in **Normalform**, wenn es die Form

$$
\begin{array}{rllll}
\max & c_1x_1 & +c_2x_2+\dots & +c_nx_n & \\
\text{so dass} & a_{11}x_1 & +a_{12}x_2+\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & a_{21}x_1 & +a_{22}x_2+\dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\
 & \dots & & & \\
 & a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2+\dots & +a_{mn}x_n & = b_m \\
 & x_1, & x_2,\dots & x_n & \geq 0
\end{array}
$$

mit $b_i \geq 0$ für alle i

Jedes lineare Programm kann in Normalform gebracht werden.

Falls Zielfunktion Minimierungsfunktion. . .

$$\min c^t x \to \max(-c)^t x$$

Falls $\leq$ oder $\geq$ Nebenbedingung vorliegt:

Führe Schlupfvariable oder **Überschussvariable** ein

Normalform

Ein lineares Programm ist in **Normalform**, wenn es die Form

$$
\begin{array}{rllll}
\max & c_1x_1 & +c_2x_2 + \dots & +c_nx_n & \\
\text{so dass} & a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 + \dots & +a_{1n}x_n = b_1 & \\
& a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 + \dots & +a_{2n}x_n = b_2 & \\
& \dots & & & \\
& a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 + \dots & +a_{mn}x_n = b_m & \\
& x_1, & x_2, \dots & x_n \geq 0 &
\end{array}
$$

mit $b_i \geq 0$ für alle i

Jedes lineare Programm kann in Normalform gebracht werden.

Falls Zielfunktion Minimierungsfunktion...

$$\min c^t x \to \max(-c)^t x$$

Falls $\leq$ oder $\geq$ Nebenbedingung vorliegt:

Führe Schlupfvariable oder **Überschussvariable** ein

Falls Variable x_i **unbeschränkt** (kann Werte ≥ 0 und ≤ 0 annehmen):

Normalform

Ein lineares Programm ist in **Normalform**, wenn es die Form

$$
\begin{array}{rllll}
\max & c_1x_1 & +c_2x_2+\dots & +c_nx_n & \\
\text{so dass} & a_{11}x_1 & +a_{12}x_2+\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & a_{21}x_1 & +a_{22}x_2+\dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\
 & \dots & & & \\
 & a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2+\dots & +a_{mn}x_n & = b_m \\
 & x_1, & x_2,\dots & x_n & \geq 0
\end{array}
$$

mit $b_i \geq 0$ für alle i

Jedes lineare Programm kann in Normalform gebracht werden.

Falls Zielfunktion Minimierungsfunktion. . .

$$\min c^t x \to \max(-c)^t x$$

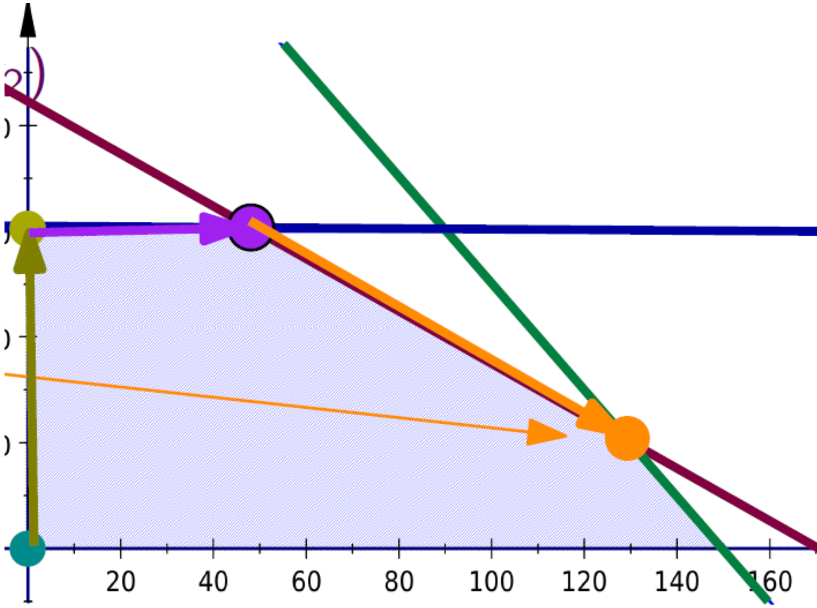
Falls $\leq$ oder $\geq$ Nebenbedingung vorliegt:

Führe Schlupfvariable oder **Überschussvariable** ein

Falls Variable x_i **unbeschränkt** (kann Werte ≥ 0 und ≤ 0 annehmen):

Ersetze x_i (in den Nebenbedingungen) durch $x_i^+ - x_i^-$ mit $x_i^+, x_i^- \leq 0$.

Stichworte heute



Mathematische Programmierung:
lineare Programme, unzulässig, unbeschränkt, Hauptsatz der linearen Optimierung, Normalform, Basislösung, reduzierte Kosten, Niveaumenge/Niveaulinie

Verfahren zum Lösen mathematischer Programme:
Simplexverfahren