Graphen und diskrete Optimierung

im Bachelorstudiengang 'Informatik und Nachhaltigkeit'

Mathematische Programmierung

Marie Schmidt

07.06.2023

Hinweis zu den Übungen

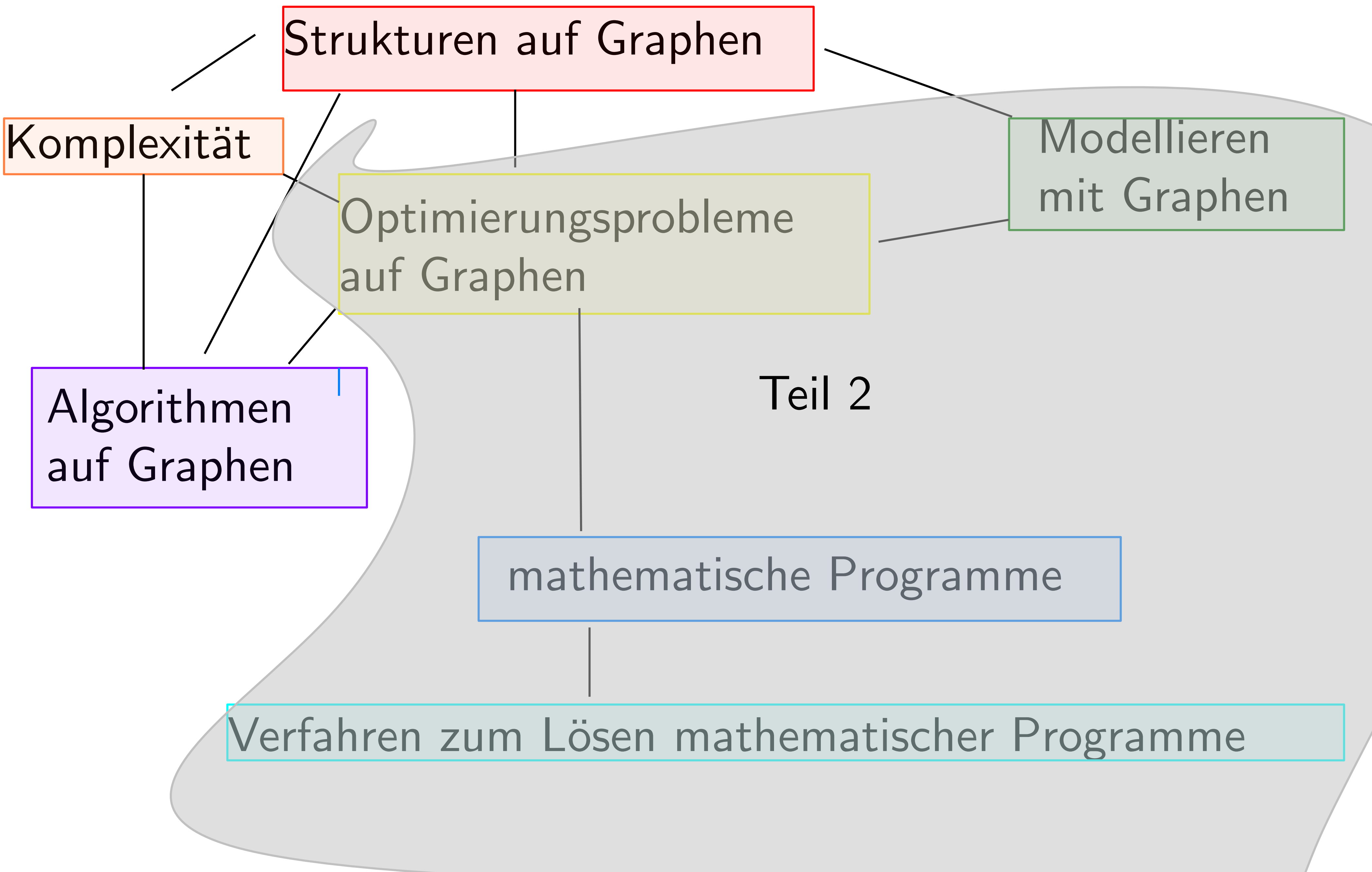
Diese Woche CPLEX-Einführung!

Im CIP-Pool Raum E40 (Rechenzentrum)

Falls Sie Ihren eigenen Rechner nutzen wollen: bitte vor der Übung bitte CPLEX installieren, damit es direkt losgehen kann.

Anleitung Installation kommt heute auf WueCampus. .

Worum soll er hier gehen?



Vorlesungsübersicht

- Einführung: Modellieren auf Graphen ✓
- Teil 1: Graphen und Algorithmen auf Graphen ✓
- Teil 2: Mathematische Programmierung
  - Einführung in die lineare und ganzzahlig lineare Programmierung
    - Was sind lineare / ganzzahlig lineare Programme
    - Modellierung als lineares / ganzzahlig lineares Programm
    - Graphische Lösungsmethode für lineare Programme mit zwei Variablen
  - lineare Programmierung
  - ganzzahlige Programmierung

Routenplanung für den Schulbus

nach der Idee von Lukas Wages vom Ü6

Idee: Bestimme die 'optimale' Route für den Schulbus/die Schulbusse

Was müssen wir beachten?

Routenplanung für den Schulbus
nach der Idee von Lukas Wages vom Ü6

Idee: Bestimme die 'optimale' Route für den Schulbus/die Schulbusse

Was müssen wir beachten?

Woran erinnert Sie das Problem?

Routenplanung für den Schulbus

nach der Idee von Lukas Wages vom Ü6

Idee: Bestimme die 'optimale' Route für den Schulbus/die Schulbusse

Was müssen wir beachten?

Woran erinnert Sie das Problem?

Was ist anders?

Optimierungsproblem - Zutaten

- Gegeben:. . . (Probleminstanz)

- Gesucht: . . . (zulässiger Bereich, Zielfunktion, 'max' oder 'min')

Mathematische Programmierung

ist eine Methode, um Optimierungsprobleme zu lösen

Mathematische Programmierung

('Informatisches') Programm

zum Lösen von Optimierungsproblem oder allgemein

Schrittweise Anleitung (Algorithmus)

Mathematische Programmierung

('Informatisches') Programm

zum Lösen von Optimierungsproblem oder allgemein

Schrittweise Anleitung (Algorithmus)

Mathematisches Programm

zum Lösen von Optimierungsproblem

Lösungs*menge*

Mathematische Programmierung

('Informatisches') Programm

zum Lösen von Optimierungsproblem oder allgemein

Schrittweise Anleitung (Algorithmus)

aufgeschrieben in standard. Form
- auf Papier: Pseudocode
- für Computer: in Progr.sprache (Java, Python, etc)

Mathematisches Programm

zum Lösen von Optimierungsproblem

Lösungs*menge*

aufgeschrieben in standard. Form
- auf Papier
- für Computer (z.B. OPL oder Anbindung an Programmiersprache)

Mathematische Programmierung

('Informatisches') Programm

zum Lösen von Optimierungsproblem oder allgemein

Schrittweise Anleitung (Algorithmus)

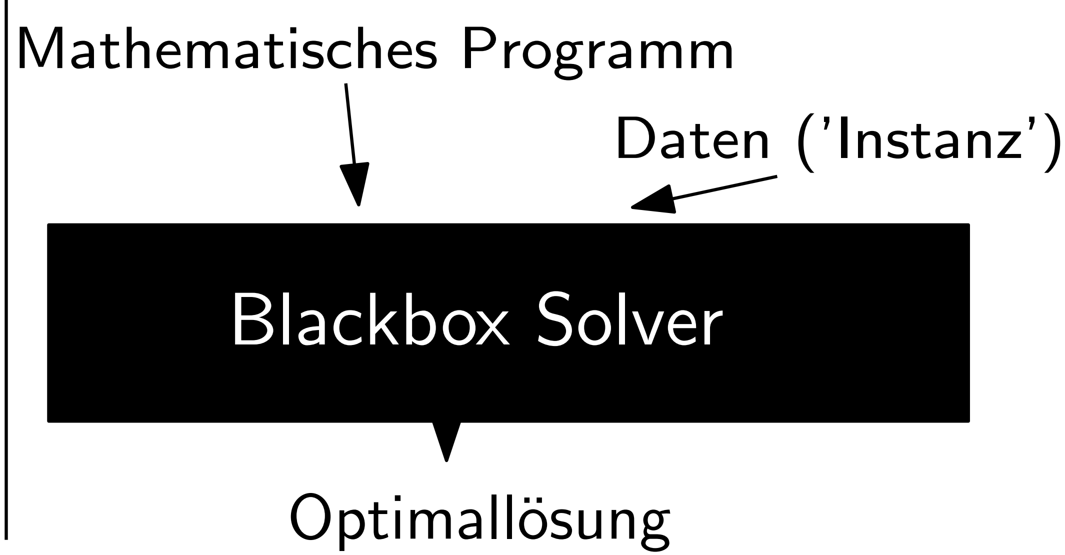
aufgeschrieben in standard. Form
- auf Papier: Pseudocode
- für Computer: in Progr.sprache (Java, Python, etc)

Mathematisches Programm

zum Lösen von Optimierungsproblem

Lösungs*menge*

aufgeschrieben in standard. Form
- auf Papier
- für Computer (z.B. OPL oder Anbindung an Programmiersprache)



Mathematische Programmierung

('Informatisches') Programm

zum Lösen von Optimierungsproblem oder allgemein

Schrittweise Anleitung (Algorithmus)

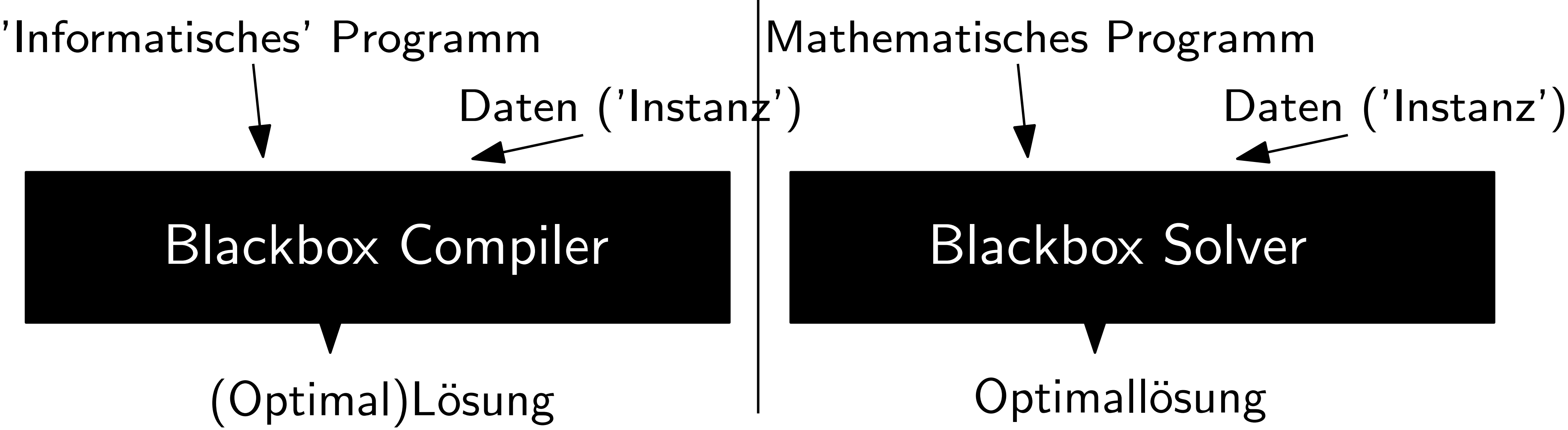
aufgeschrieben in standard. Form
- auf Papier: Pseudocode
- für Computer: in Progr.sprache (Java, Python, etc)

Mathematisches Programm

zum Lösen von Optimierungsproblem

Lösungs*menge*

aufgeschrieben in standard. Form
- auf Papier
- für Computer (z.B. OPL oder Anbindung an Programmiersprache)



Mathematische Programmierung

('Informatisches') Programm

zum Lösen von Optimierungsproblem oder allgemein

Schrittweise Anleitung (Algorithmus)

aufgeschrieben in standard. Form
- auf Papier: Pseudocode
- für Computer: in Progr.sprache (Java, Python, etc)

Mathematisches Programm

zum Lösen von Optimierungsproblem

Lösungs*menge*

heute in der VL: Modellieren

aufgeschrieben in standard. Form
- auf Papier
- für Computer (z.B. OPL oder Anbindung an Programmiersprache)

'Informatisches' Programm

Daten ('Instanz')

Blackbox Compiler

(Optimal)Lösung

Mathematisches Programm

Daten ('Instanz')

Blackbox Solver

Optimallösung

Mathematische Programmierung

('Informatisches') Programm

zum Lösen von Optimierungsproblem oder allgemein

Schrittweise Anleitung (Algorithmus)

aufgeschrieben in standard. Form
- auf Papier: Pseudocode
- für Computer: in Progr.sprache (Java, Python, etc)

Mathematisches Programm

zum Lösen von Optimierungsproblem

Lösungs*menge*

aufgeschrieben in standard. Form
- auf Papier
- für Computer (z.B. OPL oder Anbindung an Programmiersprache)

In der Übung

'Informatisches' Programm

Daten ('Instanz')

Blackbox Compiler

(Optimal)Lösung

Mathematisches Programm

Daten ('Instanz')

Blackbox Solver

Optimallösung

Mathematische Programmierung

('Informatisches') Programm

zum Lösen von Optimierungsproblem oder allgemein

Schrittweise Anleitung (Algorithmus)

aufgeschrieben in standard. Form
- auf Papier: Pseudocode
- für Computer: in Progr.sprache (Java, Python, etc)

Mathematisches Programm

zum Lösen von Optimierungsproblem

Lösungs*menge*

aufgeschrieben in standard. Form
- auf Papier
- für Computer (z.B. OPL oder Anbindung an Programmiersprache)

Kommende Wochen: wie löst man Optimierungsprobleme?

'Informatisches' Programm

Daten ('Instanz')

Blackbox Compiler

(Optimal)Lösung

Mathematisches Programm

Daten ('Instanz')

~~Blackbox~~ Solver

Optimallösung

Optimierungsproblem - Zutaten

- Gegeben:... (Probleminstanz)

- Gesucht: ... (zulässiger Bereich, Zielfunktion, 'max' oder 'min')

In der Modellierung als **mathematisches Programm**:

Optimierungsproblem - Zutaten

- Gegeben:. . . (Probleminstanz)

- Gesucht: . . . (zulässiger Bereich, Zielfunktion, 'max' oder 'min')

In der Modellierung als **mathematisches Programm**:

beschrieben durch:
- **Variablen**: modellieren die Entscheidungen
- **Nebenbedingungen**: Gleichungen oder Ungleichungen, die die Variablen erfüllen müssen

Optimierungsproblem - Zutaten

- Gegeben:. . . (Probleminstanz)

- Gesucht: . . . (zulässiger Bereich, Zielfunktion, 'max' oder 'min')

In der Modellierung als **mathematisches Programm**:

beschrieben durch:
- **Variablen**: modellieren die Entscheidungen
- **Nebenbedingungen**: Gleichungen oder Ungleichungen, die die Variablen erfüllen müssen

wird auch in den Variablen ausgedrückt

Produktionsplanung: Ein erstes einfaches Beispiel

Eine Firma stellt zwei Produkte P1 und P2 her. Der Verkaufserlös von P1 beträgt 3 Euro, der von P2 beträgt 5 Euro. Wir gehen davon aus, dass alle produzierten Einheiten auch verkauft werden können.
Zur Herstellung der Produkte sind drei Maschinen A, B, C nötig. Die Bearbeitungszeiten der Produkte auf den drei Maschinen und die Kapazität der Maschinen sind wie folgt angegeben:

	Zeit für P1	Zeit für P2	Kapazität der Maschine
Maschine A	1	2	170
Maschine B	1	1	150
Maschine C	-	3	180

Frage: Wie viel soll die Firma von welchem Produkt produzieren, um ihren Gewinn zu maximieren?

Produktionsplanung: Ein erstes einfaches Beispiel

Eine Firma stellt zwei Produkte P1 und P2 her. Der Verkaufserlös von P1 beträgt 3 Euro, der von P2 beträgt 5 Euro. Wir gehen davon aus, dass alle produzierten Einheiten auch verkauft werden können.
Zur Herstellung der Produkte sind drei Maschinen A, B, C nötig. Die Bearbeitungszeiten der Produkte auf den drei Maschinen und die Kapazität der Maschinen sind wie folgt angegeben:

	Zeit für P1	Zeit für P2	Kapazität der Maschine
Maschine A	1	2	170
Maschine B	1	1	150
Maschine C	-	3	180

Frage: Wie viel soll die Firma von welchem Produkt produzieren, um ihren Gewinn zu maximieren?

- zulässiger Bereich?
- Zielfunktion?

- Variablen?
- Nebenbedingungen?
- Zielfunktion in Variablen ausgedrückt?

Produktionsplanung: Ein erstes einfaches Beispiel

Eine Firma stellt zwei Produkte P1 und P2 her. Der Verkaufserlös von P1 beträgt 3 Euro, der von P2 beträgt 5 Euro. Wir gehen davon aus, dass alle produzierten Einheiten auch verkauft werden können.
Zur Herstellung der Produkte sind drei Maschinen A, B, C nötig. Die Bearbeitungszeiten der Produkte auf den drei Maschinen und die Kapazität der Maschinen sind wie folgt angegeben:

	Zeit für P1	Zeit für P2	Kapazität der Maschine
Maschine A	1	2	170
Maschine B	1	1	150
Maschine C	-	3	180

Frage: Wie viel soll die Firma von welchem Produkt produzieren, um ihren Gewinn zu maximieren?

Mathematisches Programm

x_1: Anzahl Produkte P1
x_2: Anzahl Produkte P2

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 + 5x_2 & \\
\text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 & \leq 170 \\
& x_1 + x_2 & \leq 150 \\
& 3x_2 & \leq 180 \\
& x_1, x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

Produktionsplanung: Ein erstes einfaches Beispiel

Eine Firma stellt zwei Produkte P1 und P2 her. Der Verkaufserlös von P1 beträgt 3 Euro, der von P2 beträgt 5 Euro. Wir gehen davon aus, dass alle produzierten Einheiten auch verkauft werden können.

Zur Her

Bearbeit

Kapazit

Masch
Masch
Masch

Frage: W

ihren Gewinn zu maximieren?

Das beschreibt eine Menge!?

Mathematisches Programm

x_1: Anzahl Produkte P1

x_2: Anzahl Produkte P2

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 + 5x_2 & \\
\text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 & \leq 170 \\
& x_1 + x_2 & \leq 150 \\
& 3x_2 & \leq 180 \\
& x_1, x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

Produktionsplanung: Ein erstes einfaches Beispiel

Eine Firma stellt zwei Produkte P1 und P2 her. Der Verkaufserlös von P1 beträgt 3 Euro, der von P2 beträgt 5 Euro. Wir gehen davon aus, dass alle produzierten Einheiten auch verkauft werden können.

Zur Her

Bearbeit

Kapazit

Masch
Masch
Masch

Frage: W

ihren Gewinn zu maximieren?

Das beschreibt eine Menge!?

zulässiger Bereich

$X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + 2x_2 \leq 170, x_1 + x_2 \leq 150, 3x_2 \leq 180\}$

Mathematisches Programm

x_1: Anzahl Produkte P1

x_2: Anzahl Produkte P2

$$\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 && \leq 170 \\
& x_1 + x_2 && \leq 150 \\
& 3x_2 && \leq 180 \\
& x_1, x_2 && \geq 0
\end{aligned}$$

Produktionsplanung: Ein erstes einfaches Beispiel

Eine Firma stellt zwei Produkte P1 und P2 her. Der Verkaufserlös von P1 beträgt 3 Euro, der von P2 beträgt 5 Euro. Wir gehen davon aus, dass alle produzierten Einheiten auch verkauft werden können.

Zur Her

Bearbeit

Kapazit

Masch
Masch
Masch

Frage: W

ihren Gewinn zu maximieren?

Das beschreibt eine Menge!?

zulässiger Bereich

$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + 2x_2 \leq 170, x_1 + x_2 \leq 150, 3x_2 \leq 180\}$

Menge der Optimallösungen:

$Z := \operatorname{argmax}_X(3x_1 + 5x_2)$

$= \{(x, y) \in X : 3x_1 + 5x_2 \geq 3x_1' + 5x_2' \forall (x_1', x_2') \in X\}$

Mathematisches Programm

x_1: Anzahl Produkte P1

x_2: Anzahl Produkte P2

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 && \leq 170 \\
& x_1 + x_2 && \leq 150 \\
& 3x_2 && \leq 180 \\
& x_1, x_2 && \geq 0
\end{aligned}
$$

Lineare Programme

Wir nennen ein mathematisches Programm **linear**, wenn

- die Zielfunktion **(affin) linear** in den Variablen ist
  z.B. $5x_1 - 17x_2 + 9x_3 + 78$
- der zulässige Bereich ein **Polyeder** ist

Lineare Programme

soll heißen: Formulierung eines Opt.problems mit Hilfe von Variablen, Nebenbed.& Zielfkt

Wir nennen ein mathematisches Programm **linear**, wenn

- die Zielfunktion **(affin) linear** in den Variablen ist
  z.B. $5x_1 - 17x_2 + 9x_3 + 78$
- der zulässige Bereich ein **Polyeder** ist

Lineare Programme

soll heißen: Formulierung eines Opt.problems mit Hilfe von Variablen, Nebenbed.& Zielfkt

Wir nennen ein mathematisches Programm **linear**, wenn

- die Zielfunktion **(affin) linear** in den Variablen ist
  z.B. $5x_1 - 17x_2 + 9x_3 + 78$
- der zulässige Bereich ein **Polyeder** ist

Den zulässigen Bereich kann man dann durch eine Menge von **linearen Nebenbedingungen**, d.h.

- linearen **Gleichungen**, z.B. $4x_1 + 7x_2 - 56x_3 = 100$
- und/oder linearen **Ungleichungen**, z.B. $x_2 + 4x_3 \leq 10$ oder $6x_1 - x_3 \geq 0$

beschreiben

Lineare Programme

soll heißen: Formulierung eines Opt.problems mit Hilfe von Variablen, Nebenbed.& Zielfkt

Wir nennen ein mathematisches Programm **linear**, wenn

- die Zielfunktion **(affin) linear** in den Variablen ist
  z.B. $5x_1 - 17x_2 + 9x_3 + 78$
- der zulässige Bereich ein **Polyeder** ist

Den zulässigen Bereich kann man dann durch eine Menge von **linearen Nebenbedingungen**, d.h.

- linearen **Gleichungen**, z.B. $4x_1 + 7x_2 - 56x_3 = 100$
- und/oder linearen **Ungleichungen**, z.B. $x_2 + 4x_3 \leq 10$ oder $6x_1 - x_3 \geq 0$

beschreiben

Das lineare Programm schreiben wir dann normalerweise so auf:

$$\begin{aligned}
&\min\ 5x_1 - 17x_2 + 9x_3 + 78 \\
\text{so dass}\ &4x_1 + 7x_2 - 56x_3 &&= 100 \\
&x_2 + 4x_3 &&\leq 10 \\
&6x_1 - x_3 &&\geq 0
\end{aligned}$$

Lineare Programme

soll heißen: Formulierung eines Opt.problems mit Hilfe von Variablen, Nebenbed.& Zielfkt

Wir nennen ein mathematisches Programm **linear**, wenn

- die Zielfunktion **(affin) linear** in den Variablen ist
  z.B. $5x_1 - 17x_2 + 9x_3 + 78$
- der zulässige Bereich ein **Polyeder** ist

Den zulässigen Bereich kann man dann durch eine Menge von **linearen Nebenbedingungen**, d.h.

- linearen **Gleichungen**, z.B. $4x_1 + 7x_2 - 56x_3 = 100$
- und/oder linearen **Ungleichungen**, z.B. $x_2 + 4x_3 \leq 10$ oder $6x_1 - x_3 \geq 0$

beschreiben

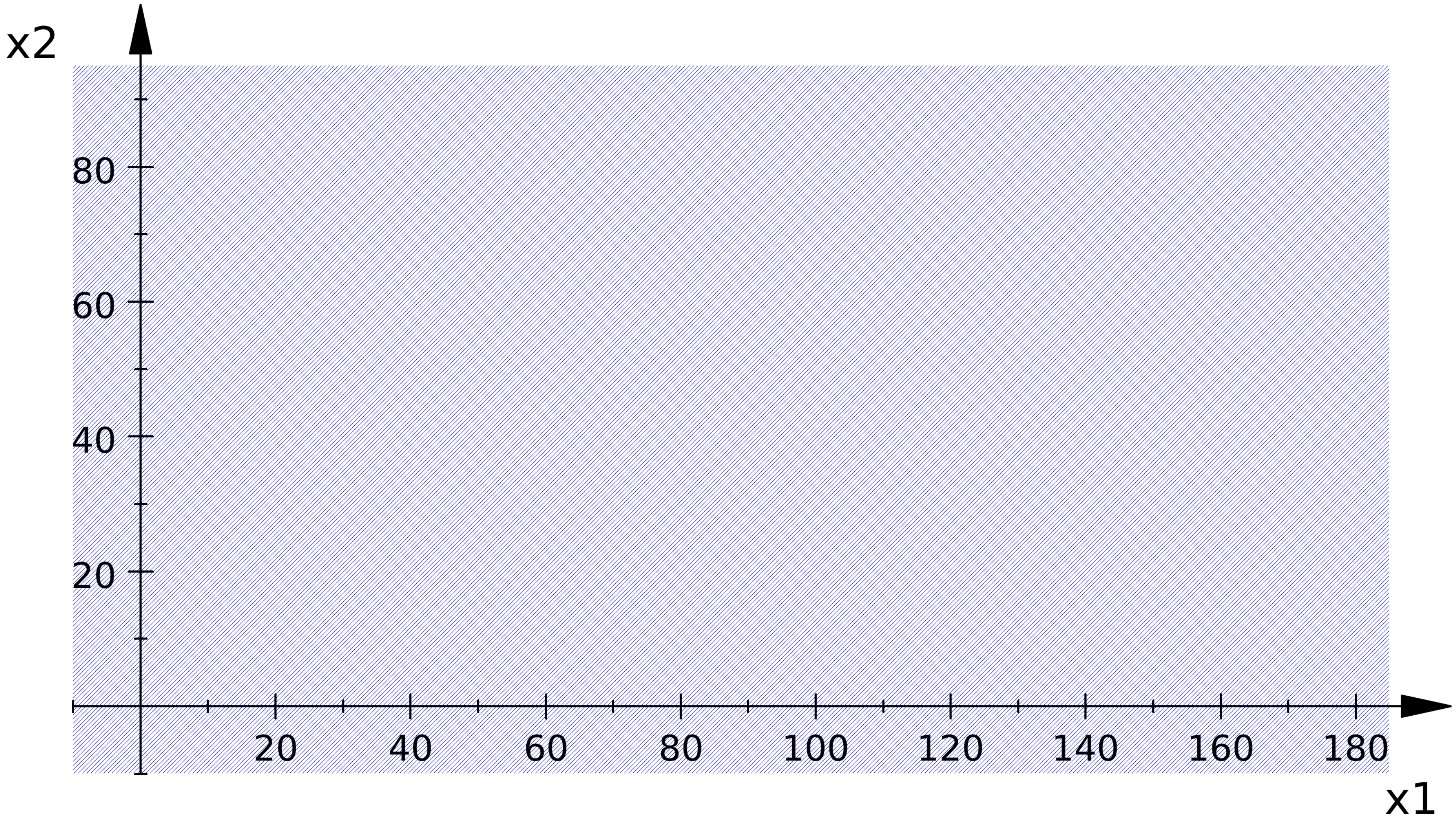
Das lineare Programm schreiben wir dann normalerweise so auf:

$$
\begin{aligned}
\min\ & 5x_1 - 17x_2 + 9x_3 + 78 \\
\text{so dass}\ & 4x_1 + 7x_2 - 56x_3 = 100 \\
& x_2 + 4x_3 \leq 10 \\
& 6x_1 - x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Englisch: lineares Programm = linear program (**LP**)

Zulässigkeitspolyeder und graphische Lösungsmethode

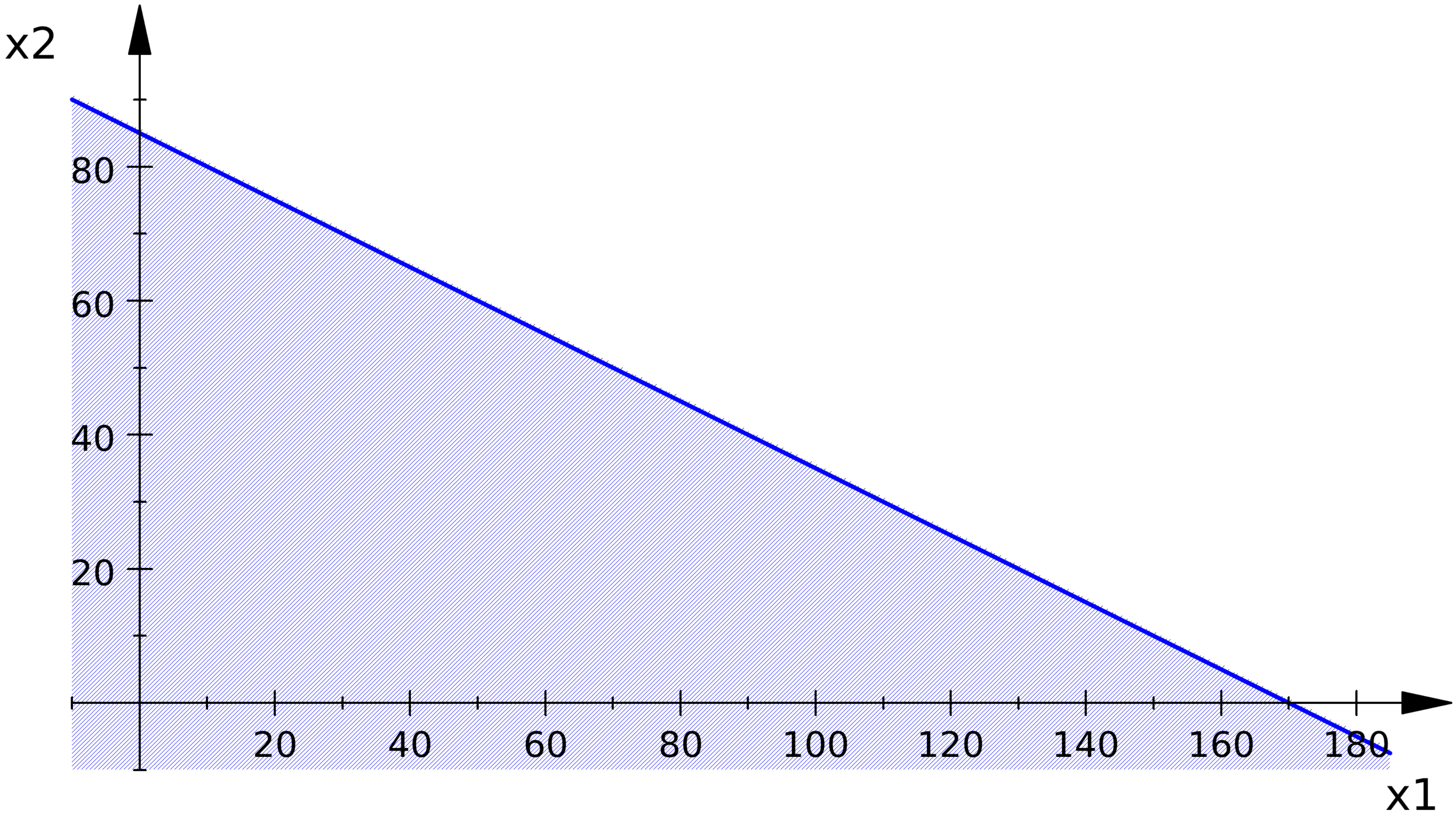
für das Produktionsplanungsbeispiel



zulässiger Bereich ohne Nebenbedingungen

Zulässigkeitspolyeder und graphische Lösungsmethode

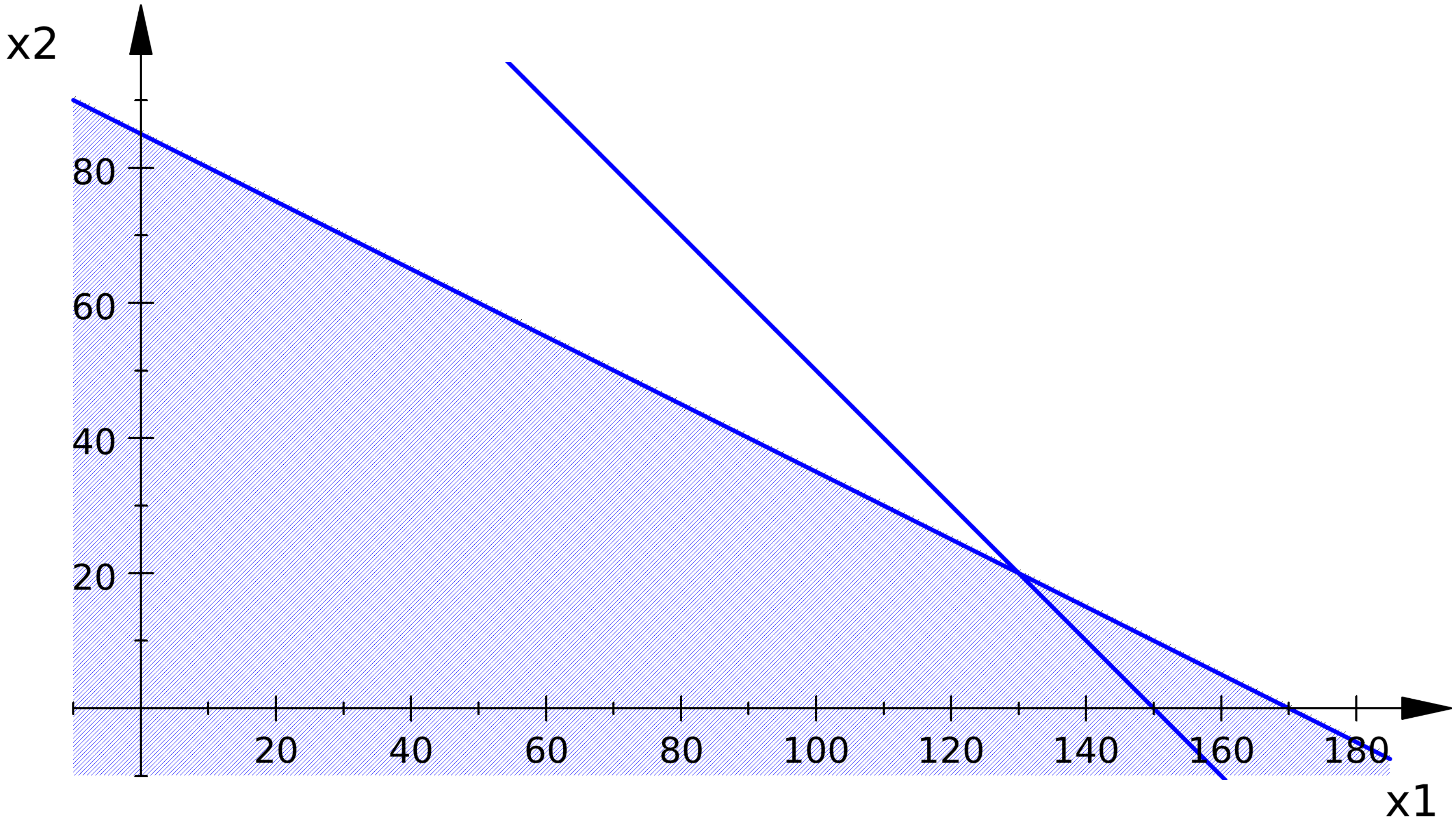
für das Produktionsplanungsbeispiel



Hinzufügen der Nebenbedingung $x_1 + 2x_2 \leq 170$

Zulässigkeitspolyeder und graphische Lösungsmethode

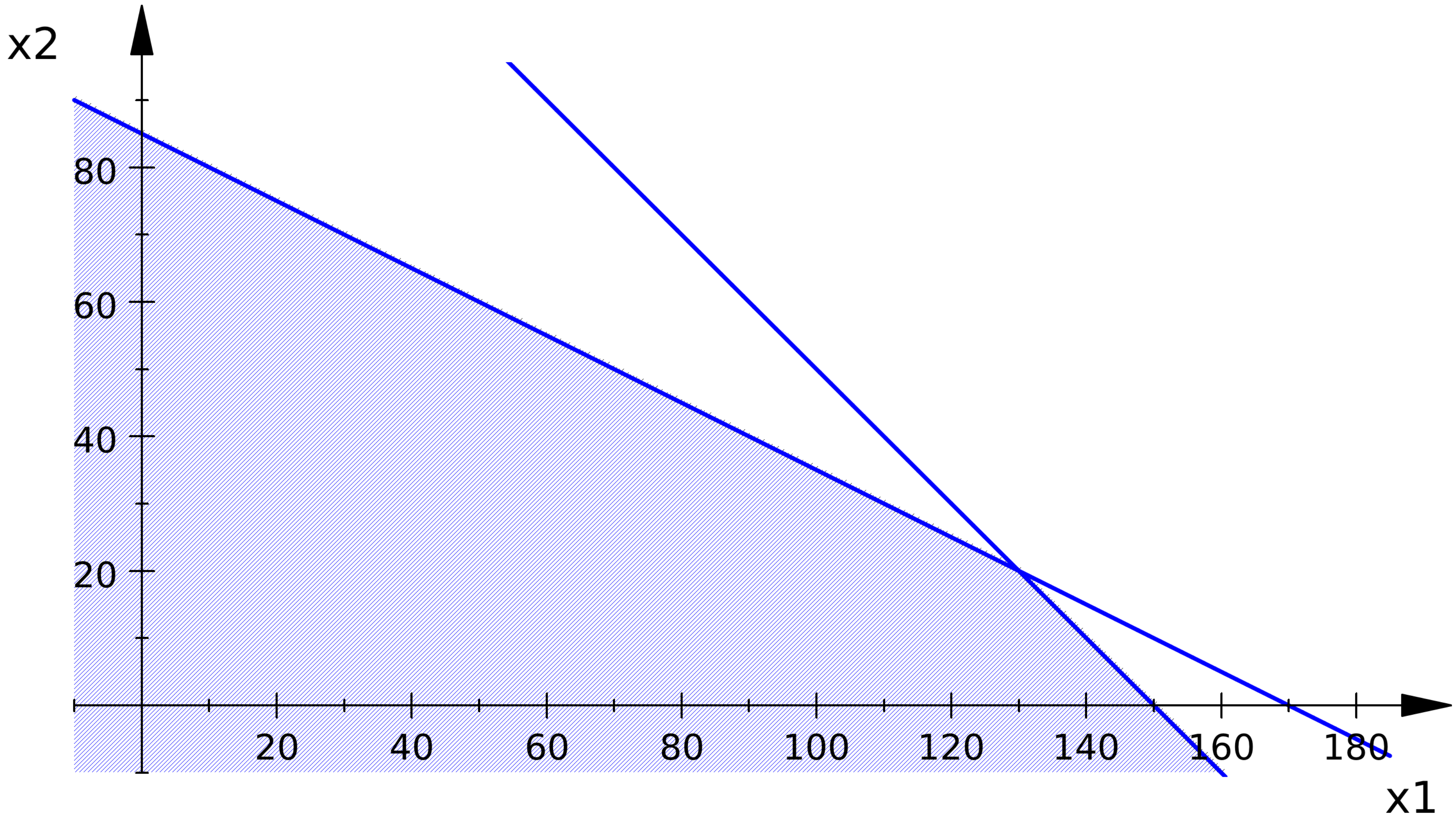
für das Produktionsplanungsbeispiel



Hinzufügen der Nebenbedingung $x_1 + x_2 \leq 150$

Zulässigkeitspolyeder und graphische Lösungsmethode

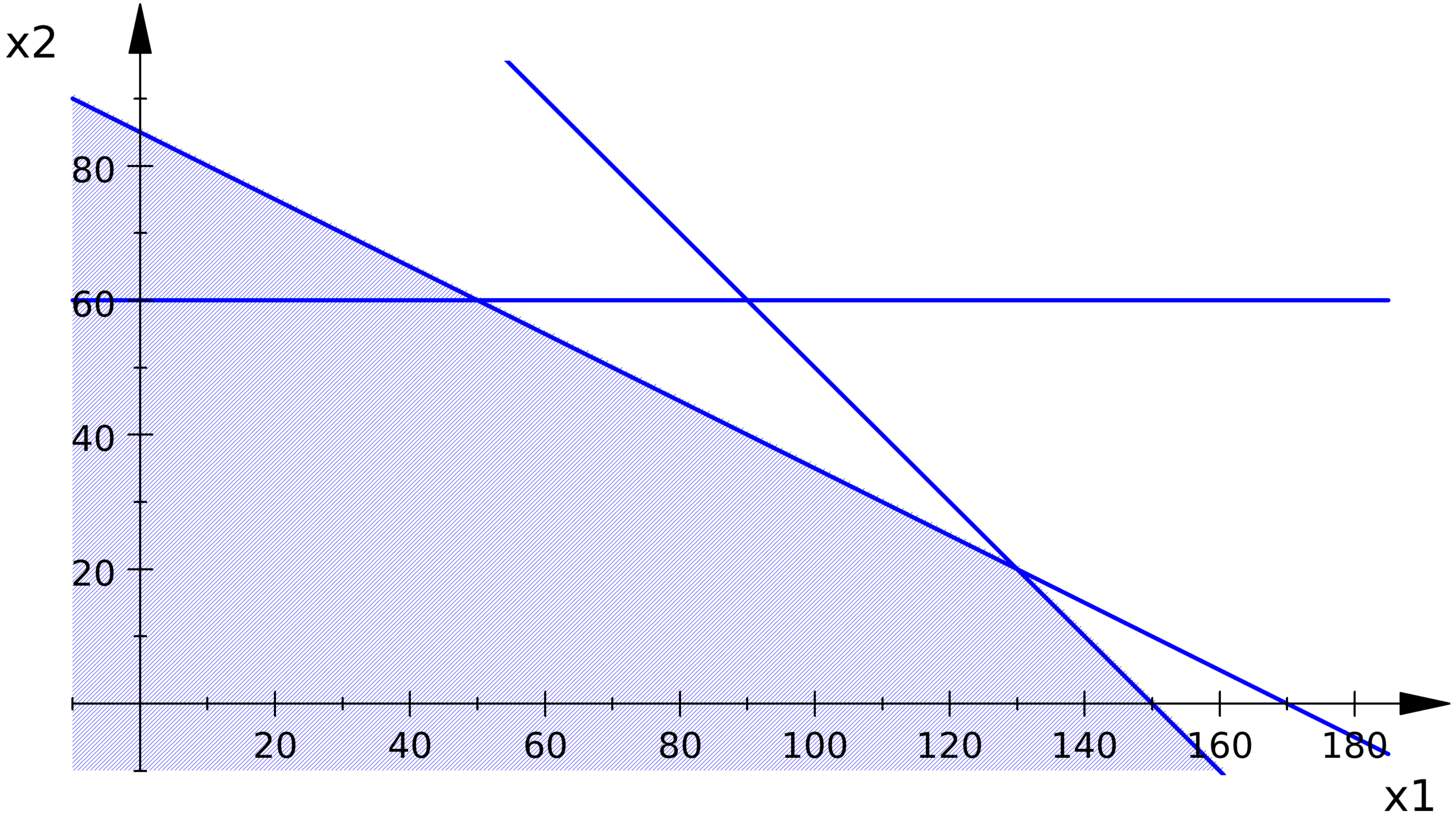
für das Produktionsplanungsbeispiel



Hinzufügen der Nebenbedingung $x_1 + x_2 \leq 150$

Zulässigkeitspolyeder und graphische Lösungsmethode

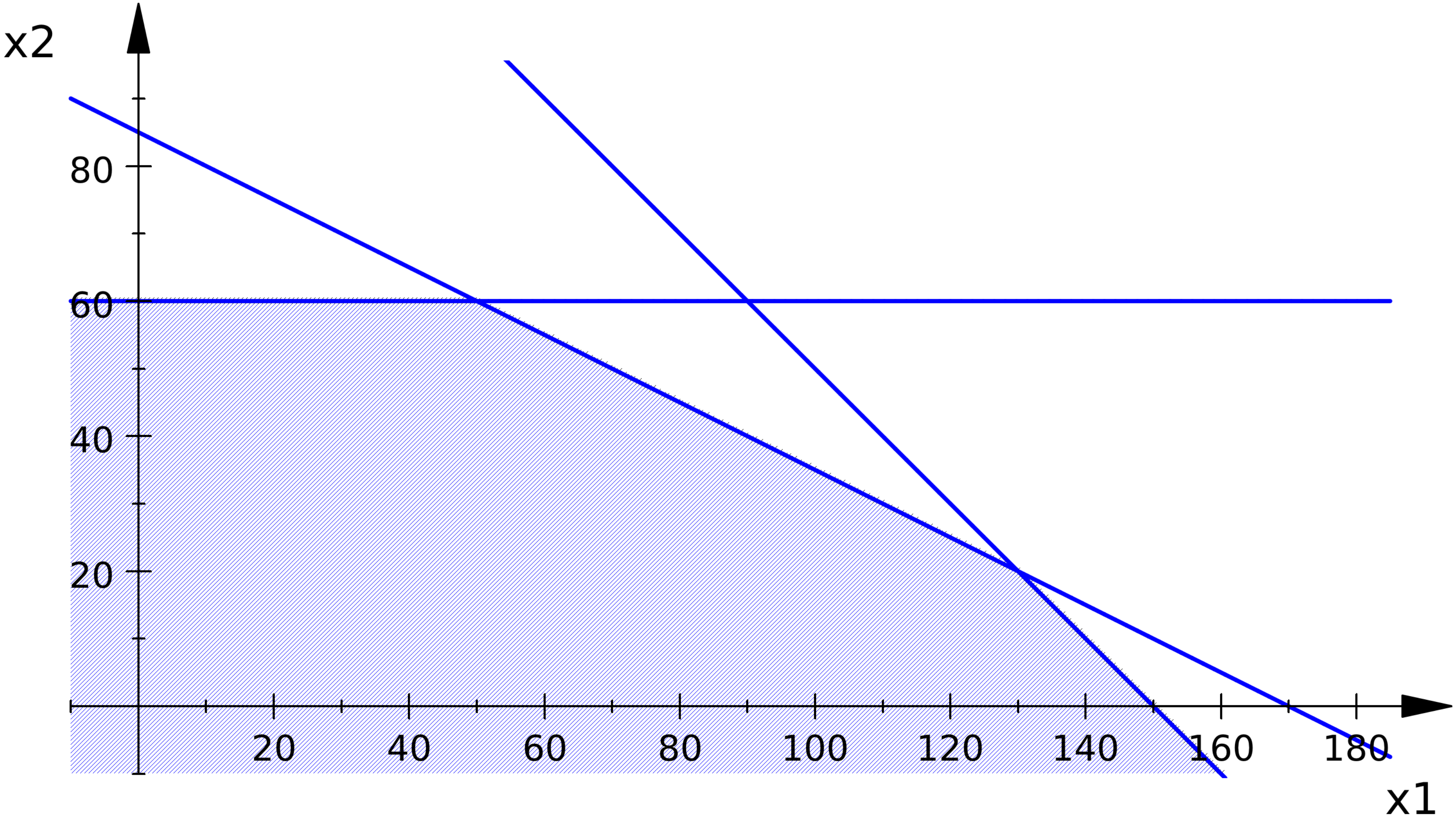
für das Produktionsplanungsbeispiel



Hinzufügen der Nebenbedingung $3x_2 \leq 180$

Zulässigkeitspolyeder und graphische Lösungsmethode

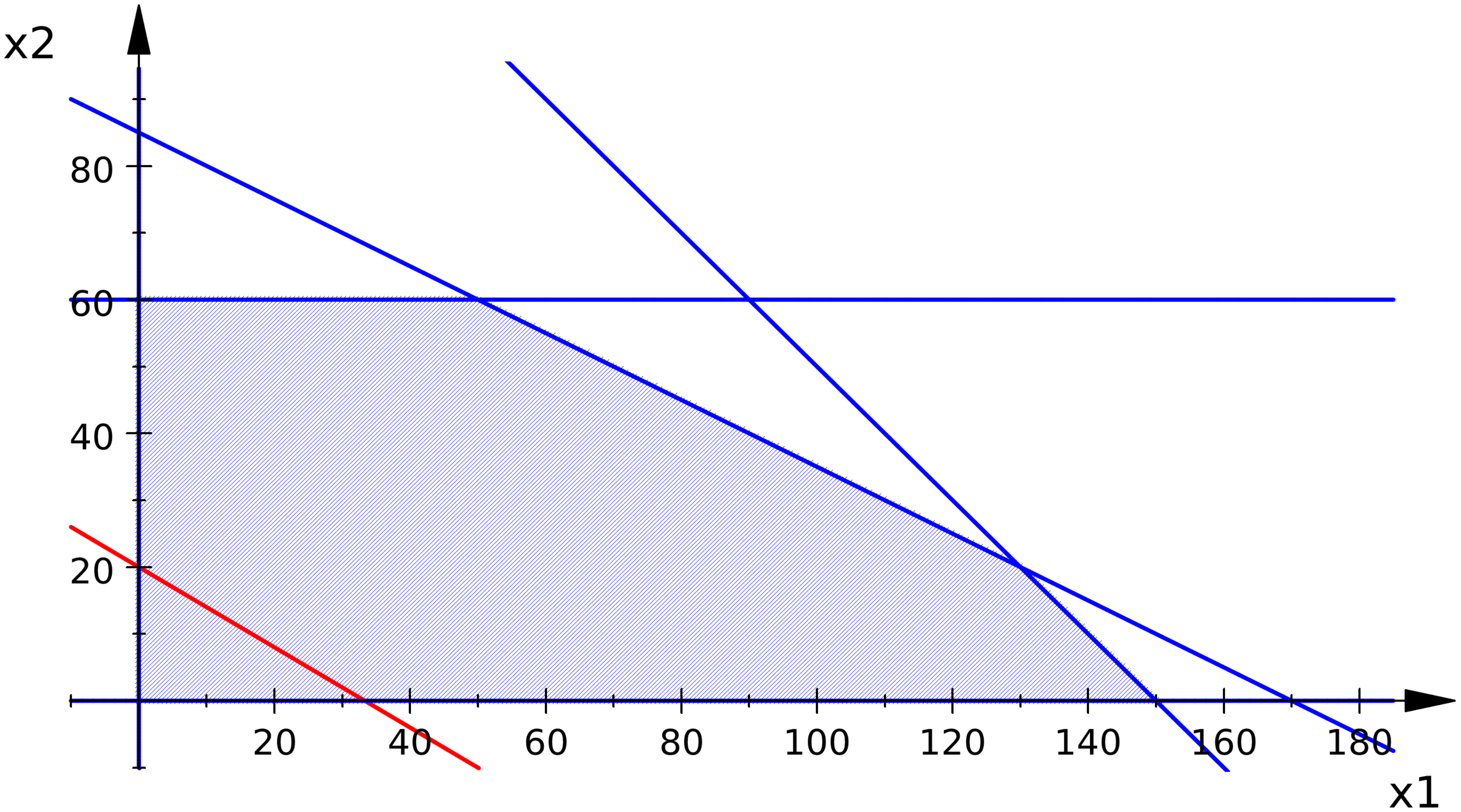
für das Produktionsplanungsbeispiel



Hinzufügen der Nebenbedingung $3x_2 \leq 180$

Zulässigkeitspolyeder und graphische Lösungsmethode

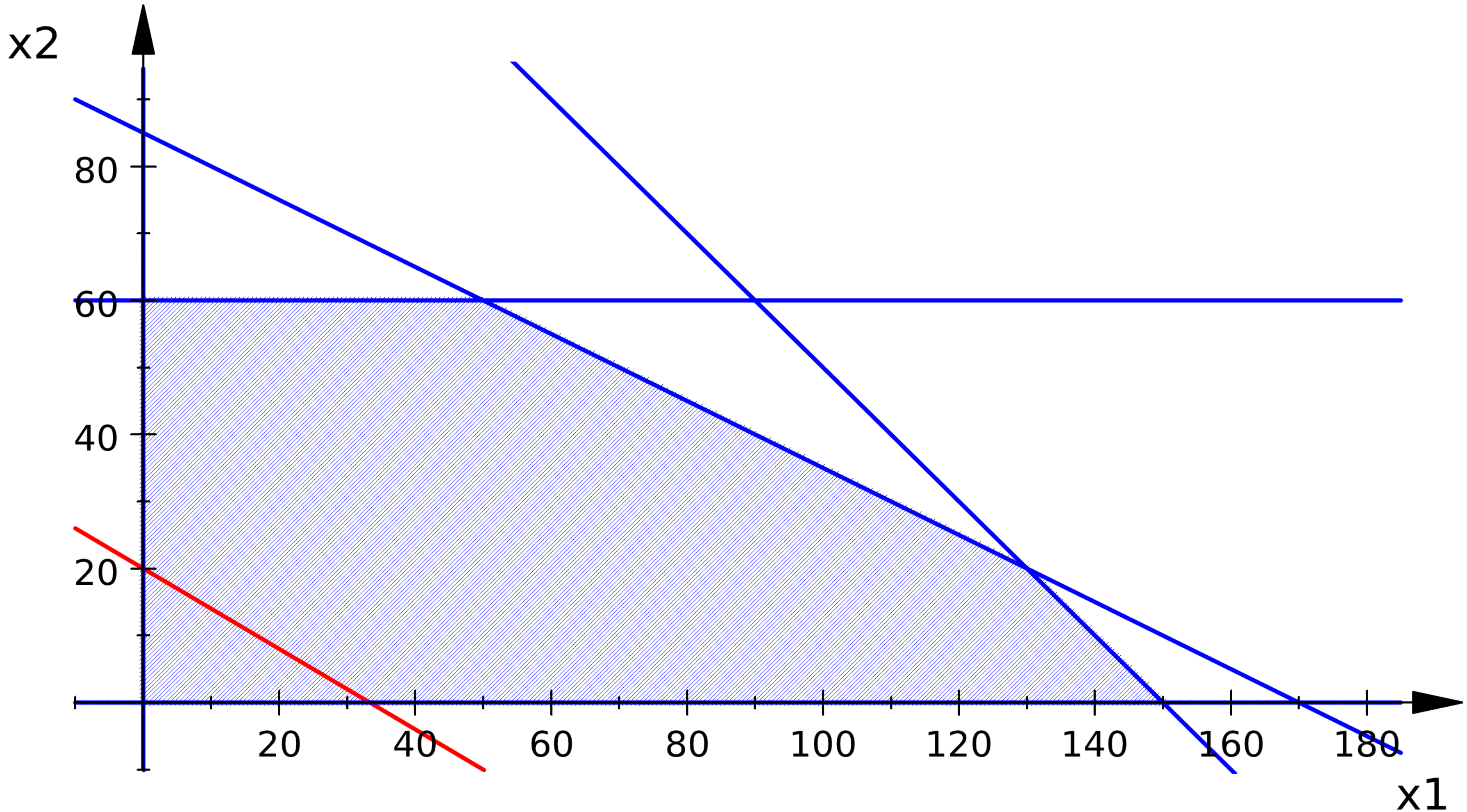
für das Produktionsplanungsbeispiel



Niveaulinie $L_{=}(100)$

Zulässigkeitspolyeder und graphische Lösungsmethode

für das Produktionsplanungsbeispiel

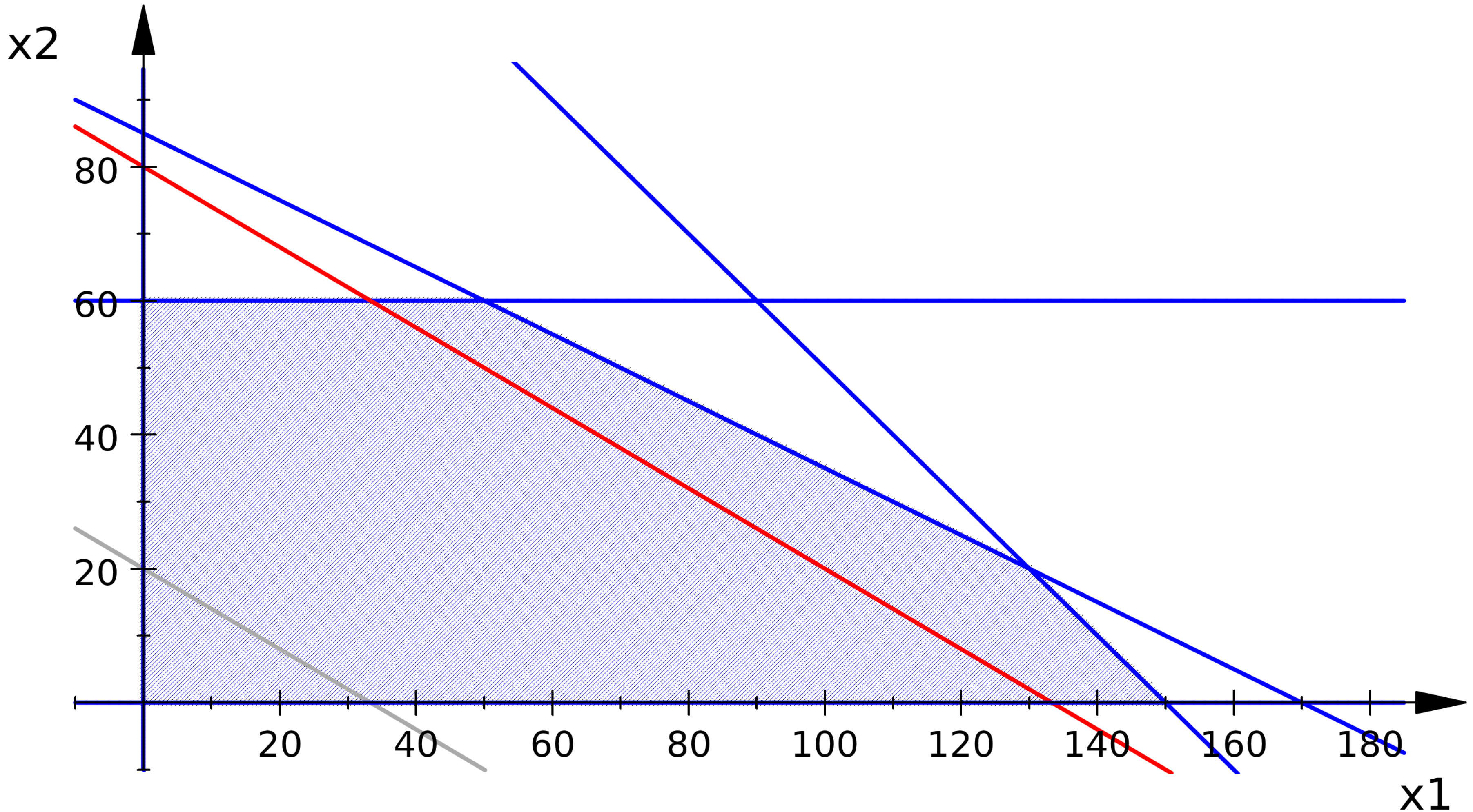


Niveaulinie: alle Punkte mit demselben Zielfunktionswert ('Niveau'), hier: Niveau 100

Niveaulinie $L_{=}(100)$

Zulässigkeitspolyeder und graphische Lösungsmethode

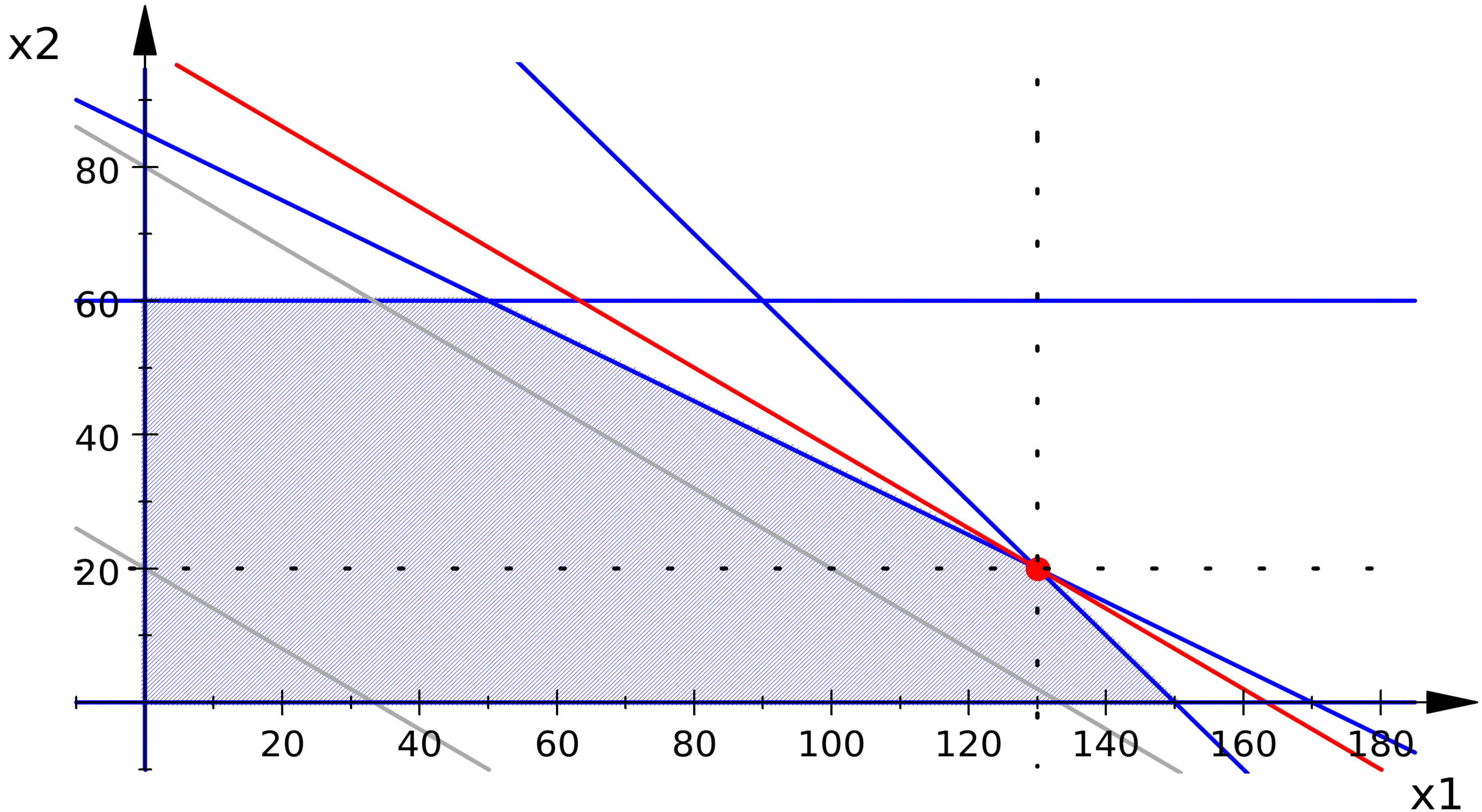
für das Produktionsplanungsbeispiel



Niveaulinie $L_=(400)$

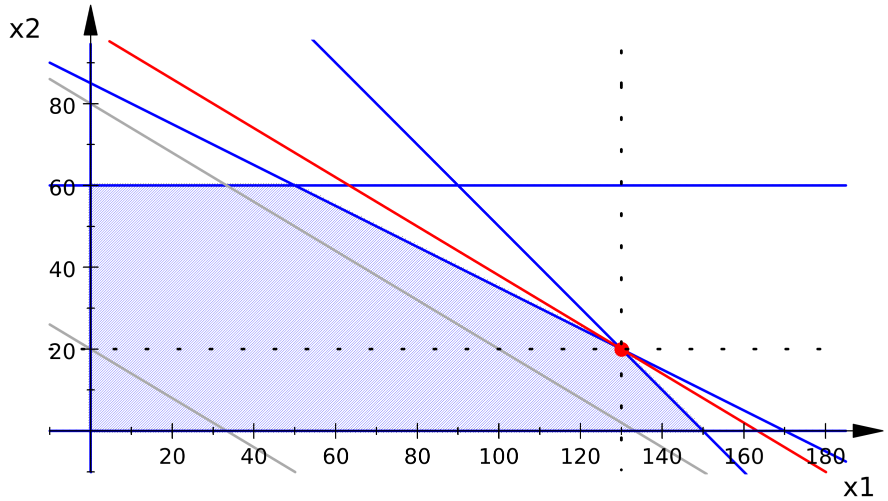
Zulässigkeitspolyeder und graphische Lösungsmethode

für das Produktionsplanungsbeispiel



Niveaulinie $L_=(490)$, Optimallösung $x_1^* = 130$, $x_2^* = 20$

Das Simplexverfahren
Lösen von linearen Programmen mit mehr als 2 Variablen

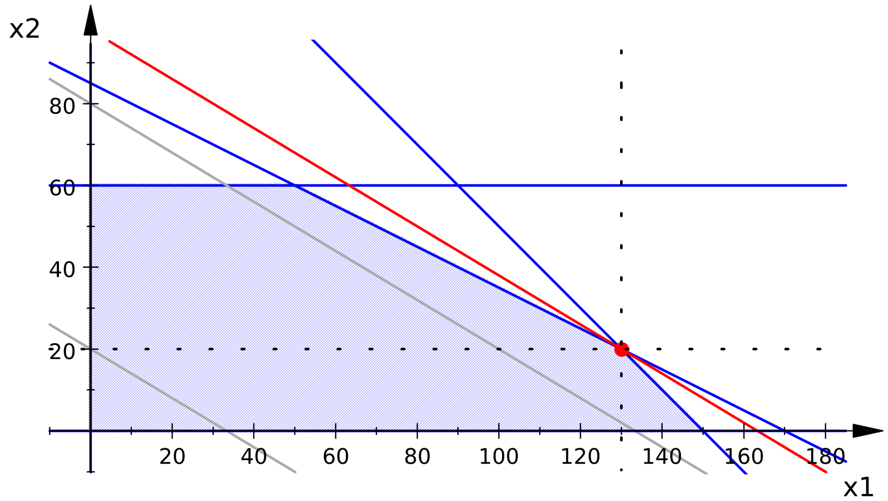


Idee:

Hauptsatz der Optimierung: Wenn ein lineares Programm eine optimale Lösung besitzt, so gibt es auch mindestens eine optimale Lösung, die auf einem Eckpunkt des zulässigen Polyeders liegt.

Das Simplexverfahren

Lösen von linearen Programmen mit mehr als 2 Variablen



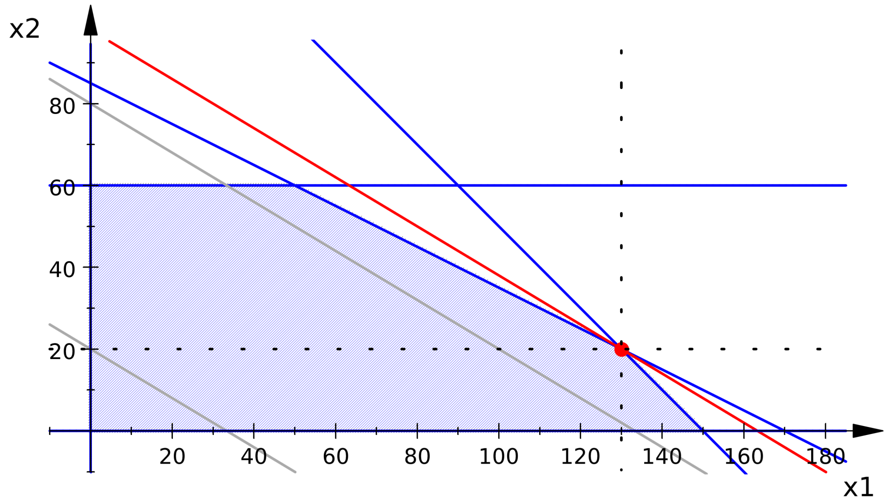
Idee:

Hauptsatz der Optimierung: Wenn ein lineares Programm eine optimale Lösung besitzt, so gibt es auch mindestens eine optimale Lösung, die auf einem Eckpunkt des zulässigen Polyeders liegt.

In jedem Schritt des Verfahrens testet man einen Eckpunkt des Polyeders (entspricht einer sogenannte **'Basislösung'** der Problems) auf Optimalität.

Das Simplexverfahren

Lösen von linearen Programmen mit mehr als 2 Variablen



Idee:

Hauptsatz der Optimierung: Wenn ein lineares Programm eine optimale Lösung besitzt, so gibt es auch mindestens eine optimale Lösung, die auf einem Eckpunkt des zulässigen Polyeders liegt.

In jedem Schritt des Verfahrens testet man einen Eckpunkt des Polyeders (entspricht einer sogenannte **'Basislösung'** der Problems) auf Optimalität.

Ist der Eckpunkt noch nicht optimal, dann findet das Verfahren für den nächsten Schritt einen benachparten Eckpunkt, der besser ist.
$\rightarrow$ Mehr dazu: nächste Woche

Beispiele: Probleme, die sich als LP formulieren lassen

Optimierung von . . .

Energiesystemen

Ernährungsprogrammen

Anbauschemas

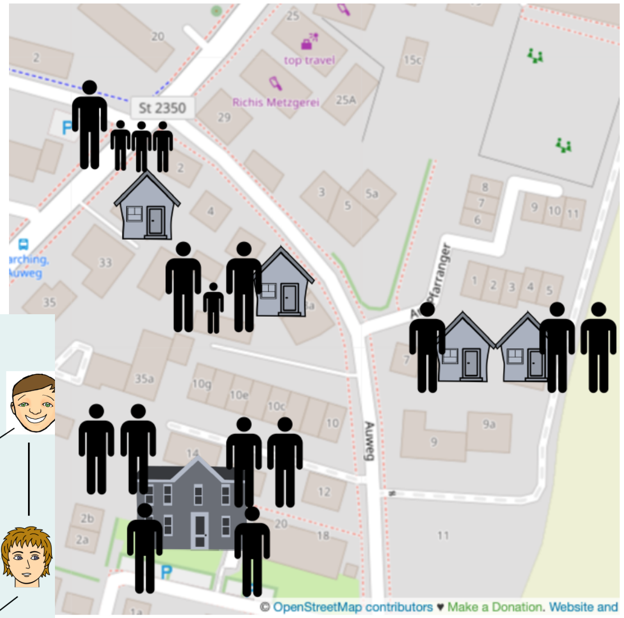
Ampelschaltungen

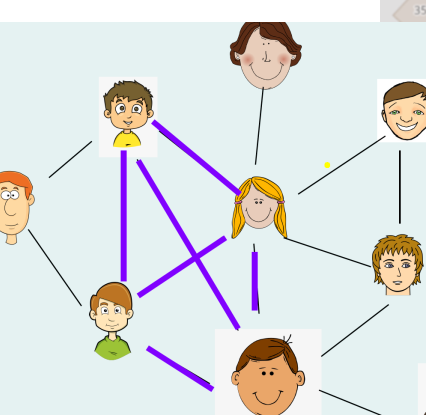
und viele mehr

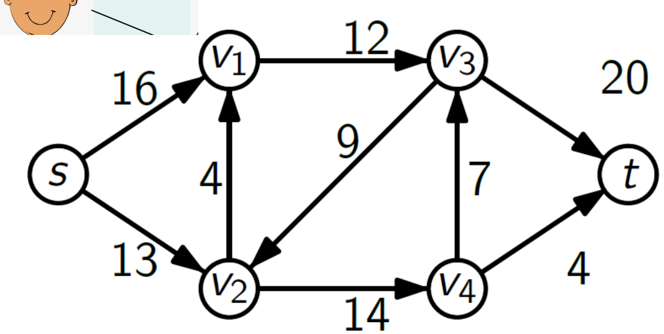
Und was ist mit . . .

Routenplanung für den Schulbus?

Und was ist mit . . .

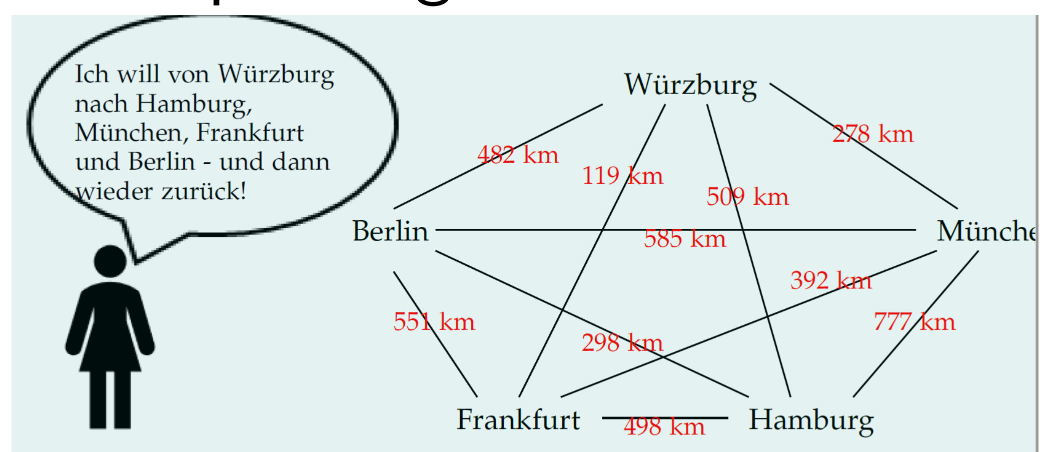






Optimierungsproblemen auf Graphen?

Routenplanung für den Schulbus?



Ganzzahlige Programme

Wir nennen ein mathematisches Programm **ganzzahlig linear**, wenn

- die Zielfunktion **(affin) linear** in den Variablen ist
- der zulässige Bereich ein **Polyeder geschnitten mit** $\mathbb{Z}^n$ ist, d.h. wir haben lineare Nebenbedingungen (Gleichungen und oder Ungleichungen) und eine Ganzzahligkeitsbedingungen ($x \in \mathbb{Z}^n$)

Ganzzahlige Programme

Wir nennen ein mathematisches Programm **ganzzahlig linear**, wenn

- die Zielfunktion **(affin) linear** in den Variablen ist
- der zulässige Bereich ein **Polyeder geschnitten mit** $\mathbb{Z}^n$ ist, d.h. wir haben lineare Nebenbedingungen (Gleichungen und oder Ungleichungen) und eine Ganzzahligkeitsbedingungen ($x \in \mathbb{Z}^n$)

Das ganzzahlig lineare Programm schreiben wir dann normalerweise so auf:

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 + 5x_2 & \\
\text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 & \leq 170 \\
& x_1 + x_2 & \leq 150 \\
& 3x_2 & \leq 180 \\
& x_1, x_2 & \geq 0 \\
& x_1, x_2 & \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Ganzzahlige Programme

Wir nennen ein mathematisches Programm **ganzzahlig linear**, wenn

- die Zielfunktion **(affin) linear** in den Variablen ist
- der zulässige Bereich ein **Polyeder geschnitten mit** $\mathbb{Z}^n$ ist, d.h. wir haben lineare Nebenbedingungen (Gleichungen und oder Ungleichungen) und eine Ganzzahligkeitsbedingungen ($x \in \mathbb{Z}^n$)

Das ganzzahlig lineare Programm schreiben wir dann normalerweise so auf:

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 + 5x_2 & \\
\text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 & \leq 170 \\
& x_1 + x_2 & \leq 150 \\
& 3x_2 & \leq 180 \\
& x_1, x_2 & \geq 0 \\
& x_1, x_2 & \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Englisch: ganzzahliges lineares Programm = integer linear program (**ILP**)

Produktionsplanung: ganzzahlige Variante

Eine Firma stellt zwei Produkte P1 und P2 her. Der Verkaufserlös von P1 beträgt 3 Euro, der von P2 beträgt 5 Euro. Wir gehen davon aus, dass alle produzierten Einheiten auch verkauft werden können.
Zur Herstellung der Produkte sind drei Maschinen A, B, C nötig. Die Bearbeitungszeiten der Produkte auf den drei Maschinen und die Kapazität der Maschinen sind wie folgt angegeben:

	Zeit für P1	Zeit für P2	Kapazität der Maschine
Maschine A	1	2	170
Maschine B	1	1	150
Maschine C	-	3	180

Frage: Wie viel soll die Firma von welchem Produkt produzieren, um ihren Gewinn zu maximieren?

Zusätzliche Einschränkung: P1 und P2 können nur in Paketen á 50 Stück verkauft werden.

Produktionsplanung: ganzzahlige Variante

Variablen:

Produktionsplanung: ganzzahlige Variante

Variablen:

x_1: zu produzierende Menge von 50er-Paketen von P1,
x_2: zu produzierende Menge von 50er-Paketen P2

Produktionsplanung: ganzzahlige Variante

Variablen:

x_1: zu produzierende Menge von 50er-Paketen von P1,
x_2: zu produzierende Menge von 50er-Paketen P2

Nebenbedingungen:

Produktionsplanung: ganzzahlige Variante

Variablen:

x_1: zu produzierende Menge von 50er-Paketen von P1,
x_2: zu produzierende Menge von 50er-Paketen P2

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq \frac{170}{50} \\ x_1 + x_2 &\leq \frac{150}{50} \\ 3x_2 &\leq \frac{180}{50} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Produktionsplanung: ganzzahlige Variante

Variablen:

x_1: zu produzierende Menge von 50er-Paketen von P1,
x_2: zu produzierende Menge von 50er-Paketen P2

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq \frac{170}{50} \\ x_1 + x_2 &\leq \frac{150}{50} \\ 3x_2 &\leq \frac{180}{50} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Zielfunktion:

Produktionsplanung: ganzzahlige Variante

Variablen:

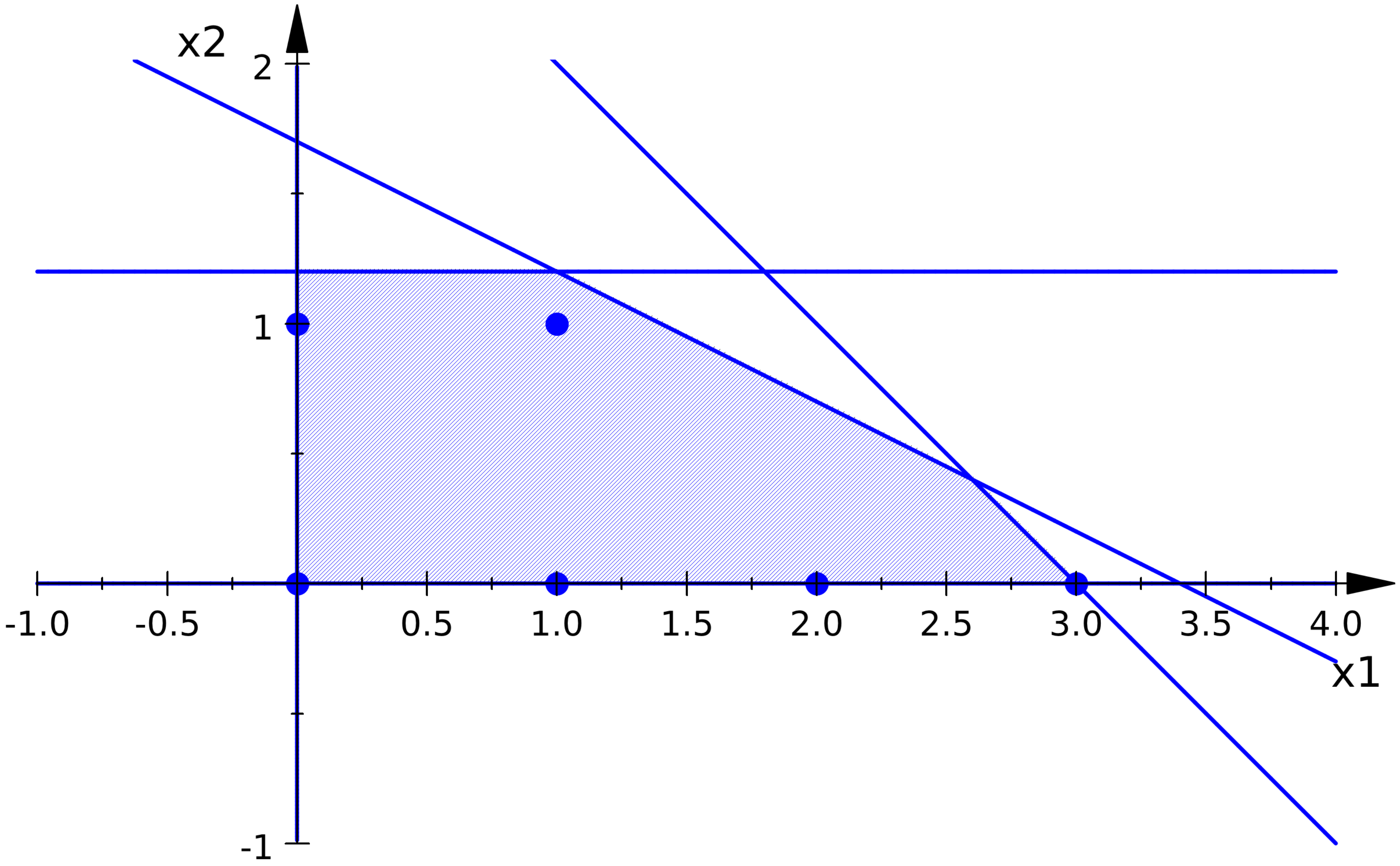
x_1: zu produzierende Menge von 50er-Paketen von P1,
x_2: zu produzierende Menge von 50er-Paketen P2

Nebenbedingungen:

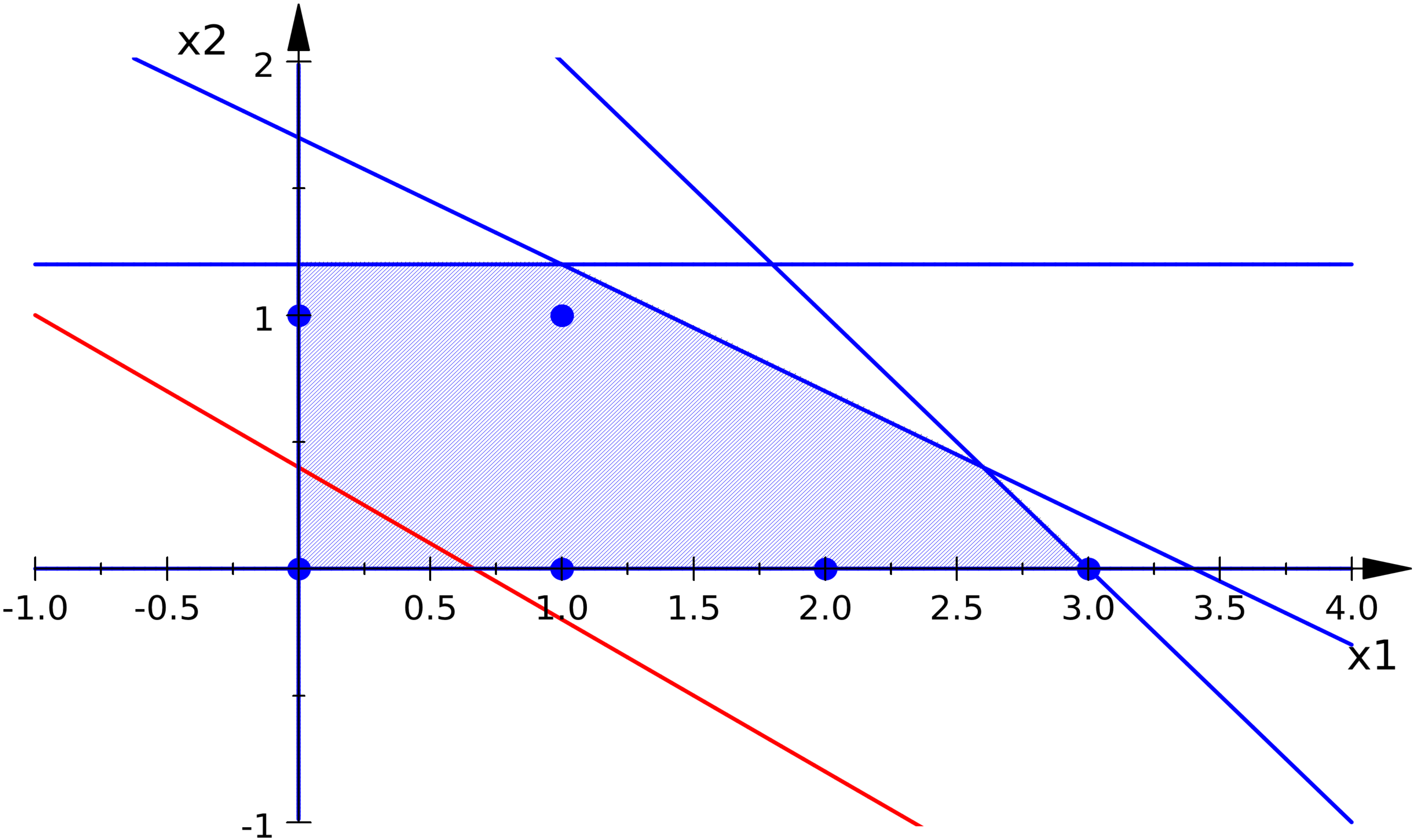
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq \frac{170}{50} \\ x_1 + x_2 &\leq \frac{150}{50} \\ 3x_2 &\leq \frac{180}{50} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Zielfunktion:
$\max f(x_1, x_2) = 3 \cdot 50x_1 + 5 \cdot 50x_2$

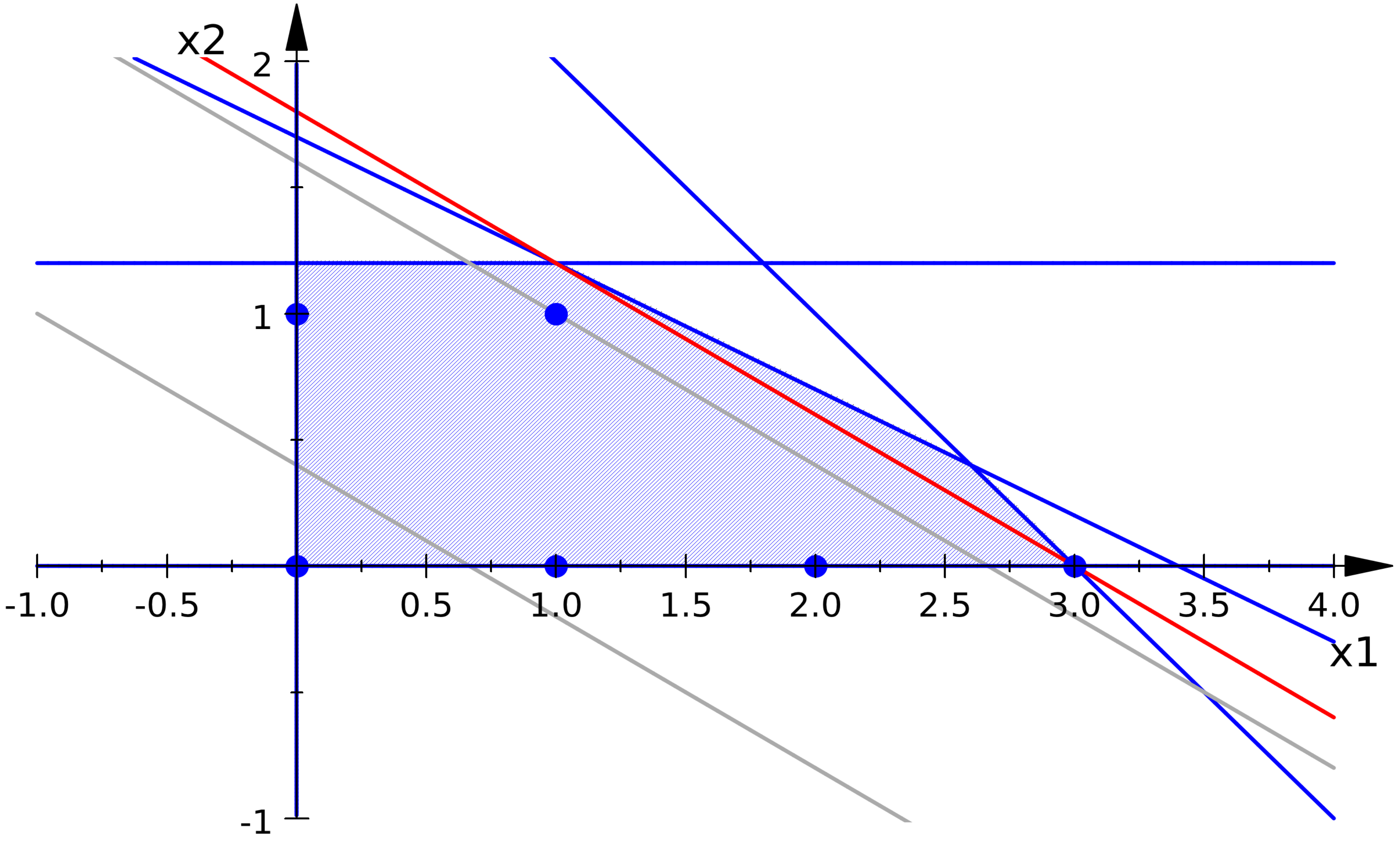
Ganzzahlige Punkte im Polyeder



Ganzzahlige Punkte im Polyeder



Ganzzahlige Punkte im Polyeder



'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Modellierungstrick: binäre Variablen $x \in \{0, 1\}$

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Modellierungstrick: binäre Variablen $x \in \{0, 1\}$

$(x \in \mathbb{Z}, x \geq 0, x \leq 1)$

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \; \forall \{u, v\} \in E$

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u,v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \ \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \ \forall \{v, w\} \in E$

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \; \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \; \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \; \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \; \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \; \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \; \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

x_u	x_v	Bedeutung	$y_{u,v}$	Nebenbedingung

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \; \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \; \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

x_u	x_v	Bedeutung	$y_{u,v}$	Nebenbedingung
1	0			

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u,v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \ \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \ \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

x_u	x_v	Bedeutung	$y_{u,v}$	Nebenbedingung
1	0	u ist in V', v nicht		

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \; \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \; \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

x_u	x_v	Bedeutung	$y_{u,v}$	Nebenbedingung
1	0	u ist in V', v nicht	1	

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \ \forall \{u, v\} \in E$

Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \ \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

x_u	x_v	Bedeutung	$y_{u,v}$	Nebenbedingung
1	0	u ist in V', v nicht	1	ist erfüllt

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \ \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \ \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

x_u	x_v	Bedeutung	$y_{u,v}$	Nebenbedingung
1	0	u ist in V', v nicht	1	ist erfüllt ✓

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \; \forall \{u, v\} \in E$

Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \; \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

x_u	x_v	Bedeutung	$y_{u,v}$	Nebenbedingung
1	0	u ist in V', v nicht	1	ist erfüllt ✓
0	1	v ist in V', u nicht	1	ist erfüllt

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \ \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \ \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

x_u	x_v	Bedeutung	$y_{u,v}$	Nebenbedingung
1	0	u ist in V', v nicht	1	ist erfüllt ✓
0	1	v ist in V', u nicht	1	ist erfüllt ✓

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \; \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \; \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

x_u	x_v	Bedeutung	$y_{u,v}$	Nebenbedingung
1	0	u ist in V', v nicht	1	ist erfüllt ✓
0	1	v ist in V', u nicht	1	ist erfüllt ✓
1	1			

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \ \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \ \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

x_u	x_v	Bedeutung	$y_{u,v}$	Nebenbedingung
1	0	u ist in V', v nicht	1	ist erfüllt ✓
0	1	v ist in V', u nicht	1	ist erfüllt ✓
1	1	u und v beide in V'		

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \; \forall \{u, v\} \in E$

Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \; \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

x_u	x_v	Bedeutung	$y_{u,v}$	Nebenbedingung
1	0	u ist in V', v nicht	1	ist erfüllt ✓
0	1	v ist in V', u nicht	1	ist erfüllt ✓
1	1	u und v beide in V'	1	

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \; \forall \{u, v\} \in E$

Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \; \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

x_u	x_v	Bedeutung	$y_{u,v}$	Nebenbedingung
1	0	u ist in V', v nicht	1	ist erfüllt ✓
0	1	v ist in V', u nicht	1	ist erfüllt ✓
1	1	u und v beide in V'	1	ist erfüllt ✓

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \ \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \ \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

x_u	x_v	Bedeutung	$y_{u,v}$	Nebenbedingung
1	0	u ist in V', v nicht	1	ist erfüllt ✓
0	1	v ist in V', u nicht	1	ist erfüllt ✓
1	1	u und v beide in V'	1	ist erfüllt ✓
0	0			

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \ \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \ \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

x_u	x_v	Bedeutung	$y_{u,v}$	Nebenbedingung
1	0	u ist in V', v nicht	1	ist erfüllt ✓
0	1	v ist in V', u nicht	1	ist erfüllt ✓
1	1	u und v beide in V'	1	ist erfüllt ✓
0	0	u und v beide nicht in V'		

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \ \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \ \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

x_u	x_v	Bedeutung	$y_{u,v}$	Nebenbedingung
1	0	u ist in V', v nicht	1	ist erfüllt ✓
0	1	v ist in V', u nicht	1	ist erfüllt ✓
1	1	u und v beide in V'	1	ist erfüllt ✓
0	0	u und v beide nicht in V'	??	

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \ \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \ \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

x_u	x_v	Bedeutung	$y_{u,v}$	Nebenbedingung
1	0	u ist in V', v nicht	1	ist erfüllt ✓
0	1	v ist in V', u nicht	1	ist erfüllt ✓
1	1	u und v beide in V'	1	ist erfüllt ✓
0	0	u und v beide nicht in V'	??	kann nicht erfüllt werden

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \; \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \; \forall \{v, w\} \in E$ Klappt das?

1. Erfüllt jede Knotenüberdeckung die Nebenbedingungen?
2. Modelliert jede zulässige Variablenbelegung eine Knotenüberdeckung?

x_u	x_v	Bedeutung	$y_{u,v}$	Nebenbedingung
1	0	u ist in V', v nicht	1	ist erfüllt ✓
0	1	v ist in V', u nicht	1	ist erfüllt ✓
1	1	u und v beide in V'	1	ist erfüllt ✓
0	0	u und v beide nicht in V'	??	kann nicht erfüllt werden✓

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \ \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \ \forall \{v, w\} \in E$

Zielfunktion:

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \; \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \; \forall \{v, w\} \in E$

Zielfunktion:
$\sum_{v \in V} x_v$

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \; \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \; \forall \{v, w\} \in E$

Zielfunktion:
$\sum_{v \in V} x_v \; \rightarrow \min$

'Minimale Knotenüberdeckung' als ILP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Zahl k
Gesucht: Knotenüberdeckung V' mit minimaler Kardinalität

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Bin. **Variablen** $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in V' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \text{ überdeckt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen: Jede Kante $\{u, v\} \in E$ muss überdeckt sein:

$y_{u,v} = 1 \ \forall \{u, v\} \in E$
Eine Kante ist genau dann nicht überdeckt, wenn keiner der adjazenten Knoten in V' ist: $x_v + x_w \geq y_{v,w} \ \forall \{v, w\} \in E$

Zielfunktion:
$\sum_{v \in V} x_v \ \rightarrow \min$

zusammengefasst: **ILP:**

$$\begin{aligned} &\min \textstyle\sum_{v \in V} x_v \\ &\text{so dass } x_u + x_v \geq y_{v,w} \quad \forall \{u, v\} \in E \\ &\qquad\qquad y_{v,w} = 1 \quad \forall \{u, v\} \in E \\ &\qquad\qquad x_v \in \{0, 1\} \ \ \forall v \in V, \qquad y_{v,w} \in \{0, 1\} \ \ \forall \{v, w\} \in E \end{aligned}$$

Handlungsreisendenproblem als ILP

(1-Besuchs-) Handlungsreisendenproblem
Gegeben: Vollständiger Graph $G = (V, E)$, Kantenlabels w_e für $e \in E$
Gesucht: Ein Kreis $K = (V_K, E_K)$, der alle Knoten genau einmal besucht, so dass $\sum_{e \in E_K} w_e$ minimal

Handlungsreisendenproblem als ILP

(1-Besuchs-) Handlungsreisendenproblem
Gegeben: Vollständiger Graph $G = (V, E)$, Kantenlabels w_e für $e \in E$
Gesucht: Ein Kreis $K = (V_K, E_K)$, der alle Knoten genau einmal besucht, so dass $\sum_{e \in E_K} w_e$ minimal

Variablen, Nebenbedingungen, Zielfunktion?

Handlungsreisendenproblem als ILP

(1-Besuchs-) Handlungsreisendenproblem
Gegeben: Vollständiger Graph $G = (V, E)$, Kantenlabels w_e für $e \in E$
Gesucht: Ein Kreis $K = (V_K, E_K)$, der alle Knoten genau einmal besucht, so dass $\sum_{e \in E_K} w_e$ minimal

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Handlungsreisendenproblem als ILP

(1-Besuchs-) Handlungsreisendenproblem
Gegeben: Vollständiger Graph $G = (V, E)$, Kantenlabels w_e für $e \in E$
Gesucht: Ein Kreis $K = (V_K, E_K)$, der alle Knoten genau einmal besucht, so dass $\sum_{e \in E_K} w_e$ minimal

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:

Handlungsreisendenproblem als ILP

(1-Besuchs-) Handlungsreisendenproblem
Gegeben: Vollständiger Graph $G = (V, E)$, Kantenlabels w_e für $e \in E$
Gesucht: Ein Kreis $K = (V_K, E_K)$, der alle Knoten genau einmal besucht, so dass $\sum_{e \in E_K} w_e$ minimal

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:
Jede Stadt wird genau einmal betreten:

Handlungsreisendenproblem als ILP

(1-Besuchs-) Handlungsreisendenproblem
Gegeben: Vollständiger Graph $G = (V, E)$, Kantenlabels w_e für $e \in E$
Gesucht: Ein Kreis $K = (V_K, E_K)$, der alle Knoten genau einmal besucht, so dass $\sum_{e \in E_K} w_e$ minimal

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:
Jede Stadt wird genau einmal betreten:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{u,v} = 1$

Handlungsreisendenproblem als ILP

(1-Besuchs-) Handlungsreisendenproblem
Gegeben: Vollständiger Graph $G = (V, E)$, Kantenlabels w_e für $e \in E$
Gesucht: Ein Kreis $K = (V_K, E_K)$, der alle Knoten genau einmal besucht, so dass $\sum_{e \in E_K} w_e$ minimal

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:
Jede Stadt wird genau einmal betreten:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{u,v} = 1 \quad \forall v \in V$

Handlungsreisendenproblem als ILP

(1-Besuchs-) Handlungsreisendenproblem
Gegeben: Vollständiger Graph $G = (V, E)$, Kantenlabels w_e für $e \in E$
Gesucht: Ein Kreis $K = (V_K, E_K)$, der alle Knoten genau einmal besucht, so dass $\sum_{e \in E_K} w_e$ minimal

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:
Jede Stadt wird genau einmal betreten:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{u,v} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:

Handlungsreisendenproblem als ILP

(1-Besuchs-) Handlungsreisendenproblem
Gegeben: Vollständiger Graph $G = (V, E)$, Kantenlabels w_e für $e \in E$
Gesucht: Ein Kreis $K = (V_K, E_K)$, der alle Knoten genau einmal besucht, so dass $\sum_{e \in E_K} w_e$ minimal

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:
Jede Stadt wird genau einmal betreten:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{u,v} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V : \{v,w\} \in E} x_{vw} \; \forall v \in V$

Handlungsreisendenproblem als ILP

(1-Besuchs-) Handlungsreisendenproblem
Gegeben: Vollständiger Graph $G = (V, E)$, Kantenlabels w_e für $e \in E$
Gesucht: Ein Kreis $K = (V_K, E_K)$, der alle Knoten genau einmal besucht, so dass $\sum_{e \in E_K} w_e$ minimal

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:
Jede Stadt wird genau einmal betreten:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{u,v} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V : \{v,w\} \in E} x_{vw} \; \forall v \in V$

Diese Bedingungen nennt man **Flussbedingungen**.

Handlungsreisendenproblem als ILP

(1-Besuchs-) Handlungsreisendenproblem
Gegeben: Vollständiger Graph $G = (V, E)$, Kantenlabels w_e für $e \in E$
Gesucht: Ein Kreis $K = (V_K, E_K)$, der alle Knoten genau einmal besucht, so dass $\sum_{e \in E_K} w_e$ minimal

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:
Jede Stadt wird genau einmal betreten:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{u,v} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V : \{v,w\} \in E} x_{vw} \; \forall v \in V$

Zielfunktion:

Handlungsreisendenproblem als ILP

(1-Besuchs-) Handlungsreisendenproblem
Gegeben: Vollständiger Graph $G = (V, E)$, Kantenlabels w_e für $e \in E$
Gesucht: Ein Kreis $K = (V_K, E_K)$, der alle Knoten genau einmal besucht, so dass $\sum_{e \in E_K} w_e$ minimal

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:
Jede Stadt wird genau einmal betreten:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{u,v} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V : \{v,w\} \in E} x_{vw} \; \forall v \in V$

Zielfunktion:
$\sum_{\{u,v\} \in E} w_{uv} x_{uv} \to \min$

Handlungsreisendenproblem als ILP

(1-Besuchs-) Handlungsreisendenproblem
Gegeben: Vollständiger Graph $G = (V, E)$, Kantenlabels w_e für $e \in E$
Gesucht: Ein Kreis $K = (V_K, E_K)$, der alle Knoten genau einmal besucht, so dass $\sum_{e \in E_K} w_e$ minimal

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:

Jede Stadt wird genau einmal betreten:

$\sum_{u \in V:\{u,v\} \in E} x_{u,v} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:

$\sum_{u \in V:\{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V:\{v,w\} \in E} x_{vw} \; \forall v \in V$

Zielfunktion:

$\sum_{\{u,v\} \in E} w_{uv} x_{uv} \to \min$

Fertig?

Handlungsreisendenproblem als ILP

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:
Jede Stadt wird genau einmal betreten:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V : \{v,w\} \in E} x_{vw} \ \forall v \in V$

Zielfunktion:
$\sum_{\{u,v\} \in E} w_{uv} x_{uv} \rightarrow \min$

Fertig?

Handlungsreisendenproblem als ILP

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

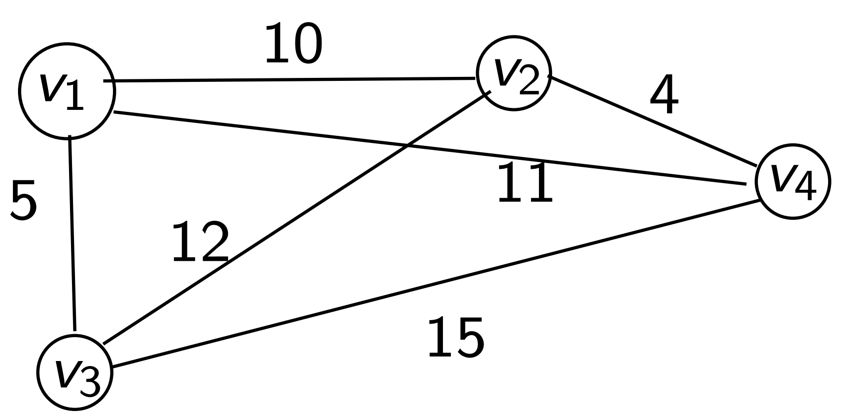
Nebenbedingungen:
Jede Stadt wird genau einmal betreten:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V : \{v,w\} \in E} x_{vw} \; \forall v \in V$

Zielfunktion:
$\sum_{\{u,v\} \in E} w_{uv} x_{uv} \rightarrow \min$

Fertig?

Beispiel:



Handlungsreisendenproblem als ILP

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

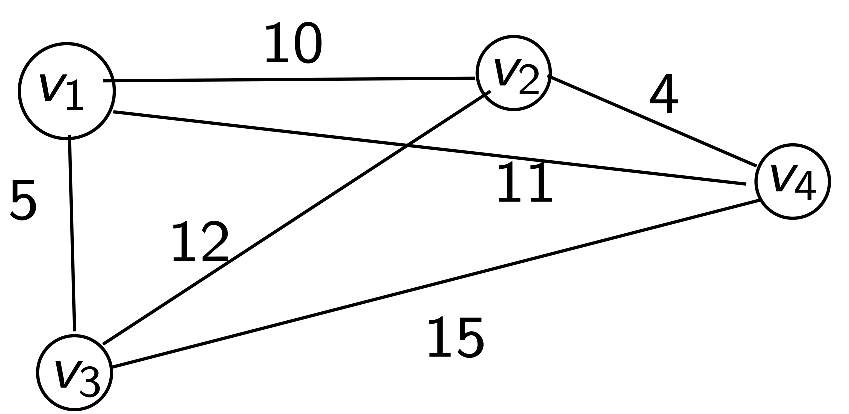
Nebenbedingungen:
Jede Stadt wird genau einmal betreten:
$\sum_{u \in V:\{u,v\} \in E} x_{uv} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:
$\sum_{u \in V:\{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V:\{v,w\} \in E} x_{vw} \ \forall v \in V$

Zielfunktion:
$\sum_{\{u,v\} \in E} w_{uv} x_{uv} \to \min$

Fertig?

Beispiel:



1. Erfüllt jede Tour, die alle Knoten besucht, die Nebenbedingungen und entspricht der Zielfunktionswert der Länge der Tour?

Handlungsreisendenproblem als ILP

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

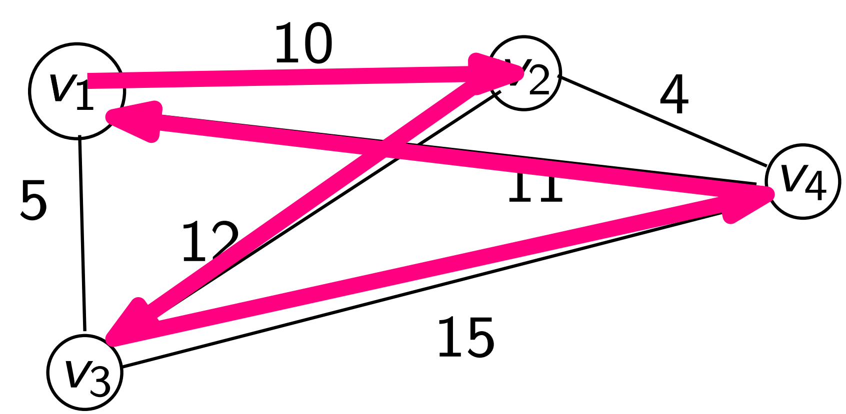
Nebenbedingungen:
Jede Stadt wird genau einmal betreten:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V : \{v,w\} \in E} x_{vw} \ \forall v \in V$

Zielfunktion:
$\sum_{\{u,v\} \in E} w_{uv} x_{uv} \to \min$

Fertig?

Beispiel:



1. Erfüllt jede Tour, die alle Knoten besucht, die Nebenbedingungen und entspricht der Zielfunktionswert der Länge der Tour?

Handlungsreisendenproblem als ILP

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:

Jede Stadt wird genau einmal betreten:

$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:

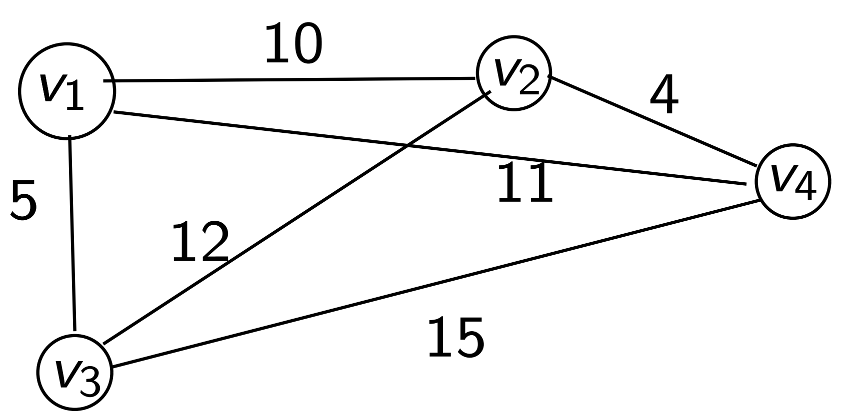
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V : \{v,w\} \in E} x_{vw} \ \forall v \in V$

Zielfunktion:

$\sum_{\{u,v\} \in E} w_{uv} x_{uv} \to \min$

Fertig?

Beispiel:



2. Entspricht jede zulässige Variablenbelegung einer zulässigen Tour?

1. Erfüllt jede Tour, die alle Knoten besucht, die Nebenbedingungen und entspricht der Zielfunktionswert der Länge der Tour?

Handlungsreisendenproblem als ILP

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

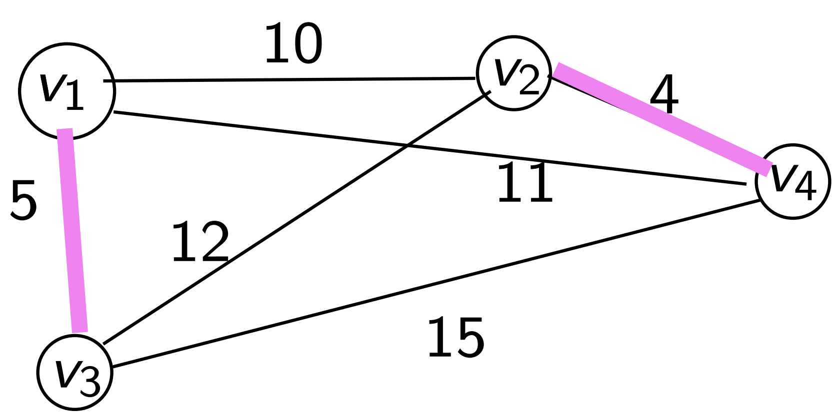
Nebenbedingungen:
Jede Stadt wird genau einmal betreten:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:
$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V : \{v,w\} \in E} x_{vw} \; \forall v \in V$

Zielfunktion:
$\sum_{\{u,v\} \in E} w_{uv} x_{uv} \to \min$

Fertig?

Beispiel:



2. Entspricht jede zulässige Variablenbelegung einer zulässigen Tour?

1. Erfüllt jede Tour, die alle Knoten besucht, die Nebenbedingungen und entspricht der Zielfunktionswert der Länge der Tour?

Handlungsreisendenproblem als ILP

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:

Jede Stadt wird genau einmal betreten:

$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:

$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V : \{v,w\} \in E} x_{vw} \; \forall v \in V$

Zielfunktion:

$\sum_{\{u,v\} \in E} w_{uv} x_{uv} \to \min$

Handlungsreisendenproblem als ILP

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:

Jede Stadt wird genau einmal betreten:

$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:

$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V : \{v,w\} \in E} x_{vw} \; \forall v \in V$

Verbiete Subtouren:

Zielfunktion:

$\sum_{\{u,v\} \in E} w_{uv} x_{uv} \rightarrow \min$

Handlungsreisendenproblem als ILP

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:

Jede Stadt wird genau einmal betreten:

$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:

$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V : \{v,w\} \in E} x_{vw} \ \forall v \in V$

Verbiete Subtouren:

In keiner echten Untermenge von V darf es eine Subtour (geschlossener Kreis) geben.

Zielfunktion:

$\sum_{\{u,v\} \in E} w_{uv} x_{uv} \rightarrow \min$

Handlungsreisendenproblem als ILP

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:

Jede Stadt wird genau einmal betreten:

$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:

$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V : \{v,w\} \in E} x_{vw} \; \forall v \in V$

Verbiete Subtouren:

In keiner echten Untermenge von V darf es eine Subtour (geschlossener Kreis) geben.

$\Leftrightarrow$ Für jede echte Untermenge V' haben wir in $G[V']$ höchstens $|V'| - 1$ Kanten ausgewählt.

Zielfunktion:

$\sum_{\{u,v\} \in E} w_{uv} x_{uv} \to \min$

Handlungsreisendenproblem als ILP

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:

Jede Stadt wird genau einmal betreten:

$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:

$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V : \{v,w\} \in E} x_{vw} \ \forall v \in V$

Verbiete Subtouren:

In keiner echten Untermenge von V darf es eine Subtour (geschlossener Kreis) geben.

$\Leftrightarrow$ Für jede echte Untermenge V' haben wir in $G[V']$ höchstens $|V'| - 1$ Kanten ausgewählt.

$\sum_{u,v \in V'} x_{uv} \leq |V'| - 1 \ \forall V' \subsetneq V$

Zielfunktion:

$\sum_{\{u,v\} \in E} w_{uv} x_{uv} \to \min$

Handlungsreisendenproblem als ILP

Variablen: $x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ direkt nach } u \text{ besucht wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nebenbedingungen:

Jede Stadt wird genau einmal betreten:

$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = 1 \quad \forall v \in V$

Wenn ich in eine Stadt hineinfahre, muss ich auch wieder hinausfahren:

$\sum_{u \in V : \{u,v\} \in E} x_{uv} = \sum_{w \in V : \{v,w\} \in E} x_{vw} \ \forall v \in V$

Verbiete Subtouren:

In keiner echten Untermenge von V darf es eine Subtour (geschlossener Kreis) geben.

$\Leftrightarrow$ Für jede echte Untermenge V' haben wir in $G[V']$ höchstens $|V'| - 1$ Kanten ausgewählt.

$\sum_{u,v \in V'} x_{uv} \leq |V'| - 1 \ \forall V' \subsetneq V$

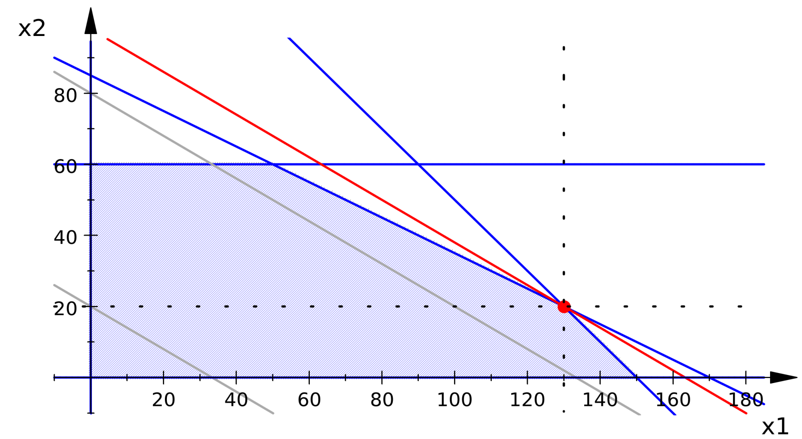
Zielfunktion:

$\sum_{\{u,v\} \in E} w_{uv} x_{uv} \to \min$

Fertig?

$\to$ Übungsaufgabe

Stichworte heute



Mathematische Programmierung:
Variablen, Nebenbedinungen, Zielfunktion, lineares Programm (LP), ganzzahliges lineares Programm (ILP), ganzzahlige & binäre Variablen, graphische Methode für lineare Programme mit zwei Variablen

Optimierungsprobleme: Produktionsplanung, Knotenüberdeckung, 1-Besuch-Handlungsreisendenproblem, Tourenplanung für den Schulbus