Graphen und diskrete Optimierung

im Bachelorstudiengang 'Informatik und Nachhaltigkeit'

Nachtrag Komplexität: die Klasse coNP

Marie Schmidt

Nachtrag zur Vorlesung am 24.05.2023 (und insbesondere zur Übung am 26.5.)

kein offizieller Vorlesungsstoff!

Problemklassen NP und coNP

Ein *Entscheidungs*problem liegt in **Problemklasse NP**, wenn jede JA-Instanz ein **Zertifikat** polynomieller Länge besitzt, das in polynomieller Zeit verifiziert werden kann.

Problemklassen NP und coNP

Ein *Entscheidungs*problem liegt in **Problemklasse NP**, wenn jede JA-Instanz ein **Zertifikat** polynomieller Länge besitzt, das in polynomieller Zeit verifiziert werden kann.

Entscheidungsproblem 'Clique' ('Clique 2')
Gegeben: Ein Graph G, eine Zahl k
Frage: Gibt es in Graph G eine Clique von Größe k?

Problemklassen NP und coNP

Ein *Entscheidungs*problem liegt in **Problemklasse NP**, wenn jede JA-Instanz ein **Zertifikat** polynomieller Länge besitzt, das in polynomieller Zeit verifiziert werden kann.

Entscheidungsproblem 'Clique' ('Clique 2')
Gegeben: Ein Graph G, eine Zahl k
Frage: Gibt es in Graph G eine Clique von Größe k?

Ein *Entscheidungs*problem liegt in **Problemklasse coNP**, wenn jede NEIN-Instanz ein **Zertifikat** polynomieller Länge besitzt, das in polynomieller Zeit verifiziert werden kann.

Problemklassen NP und coNP

Ein *Entscheidungs*problem liegt in **Problemklasse NP**, wenn jede JA-Instanz ein **Zertifikat** polynomieller Länge besitzt, das in polynomieller Zeit verifiziert werden kann.

Entscheidungsproblem 'Clique' ('Clique 2')
Gegeben: Ein Graph G, eine Zahl k
Frage: Gibt es in Graph G eine Clique von Größe k?

Ein *Entscheidungs*problem liegt in **Problemklasse coNP**, wenn jede NEIN-Instanz ein **Zertifikat** polynomieller Länge besitzt, das in polynomieller Zeit verifiziert werden kann.

Entscheidungsproblem '$Cli\bar{q}ue$ 2**'**
Gegeben: Ein Graph G, eine Zahl k
Frage: Gibt es in Graph G KEINE Clique von Größe k? (Anders formuliert: Sind alle Cliquen in G kleiner als k?)

Problemklassen NP und coNP

Ein *Entscheidungs*problem liegt in **Problemklasse NP**, wenn jede JA-Instanz ein **Zertifikat** polynomieller Länge besitzt, das in polynomieller Zeit verifiziert werden kann.

Entscheidungsproblem 'Clique' ('Clique 2')
Gegeben: Ein Graph G, eine Zahl k
Frage: Gibt es in Graph G eine Clique von Größe k?

Ein *Entscheidungs*problem liegt in **Problemklasse coNP**, wenn jede NEIN-Instanz ein **Zertifikat** polynomieller Länge besitzt, das in polynomieller Zeit verifiziert werden kann.

Entscheidungsproblem '$Cli\bar{q}ue$ 2**'**
Gegeben: Ein Graph G, eine Zahl k
Frage: Gibt es in Graph G KEINE Clique von Größe k? (Anders formuliert: Sind alle Cliquen in G kleiner als k?)

Zertifikat?

Problemklassen NP und coNP

Ein *Entscheidungs*problem liegt in **Problemklasse NP**, wenn jede JA-Instanz ein **Zertifikat** polynomieller Länge besitzt, das in polynomieller Zeit verifiziert werden kann.

Entscheidungsproblem 'Clique' ('Clique 2')
Gegeben: Ein Graph G, eine Zahl k
Frage: Gibt es in Graph G eine Clique von Größe k?

Ein *Entscheidungs*problem liegt in **Problemklasse coNP**, wenn jede NEIN-Instanz ein **Zertifikat** polynomieller Länge besitzt, das in polynomieller Zeit verifiziert werden kann.

Entscheidungsproblem '$Cli\bar{q}ue$ 2**'**
Gegeben: Ein Graph G, eine Zahl k
Frage: Gibt es in Graph G KEINE Clique von Größe k? (Anders formuliert: Sind alle Cliquen in G kleiner als k?)

Zertifikat?

Clique der Größe k

Problemklassen NP und coNP

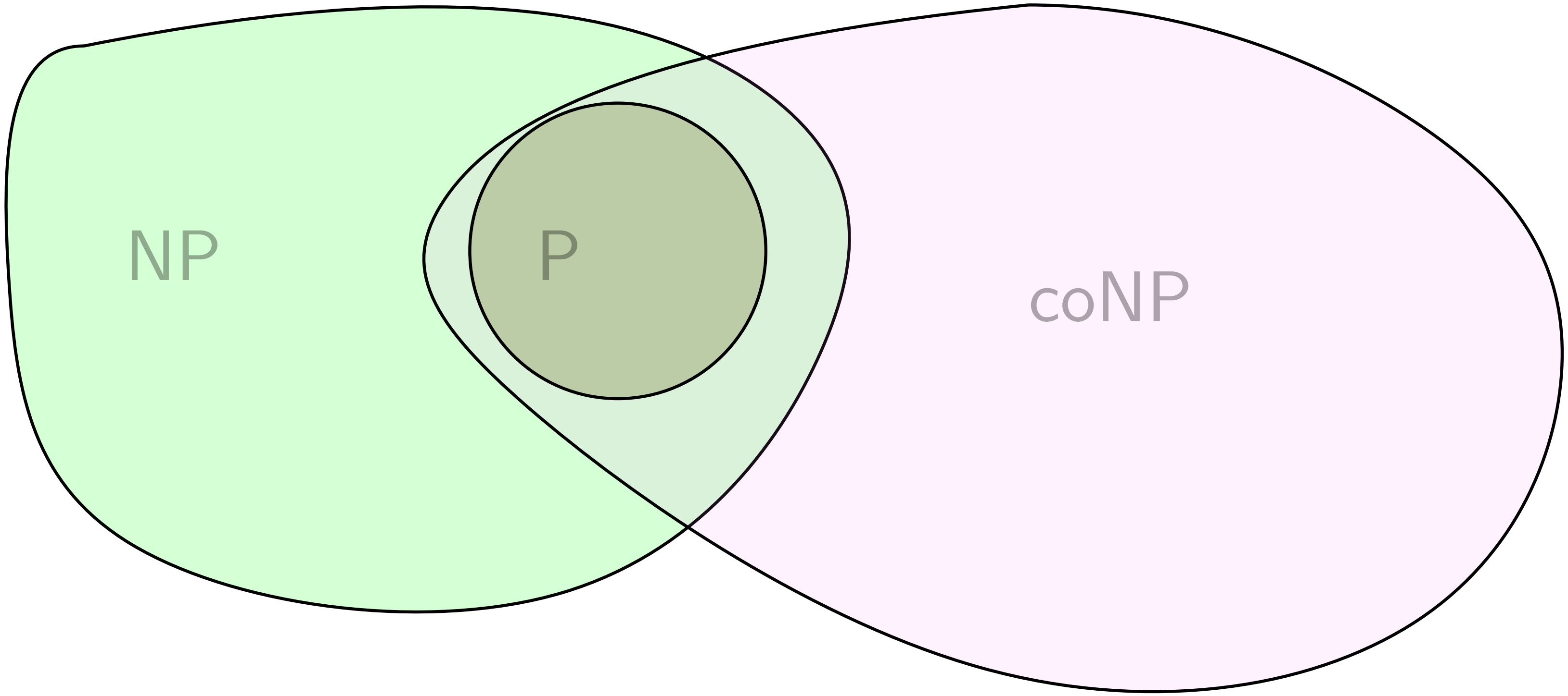
Ein *Entscheidungs*problem liegt in **Problemklasse NP**, wenn jede JA-Instanz ein **Zertifikat** polynomieller Länge besitzt, das in polynomieller Zeit verifiziert werden kann.

Entscheidungsproblem 'Clique' ('Clique 2')
Gegeben: Ein Graph G, eine Zahl k
Frage: Gibt es in Graph G eine Clique von Größe k?

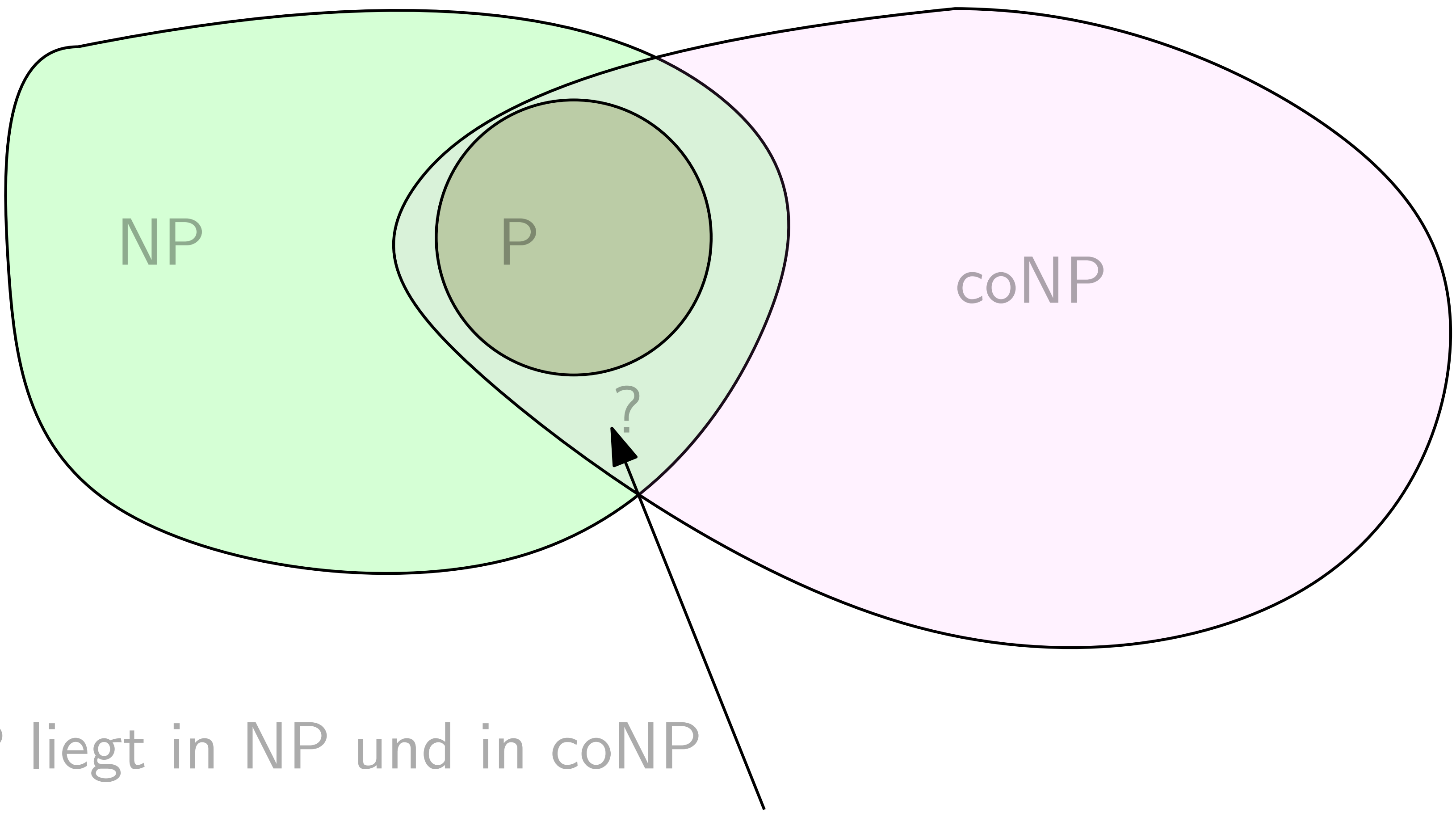
Ein *Entscheidungs*problem liegt in **Problemklasse coNP**, wenn jede NEIN-Instanz ein **Zertifikat** polynomieller Länge besitzt, das in polynomieller Zeit verifiziert werden kann.

Entscheidungsproblem '$Cli\bar{q}ue$ 2**'**
Gegeben: Ein Graph G, eine Zahl k
Frage: Gibt es in Graph G KEINE Clique von Größe k? (Anders formuliert: Sind alle Cliquen in G kleiner als k?)

Allgemein gilt: Ist ein Entscheidungsproblem X mit Frage: 'Gilt xy?' in NP, dann ist das Entscheidungsproblem $\bar{X}$ mit Frage 'Gilt xy nicht?' in coNP.

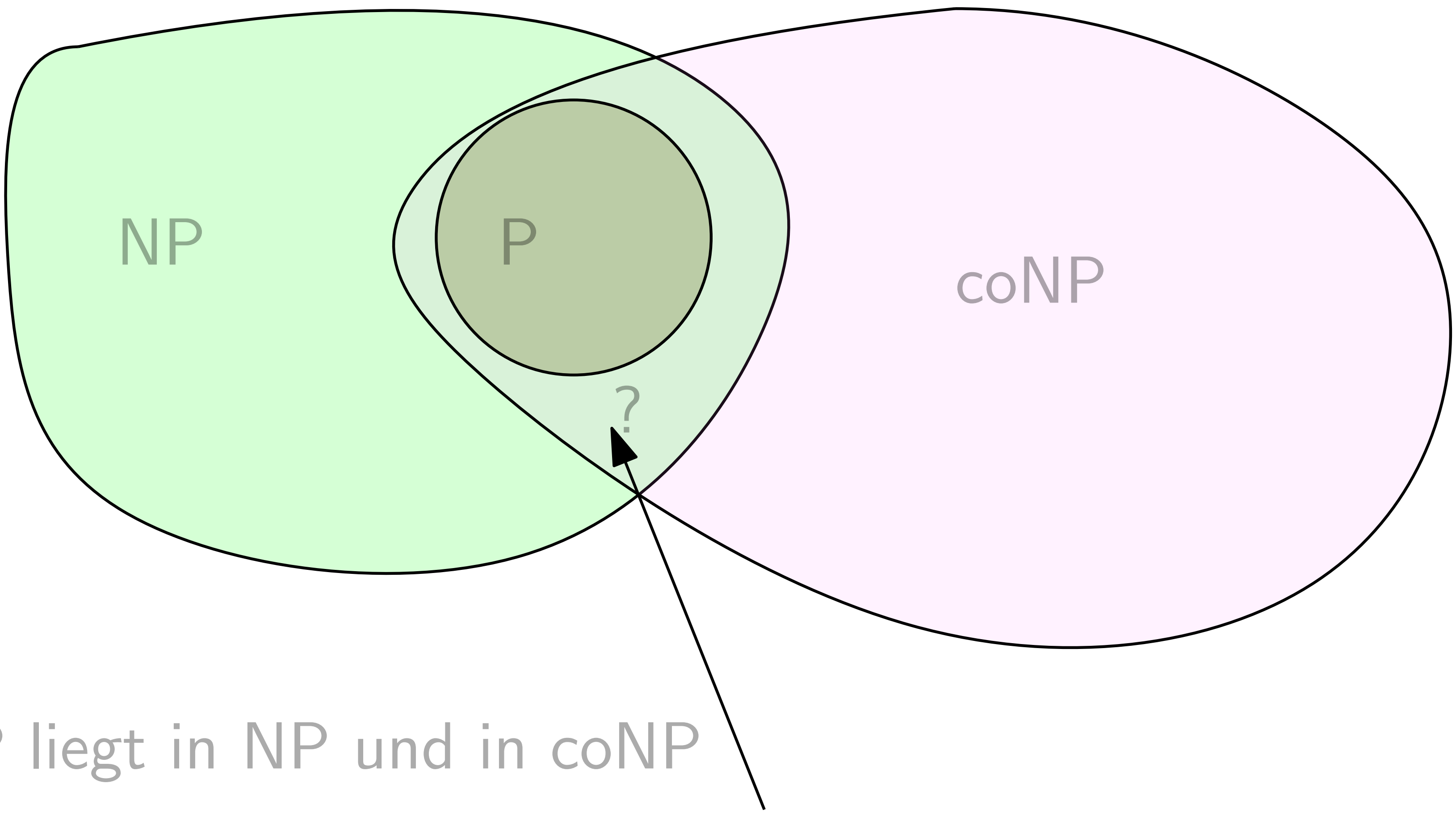


P liegt in NP und in coNP



P liegt in NP und in coNP

Es ist unbekannt, ob es auch Probleme in NP $\cap$ coNP gibt, die nicht in P liegen.



P liegt in NP und in coNP

Es ist unbekannt, ob es auch Probleme in NP $\cap$ coNP gibt, die nicht in P liegen.

Insbesondere wird vermutet, dass $NP \neq coNP$

EP 'Clique 1' (aus der Übung)

Entscheidungsproblem 'Clique 1'
Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Knotenmenge V'
Frage: Ist V' eine maximale (im Sinne von: größtmögliche) Clique in G?

EP 'Clique 1' (aus der Übung)

Entscheidungsproblem 'Clique 1'
Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Knotenmenge V'
Frage: Ist V' eine maximale (im Sinne von: größtmögliche) Clique in G?

'Clique 1' ist in coNP!

EP 'Clique 1' (aus der Übung)

Entscheidungsproblem 'Clique 1'
Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Knotenmenge V'
Frage: Ist V' eine maximale (im Sinne von: größtmögliche) Clique in G?

'Clique 1' ist in coNP!

Zertifikat (für NEIN-Instanzen): eine größere Clique

EP 'Clique 1' (aus der Übung)

Entscheidungsproblem 'Clique 1'
Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Knotenmenge V'
Frage: Ist V' eine maximale (im Sinne von: größtmögliche) Clique in G?

'Clique 1' ist in coNP!

Zertifikat (für NEIN-Instanzen): eine größere Clique

Beh: 'Clique 1' ist coNP-vollständig (siehe folgende Folien)

coNP-vollständig und coNP-schwer

NP-schwer
Ein Entscheidungsproblem heißt NP-schwer, wenn wir alle Entscheidungsprobleme aus NP darauf reduzieren können.

NP-schwer
Ein Entscheidungsproblem heißt NP-vollständig, wenn es in NP liegt und NP-vollständig ist.

coNP-vollständig und coNP-schwer

NP-schwer
Ein Entscheidungsproblem heißt NP-schwer, wenn wir alle Entscheidungsprobleme aus NP darauf reduzieren können.

NP-schwer
Ein Entscheidungsproblem heißt NP-vollständig, wenn es in NP liegt und NP-vollständig ist.

coNP-schwer
Ein Entscheidungsproblem heißt coNP-schwer, wenn wir alle Entscheidungsprobleme aus coNP darauf reduzieren können.

coNP-vollständig und coNP-schwer

NP-schwer
Ein Entscheidungsproblem heißt NP-schwer, wenn wir alle Entscheidungsprobleme aus NP darauf reduzieren können.

NP-schwer
Ein Entscheidungsproblem heißt NP-vollständig, wenn es in NP liegt und NP-vollständig ist.

coNP-schwer
Ein Entscheidungsproblem heißt coNP-schwer, wenn wir alle Entscheidungsprobleme aus coNP darauf reduzieren können.

coNP-vollständig
Ein Problem heißt coNP-vollständig, wenn es in coNP ist und coNP-schwer

coNP-vollständig und coNP-schwer

NP-schwer
Ein Entscheidungsproblem heißt NP-schwer, wenn wir alle Entscheidungsprobleme aus NP darauf reduzieren können.

NP-schwer
Ein Entscheidungsproblem heißt NP-vollständig, wenn es in NP liegt und NP-vollständig ist.

coNP-schwer
Ein Entscheidungsproblem heißt coNP-schwer, wenn wir alle Entscheidungsprobleme aus coNP darauf reduzieren können.

coNP-vollständig
Ein Problem heißt coNP-vollständig, wenn es in coNP ist und coNP-schwer

Lemma: X ist NP-vollständig $\Leftrightarrow$ $\bar{X}$ ist coNP-vollständig

'Clique 1' ist coNP-vollständig.

Entscheidungsproblem 'Clique 1'
Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Knotenmenge V'
Frage: Ist V' eine maximale (im Sinne von: größtmögliche) Clique in G?

Behauptung: EP 'Clique 1' ist coNP-vollständig.

Beweis:

'Clique 1' ist coNP-vollständig.

Entscheidungsproblem 'Clique 1'
Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Knotenmenge V'
Frage: Ist V' eine maximale (im Sinne von: größtmögliche) Clique in G?

Behauptung: EP 'Clique 1' ist coNP-vollständig.

Beweis: Zeige: Clique 1$\geq_p$ $\bar{Clique}$ 2

'Clique 1' ist coNP-vollständig.

Entscheidungsproblem 'Clique 1'
Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Knotenmenge V'
Frage: Ist V' eine maximale (im Sinne von: größtmögliche) Clique in G?

Behauptung: EP 'Clique 1' ist coNP-vollständig.

Beweis: Zeige: Clique $1 \geq_p \bar{Clique}$ 2

Sei (G, k) ein Instanz von $\bar{Clique}$ 2 (Frage ist also: 'Sind alle Cliquen in G kleiner als Größe k?)

Konstruiere Instanz $f(I) = (\tilde{G}, V')$ von Clique 1: Graph $\tilde{G}$ besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten: dem Graph G und einem vollständigen Graphen $G' = (V', E')$ mit $k - 1$ Knoten. Frage ist nun also: Ist V' eine größtmögliche Clique in G?

'Clique 1' ist coNP-vollständig.

Entscheidungsproblem 'Clique 1'
Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Knotenmenge V'
Frage: Ist V' eine maximale (im Sinne von: größtmögliche) Clique in G?

Behauptung: EP 'Clique 1' ist coNP-vollständig.

Beweis: Zeige: Clique $1 \geq_p \bar{Clique}$ 2

Sei (G, k) ein Instanz von $\bar{Clique}$ 2 (Frage ist also: 'Sind alle Cliquen in G kleiner als Größe k?)

Konstruiere Instanz $f(I) = (\tilde{G}, V')$ von Clique 1: Graph $\tilde{G}$ besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten: dem Graph G und einem vollständigen Graphen $G' = (V', E')$ mit $k-1$ Knoten. Frage ist nun also: Ist V' eine größtmögliche Clique in G?

Ist die Antwort für I ('Sind alle Cliquen in G kleiner als k?') NEIN, dann ist die Antwort für $f(I)$: ('Ist V' die größtmögliche Clique?') auch NEIN, denn dann gibt es ja eine größere Clique in G.

'Clique 1' ist coNP-vollständig.

Entscheidungsproblem 'Clique 1'
Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Knotenmenge V'
Frage: Ist V' eine maximale (im Sinne von: größtmögliche) Clique in G?

Behauptung: EP 'Clique 1' ist coNP-vollständig.

Beweis: Zeige: Clique $1 \geq_p \bar{Clique}\ 2$

Sei (G, k) ein Instanz von $\bar{Clique}\ 2$ (Frage ist also: 'Sind alle Cliquen in G kleiner als Größe k?)

Konstruiere Instanz $f(I) = (\tilde{G}, V')$ von Clique 1: Graph $\tilde{G}$ besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten: dem Graph G und einem vollständigen Graphen $G' = (V', E')$ mit $k - 1$ Knoten. Frage ist nun also: Ist V' eine größtmögliche Clique in G?

Ist die Antwort für I für $f(I)$: ('Ist V' die größtmögliche Clique?') NEIN, dann gibt es eine Clique mit mindestens k Knoten in $\tilde{G}$ - das muss dann eine Clique in G sein, da V' ja nur $k - 1$ Knoten hat und nicht mit Kntoen aus G verbunden ist. Also ist die Antwort für I (Sind alle Cliquen in G kleiner als k) NEIN.

Ist 'Clique 1' auch NP-schwer?

Angenommen 'Clique 1' wäre NP-schwer.

Ist 'Clique 1' auch NP-schwer?

Angenommen 'Clique 1' wäre NP-schwer.

Dann könnte ich JEDES Problem aus NP auf Clique 1 reduzieren.

Ist 'Clique 1' auch NP-schwer?

Angenommen 'Clique 1' wäre NP-schwer.

Dann könnte ich JEDES Problem aus NP auf Clique 1 reduzieren.

Aber Clique 1 ist ja auch in coNP (siehe Slide 3), also kann ich es auf jedes co-NP-vollständige Problem reduzieren.

Ist 'Clique 1' auch NP-schwer?

Angenommen 'Clique 1' wäre NP-schwer.

Dann könnte ich JEDES Problem aus NP auf Clique 1 reduzieren.

Aber Clique 1 ist ja auch in coNP (siehe Slide 3), also kann ich es auf jedes co-NP-vollständige Problem reduzieren.

Also könnte ich (weil Reduktionen transitiv sind) jedes Problem aus NP auf jedes Problem aus coNP reduzieren.

Dann wäre NP eine Teilmenge von coNP.

Ist 'Clique 1' auch NP-schwer?

Angenommen 'Clique 1' wäre NP-schwer.

Dann könnte ich JEDES Problem aus NP auf Clique 1 reduzieren.

Aber Clique 1 ist ja auch in coNP (siehe Slide 3), also kann ich es auf jedes co-NP-vollständige Problem reduzieren.

Also könnte ich (weil Reduktionen transitiv sind) jedes Problem aus NP auf jedes Problem aus coNP reduzieren.

Dann wäre NP eine Teilmenge von coNP.

Dann könnte man (über $Cli\bar{q}ue1$) genauso argumentieren, dass $coNP \subset NP$, also würde folgen, dass $coNP = NP$.

Ist 'Clique 1' auch NP-schwer?

Angenommen 'Clique 1' wäre NP-schwer.

Dann könnte ich JEDES Problem aus NP auf Clique 1 reduzieren.

Aber Clique 1 ist ja auch in coNP (siehe Slide 3), also kann ich es auf jedes co-NP-vollständige Problem reduzieren.

Also könnte ich (weil Reduktionen transitiv sind) jedes Problem aus NP auf jedes Problem aus coNP reduzieren.

Dann wäre NP eine Teilmenge von coNP.

Dann könnte man (über $Cli\bar{q}ue1$) genauso argumentieren, dass $coNP \subset NP$, also würde folgen, dass $coNP = NP$.

Das wäre ein ziemlicher Durchbruch in der Komplexitätstheorie, denn bisher hat ja noch niemand *überhaupt* ein Problem finden können, das in $(NP \cap coNP) \setminus P$ liegt!

Achtung!

In der Praxis ist es ziemlich egal, ob ein Problem NP-schwer oder coNP-schwer ist:
das Finden eines polynomiellen Algorithmus würde in beiden Fällen implizieren, dass $P = NP$,
dh es ist unwahrscheinlich, dass wir einen polynomiellen Algorithmus finden!

Achtung!

In der Praxis ist es ziemlich egal, ob ein Problem NP-schwer oder coNP-schwer ist:
das Finden eines polynomiellen Algorithmus würde in beiden Fällen implizieren, dass $P = NP$,
dh es ist unwahrscheinlich, dass wir einen polynomiellen Algorithmus finden!

Aus komplexitätstheoretischer Sicht ist die Definition, die wir in der Vorlesung benutzen: 'Ein Problem ist NP schwer, wenn ein polynomieller Algorithmus für das Problem genutzt werden kann um jedes Problem in NP zu lösen' also eigentlich falsch/ungenau.

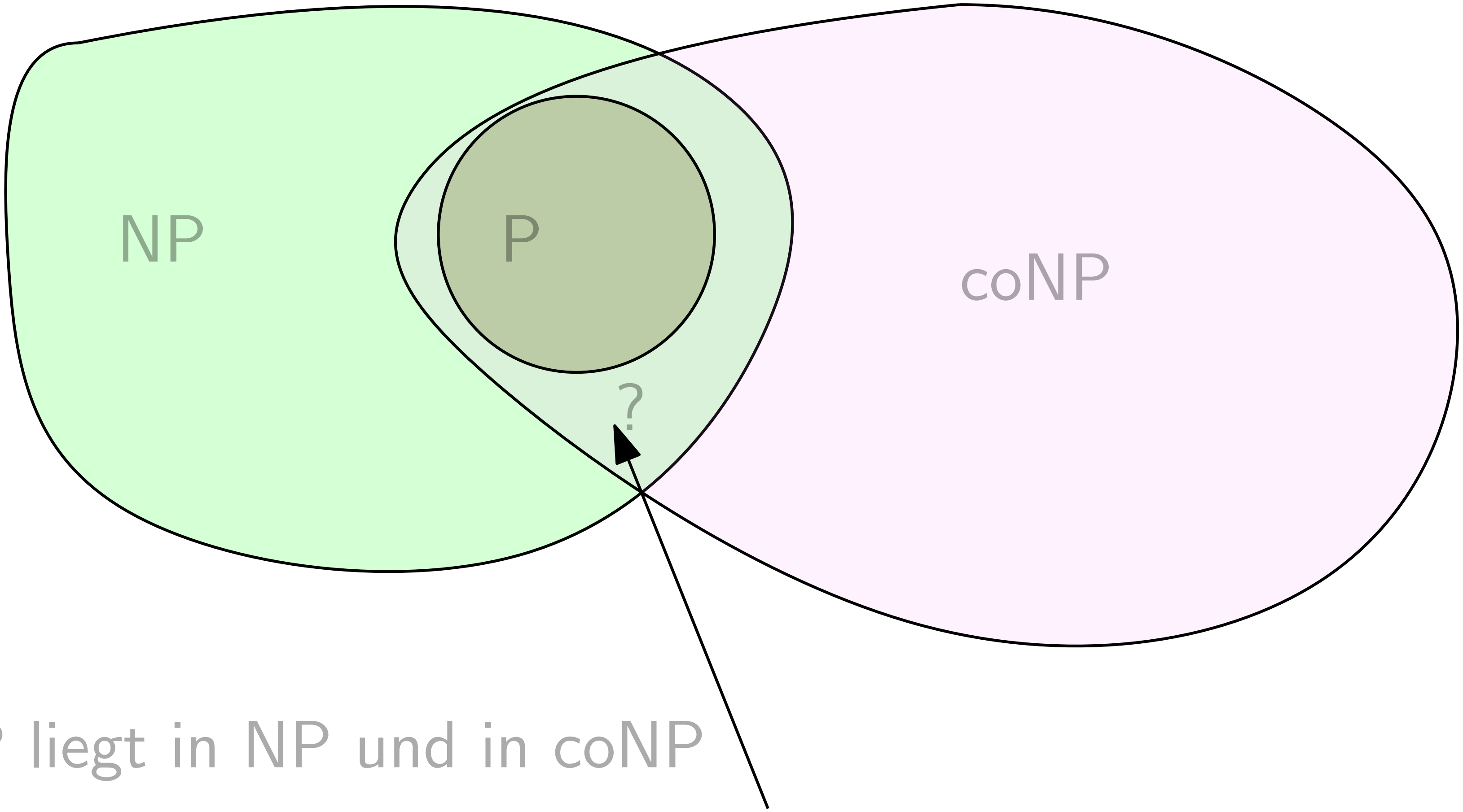
Achtung!

In der Praxis ist es ziemlich egal, ob ein Problem NP-schwer oder coNP-schwer ist:
das Finden eines polynomiellen Algorithmus würde in beiden Fällen implizieren, dass $P = NP$,
dh es ist unwahrscheinlich, dass wir einen polynomiellen Algorithmus finden!

Aus komplexitätstheoretischer Sicht ist die Definition, die wir in der Vorlesung benutzen: 'Ein Problem ist NP schwer, wenn ein polynomieller Algorithmus für das Problem genutzt werden kann um jedes Problem in NP zu lösen' also eigentlich falsch/ungenau.

Für unsere Zwecke aber völlig ausreichend (wir wollen ja nur begründen, dass das Problem 'schwer' ist - ob NP-schwer oder coNP-schwer ist uns egal)

Achtung



P liegt in NP und in coNP

Es ist unbekannt, ob es auch Probleme in NP ∩ coNP gibt, die nicht in P liegen.

Insbesondere wird vermutet, dass $NP \neq coNP$

NP und coNP