Graphen und diskrete Optimierung

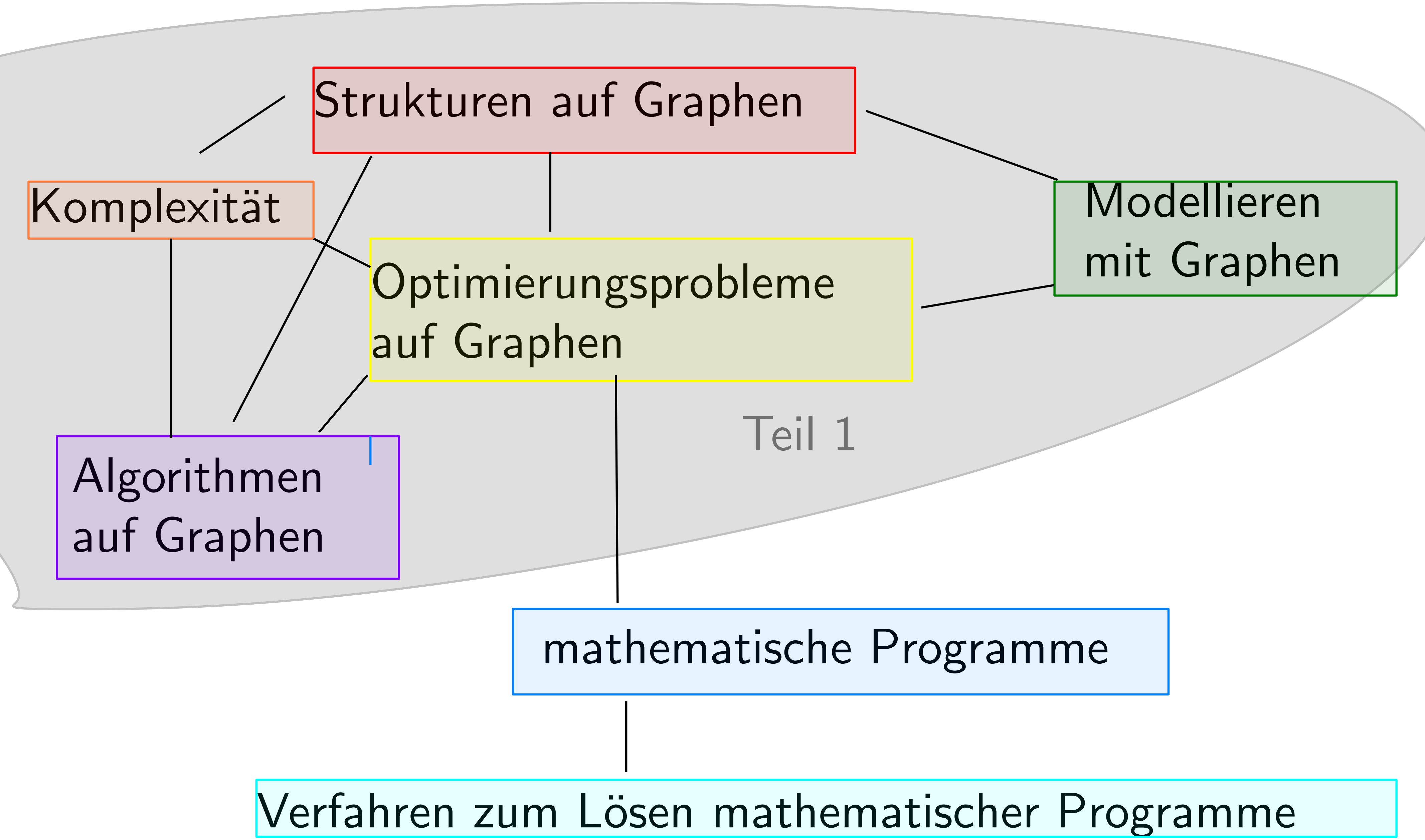
im Bachelorstudiengang 'Informatik und Nachhaltigkeit'

Flussprobleme 2, Matchings, Eckenüberdeckungen

Marie Schmidt

10.05.2023

Worum soll er hier gehen?

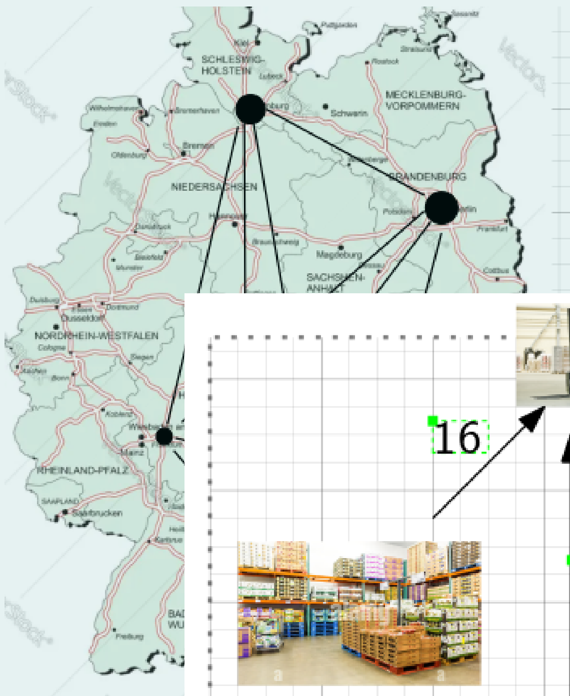


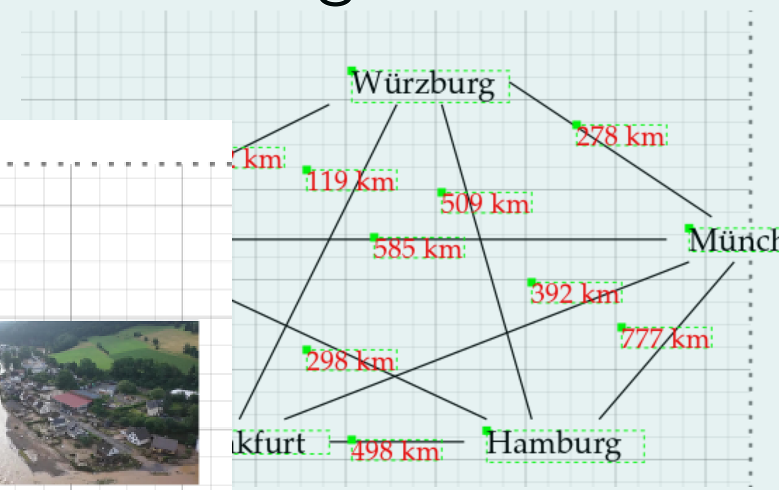
Vorlesungsübersicht

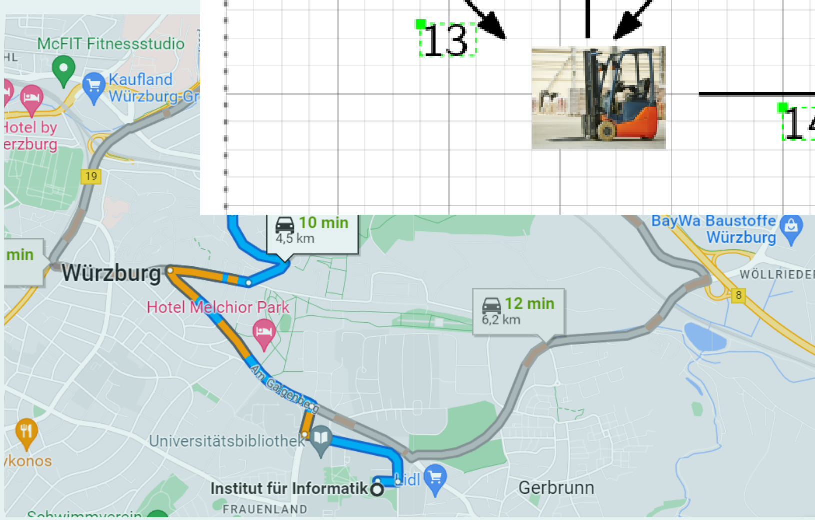
- Einführung: Modellieren auf Graphen ✓
- Teil 1: Graphen und Algorithmen auf Graphen
  - Graphen modellieren räumliche Zusammenhänge
    - Wege: Dijkstra ✓, Bellmann-Ford ✓, multikriterielle Wege ✓
    - Touren ✓
    - Flüsse: maximale Flüsse ✓, Strömungen, b-Flüsse, kostenminimale Flüsse
  - Graphen modellieren Beziehungen
    - Matchings
    - (Knotenüberdeckungen)
    - (unabhängige Mengen)
    - Färbungsprobleme
    - ...
  - Algorithmen und (Problem-)Komplexität
- Teil 2: Lineare und ganzzahlige Optimierung auf Graphen
  - ...

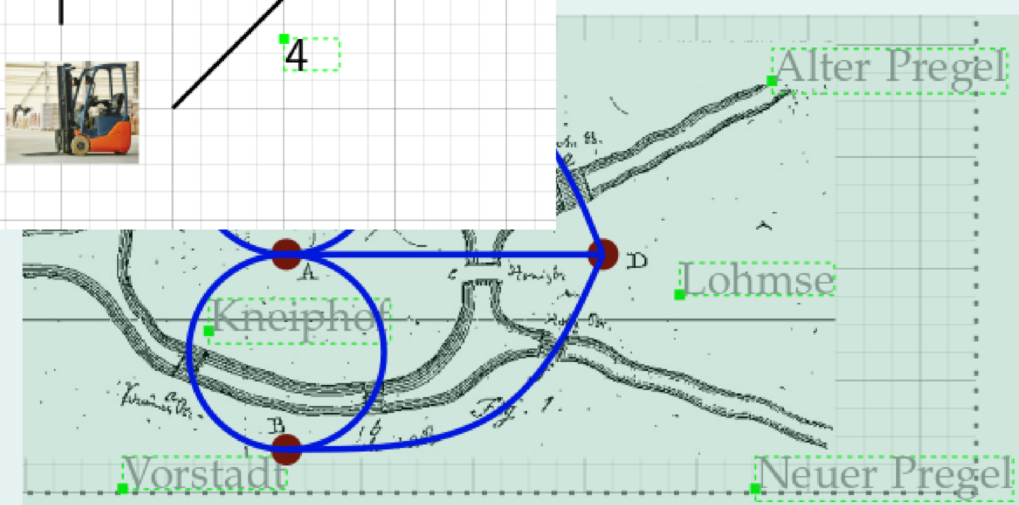
Worum geht es heute: erstmal nochmal: Flüsse

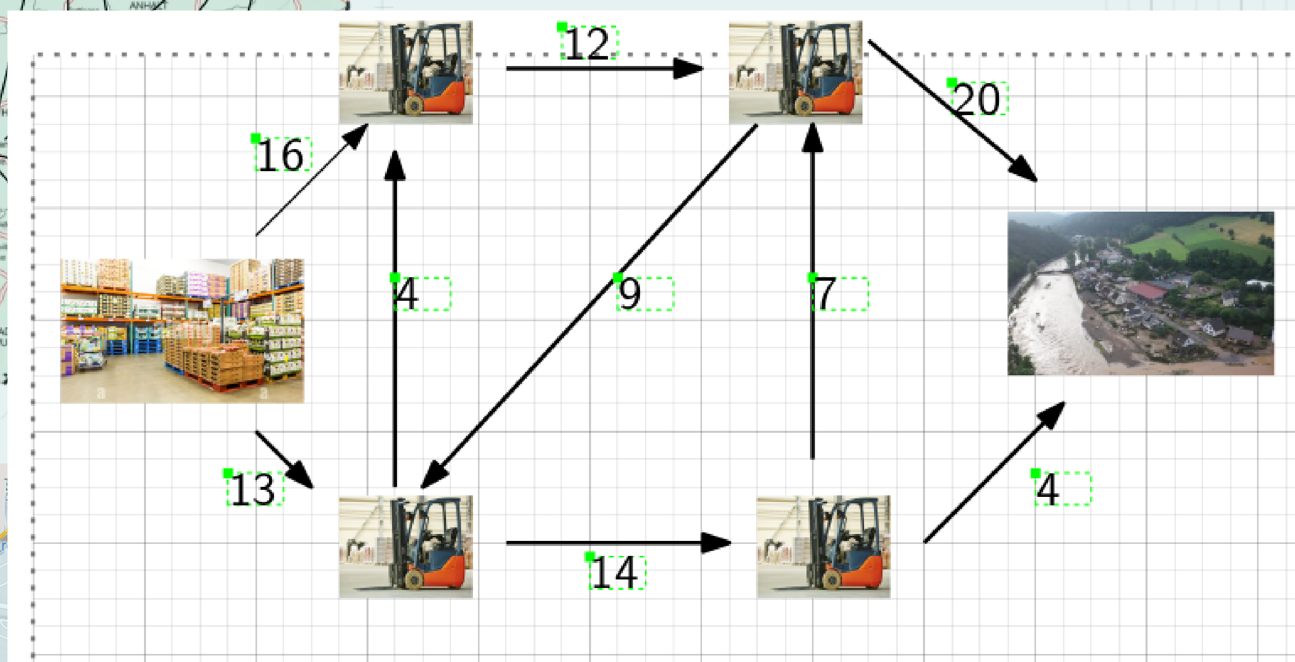
heute: Knoten stehen für Orte, Kanten für Verbindungen zwischen Orten, Kantenlabels für Entfernungen





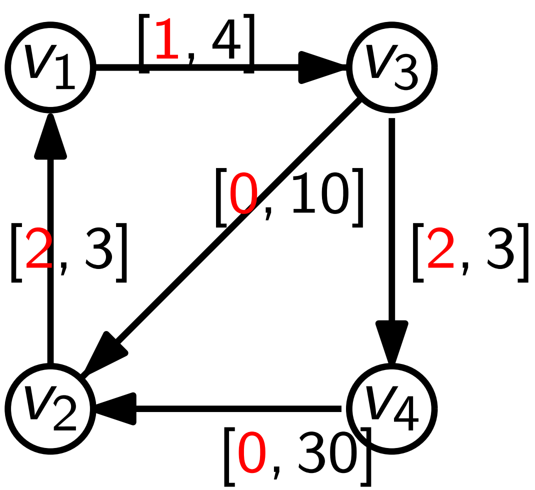






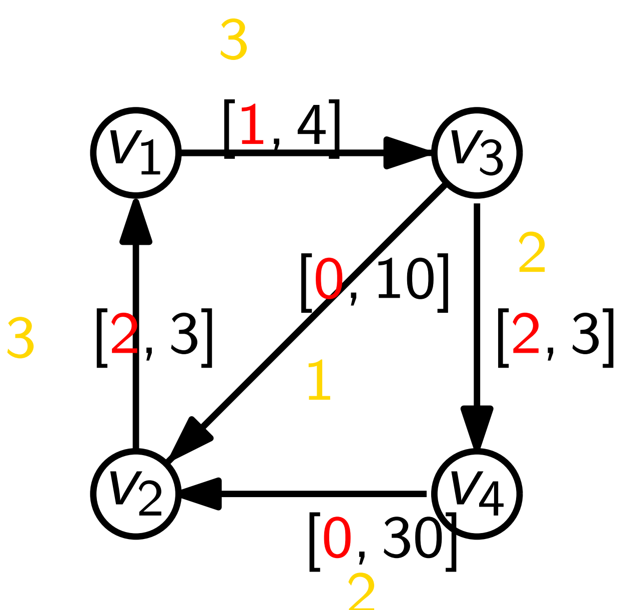
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$



Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

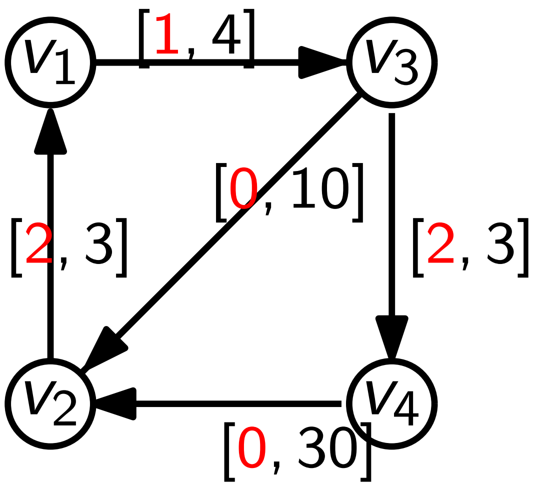
Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$



Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$:



Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

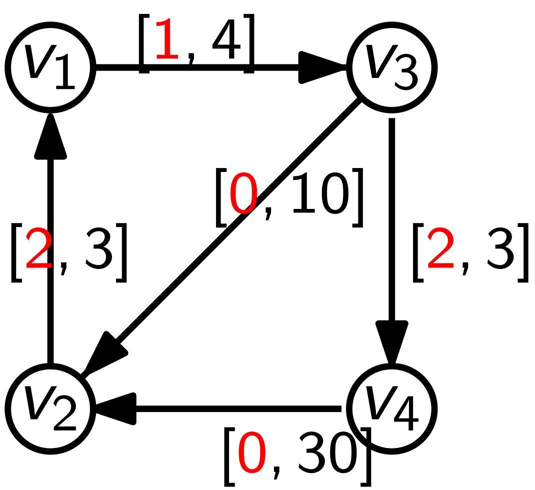
Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \le f(e) \le c(e)$

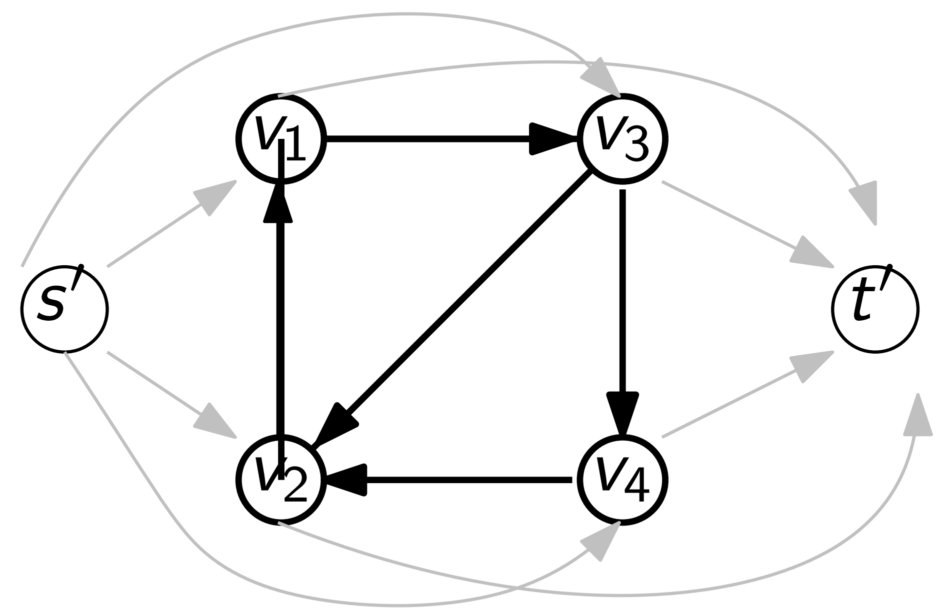
Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$: $V' = V \cup \{s', t'\}$,

Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$: $V' = V \cup \{s', t'\}$,
$E' = E \cup \{(s', v) : v \in V\} \cup \{(v, t') : v \in V\}$

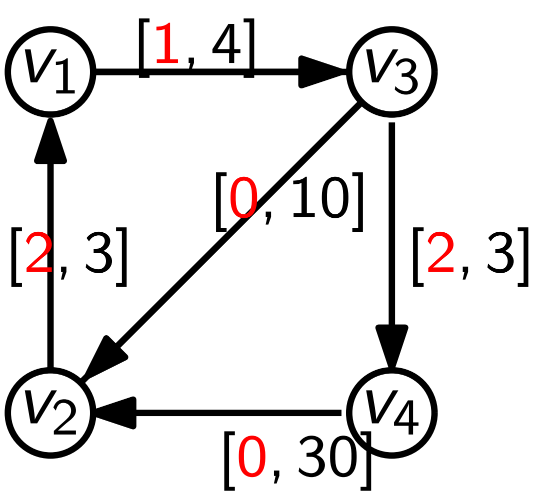


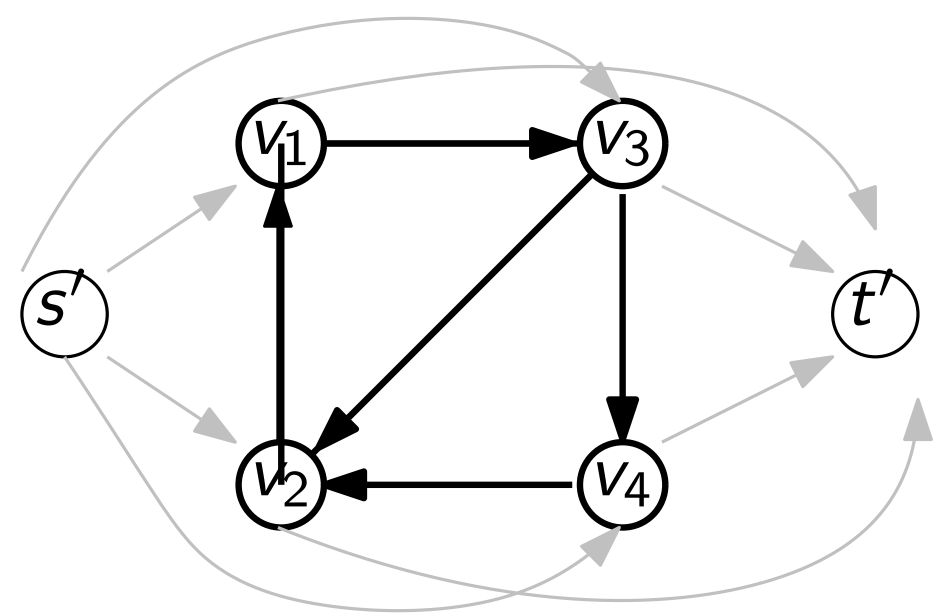


Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V :$ Nettozufl.$_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$: $V' = V \cup \{s', t'\}$,
$E' = E \cup \{(s', v) : v \in V\} \cup \{(v, t') : v \in V\}$
$l'(e) := 0 \ \forall e \in E'$





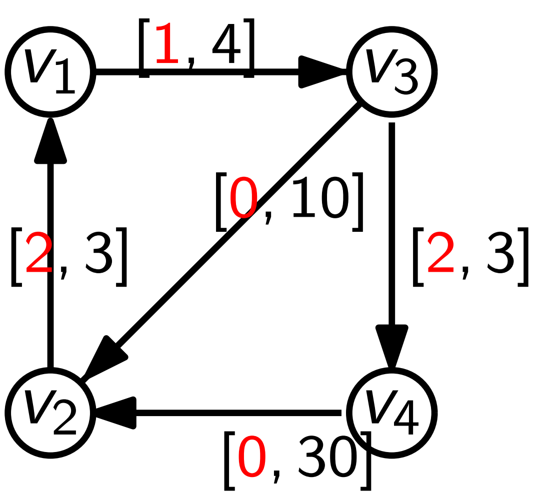
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

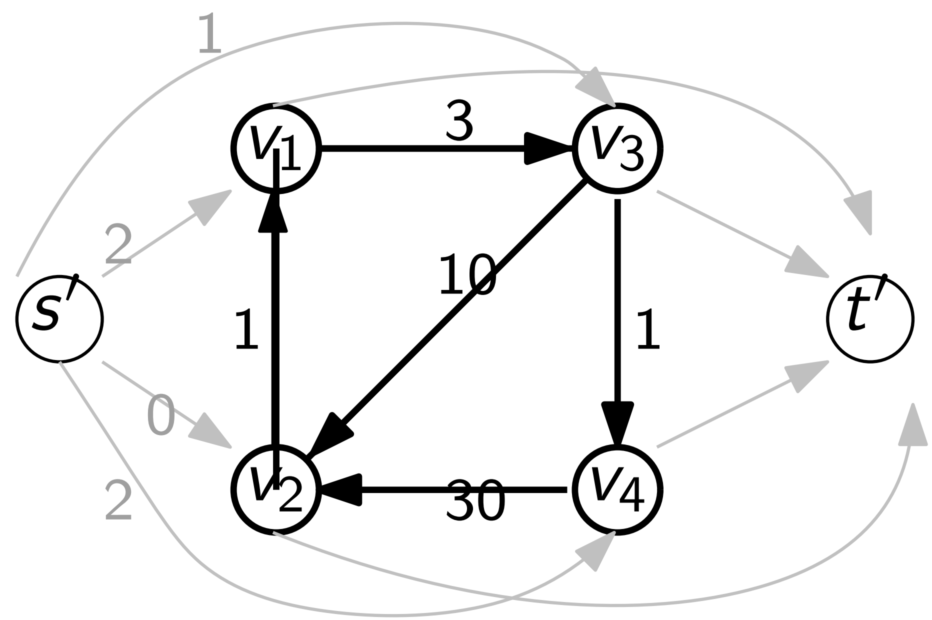
Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$: $V' = V \cup \{s', t'\}$,

$E' = E \cup \{(s', v) : v \in V\} \cup \{(v, t') : v \in V\}$

$l'(e) := 0 \ \forall e \in E' \quad c'(e) := c(e) - l(e) \ \forall e \in E$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

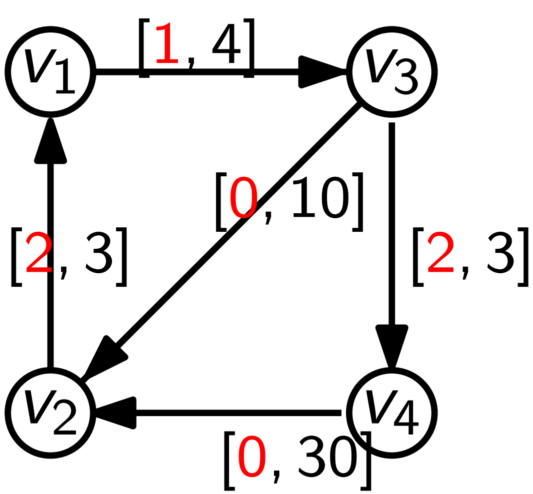
Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

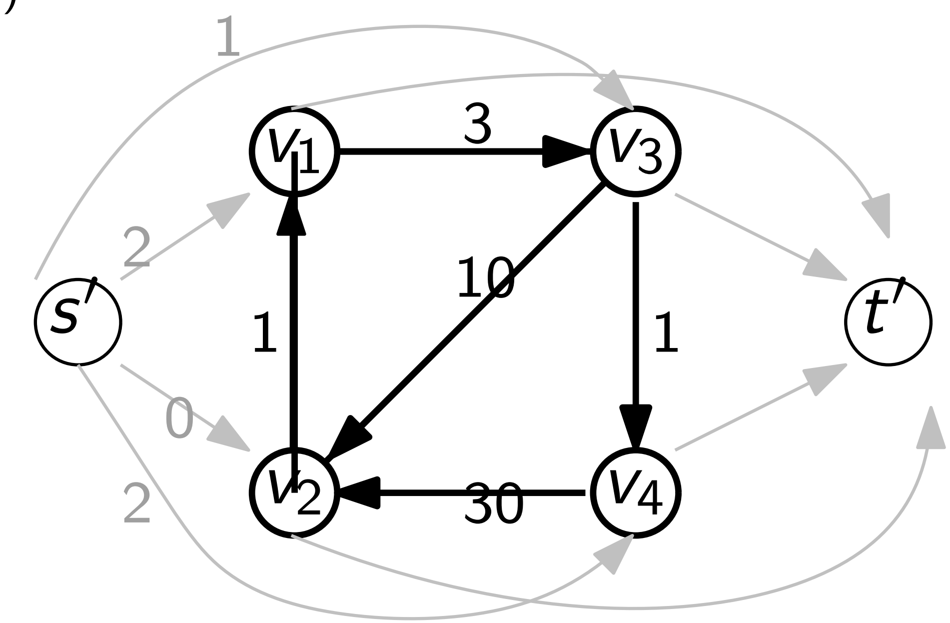
Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$: $V' = V \cup \{s', t'\}$,

$E' = E \cup \{(s', v) : v \in V\} \cup \{(v, t') : v \in V\}$

$l'(e) := 0 \ \forall e \in E' \quad c'(e) := c(e) - l(e) \ \forall e \in E$

für alle $v \in V$: $c'((s', v)) = \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

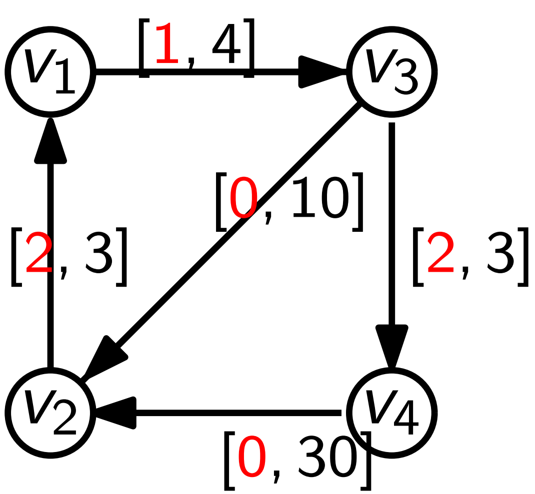
Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

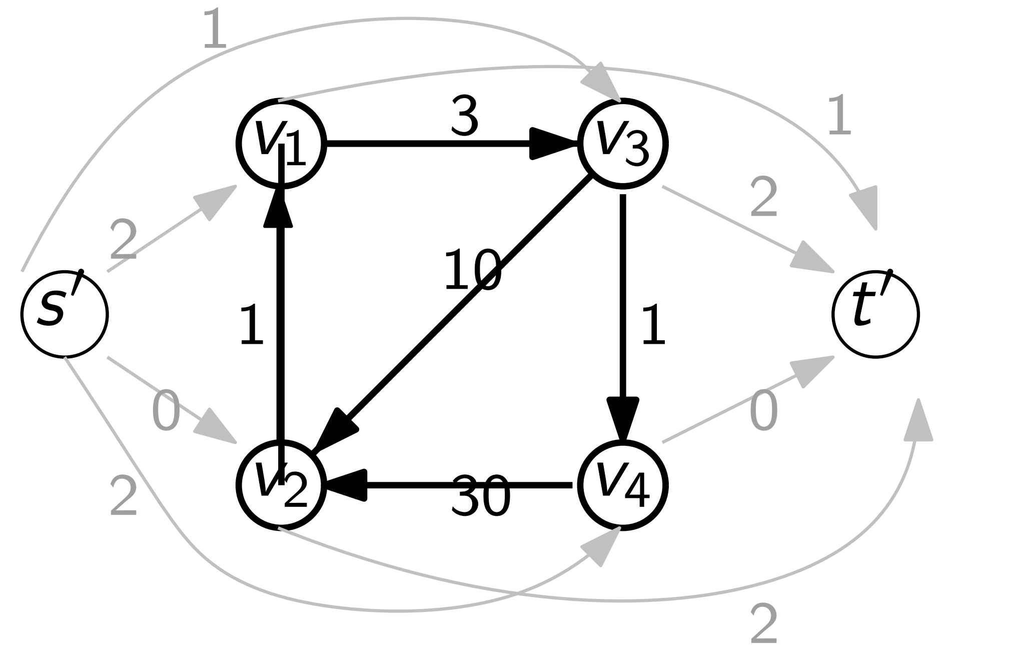
Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$: $V' = V \cup \{s', t'\}$,

$E' = E \cup \{(s', v) : v \in V\} \cup \{(v, t') : v \in V\}$

$l'(e) := 0 \ \forall e \in E' \quad c'(e) := c(e) - l(e) \ \forall e \in E$

für alle $v \in V$: $c'((s', v)) = \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)$ und $c'((v, t') = \sum_{e \in \delta^+(v)} l(e)$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

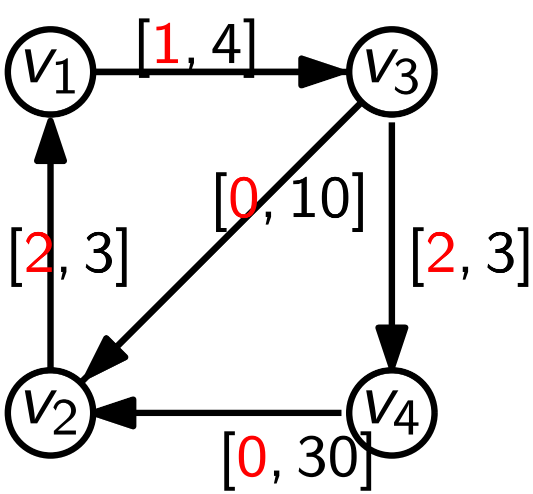
Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$: $V' = V \cup \{s', t'\}$,

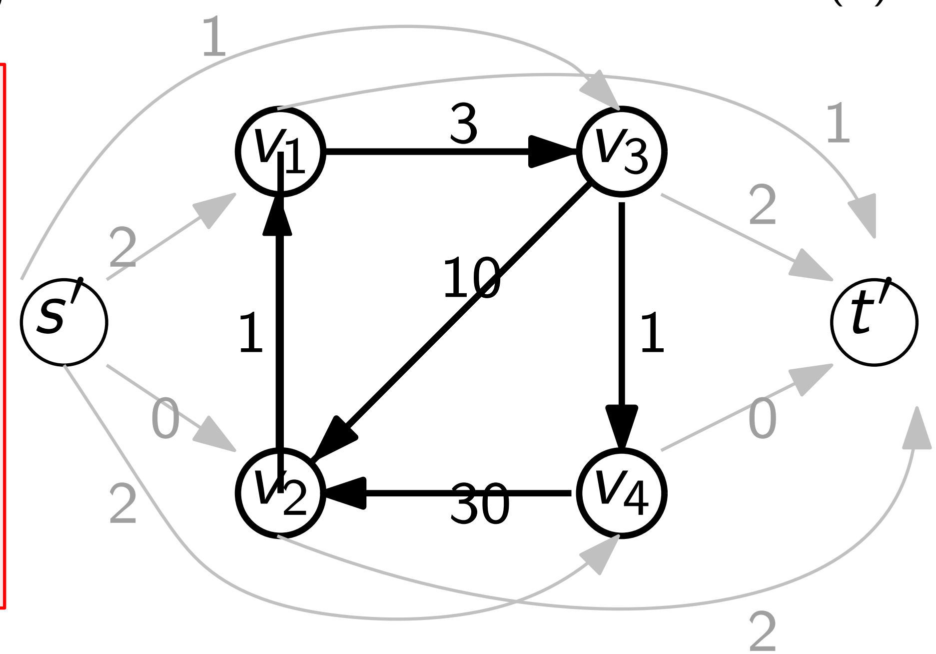
$E' = E \cup \{(s', v) : v \in V\} \cup \{(v, t') : v \in V\}$

$l'(e) := 0 \ \forall e \in E' \quad c'(e) := c(e) - l(e) \ \forall e \in E$

für alle $v \in V$: $c'((s', v)) = \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)$ und $c'((v, t')) = \sum_{e \in \delta^+(v)} l(e)$



Lemma
Es gibt eine zulässige Strömung in G
$\Leftrightarrow$
Der maximale s'-t'-Fluss in G' hat Wert $\sum_{e \in E} l(e)$.

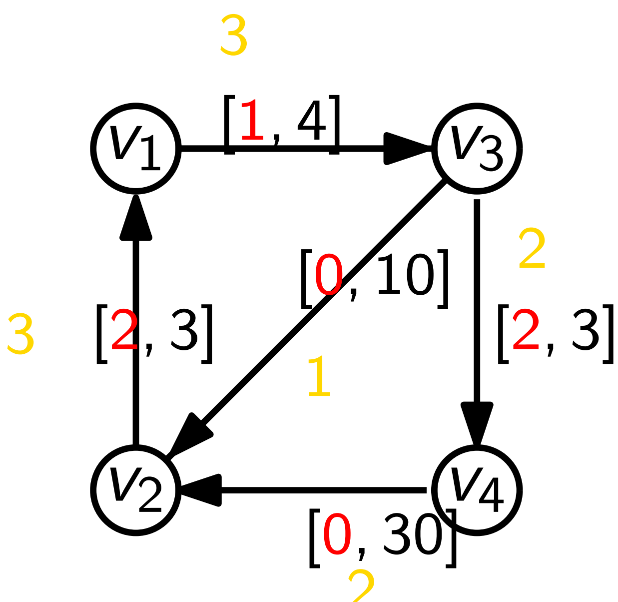


Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

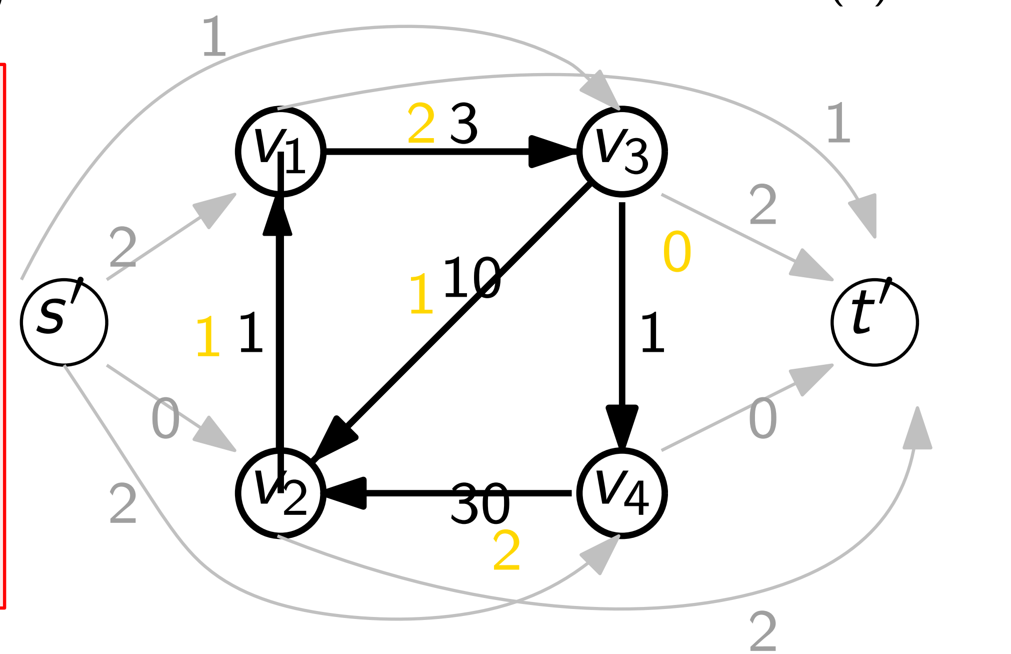
Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$: $V' = V \cup \{s', t'\}$,
$E' = E \cup \{(s', v) : v \in V\} \cup \{(v, t') : v \in V\}$
$l'(e) := 0 \; \forall e \in E' \quad c'(e) := c(e) - l(e) \; \forall e \in E$

für alle $v \in V$: $c'((s', v)) = \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)$ und $c'((v, t')) = \sum_{e \in \delta^+(v)} l(e)$

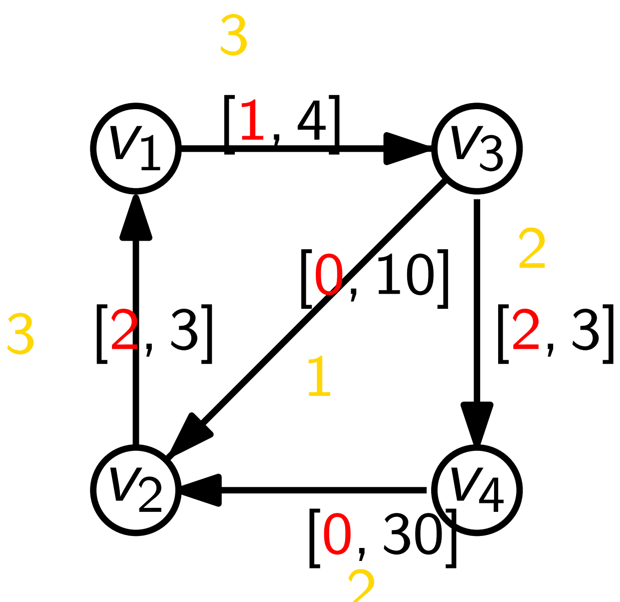


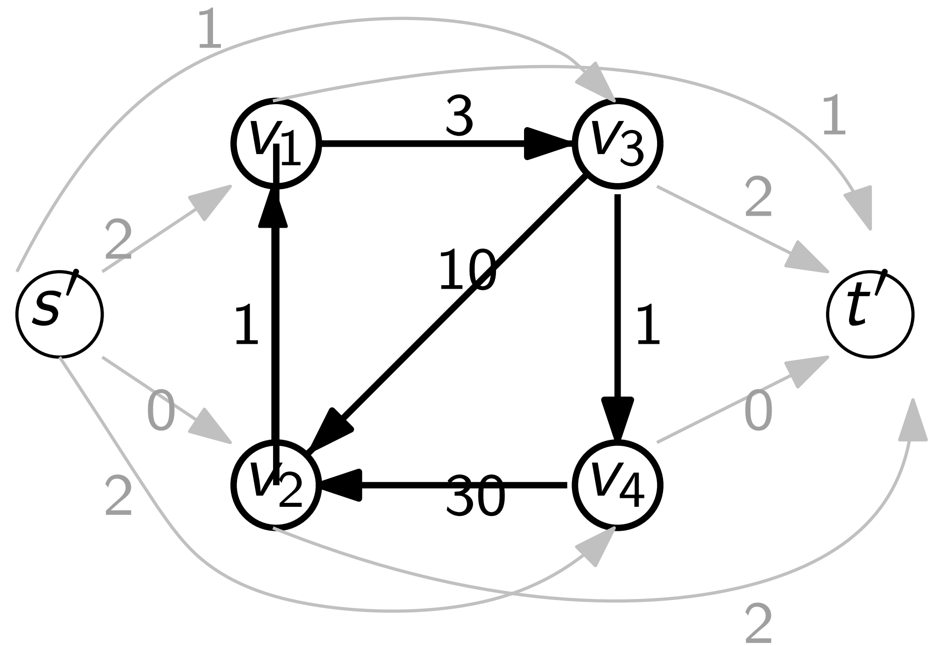
Lemma
Es gibt eine zulässige Strömung in G
$\Leftrightarrow$
Der maximale s'-t'-Fluss in G' hat Wert $\sum_{e \in E} l(e)$.



Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

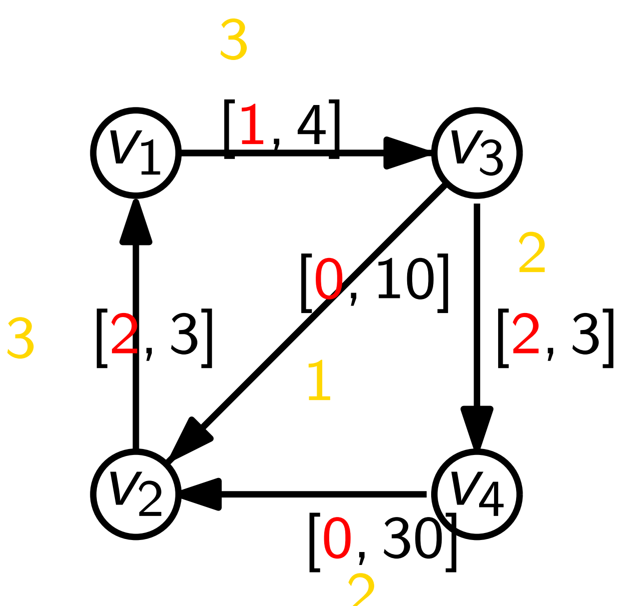
Sei β eine zulässige Strömung auf G.

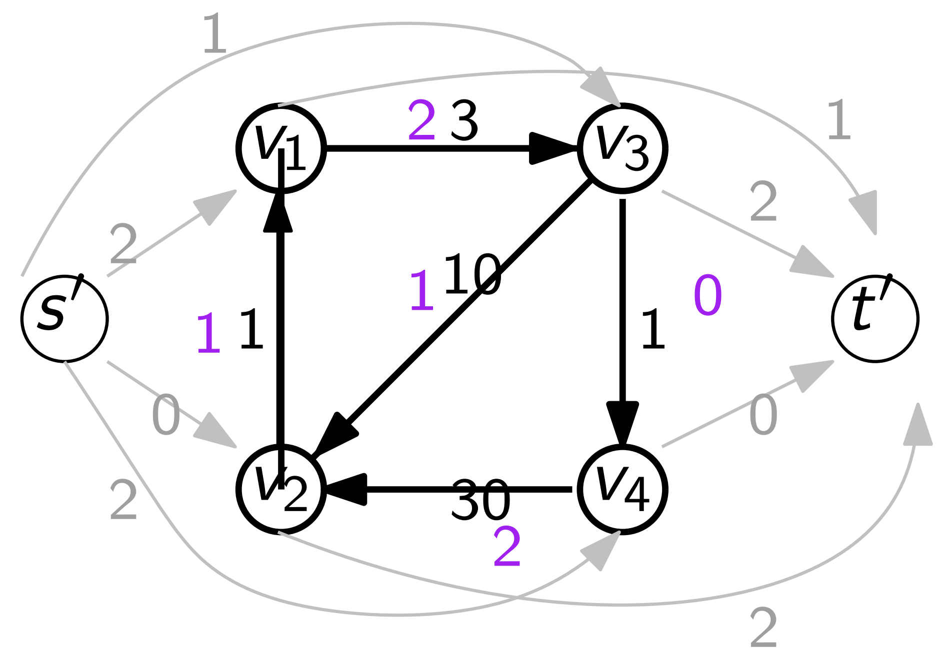




Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.
Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.



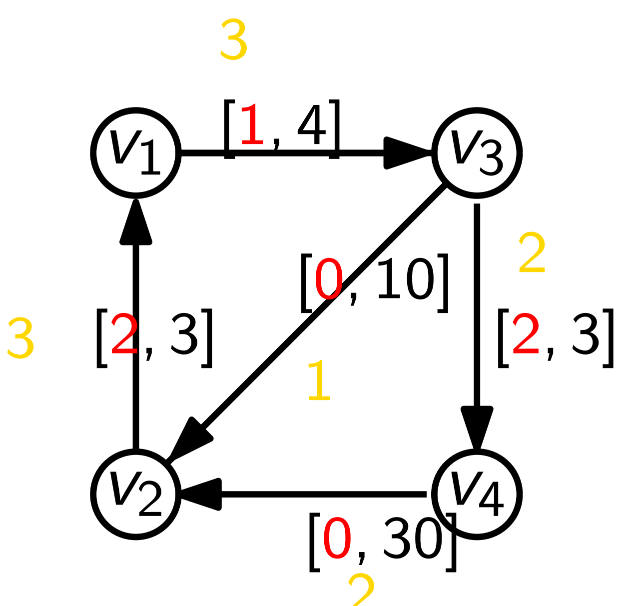


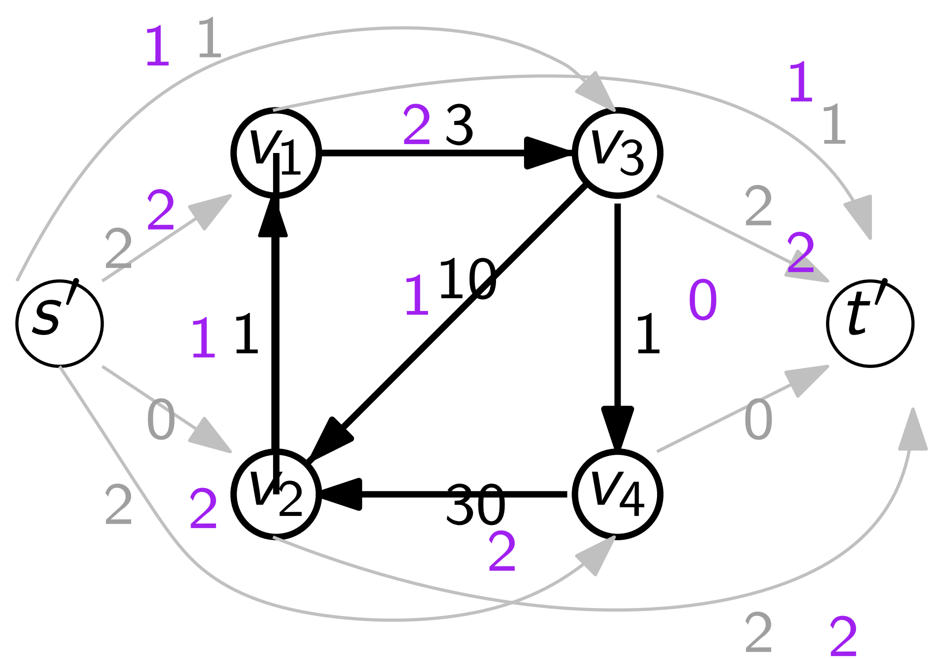
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.





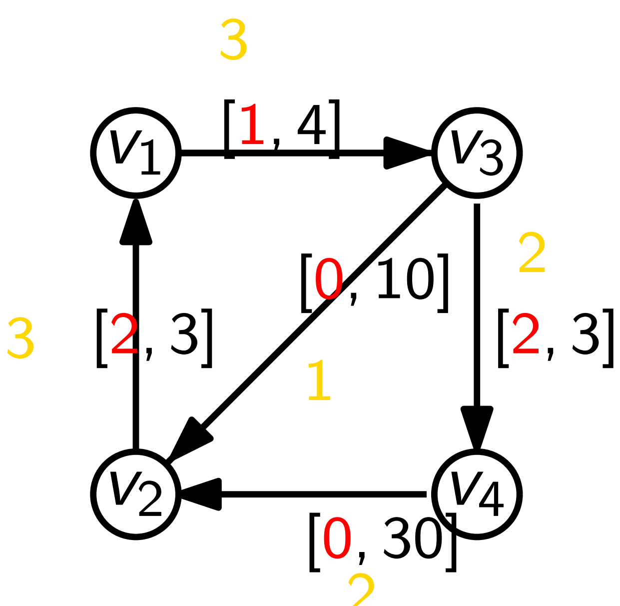
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

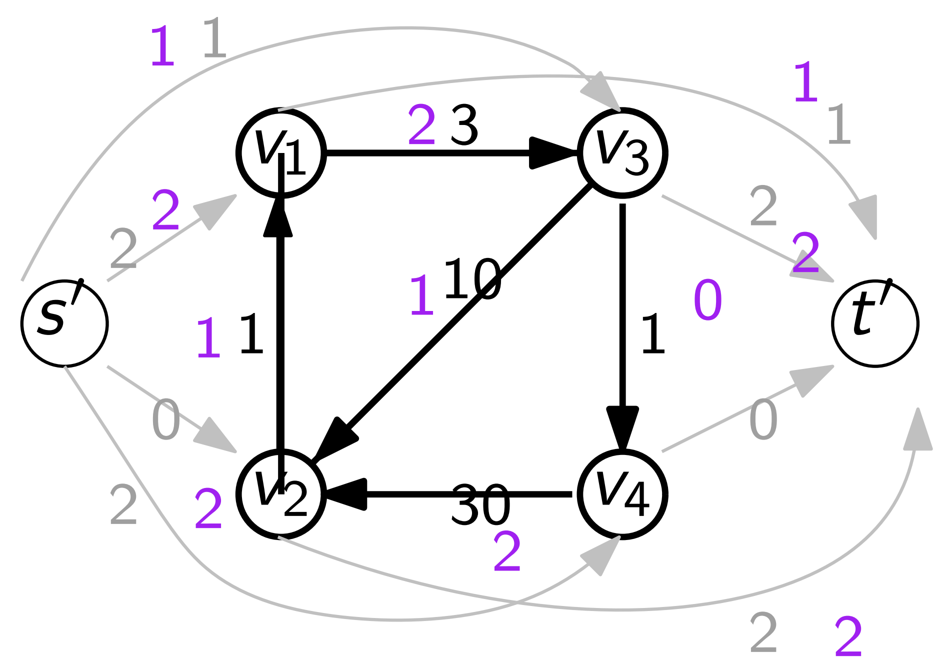
Sei β eine zulässige Strömung auf G.

Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

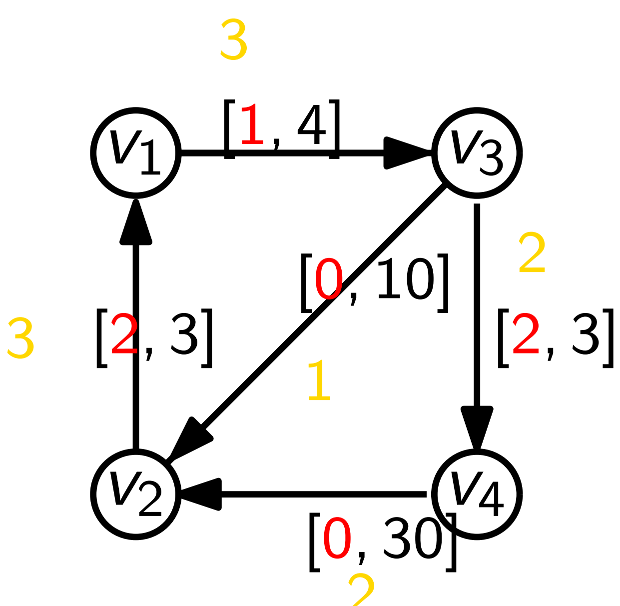
Sei β eine zulässige Strömung auf G.

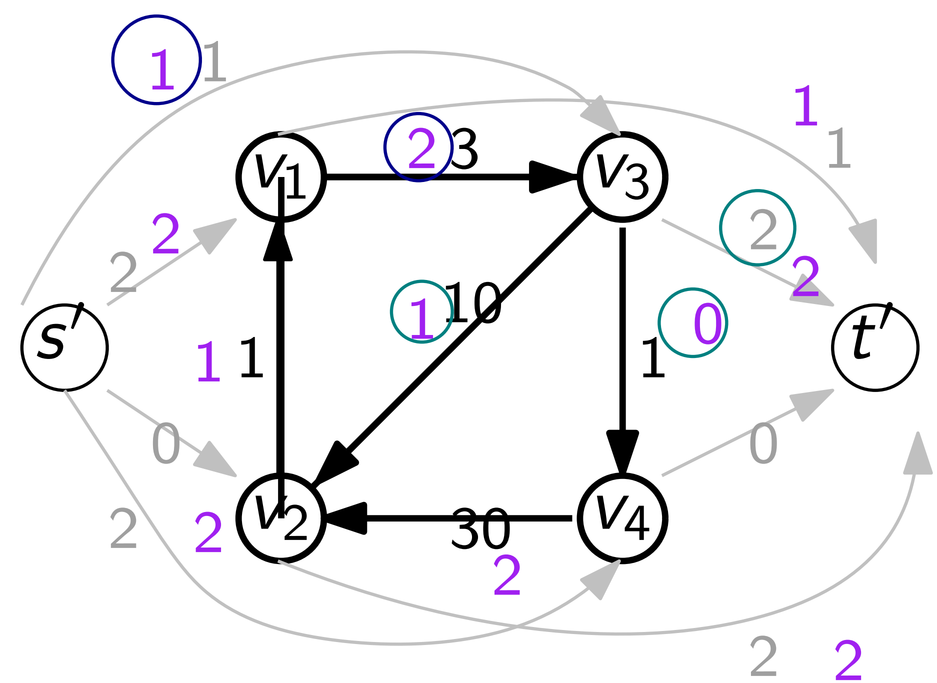
Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

$$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e \in (\delta^+)'(v)} f(e)}$$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

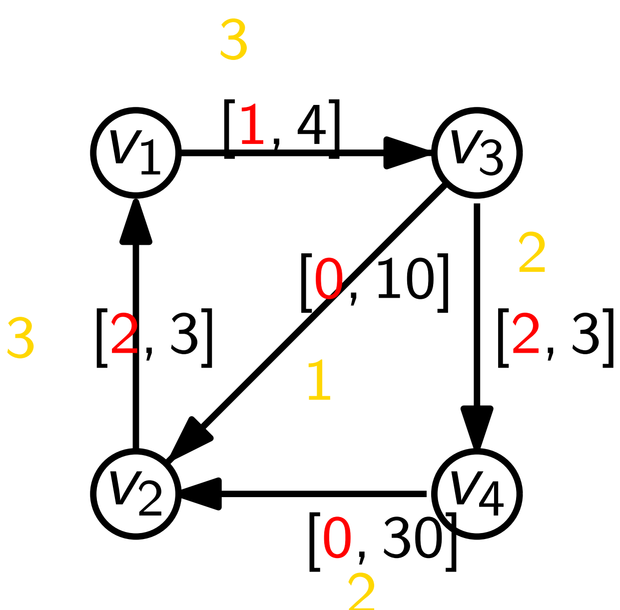
Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

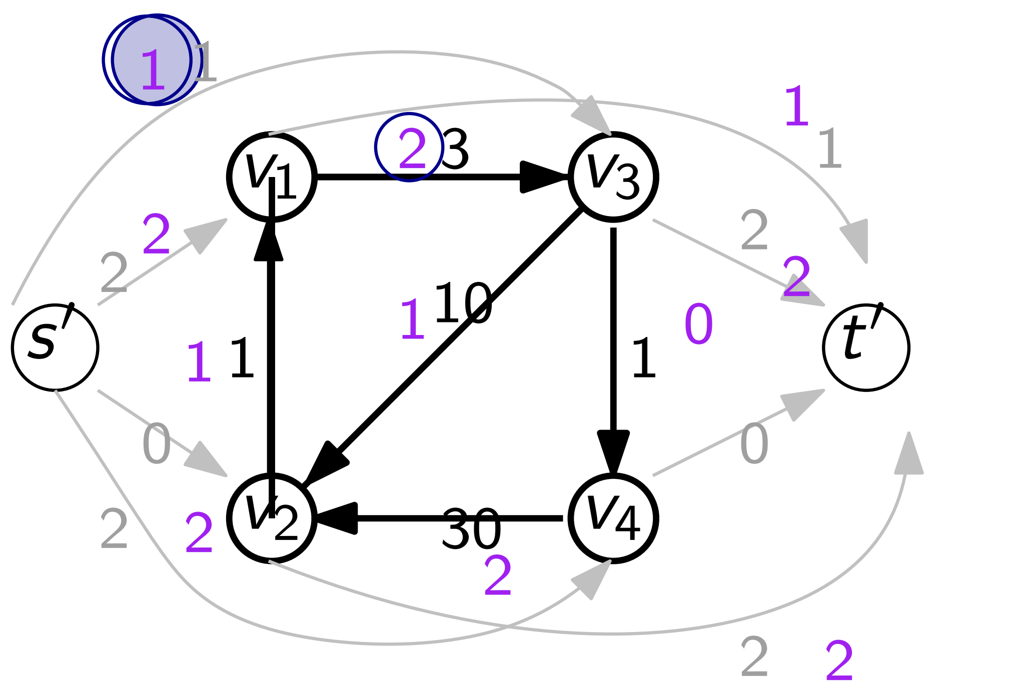
Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

$$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e\in(\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e)}$$

$$\boxed{\sum_{e\in(\delta^-)'(v)} f(e)} = \boxed{f((s',v))} + \boxed{\sum_{e\in\delta^-(v)} f(e)}$$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

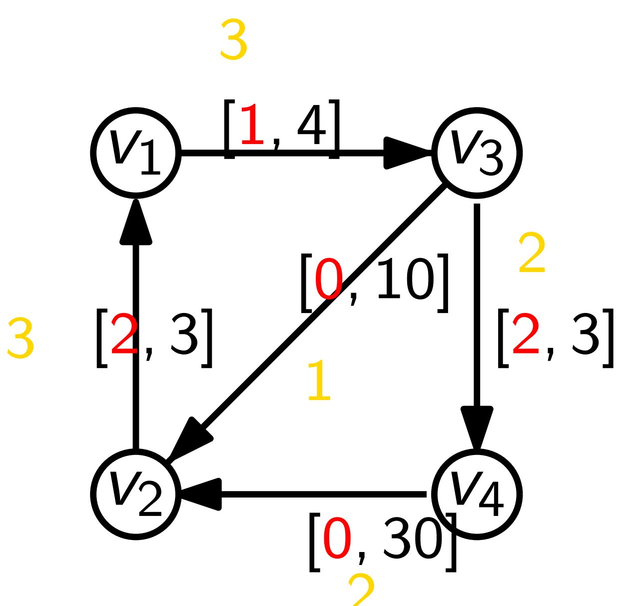
Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

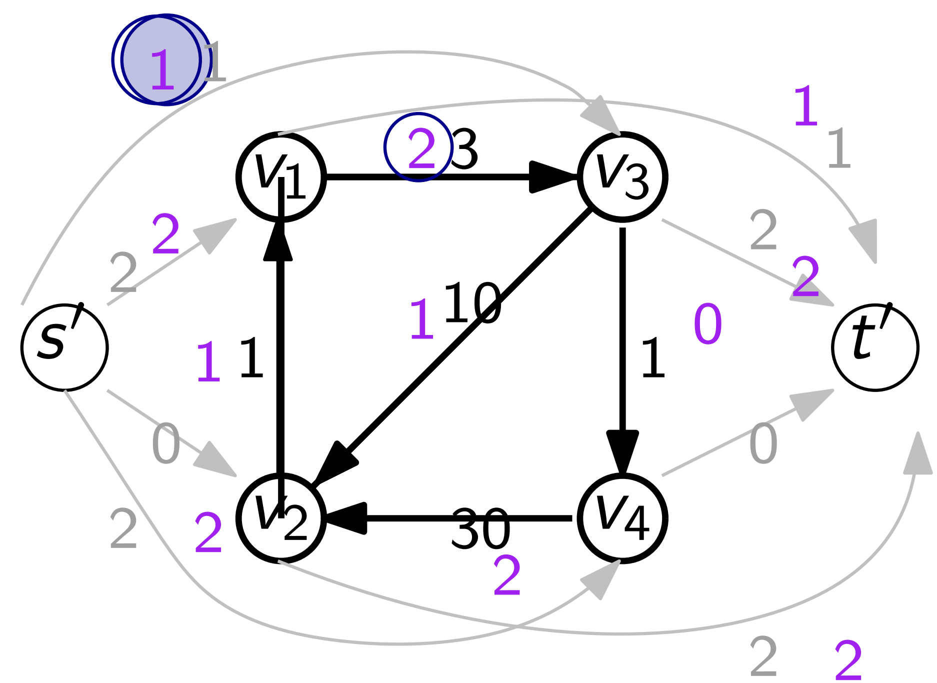
Ist das ein Fluss ?

Nettozufl.$_f(v) = \boxed{\sum_{e\in(\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e)}$

$\boxed{\sum_{e\in(\delta^-)'(v)} f(e)} = \boxed{f((s',v))} + \boxed{\sum_{e\in\delta^-(v)} f(e)}$

$= \boxed{\sum_{e\in\delta^-(v)} l(e)} + \boxed{\sum_{e\in\delta^-(v)}(\beta(e) - l(e))}$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

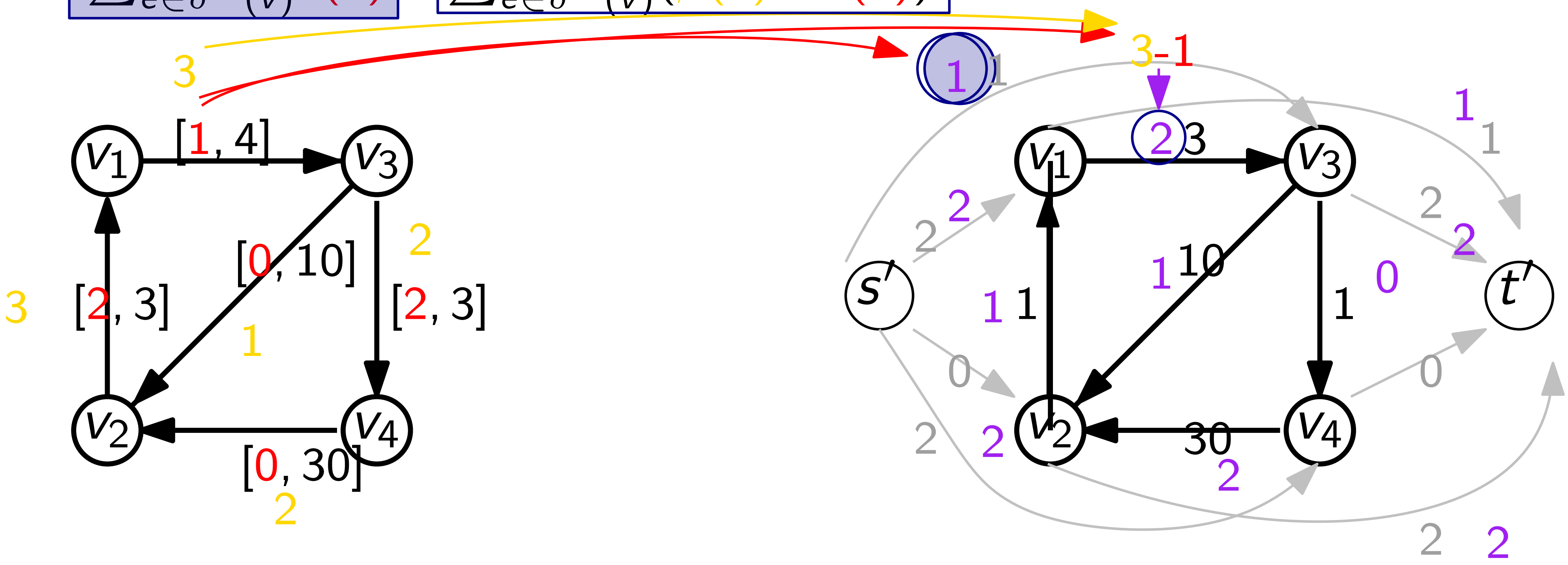
Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

$$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e \in (\delta^+)'(v)} f(e)}$$

$$\boxed{\sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e)} = \boxed{f((s', v))} + \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} f(e)}$$

$$= \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)} + \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} (\beta(e) - l(e))}$$



Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

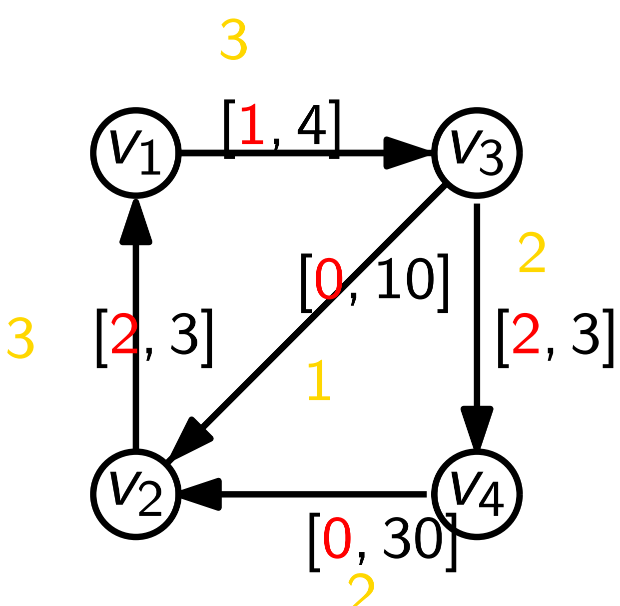
Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

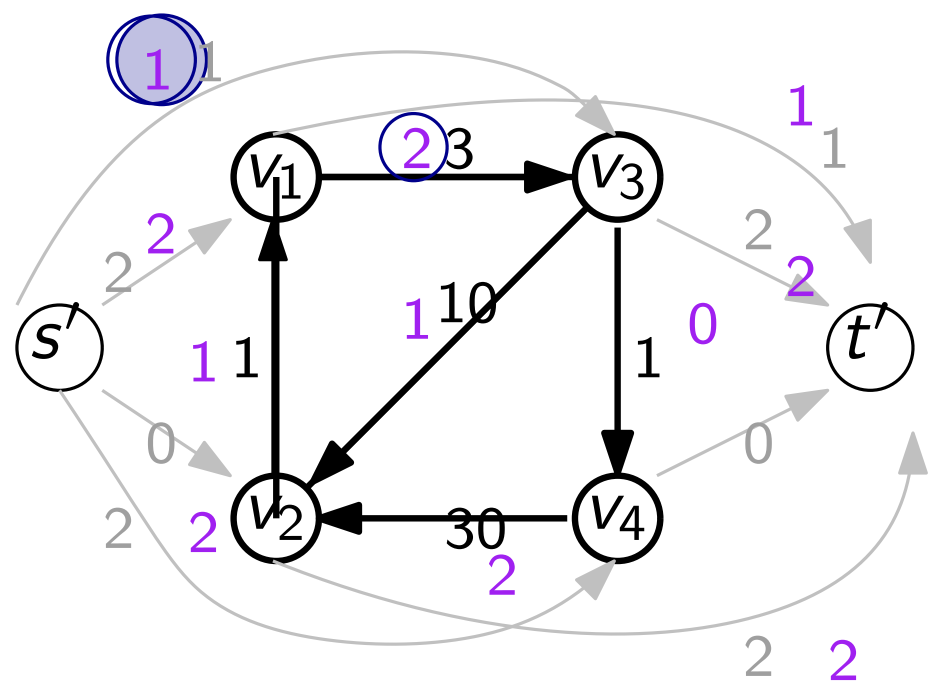
Ist das ein Fluss ?

$$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e \in (\delta^+)'(v)} f(e)}$$

$$\boxed{\sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e)} = \boxed{f((s', v))} + \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} f(e)}$$

$$= \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)} + \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} (\beta(e) - l(e))} = \sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)$$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

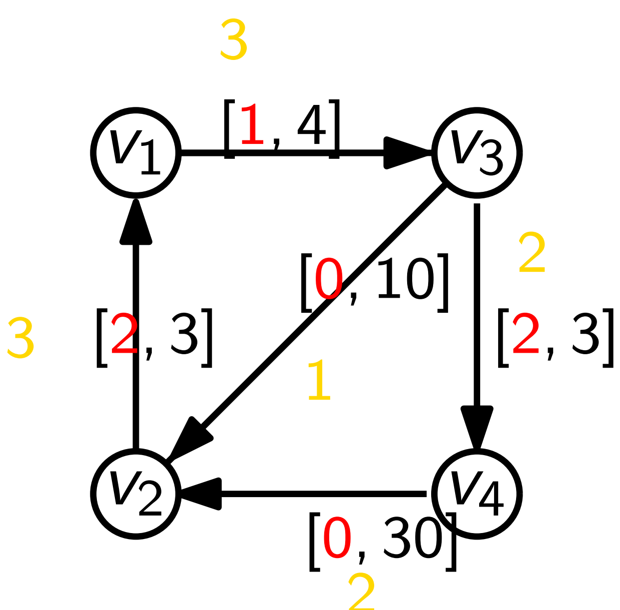
Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

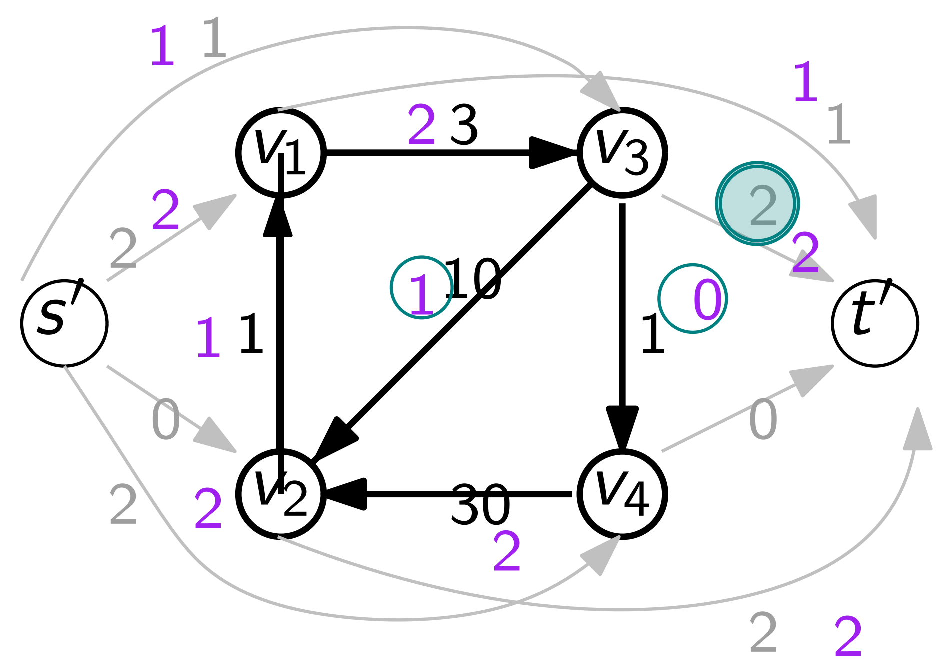
Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

$$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e \in (\delta^+)'(v)} f(e)}$$

$$\sum_{e \in (\delta^+)'(v)} f(e) = \boxed{f(v,t')} + \boxed{\sum_{e \in \delta^+(v)} f(e)}$$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

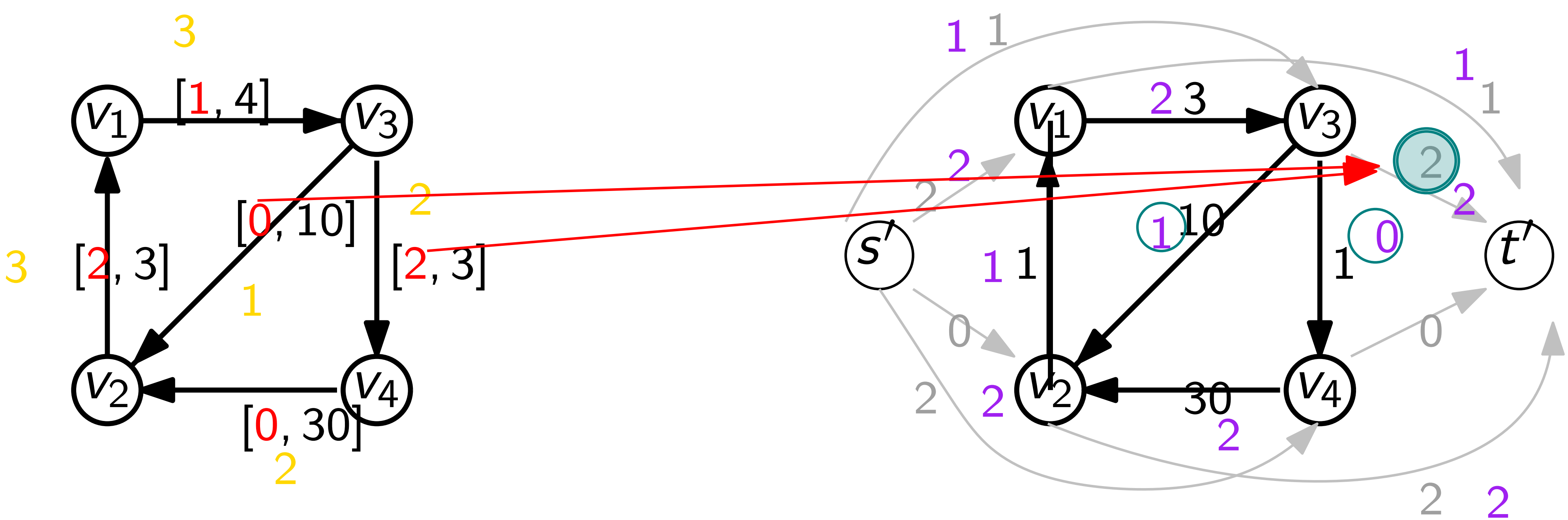
Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

$$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e\in(\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e)}$$

$$\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e) = \boxed{f(v,t')} + \boxed{\sum_{e\in\delta^+(v)} f(e)}$$
$$= \sum_{e\in\delta^+(v)} l(e) + \sum_{e\in\delta^+(e)}(\beta(e) - l(e))$$



Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

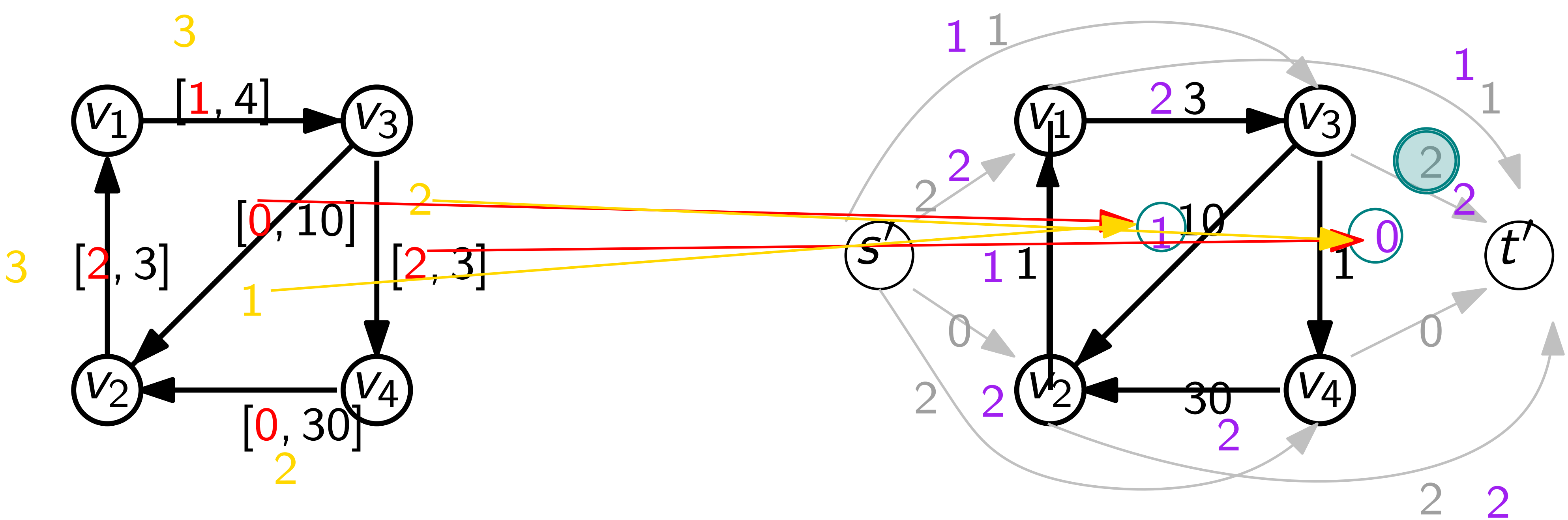
Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

$$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e\in(\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e)}$$

$$\begin{aligned}\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e) &= \boxed{f(v,t')} + \boxed{\sum_{e\in\delta^+(v)} f(e)}\\ &= \sum_{e\in\delta^+(v)} l(e) + \sum_{e\in\delta^+(e)}(\beta(e) - l(e))\end{aligned}$$



Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

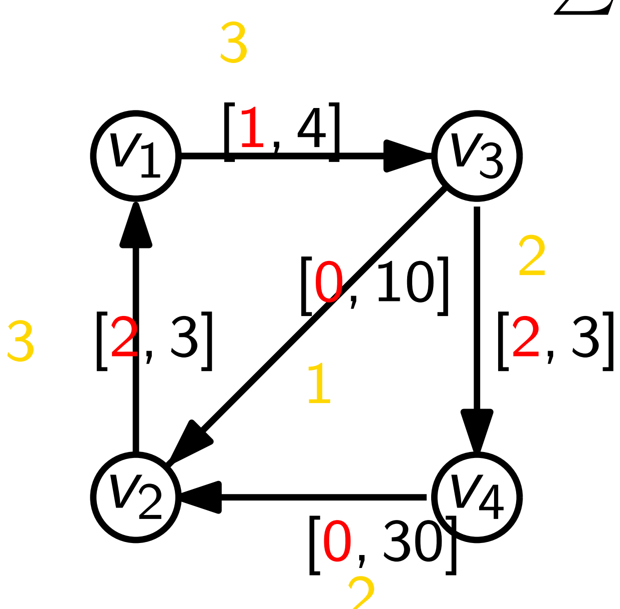
Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

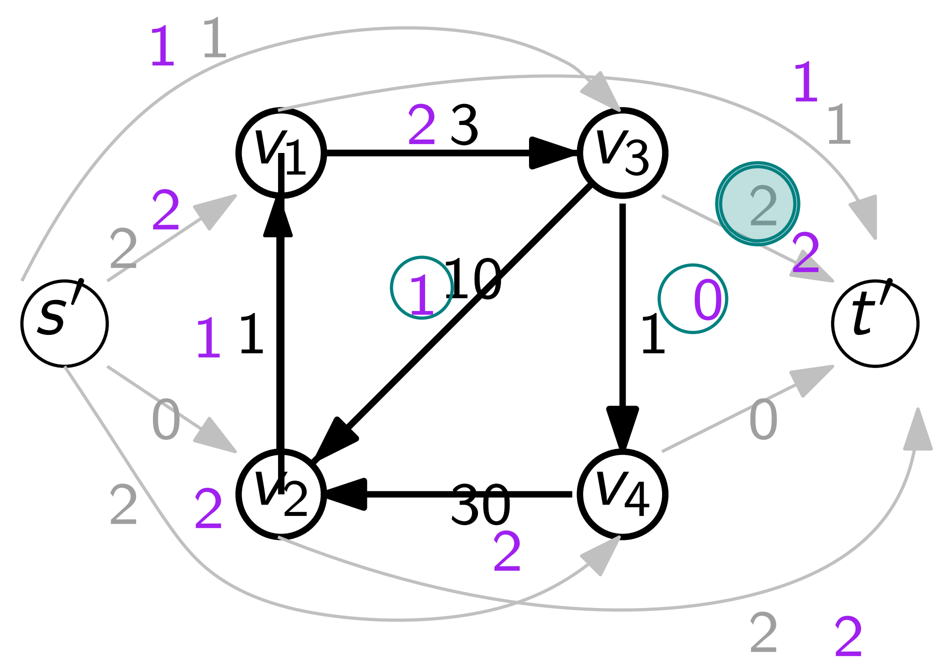
Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

$$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e\in(\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e)}$$

$$\begin{aligned}\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e) &= \boxed{f(v,t')} + \boxed{\sum_{e\in\delta^+(v)} f(e)}\\ &= \sum_{e\in\delta^+(v)} l(e) + \sum_{e\in\delta^+(e)}(\beta(e) - l(e))\\ &= \sum_{e\in\delta^+(v)} \beta(e)\end{aligned}$$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

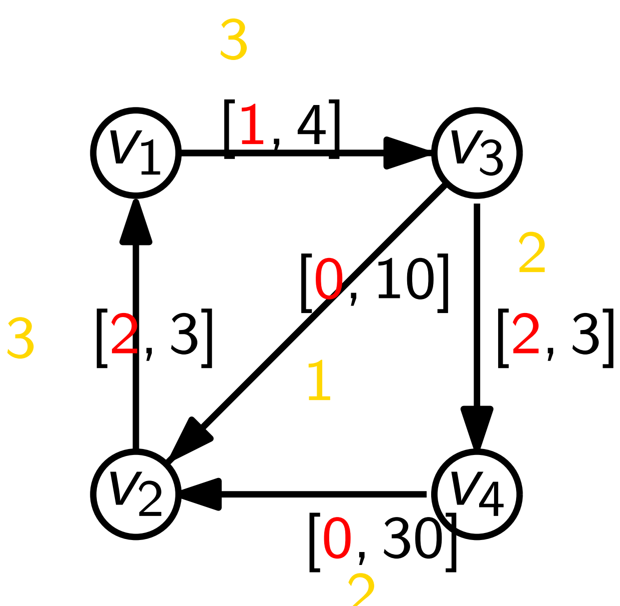
Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

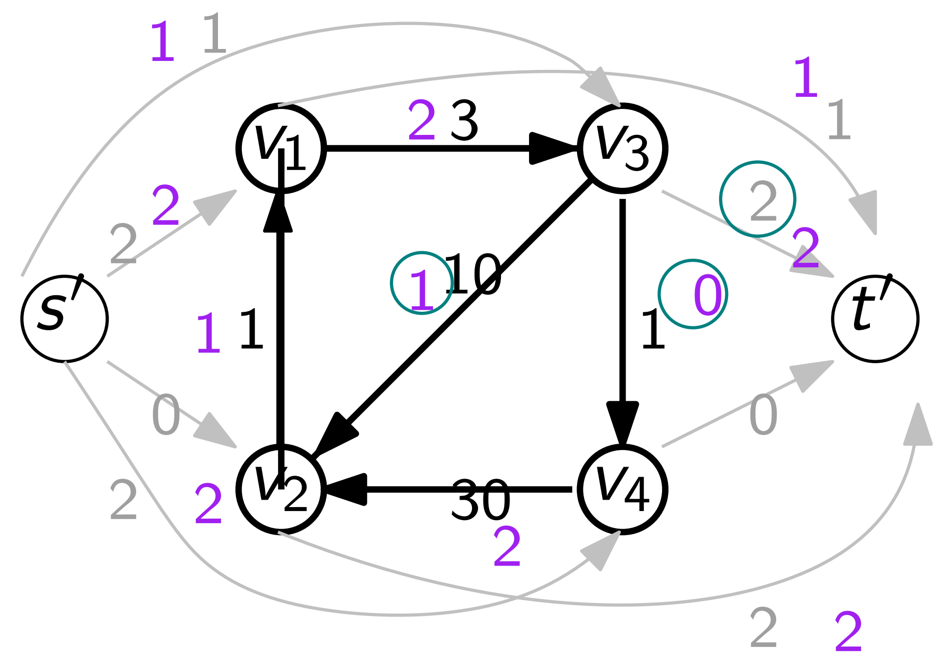
Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

$$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e \in (\delta^+)'(v)} f(e)}$$

$$= \sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(v) - \sum_{e \in \delta^+(v)} \beta(v)$$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

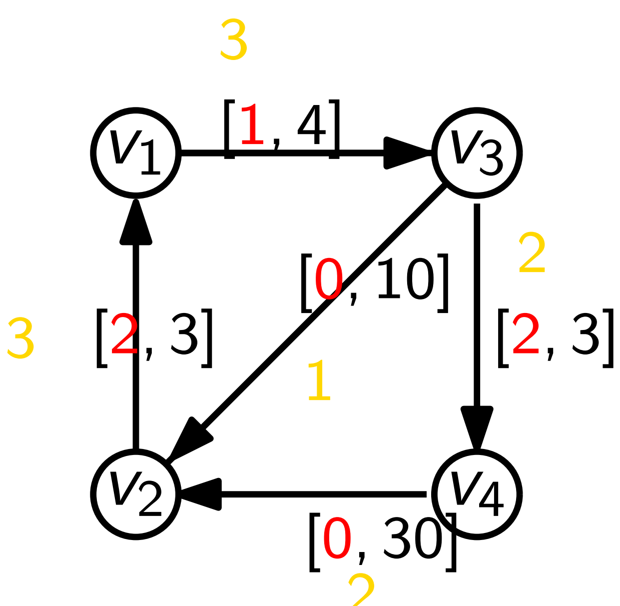
Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

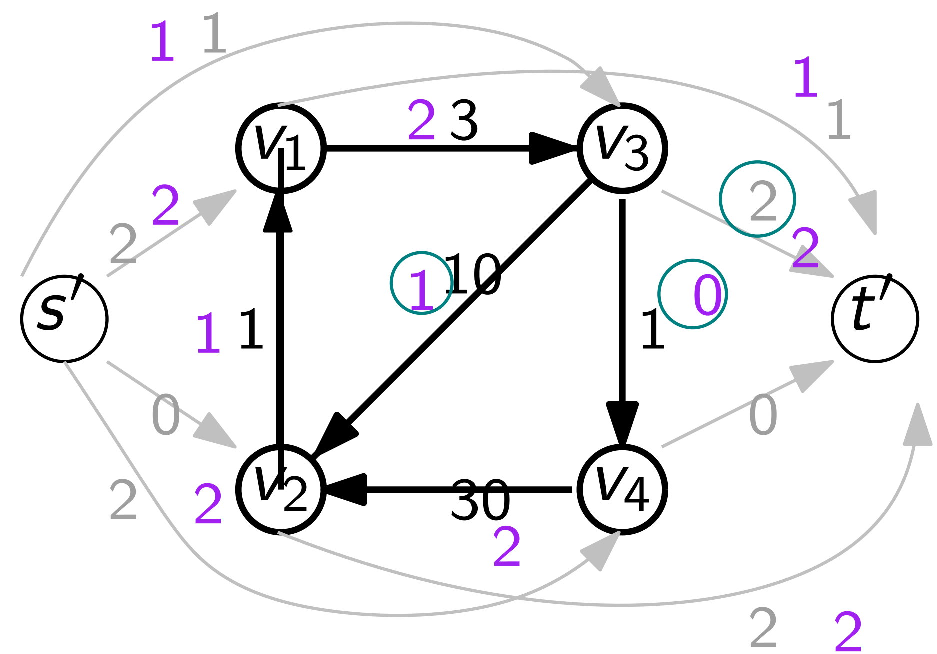
Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

Nettozufl.$_f(v) = \boxed{\sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e \in (\delta^+)'(v)} f(e)}$

$= \sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(v) - \sum_{e \in \delta^+(v)} \beta(v) \; = 0$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

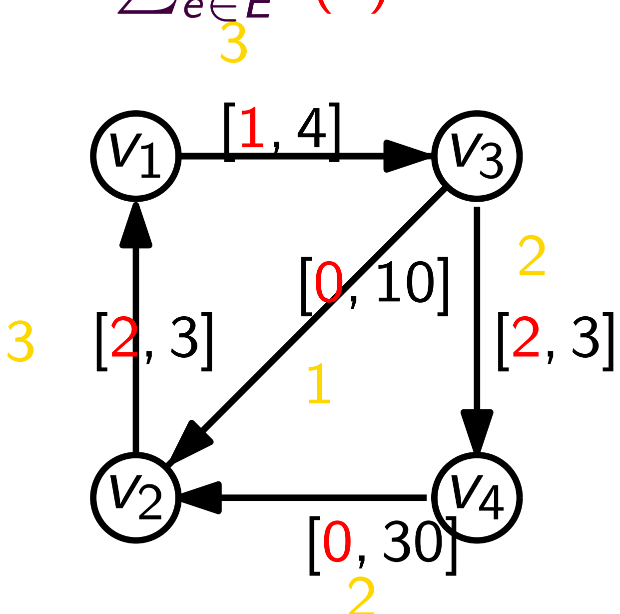
Ist das ein Fluss ?

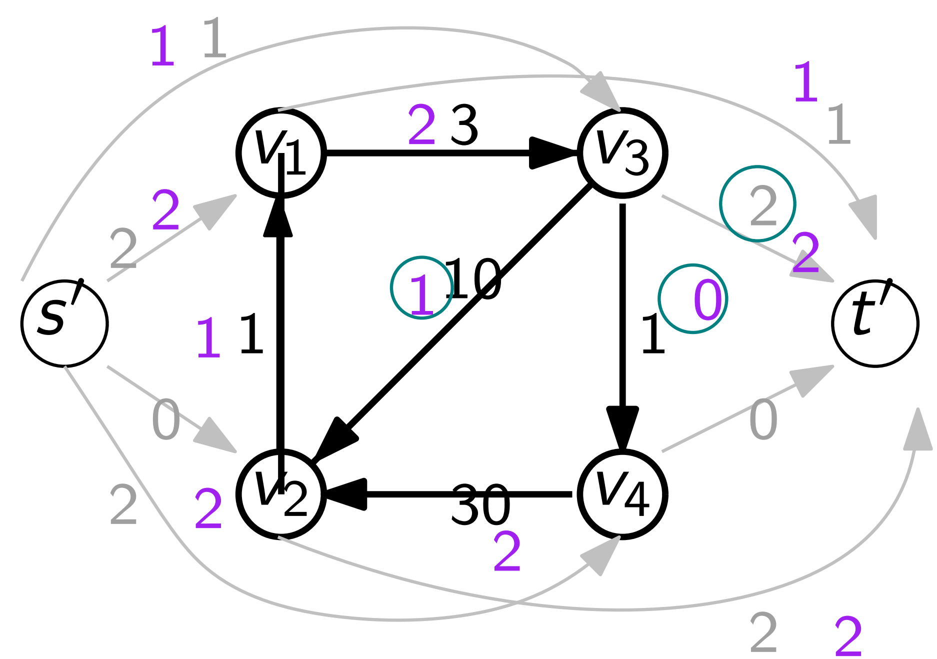
$$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e \in (\delta^+)'(v)} f(e)}$$

$$= \sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(v) - \sum_{e \in \delta^+(v)} \beta(v) = 0$$

Und $|f| = \sum_{(v,t') \in E'} f(e) = \sum_{(v,t') \in E'} c'(e) = \sum_{v \in V} \sum_{e \in \delta^+(v)} l(e)$

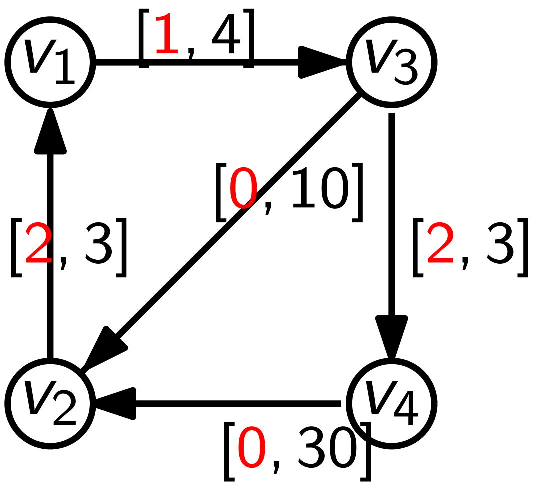
$$= \sum_{e \in E} l(e)$$

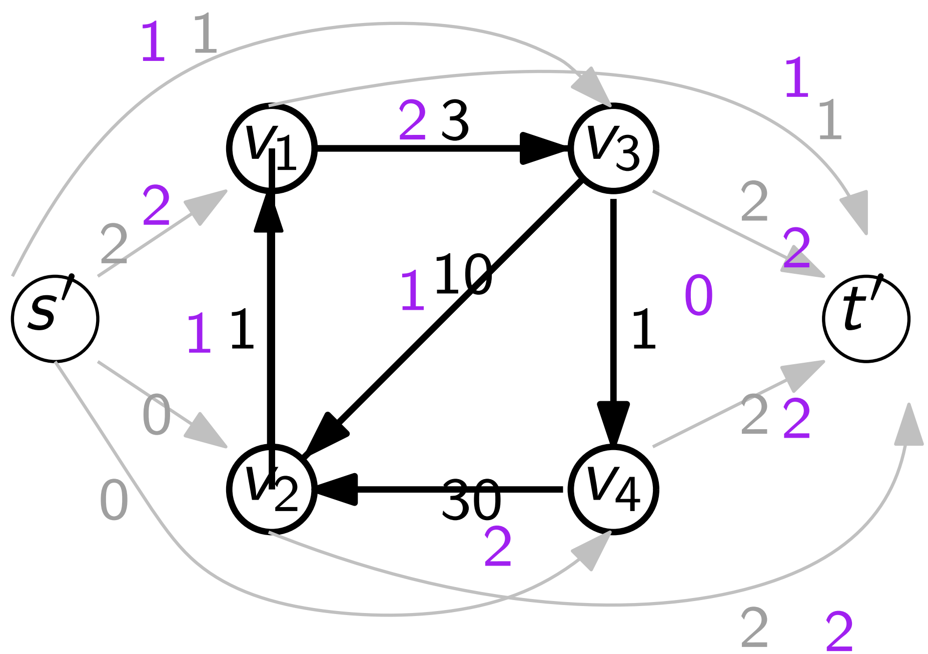




Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

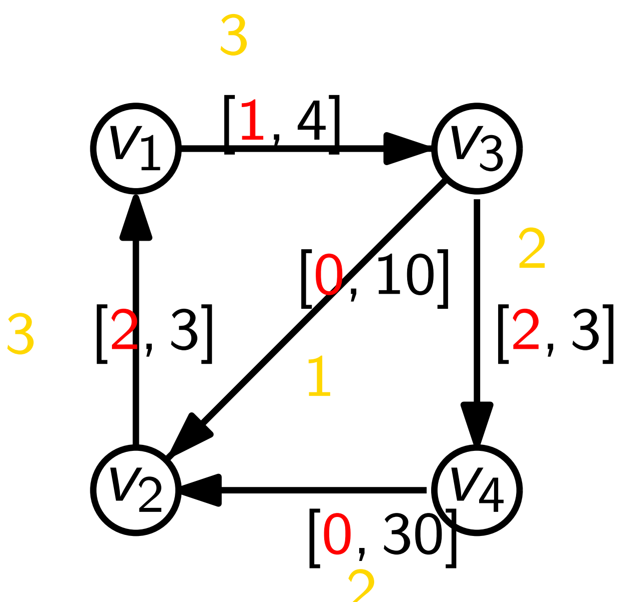
Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.

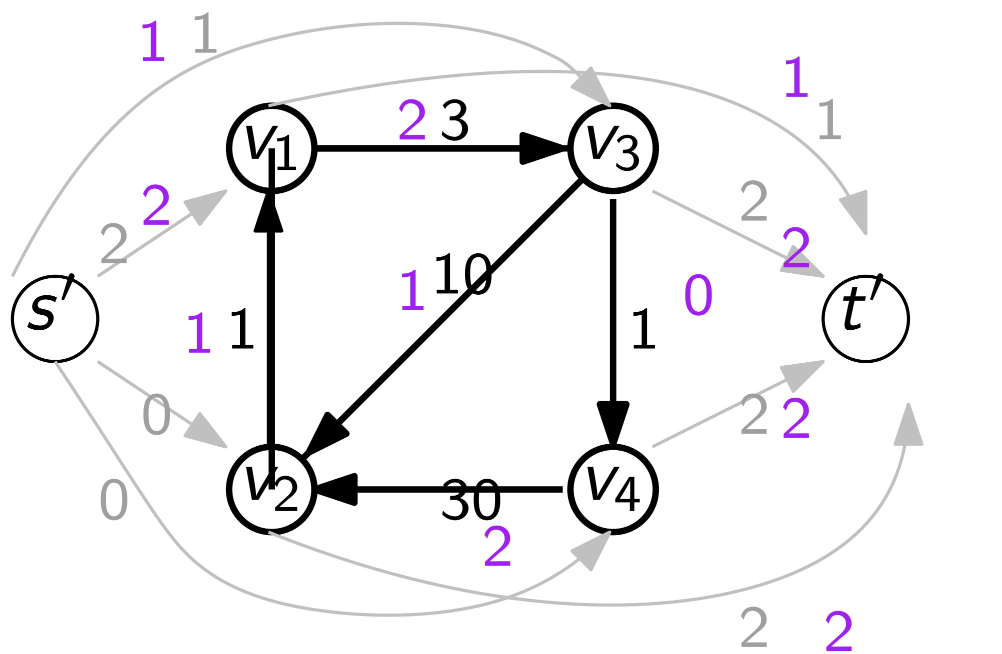




Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.
Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$





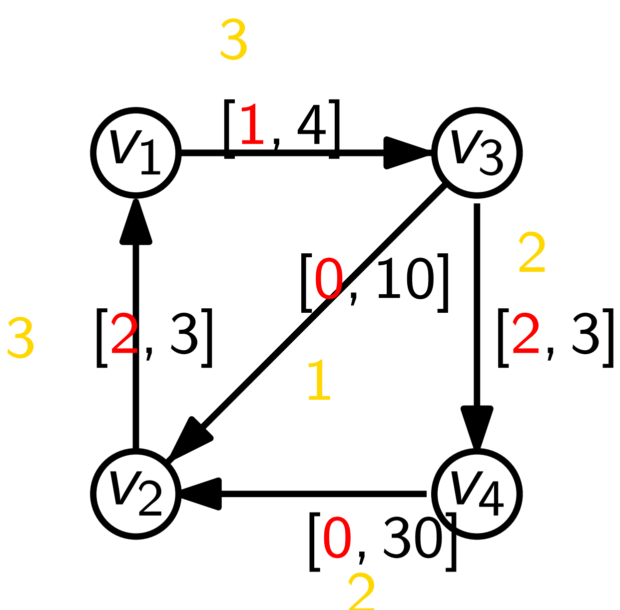
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

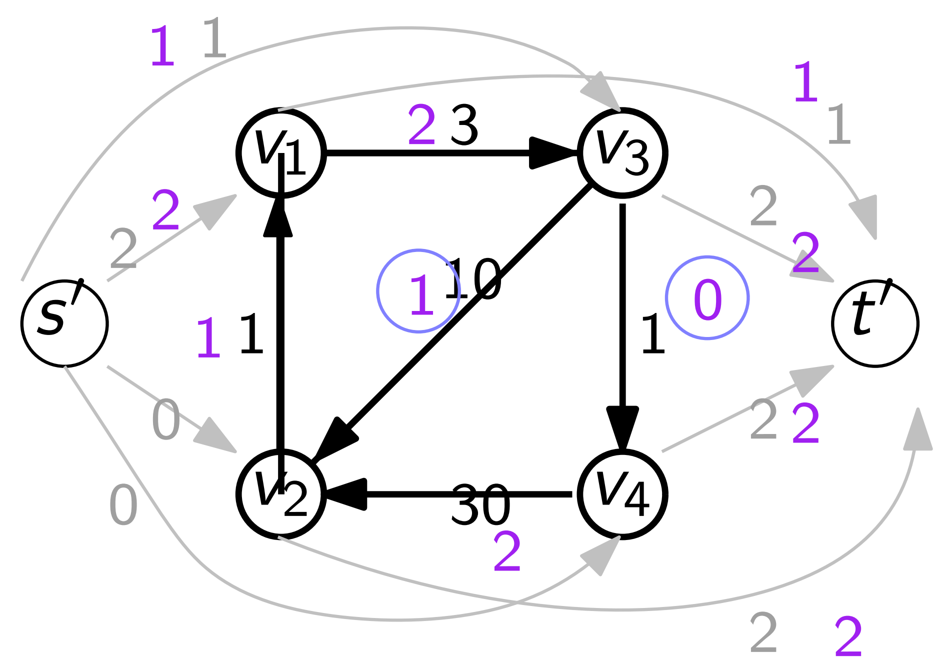
Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.

Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$

Ist das eine Strömung?

$$\text{Nettozufl.}_\beta(v) = \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} - \boxed{\sum_{e \in \delta^+(v)} \beta(e)}$$





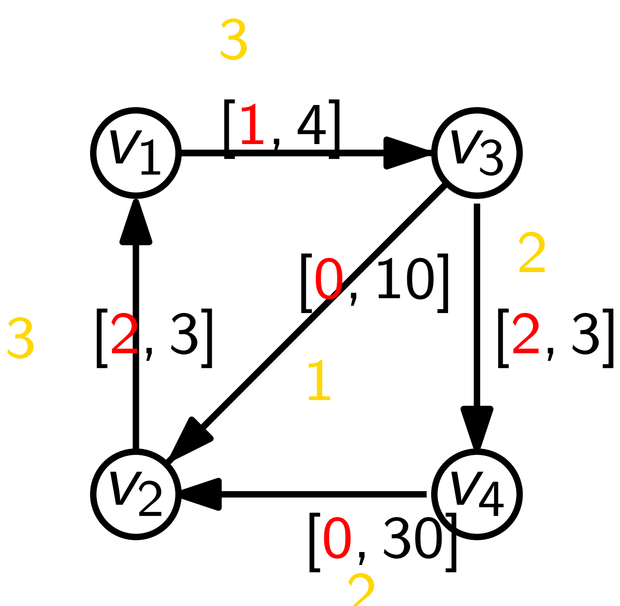
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

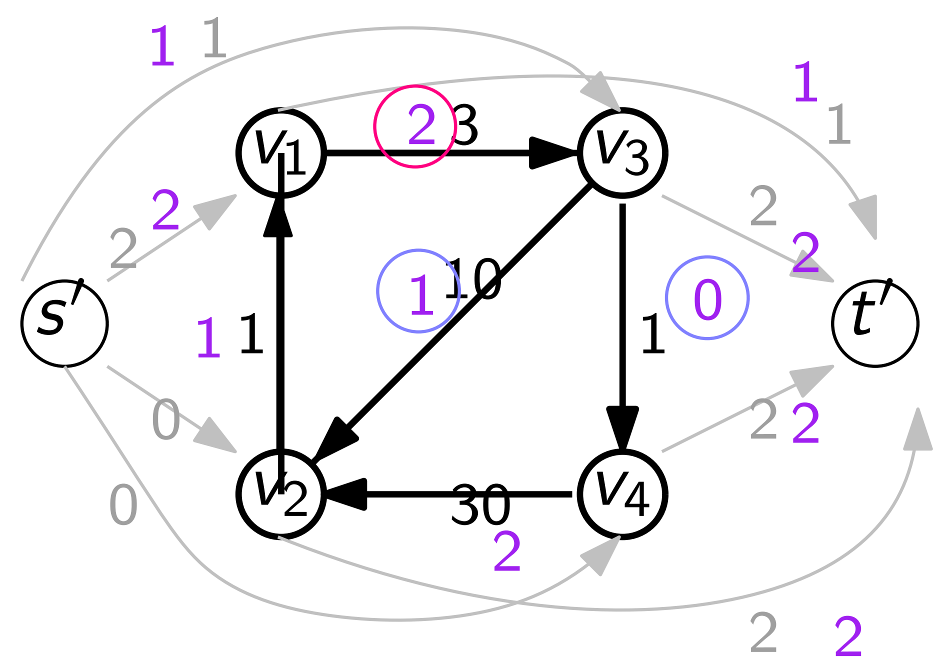
Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.
Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$

Ist das eine Strömung?

Nettozufl.$_\beta(v) = \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} - \boxed{\sum_{e \in \delta^+(v)} \beta(e)}$

$\boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} = \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + l(e)$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.

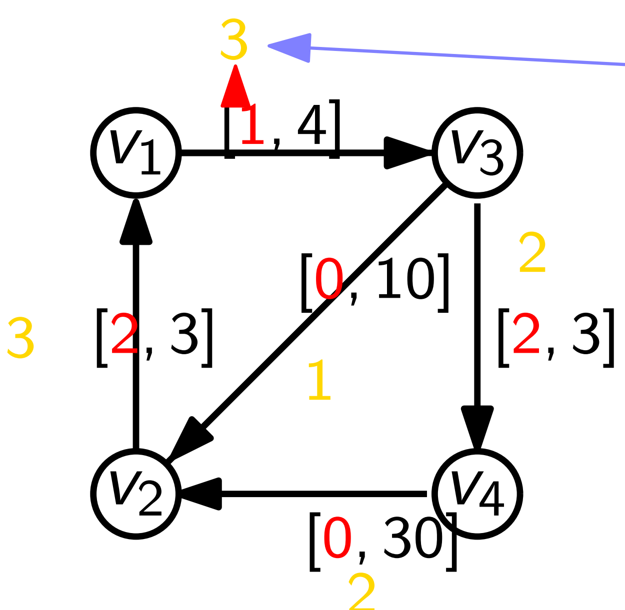
Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$

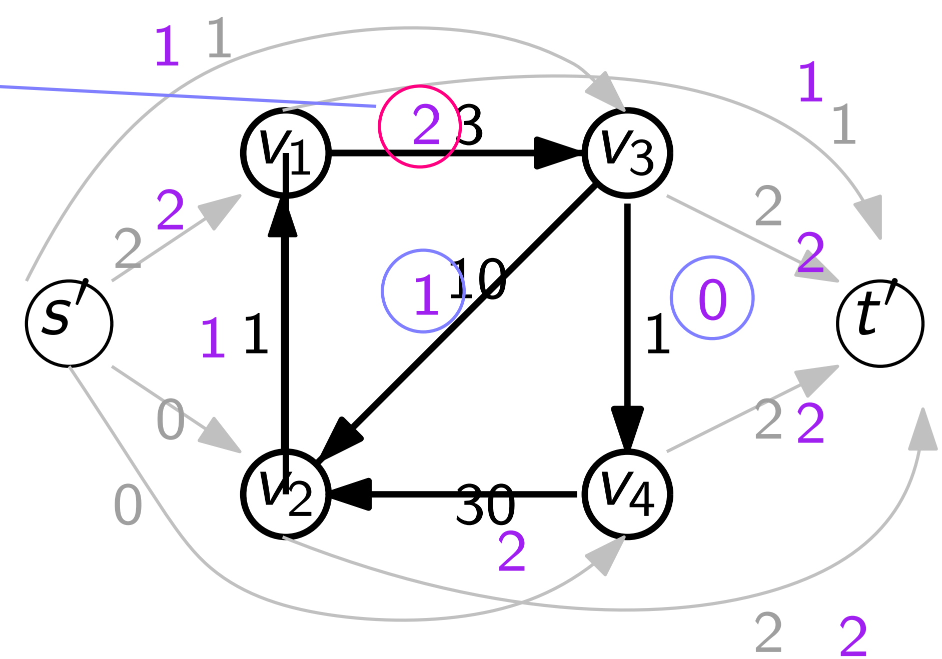
Ist das eine Strömung?

$$\text{Nettozufl.}_\beta(v) = \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} - \boxed{\sum_{e \in \delta^+(v)} \beta(e)}$$

$$\boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} = \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + l(e)$$

$$= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)$$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

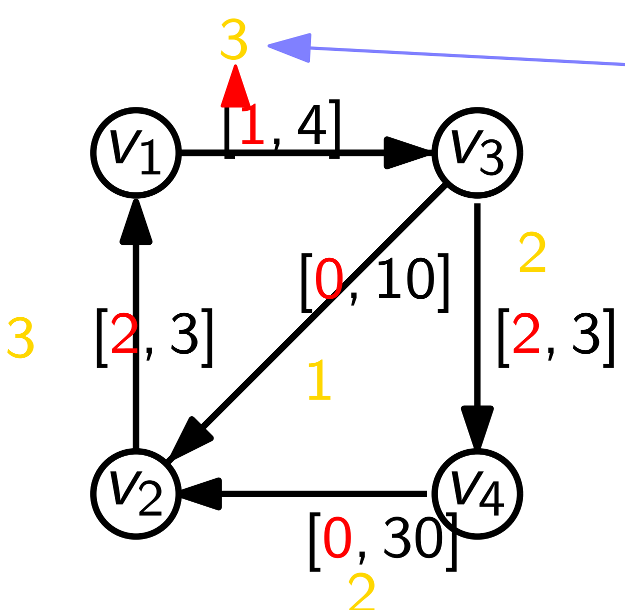
Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e\in(\delta^+)'(v)} l(e)$.

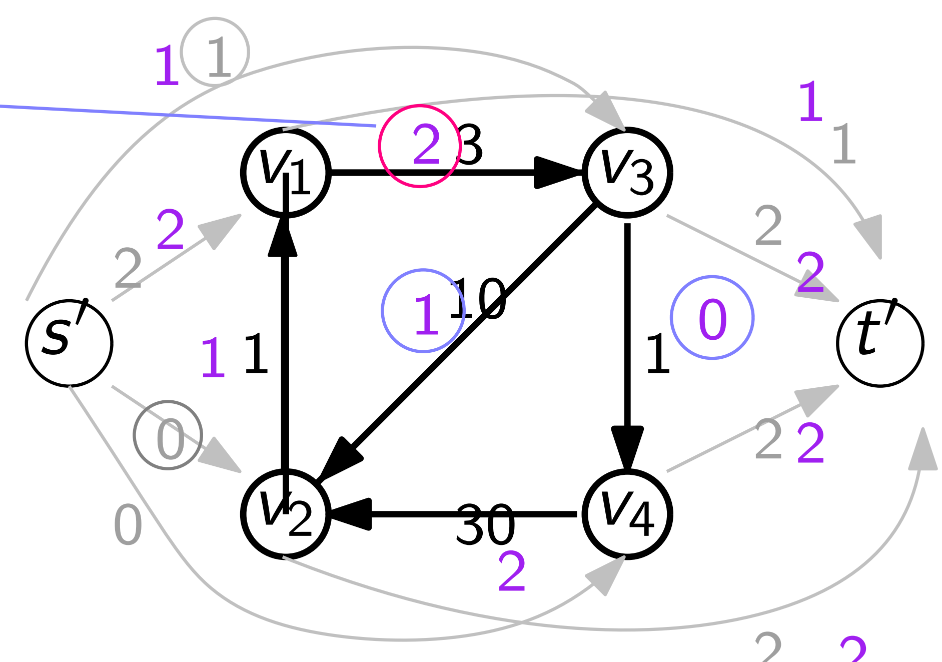
Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$

Ist das eine Strömung?

Nettozufl.$_\beta(v) = \boxed{\sum_{e\in\delta^-(v)} \beta(e)} - \boxed{\sum_{e\in\delta^+(v)} \beta(e)}$

$$\boxed{\sum_{e\in\delta^-(v)} \beta(e)} = \sum_{e\in\delta^-(v)} f(e) + l(e)$$
$$= \sum_{e\in\delta^-(v)} f(e) + \sum_{e\in\delta^-(v)} l(e)$$
$$= \sum_{e\in\delta^-(v)} f(e) + c'((s,v))$$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

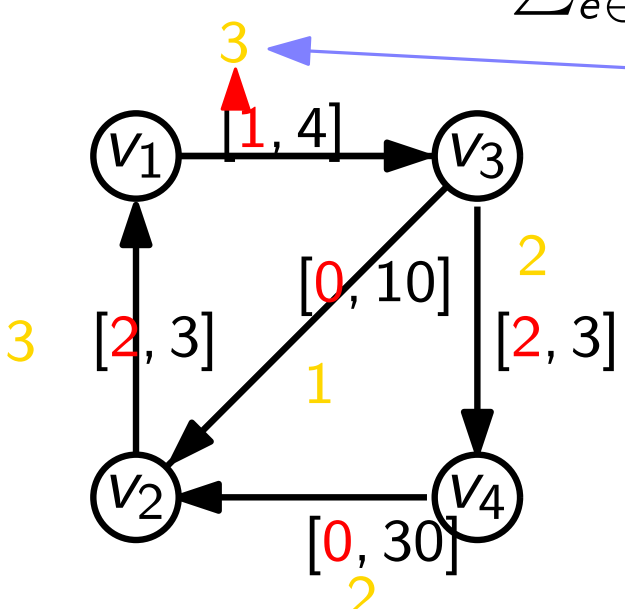
Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.

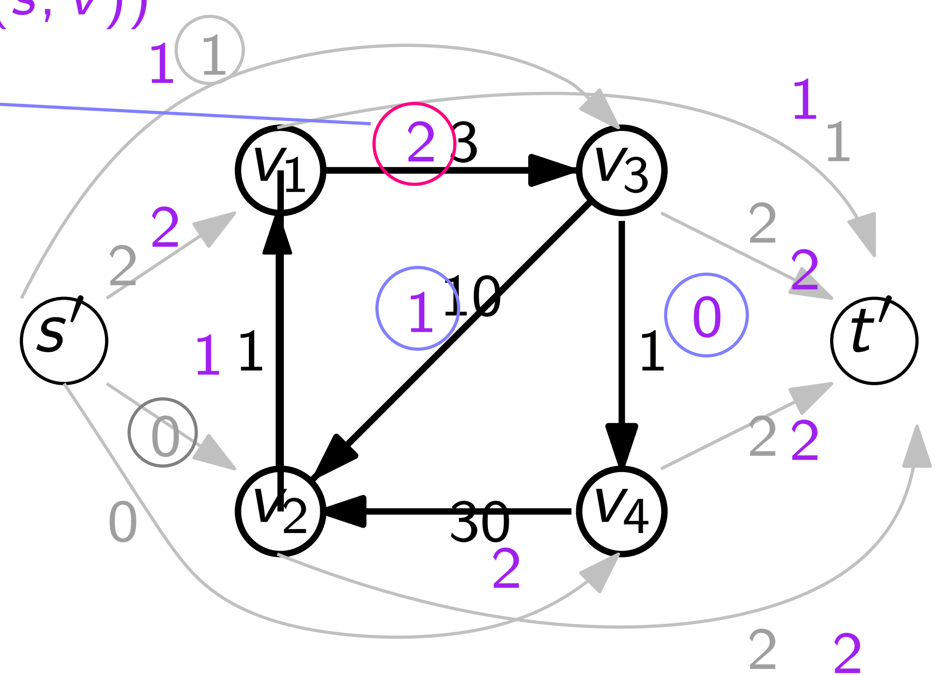
Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$

Ist das eine Strömung?

$$\text{Nettozufl.}_\beta(v) = \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} - \boxed{\sum_{e \in \delta^+(v)} \beta(e)}$$

$$\boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} = \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + l(e)$$
$$= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)$$
$$= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + c'((s,v))$$
$$= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + f((s,v))$$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

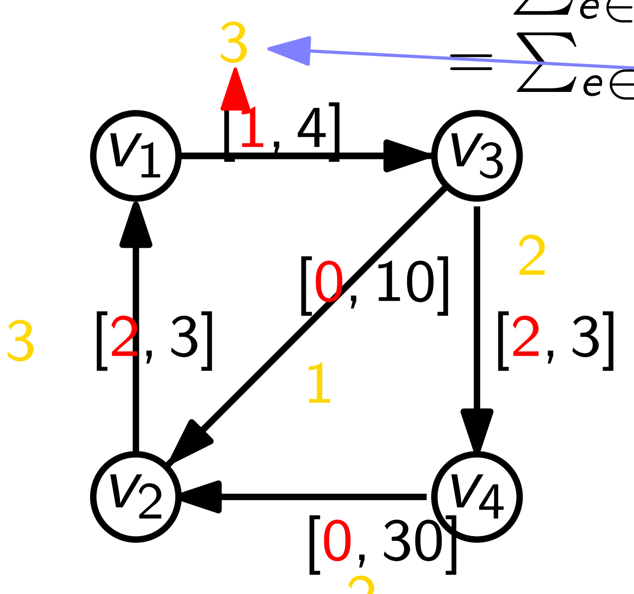
Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.

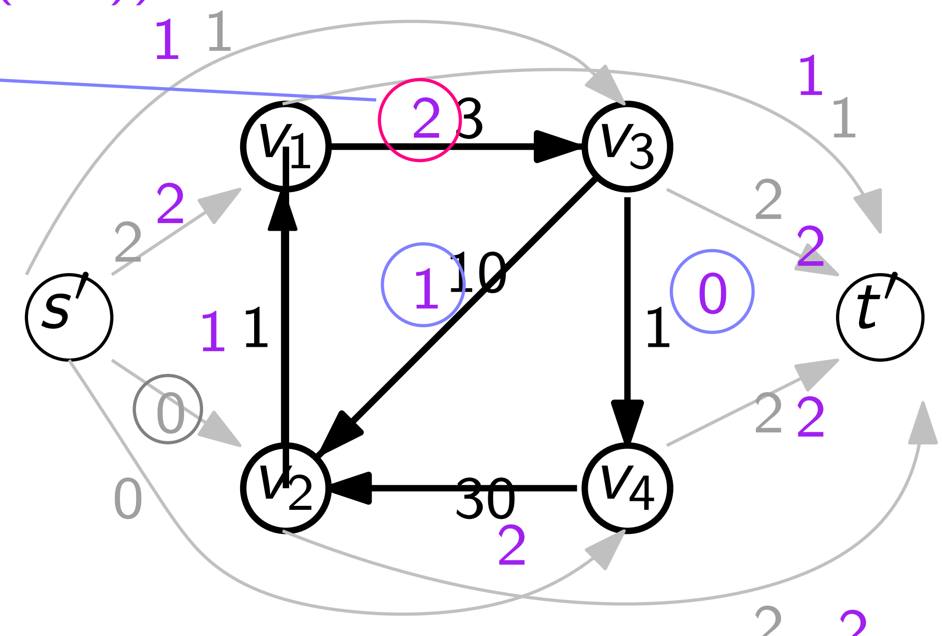
Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$

Ist das eine Strömung?

$$\text{Nettozufl.}_\beta(v) = \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} - \boxed{\sum_{e \in \delta^+(v)} \beta(e)}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} &= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + l(e) \\
&= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e) \\
&= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + c'((s, v)) \\
&= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + f((s, v)) \\
&= \sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e)
\end{aligned}$$



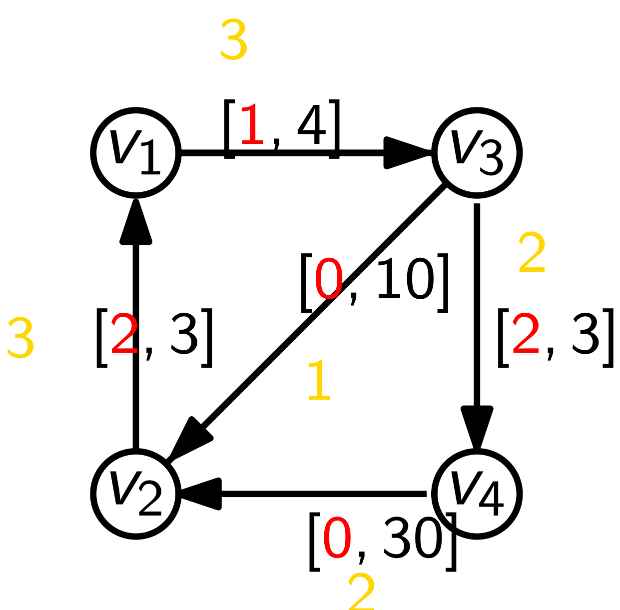


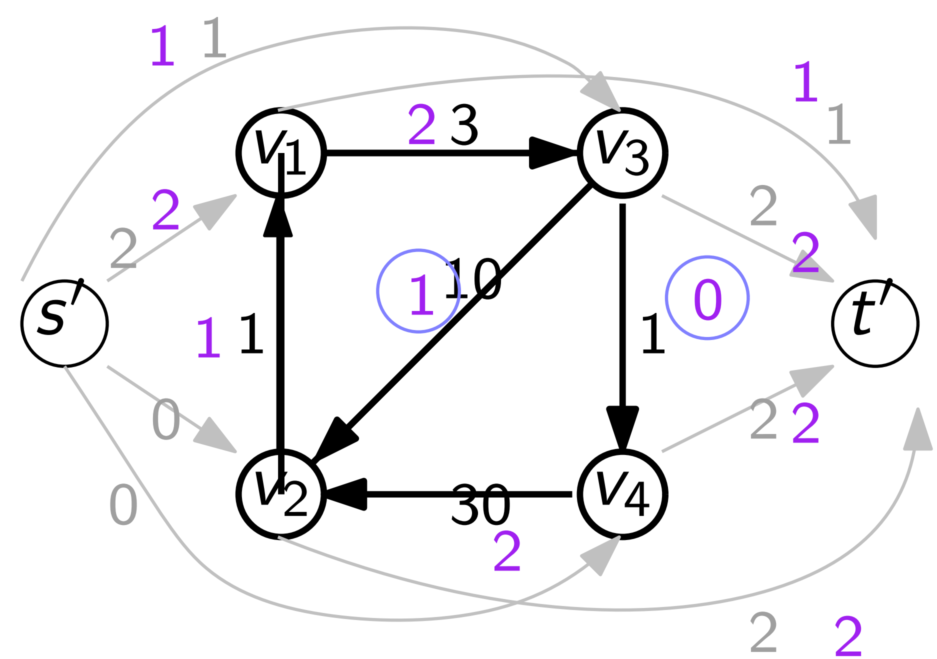
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.
Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$

Ist das eine Strömung?

$$\text{Nettozufl.}_\beta(v) = \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} - \boxed{\sum_{e \in \delta^+(v)} \beta(e)}$$
$$= \sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e) - \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} f(e)$$





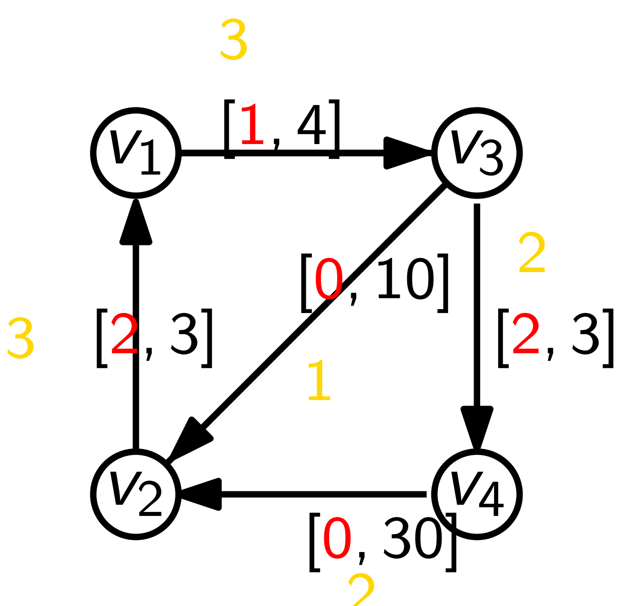
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

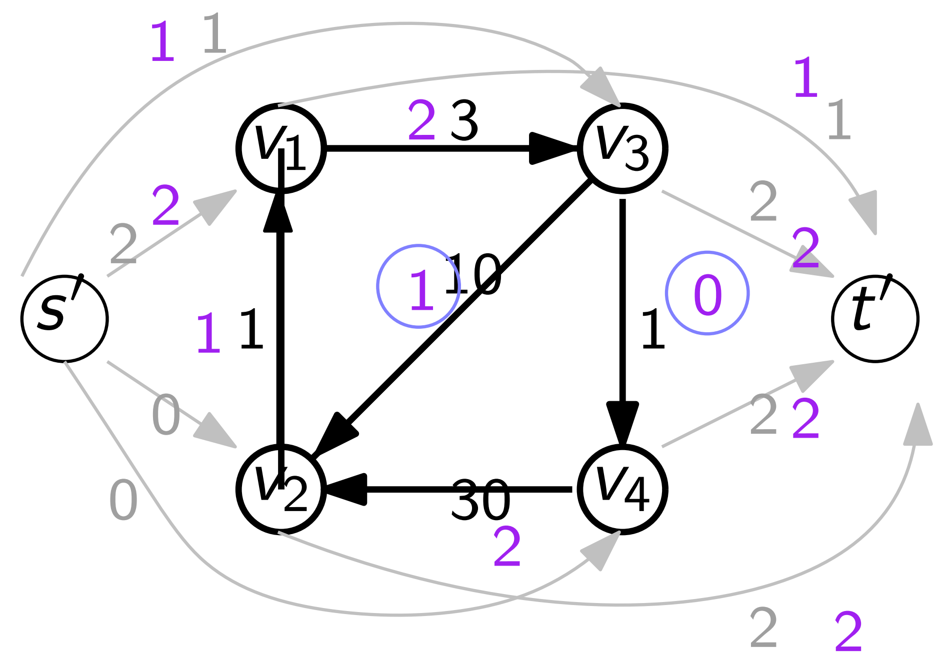
Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.

Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$

Ist das eine Strömung?

$$\text{Nettozufl.}_\beta(v) = \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} - \boxed{\sum_{e \in \delta^+(v)} \beta(e)}$$
$$= \sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e) - \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} f(e)$$
$$= 0$$





Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b=10

b=5

b=20

Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b=10

b=-13

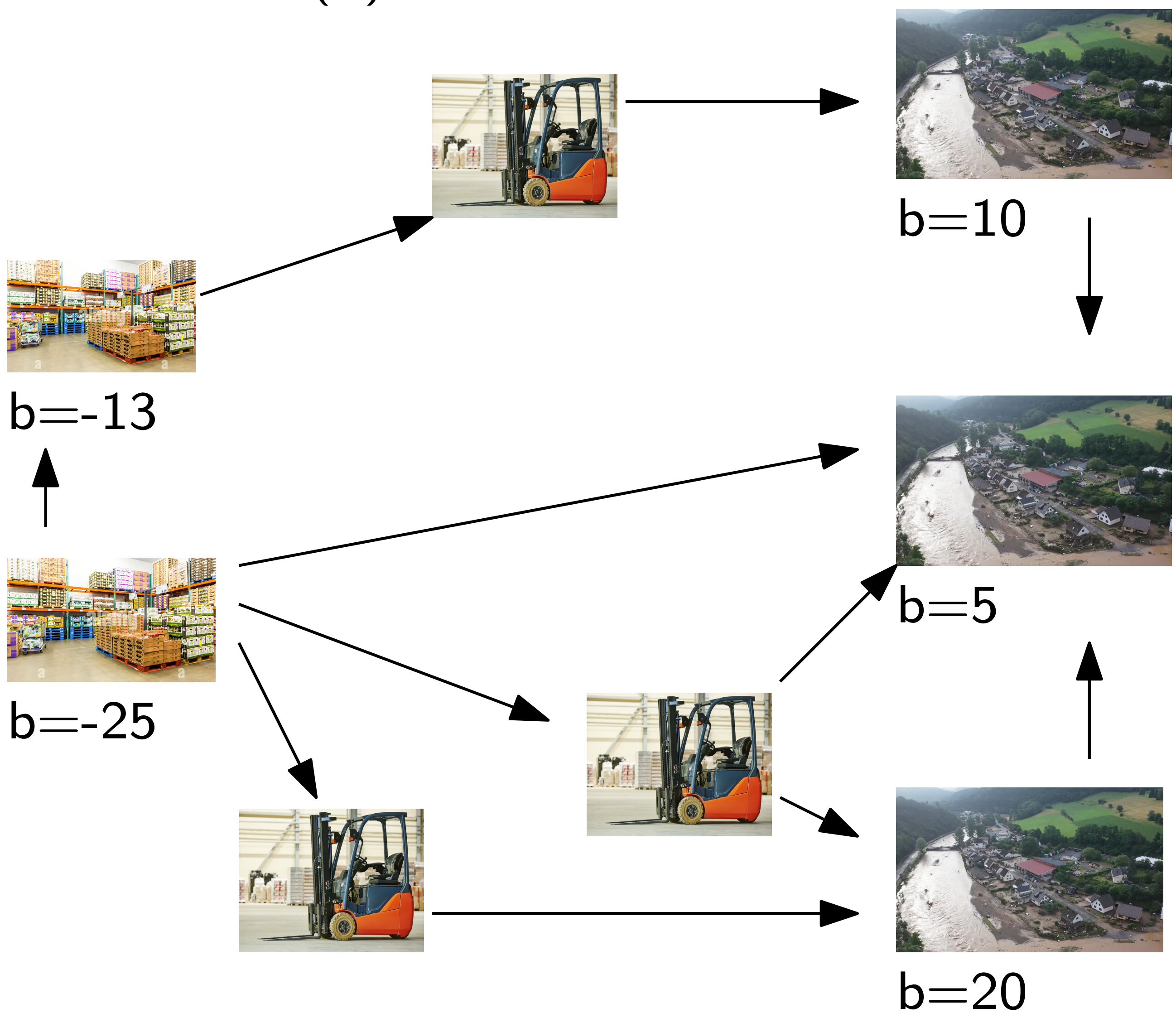
b=5

b=-25

b=20

Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

Knoten haben **Bedarf** $b(v)$
oder **Überschuss** $-b(v)$



Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b=10

b=-13

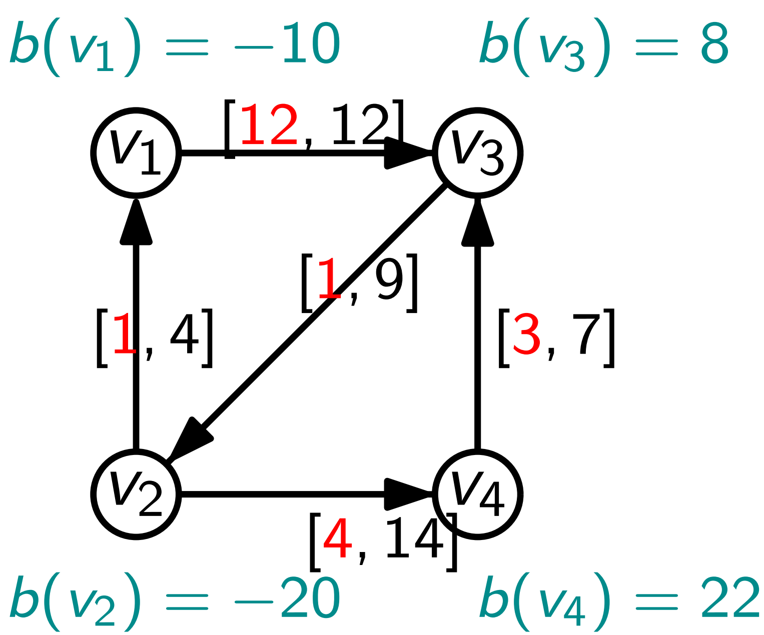
b=5

b=-25

b=20

Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

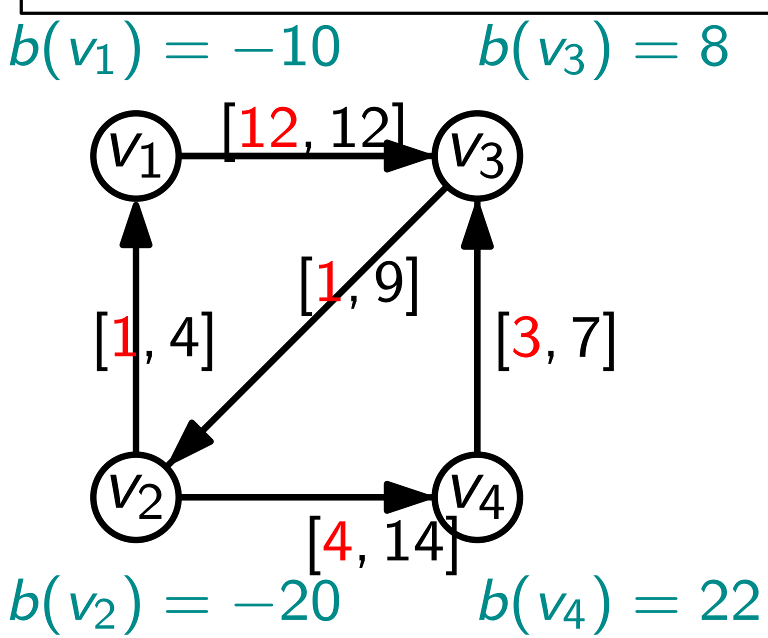
b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$,
$\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$



Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$,
$\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

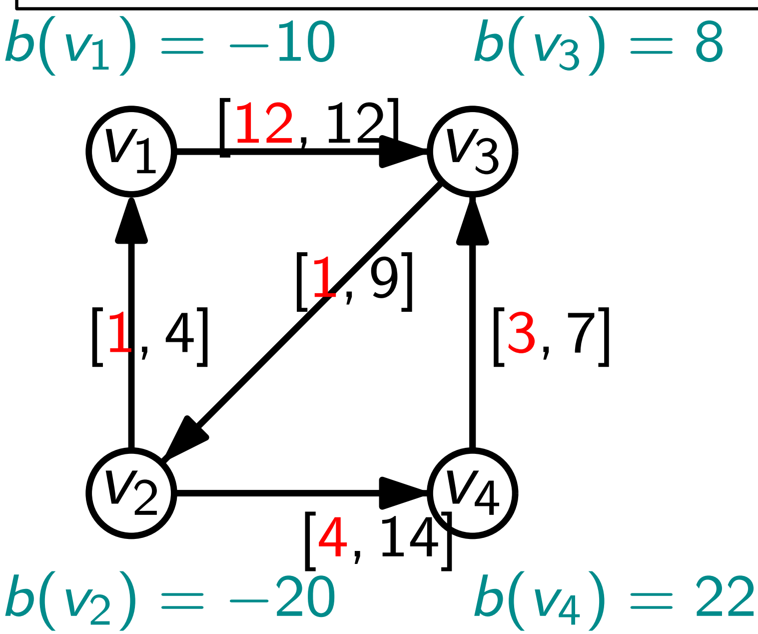
Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$:

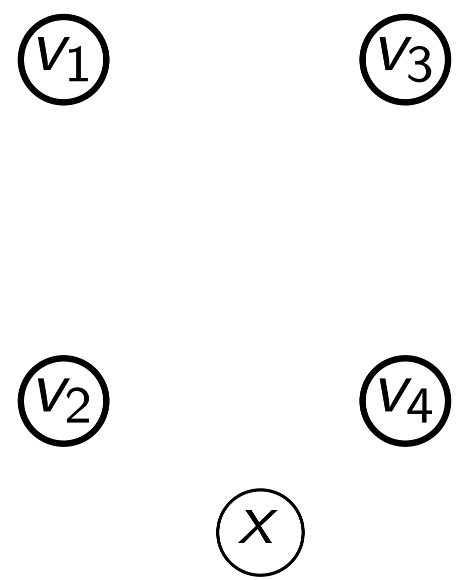


Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$, $\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\hat{V} := V \cup \{x\}$,

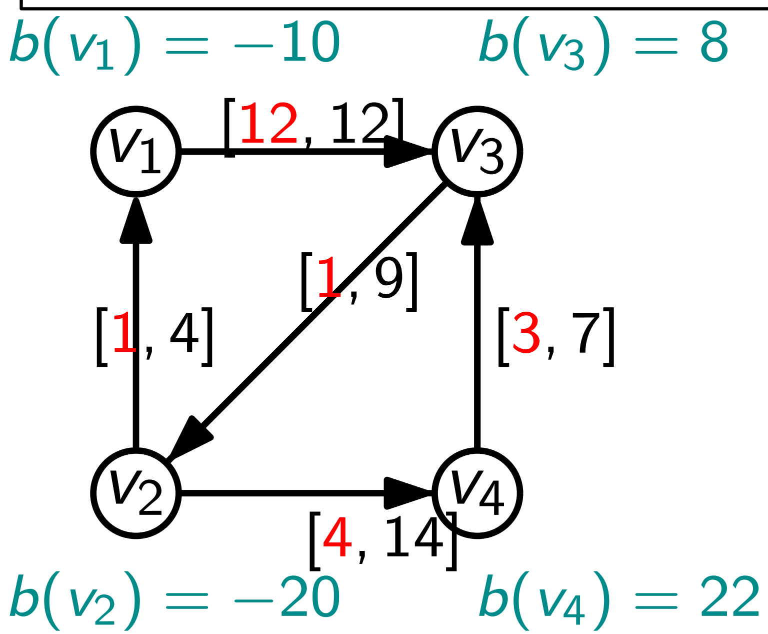


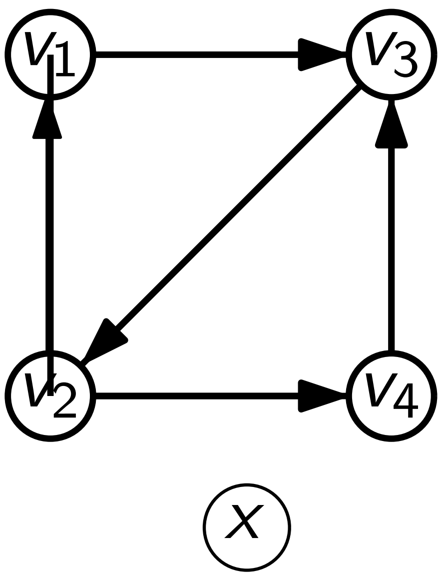


Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$, $\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\hat{V} := V \cup \{x\}$,
$\hat{E} := E$

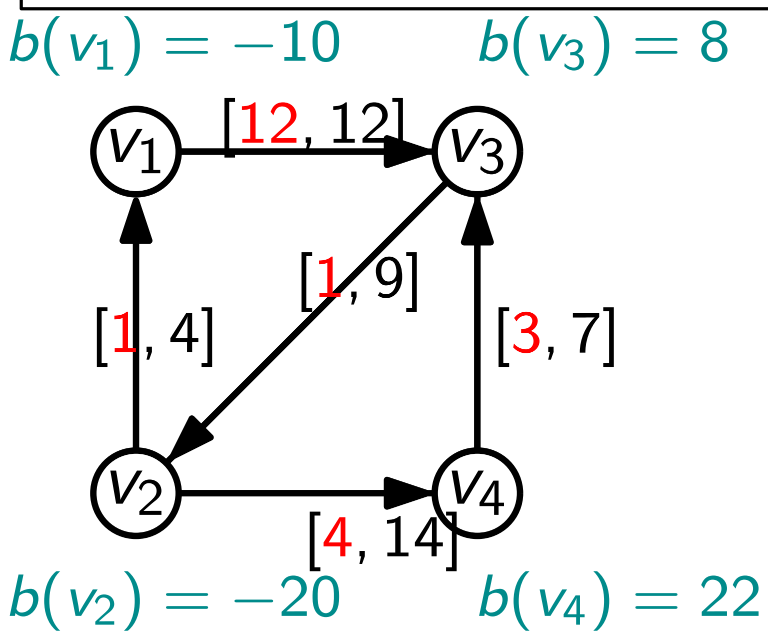


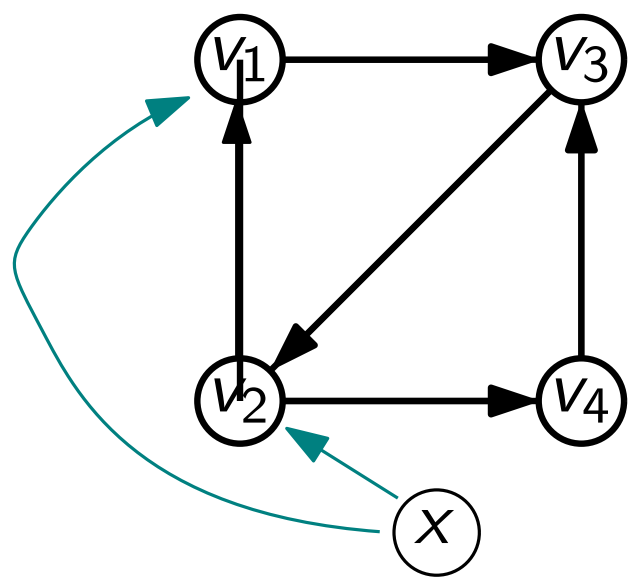


Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$,
$\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\hat{V} := V \cup \{x\}$,
$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\}$

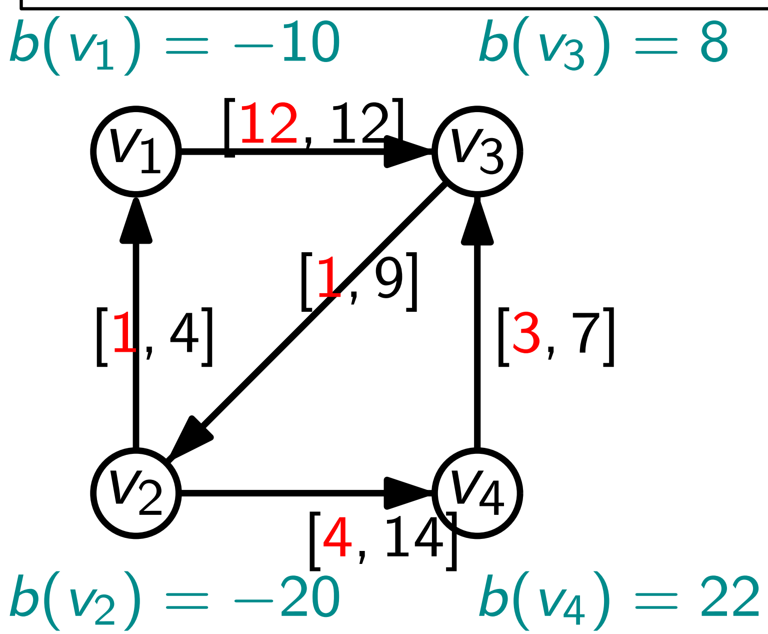


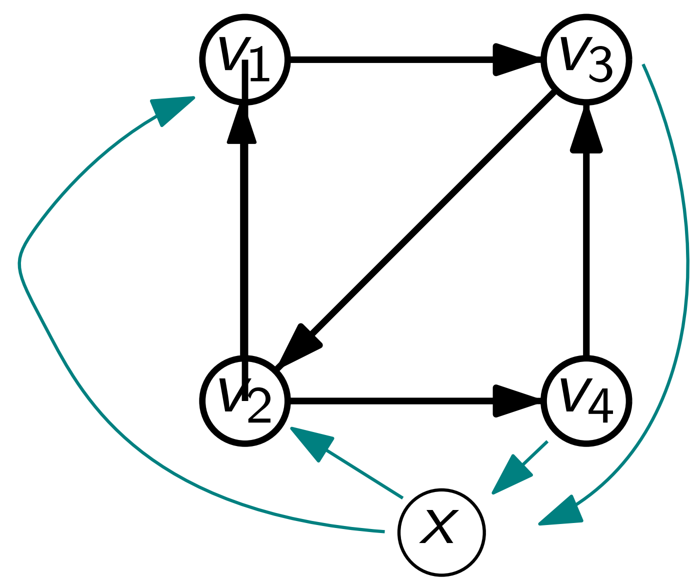


Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$,
$\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\hat{V} := V \cup \{x\}$,
$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\} \cup \{(u, x) : u \in V : b(u) > 0\}$



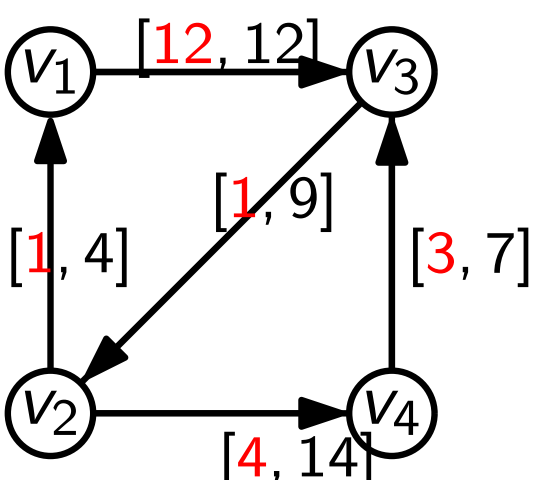


Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

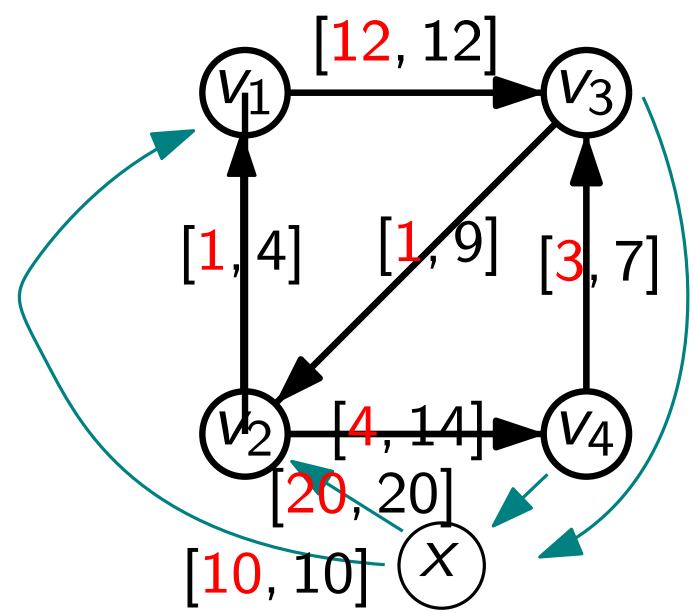
b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$,
$\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\hat{V} := V \cup \{x\}$,
$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\} \cup \{(u, x) : u \in V : b(u) > 0\}$
$\hat{l}(e) := l(e), \hat{c} = c(e) \; \forall e \in E'$
$l(x, v) := c(x, v) := -b(v)$

$b(v_1) = -10$ $b(v_3) = 8$



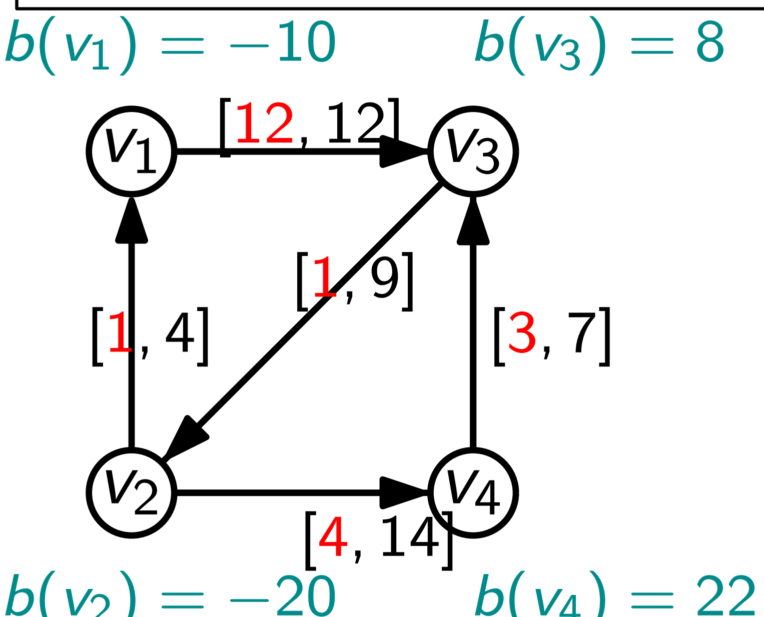
$b(v_2) = -20$ $b(v_4) = 22$

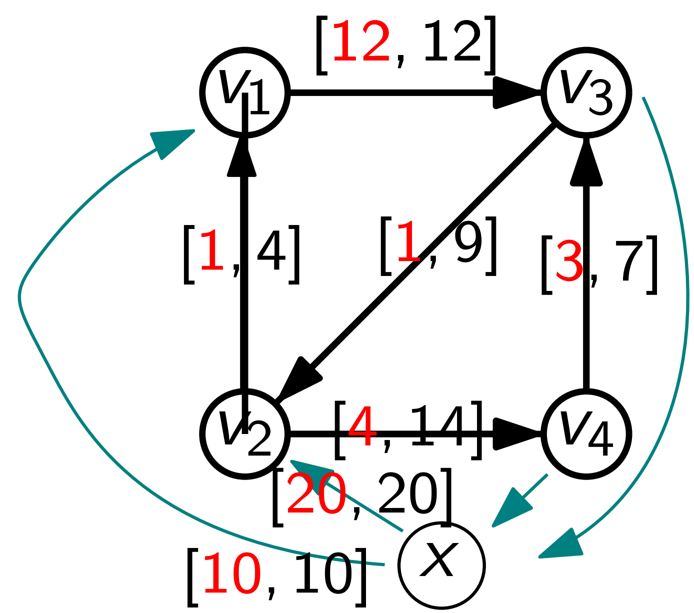


Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$,
$\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\quad \hat{V} := V \cup \{x\}$,
$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\} \cup \{(u, x) : u \in V : b(u) > 0\}$
$\hat{l}(e) := l(e), \hat{c} = c(e)\ \forall e \in E'$
$l(x, v) := c(x, v) := -b(v)$

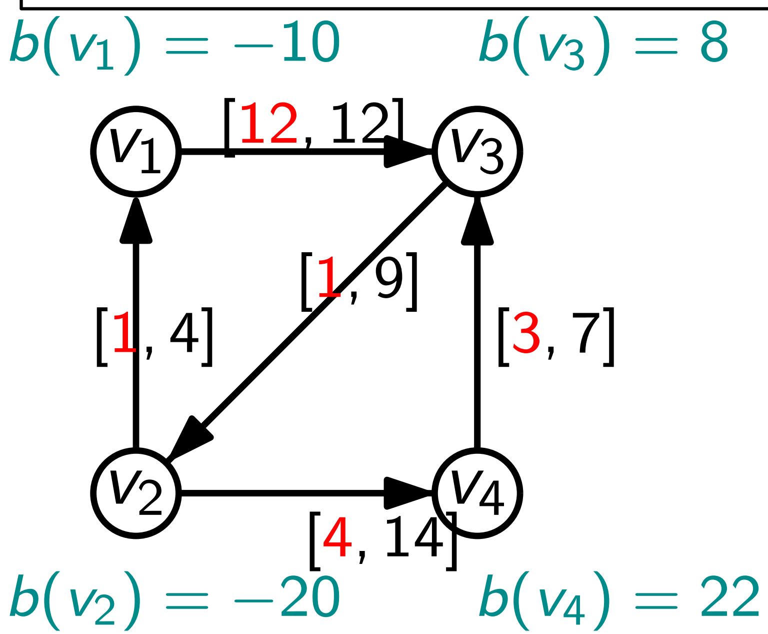


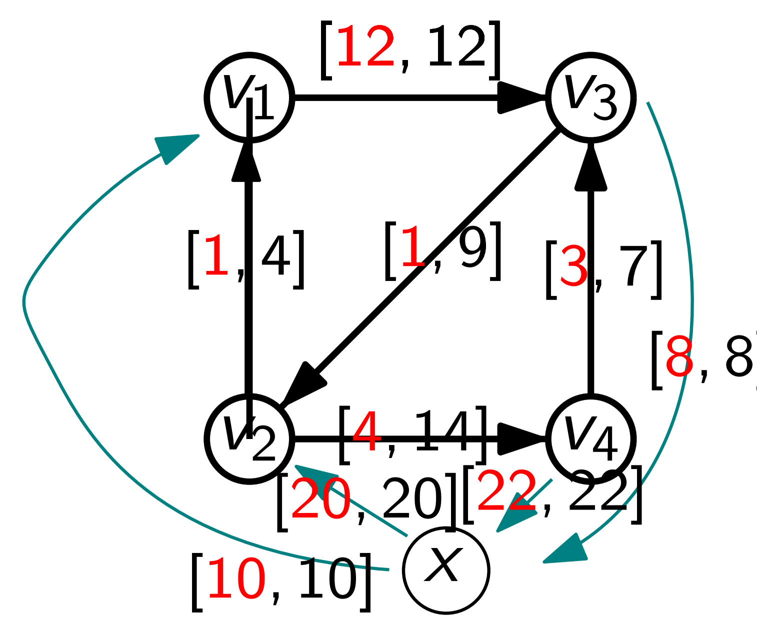


Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$,
$\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\hat{V} := V \cup \{x\}$,
$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\} \cup \{(u, x) : u \in V : b(u) > 0\}$
$\hat{l}(e) := l(e), \hat{c} = c(e)\ \forall e \in E'$
$l(x, v) := c(x, v) := -b(v)\ \ l((u, v)) := c((u, v)) = b(u)$

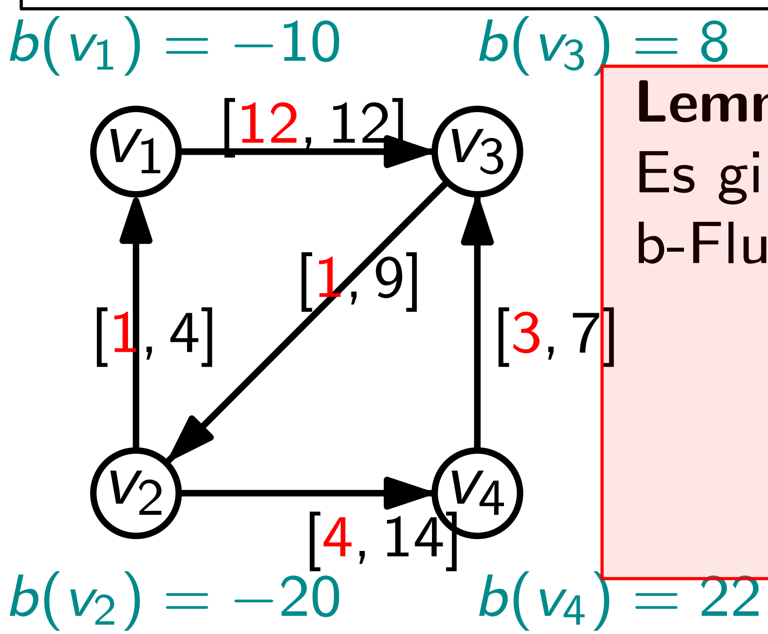




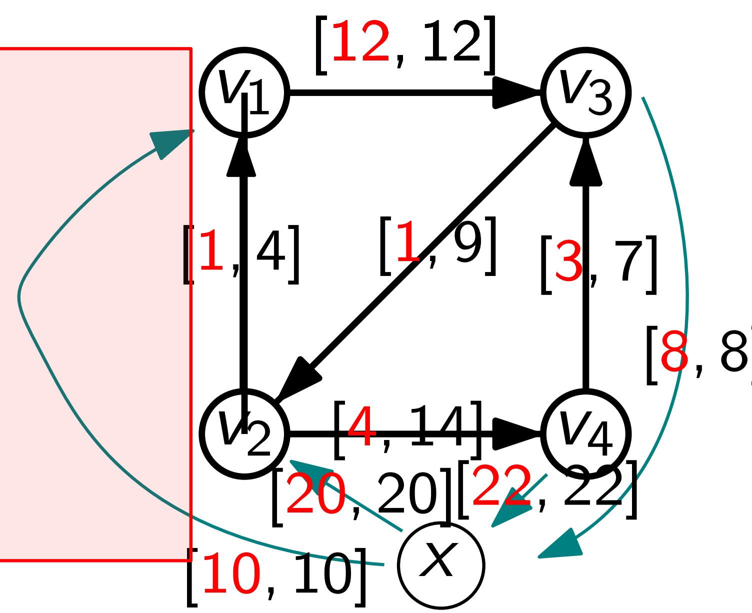
Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$, $\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\quad \hat{V} := V \cup \{x\}$,
$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\} \cup \{(u, x) : u \in V : b(u) > 0\}$
$\hat{l}(e) := l(e), \hat{c} = c(e)\ \forall e \in E'$
$l(x, v) := c(x, v) := -b(v)\ \ l((u, v)) := c((u, v)) = b(u)$



Lemma:
Es gibt einen zulässigen b-Fluss in G $\Leftrightarrow$

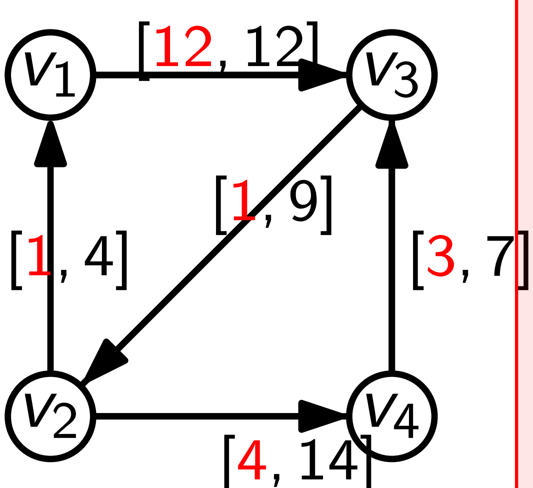


Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$,
$\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

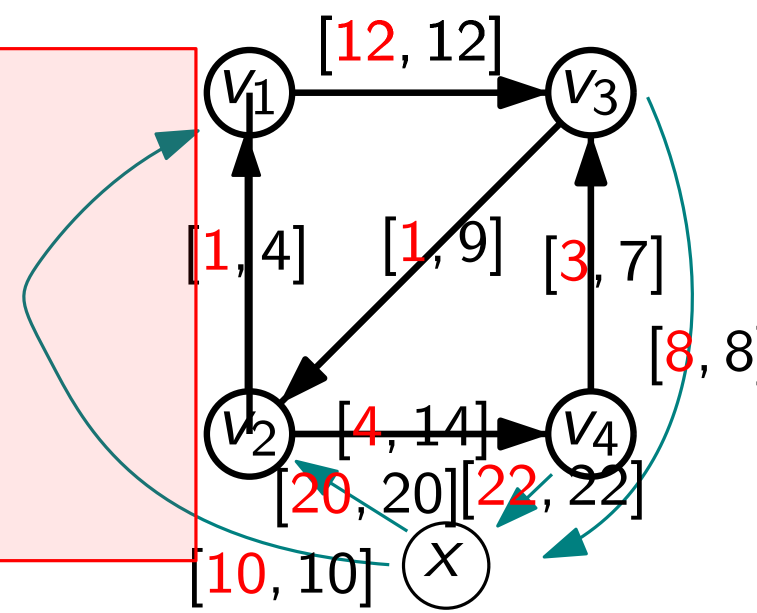
Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\quad \hat{V} := V \cup \{x\}$,
$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\} \cup \{(u, x) : u \in V : b(u) > 0\}$
$\hat{l}(e) := l(e), \hat{c} = c(e)\ \forall e \in E'$
$l(x, v) := c(x, v) := -b(v)\ \ l((u, v)) := c((u, v)) = b(u)$

$b(v_1) = -10$ $\quad$ $b(v_3) = 8$



$b(v_2) = -20$ $\quad$ $b(v_4) = 22$

Lemma:
Es gibt einen zulässigen b-Fluss in $G \Leftrightarrow$
Es gibt eine zulässige Strömung in $\hat{G} \Leftrightarrow$



Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse

Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$

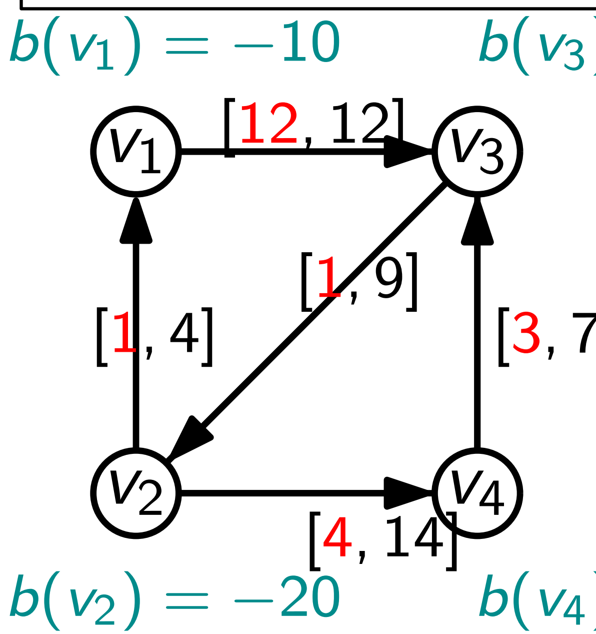
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$, $\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\quad \hat{V} := V \cup \{x\}$,

$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\} \cup \{(u, x) : u \in V : b(u) > 0\}$

$\hat{l}(e) := l(e), \hat{c} = c(e) \; \forall e \in E'$

$l(x, v) := c(x, v) := -b(v) \quad l((u, v)) := c((u, v)) = b(u)$

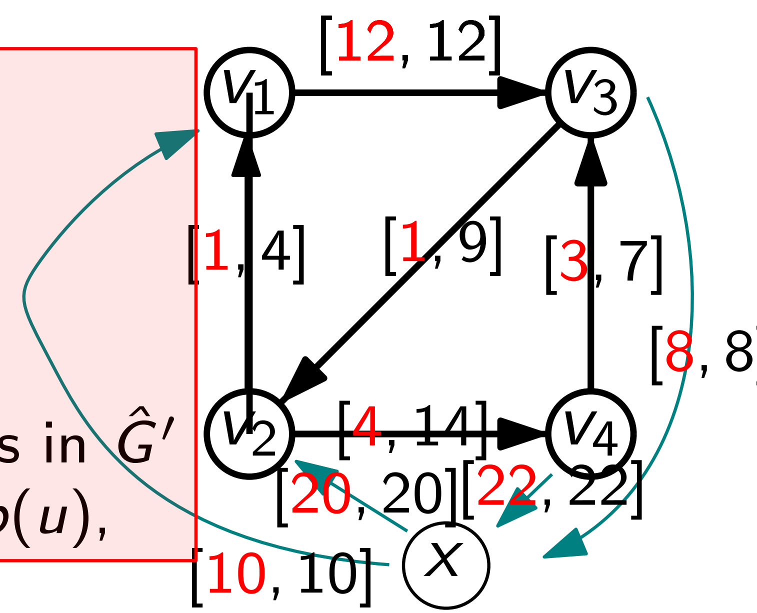


Lemma:

Es gibt einen zulässigen b-Fluss in $G \Leftrightarrow$

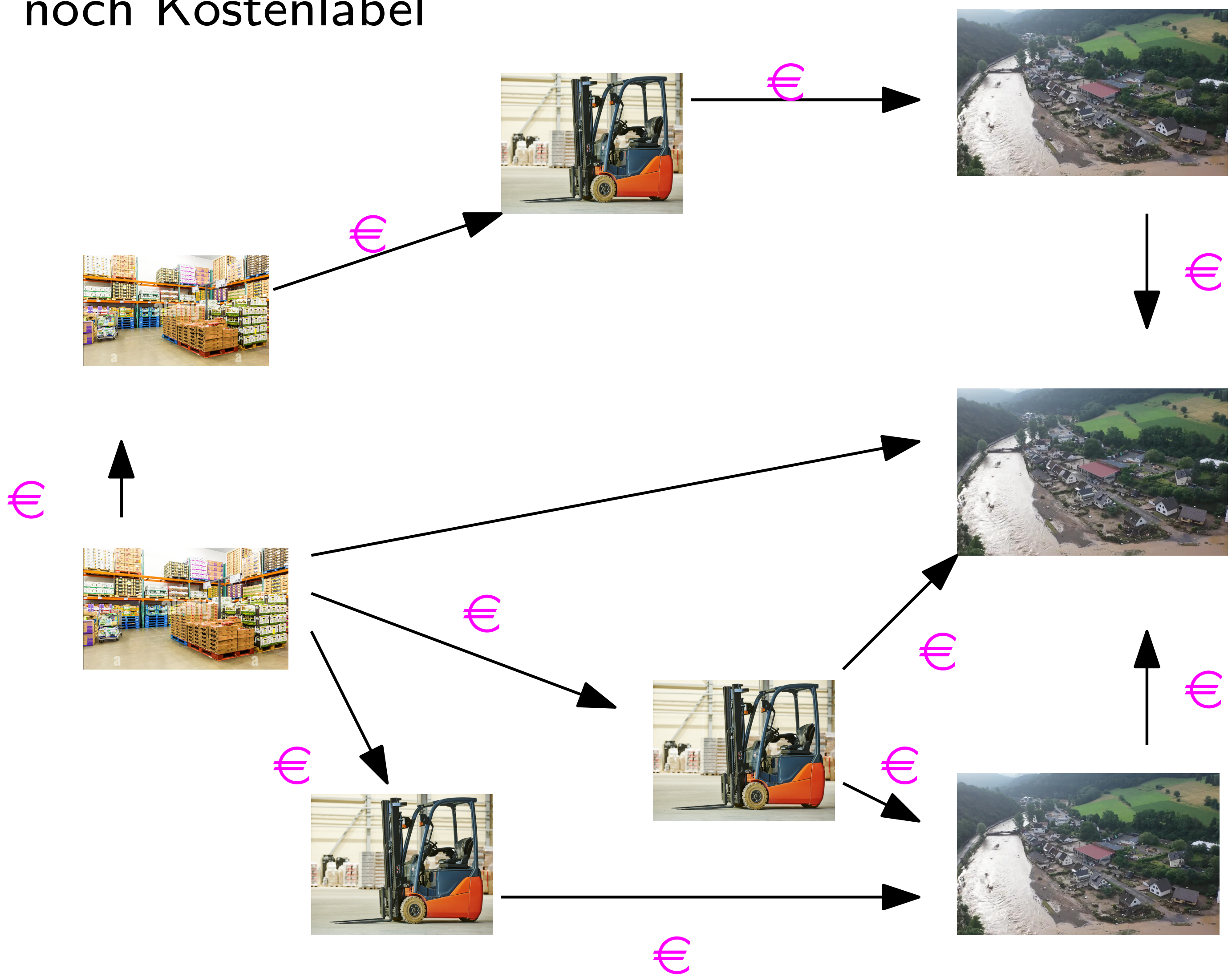
Es gibt eine zulässige Strömung in $\hat{G} \Leftrightarrow$

Der maximale s'-t'-Fluss in $\hat{G}'$ hat Wert $\sum_{u \in V : b(u) > 0} b(u)$,



Verallgemeinerung: Kostenminimale Flüsse

Knoten haben **Bedarf** $b(v)$ oder **Überschuss** $-b(v)$
Neben (unteren und) oberen Kapazitätsschranken haben Kanten jetzt auch noch Kostenlabel



Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

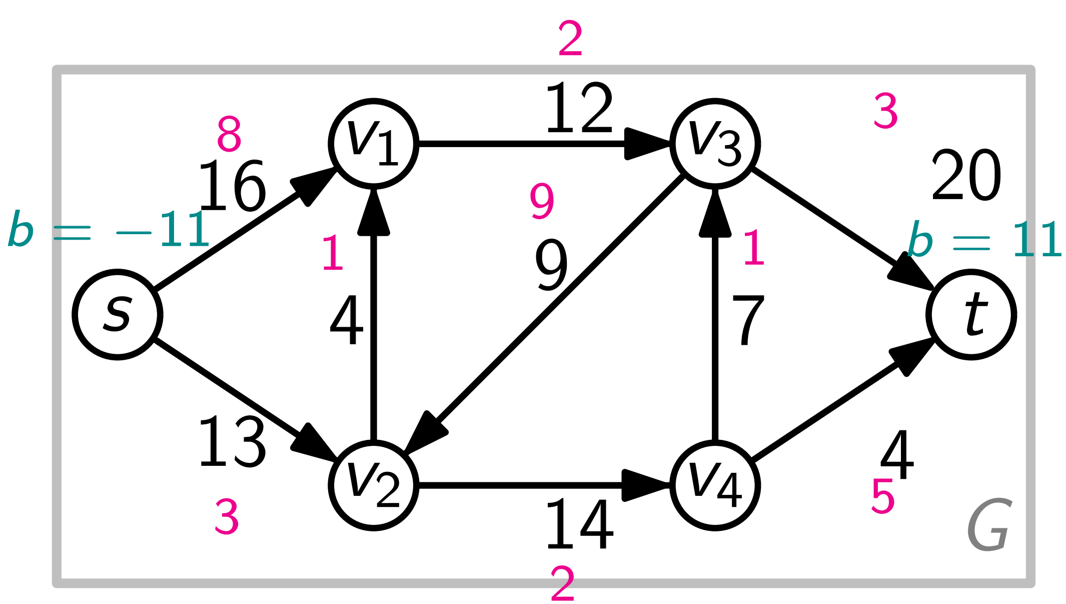
Kostenmininmaler Fluss

Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.

Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

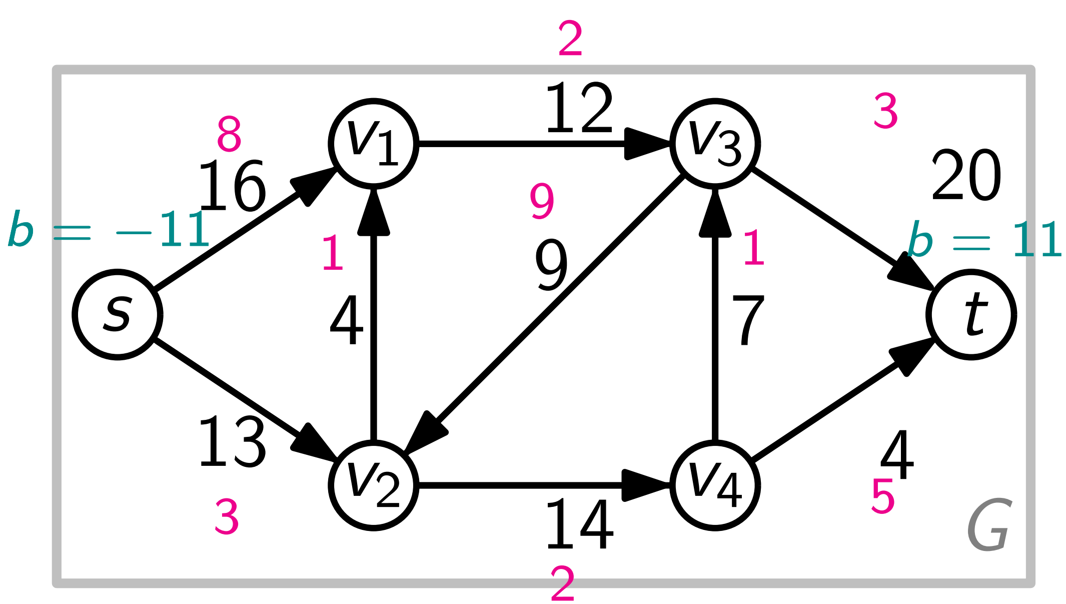
Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.



Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

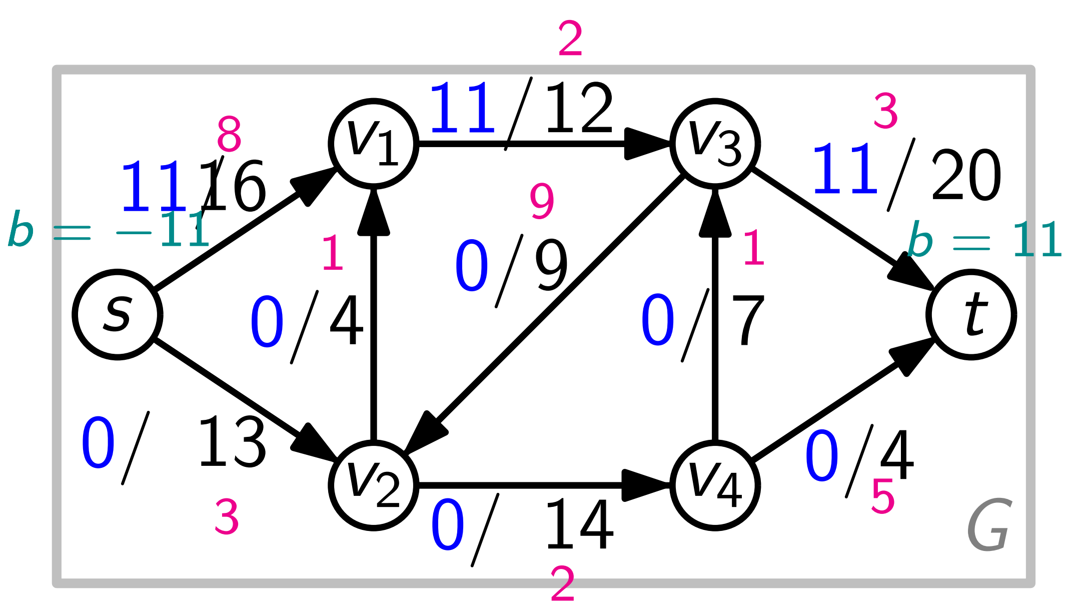
Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u, v)) = k((u, v))$ für $(u, v) \in E$
-$k_f((u, v)) = -k((v, u))$ für $(v, u) \in E$



Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

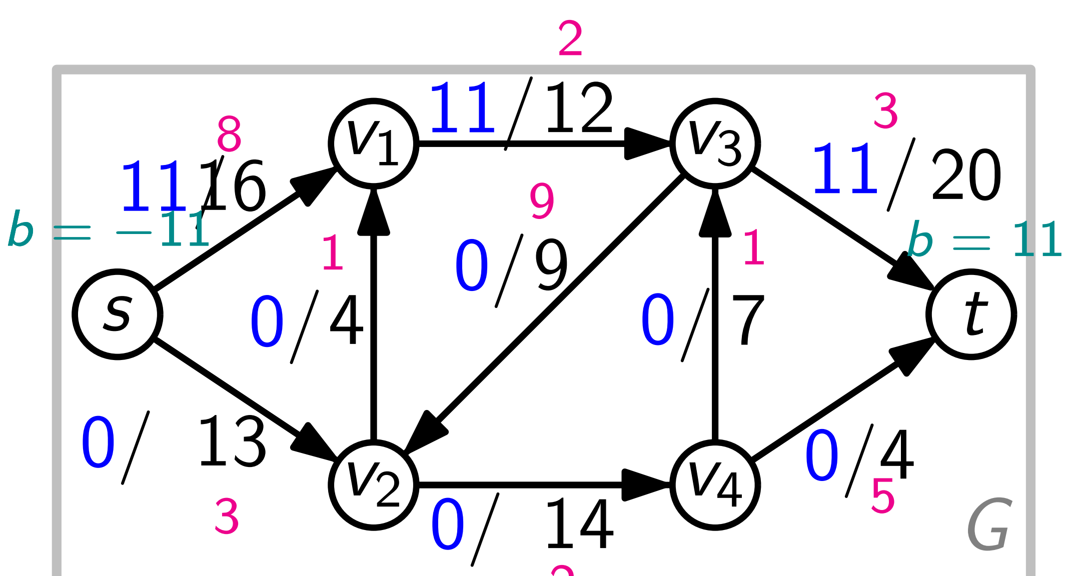
Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u,v)) = k((u,v))$ für $(u,v) \in E$
-$k_f((u,v)) = -k((v,u))$ für $(v,u) \in E$

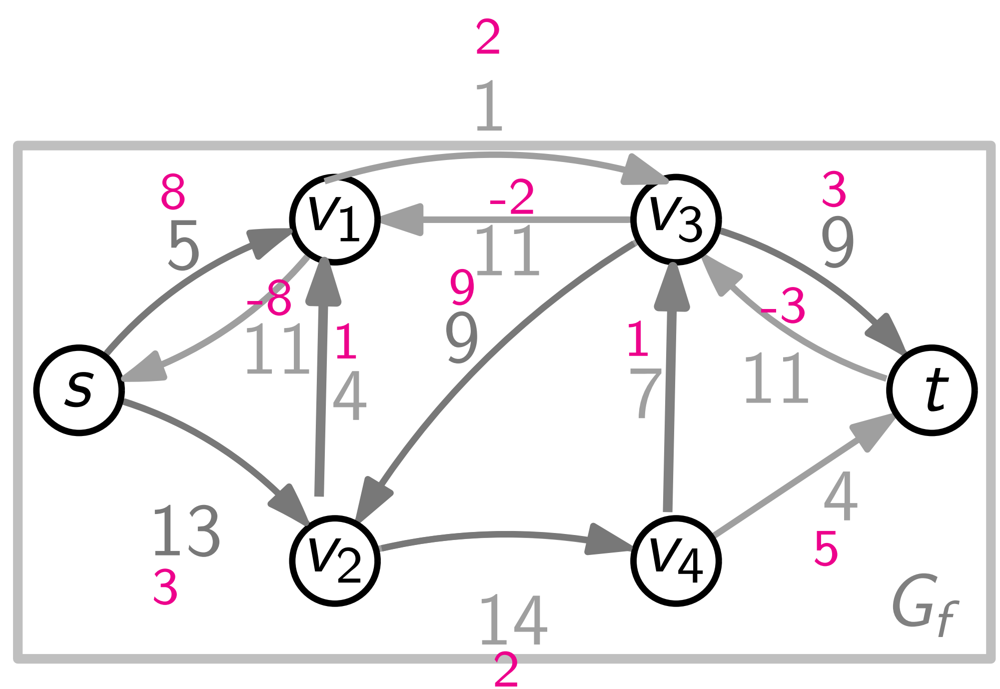


Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u,v)) = k((u,v))$ für $(u,v) \in E$
-$k_f((u,v)) = -k((v,u))$ für $(v,u) \in E$



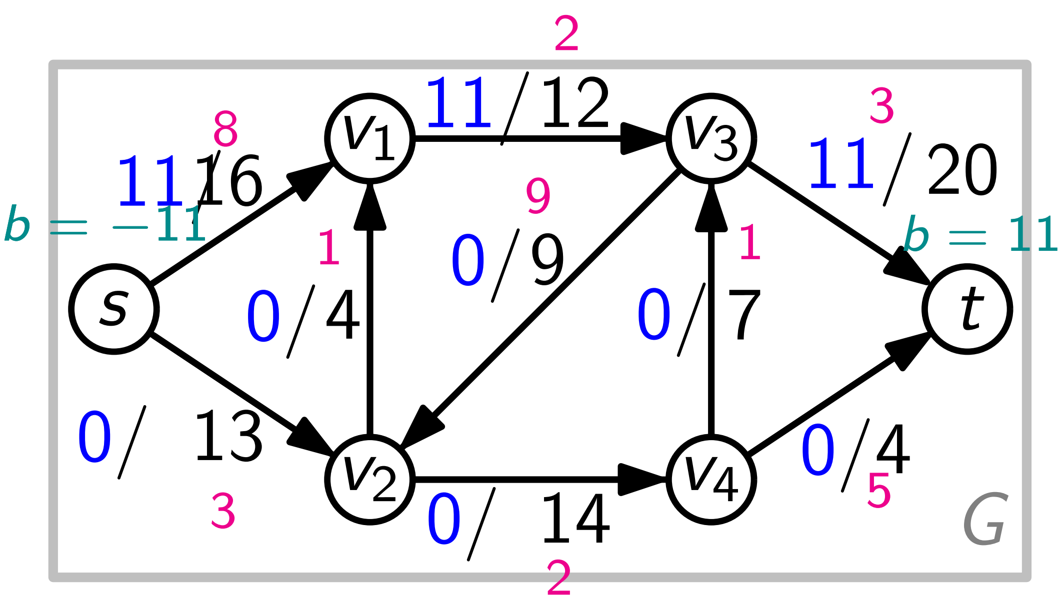


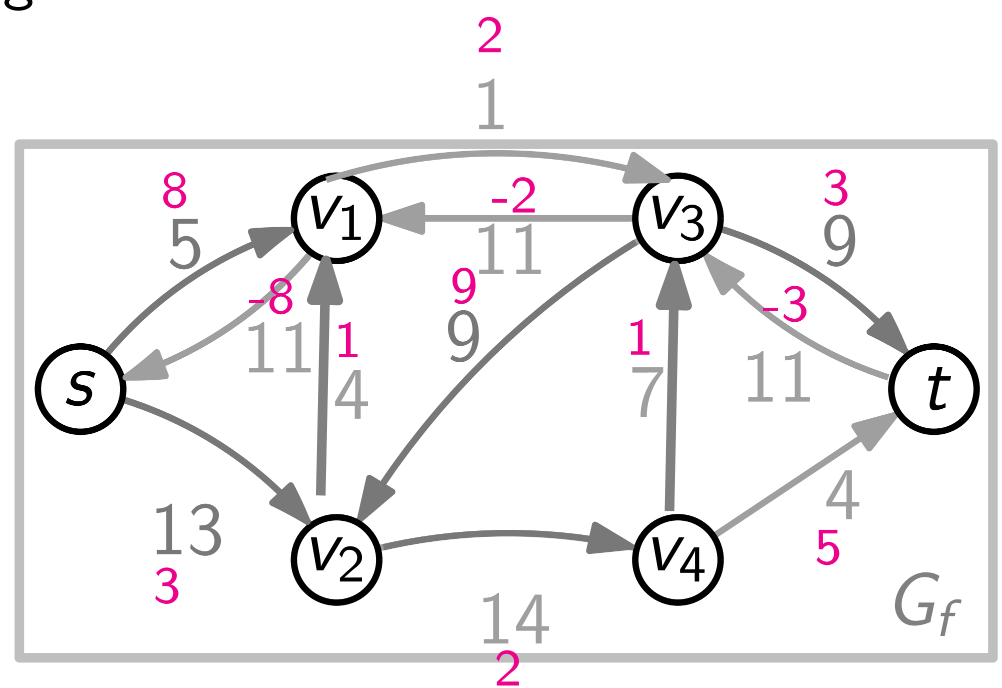
Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u, v)) = k((u, v))$ für $(u, v) \in E$
-$k_f((u, v)) = -k((v, u))$ für $(v, u) \in E$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss



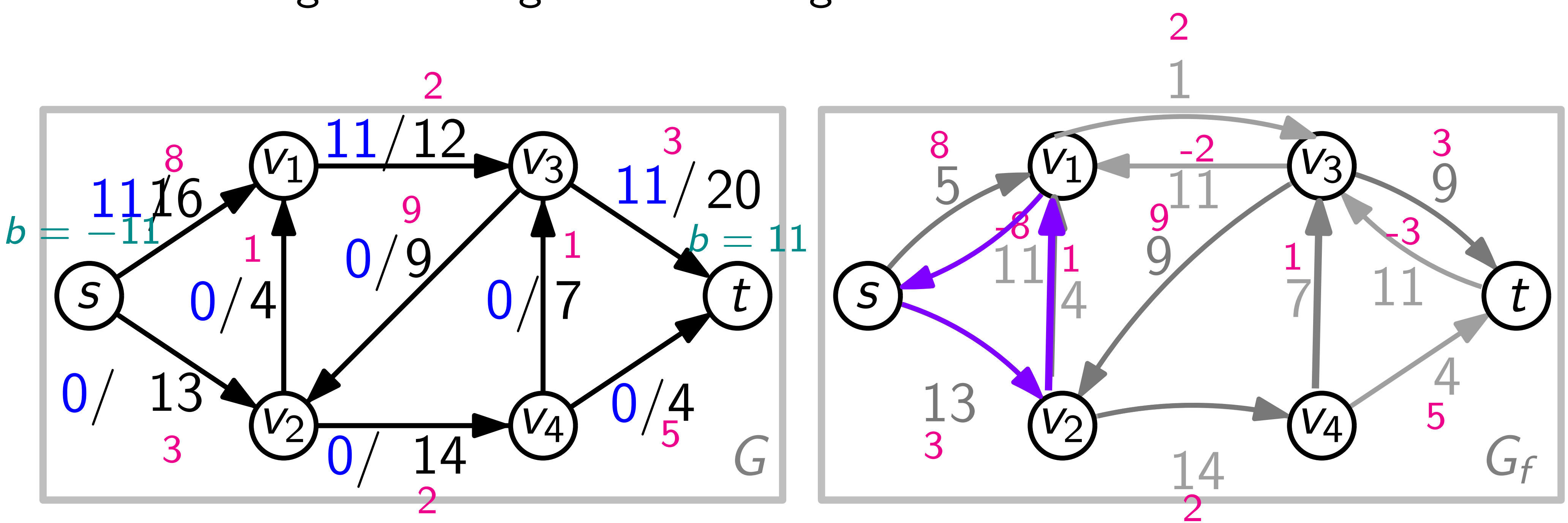


Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u, v)) = k((u, v))$ für $(u, v) \in E$
-$k_f((u, v)) = -k((v, u))$ für $(v, u) \in E$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss

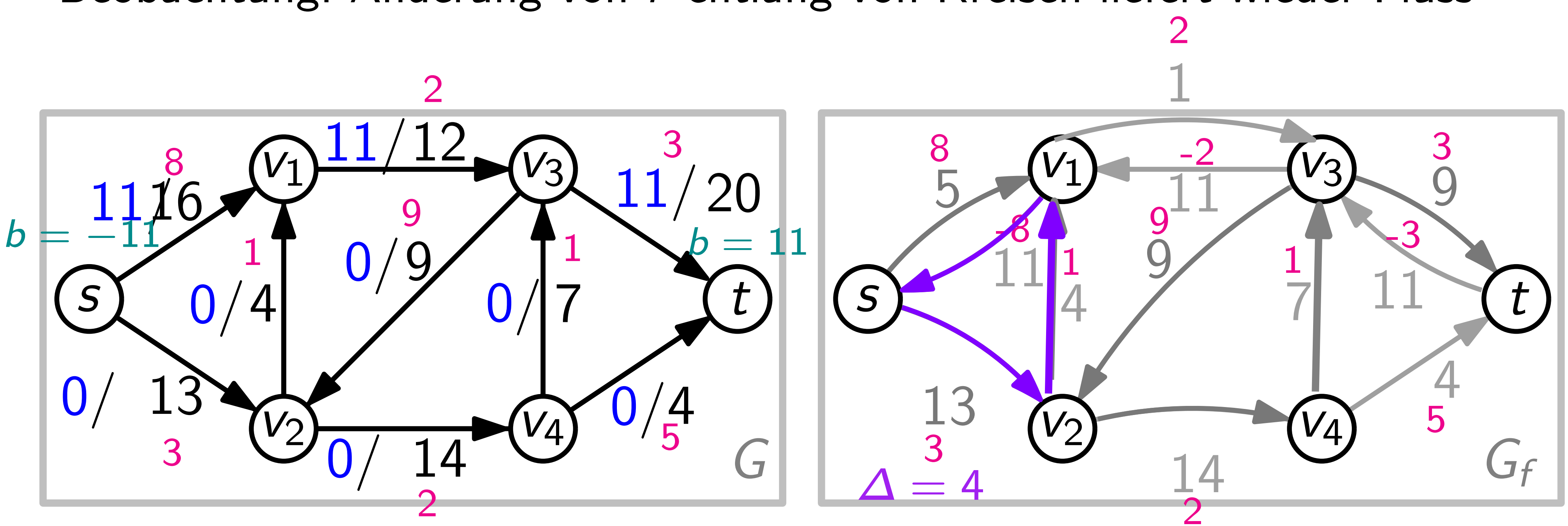


Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u,v)) = k((u,v))$ für $(u,v) \in E$
-$k_f((u,v)) = -k((v,u))$ für $(v,u) \in E$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss

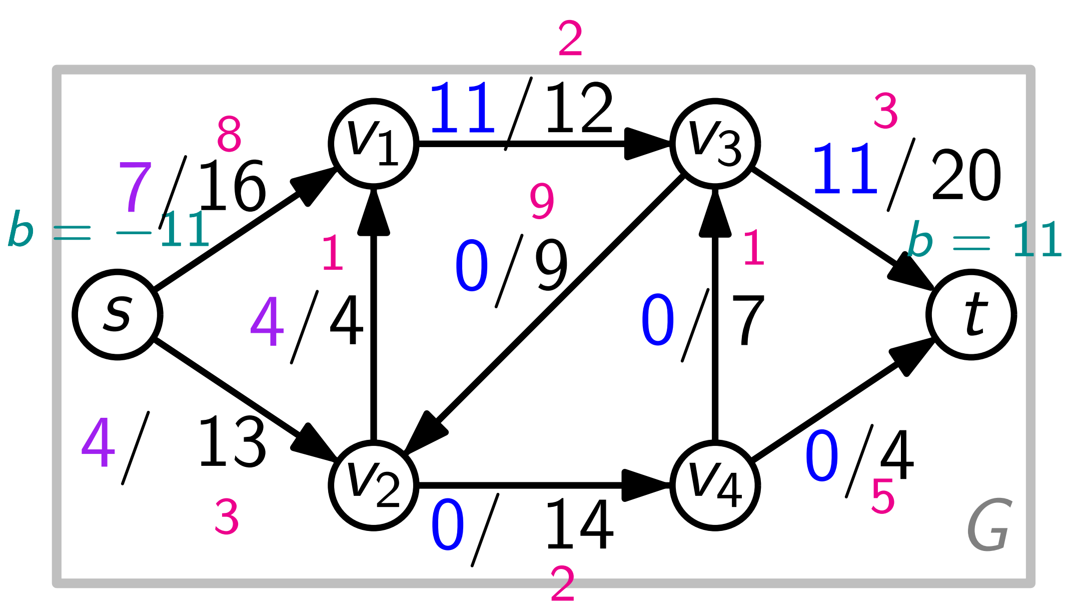


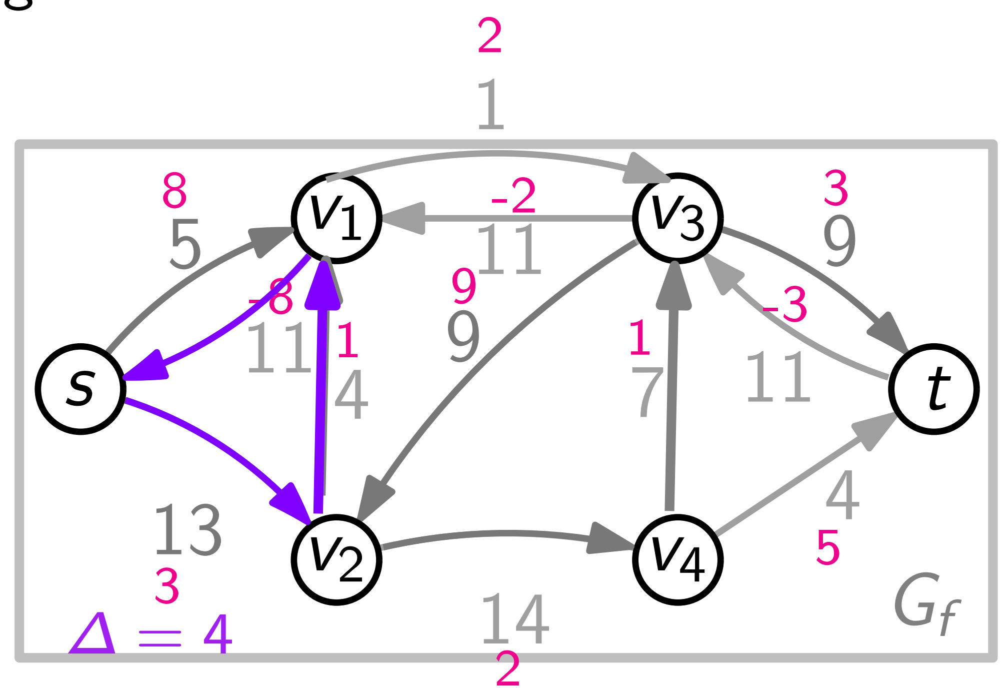
Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u,v)) = k((u,v))$ für $(u,v) \in E$
-$k_f((u,v)) = -k((v,u))$ für $(v,u) \in E$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss



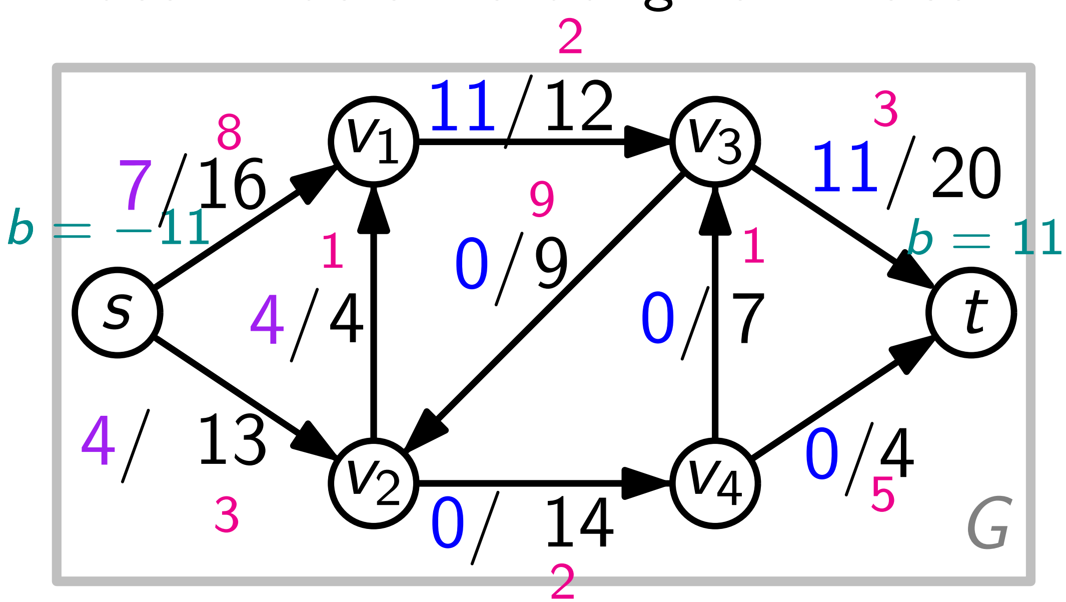


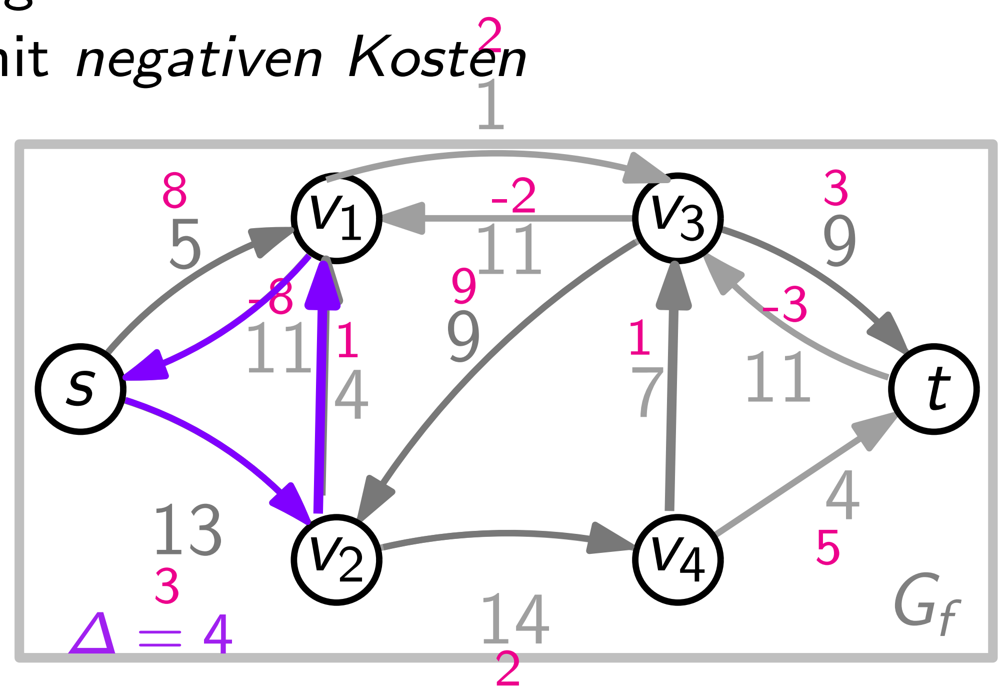
Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u,v)) = k((u,v))$ für $(u,v) \in E$
-$k_f((u,v)) = -k((v,u))$ für $(v,u) \in E$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss
Idee: Ändere f entlang von Kreisen mit *negativen Kosten*



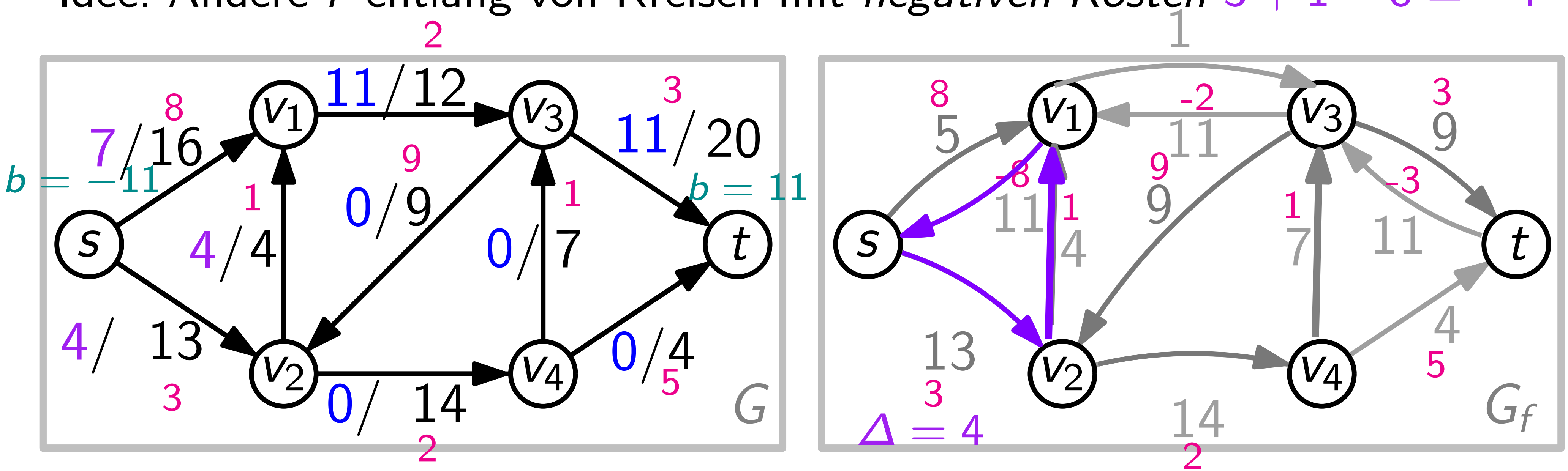


Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u,v)) = k((u,v))$ für $(u,v) \in E$
-$k_f((u,v)) = -k((v,u))$ für $(v,u) \in E$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss
Idee: Ändere f entlang von Kreisen mit *negativen Kosten* $3 + 1 - 8 = -4$

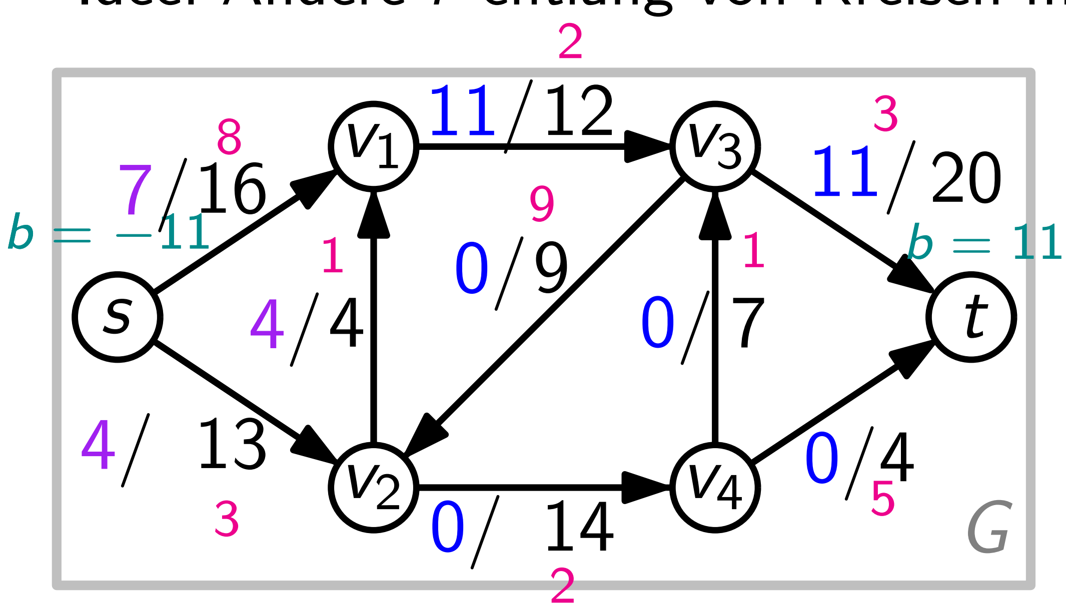


Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u,v)) = k((u,v))$ für $(u,v) \in E$
-$k_f((u,v)) = -k((v,u))$ für $(v,u) \in E$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss
Idee: Ändere f entlang von Kreisen mit *negativen Kosten*

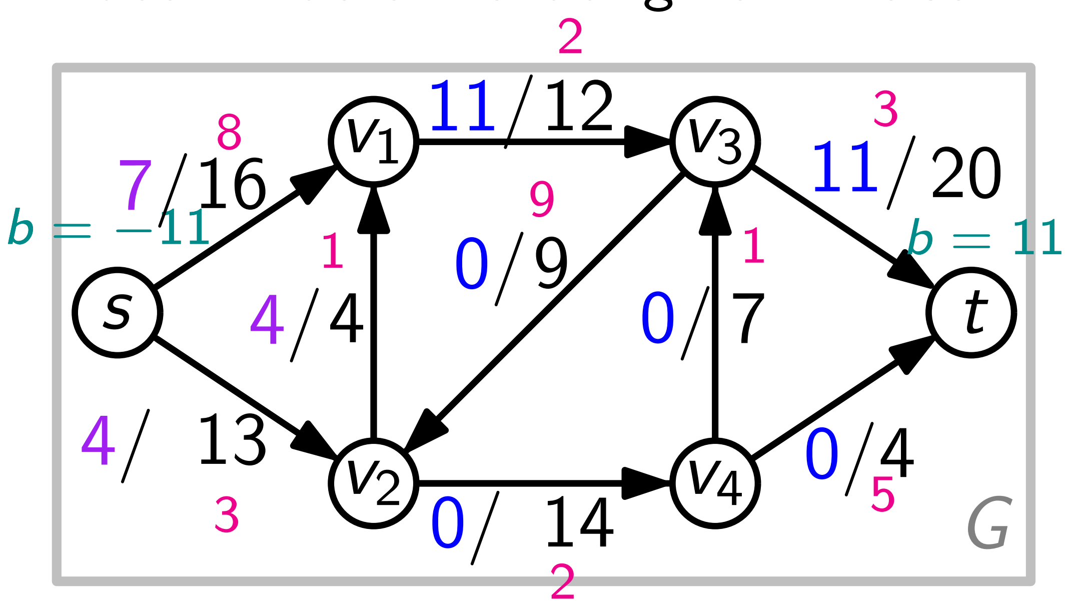


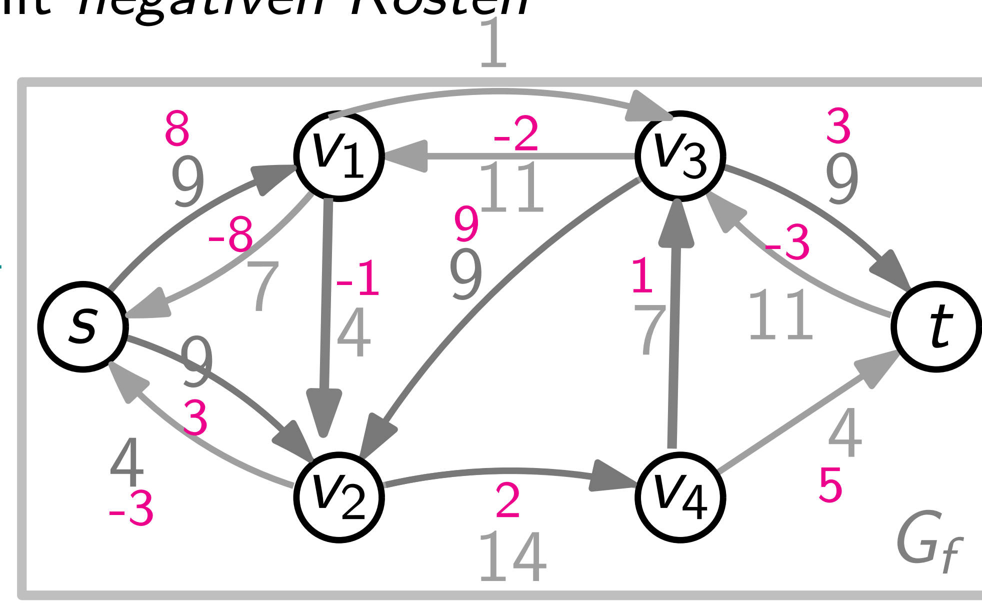
Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u,v)) = k((u,v))$ für $(u,v) \in E$
-$k_f((u,v)) = -k((v,u))$ für $(v,u) \in E$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss
Idee: Ändere f entlang von Kreisen mit *negativen Kosten*





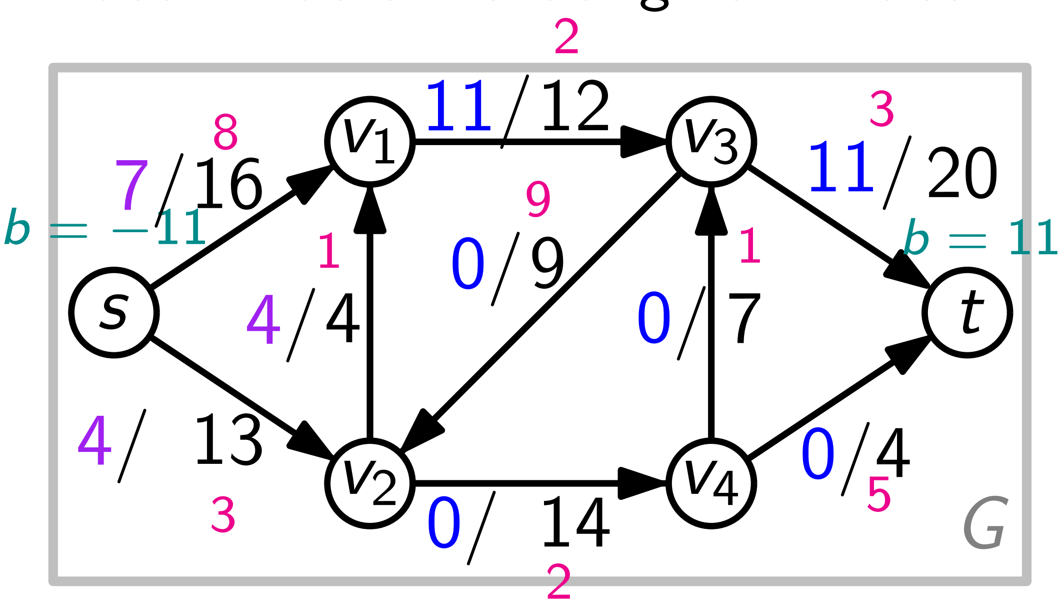
Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

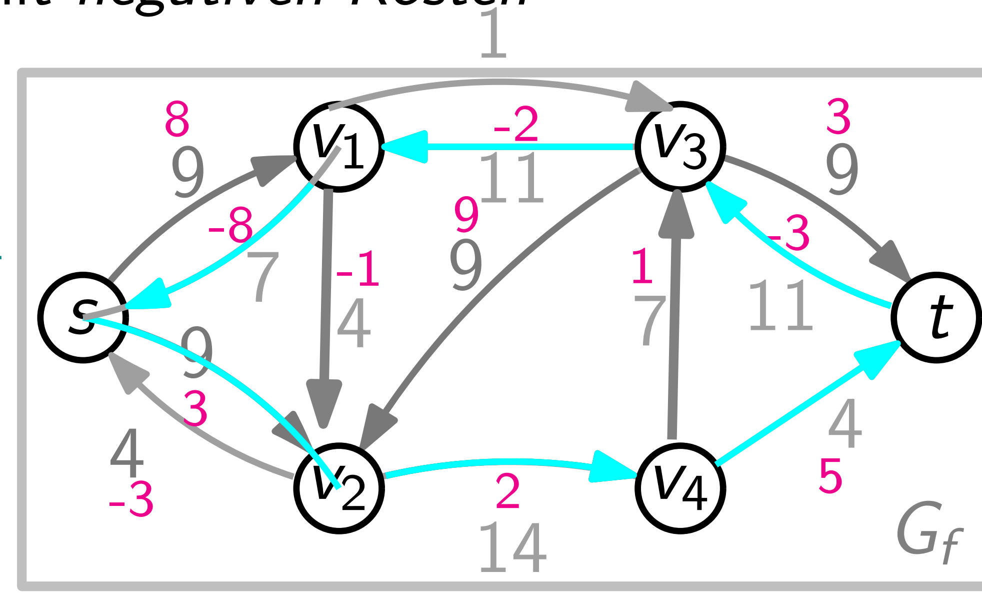
Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
- $k_f((u,v)) = k((u,v))$ für $(u,v) \in E$
- $k_f((u,v)) = -k((v,u))$ für $(v,u) \in E$

$3 + 2 + 5 - 3 - 2 - 8 = -3$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss
Idee: Ändere f entlang von Kreisen mit *negativen Kosten*





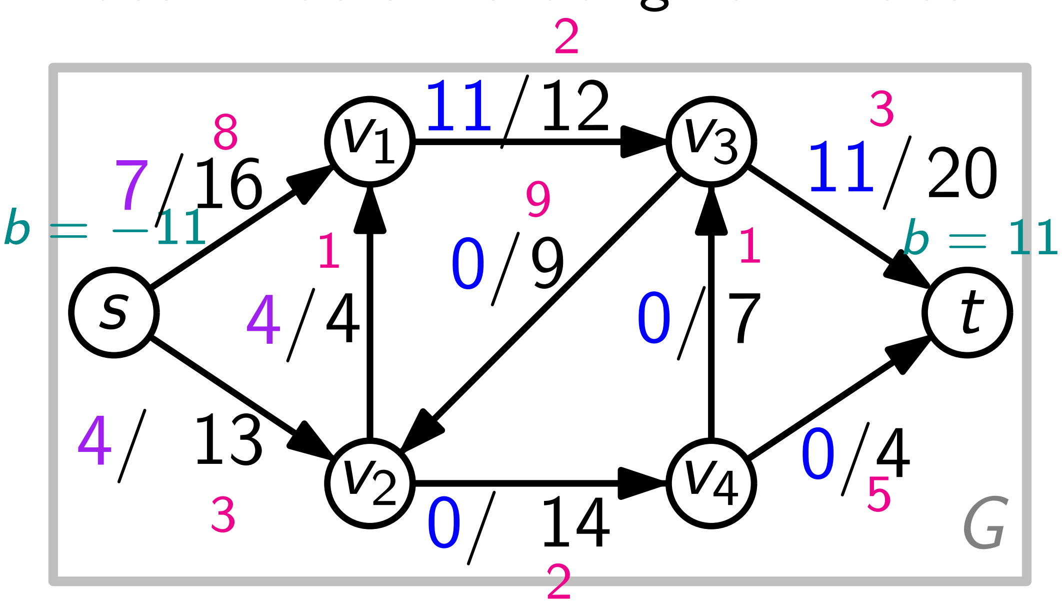
Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

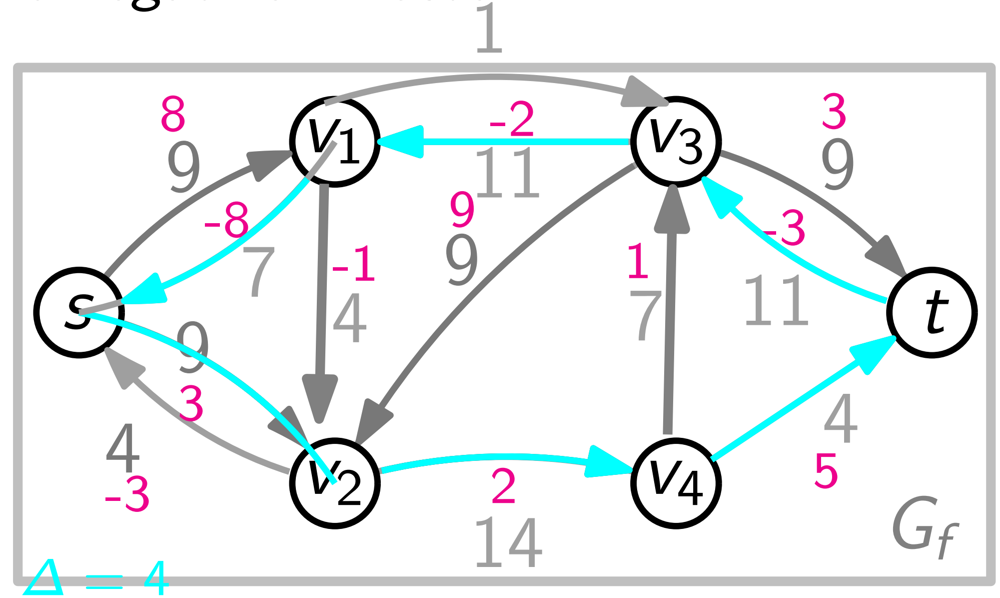
Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u, v)) = k((u, v))$ für $(u, v) \in E$
-$k_f((u, v)) = -k((v, u))$ für $(v, u) \in E$

$3 + 2 + 5 - 3 - 2 - 8 = -3$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss
Idee: Ändere f entlang von Kreisen mit *negativen Kosten*





Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss

Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.

Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten

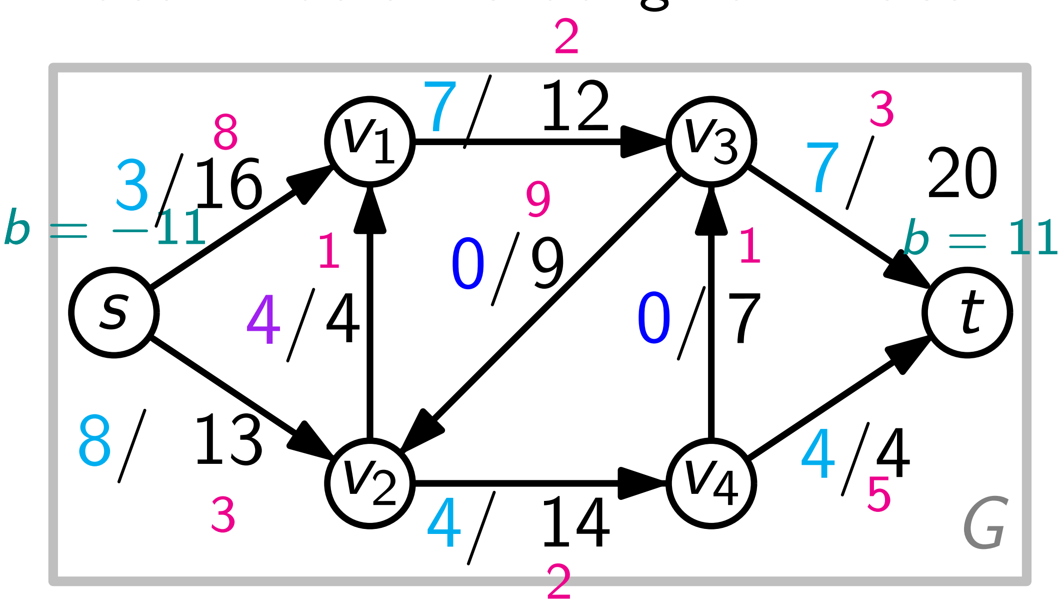
-$k_f((u, v)) = k((u, v))$ für $(u, v) \in E$

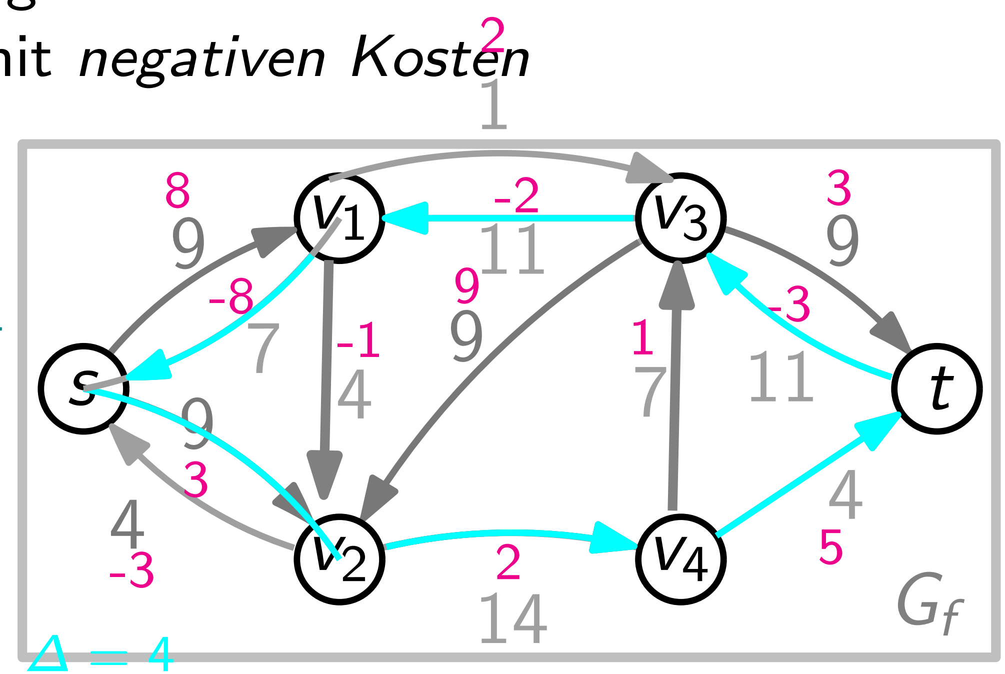
-$k_f((u, v)) = -k((v, u))$ für $(v, u) \in E$

$3 + 2 + 5 - 3 - 2 - 8 = -3$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss

Idee: Ändere f entlang von Kreisen mit *negativen Kosten*





Algorithmus von Klein

Require: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$
Ensure: Zulässiger b-Fluss mit minimalen Kosten

```
Berechne einen zulässigen b-Fluss f
while Residualnetzwerk G_f enthält einen negativen Kreis C = (V_C, E_C) do
    Setze Δ := min_{e∈E_C} c_f(e)
    for (u, v) ∈ C do
        if (u, v) ∈ E then
            f(u, v) = f(u, v) + Δ
        else
            f(u, v) = f(u, v) − Δ
        end if
    end for
end while
return f
```

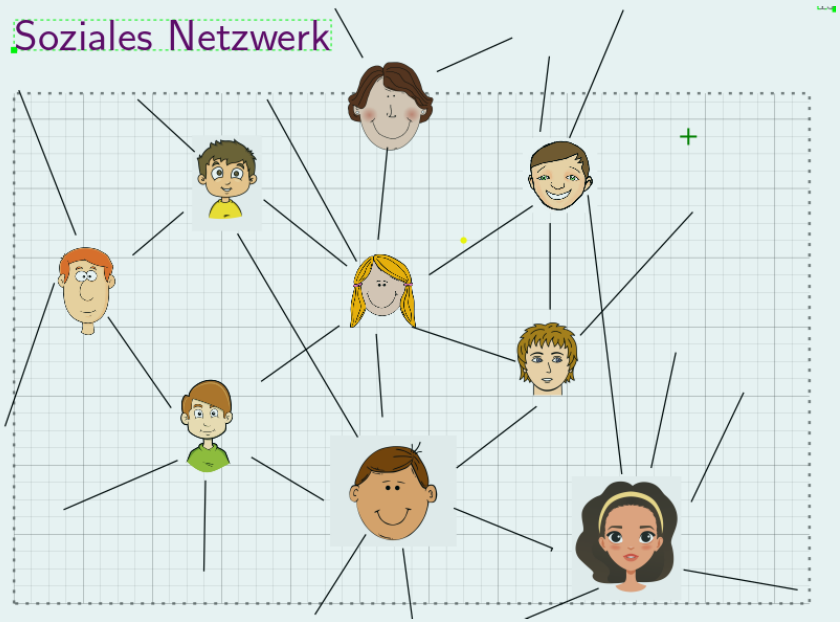
Terminiert bei ganzzahligen Kapazitäten, Kosten und Bedarfen mit kostenminimalem b-Fluss

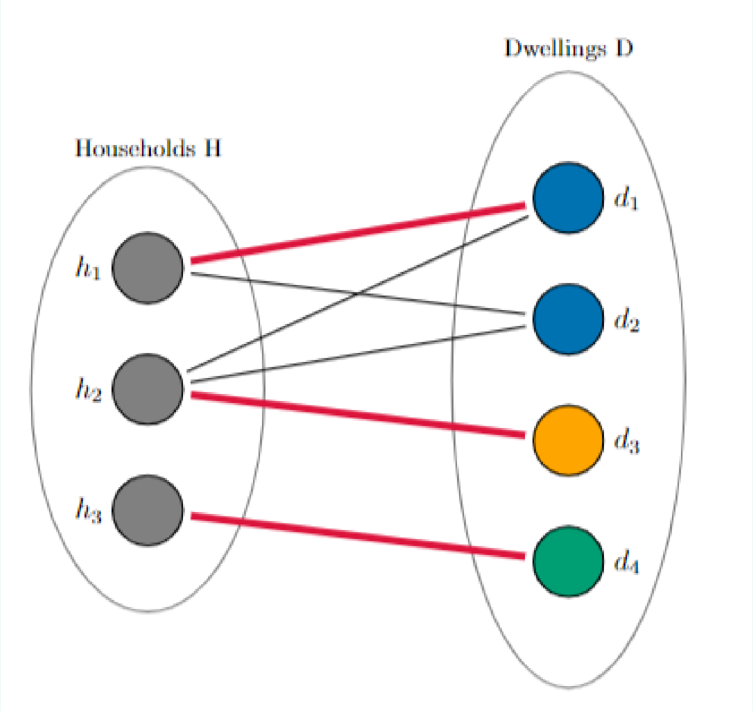
Vorlesungsübersicht

- Einführung: Modellieren auf Graphen ✓
- Teil 1: Graphen und Algorithmen auf Graphen
  - Graphen modellieren räumliche Zusammenhänge
    - Wege: Dijkstra ✓, Bellmann-Ford ✓, multikriterielle Wege ✓
    - Touren ✓
    - Flüsse: maximale Flüsse ✓, Strömungen ✓, b-Flüsse ✓, kostenminimale Flüsse ✓
  - Graphen modellieren Beziehungen
    - Matchings → Kendra
    - (Knotenüberdeckungen)
    - (unabhängige Mengen)
    - Färbungsprobleme
    - ...
  - Algorithmen und (Problem-)Komplexität
- Teil 2: Lineare und ganzzahlige Optimierung auf Graphen
  - ...

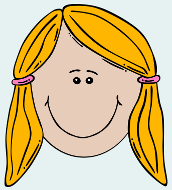
Worum geht es gerade: Matchings, unabhängige Menge, Knotenüberdeckung

Kanten stehen für Beziehungen

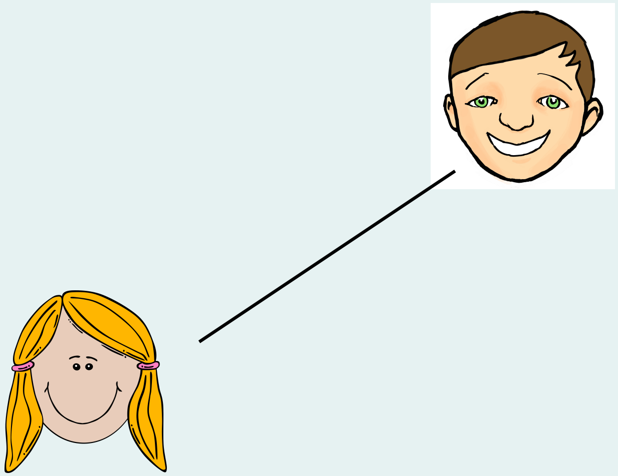




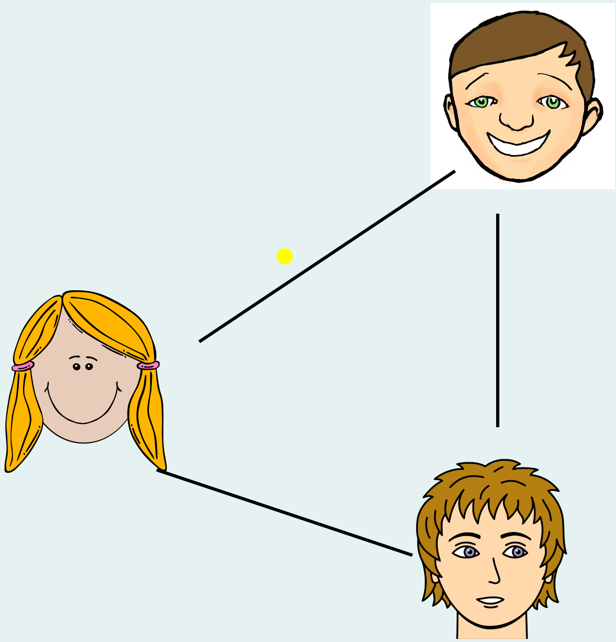
Soziales Netzwerk



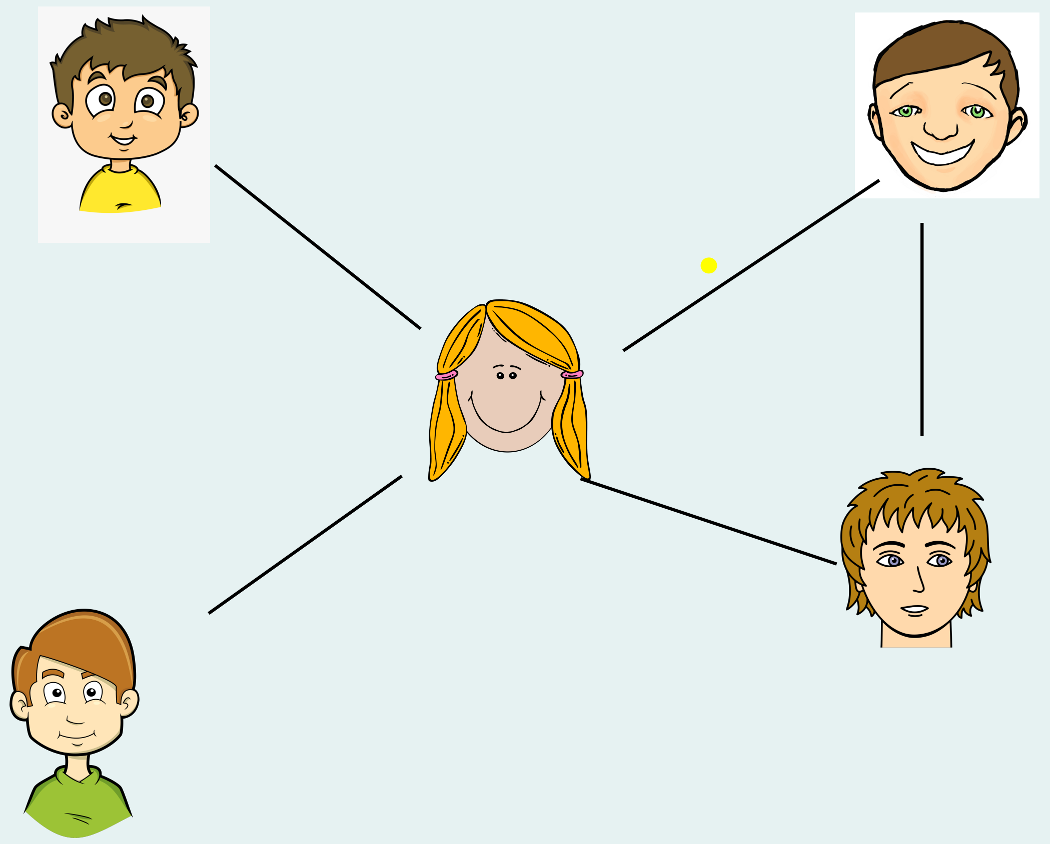
Soziales Netzwerk



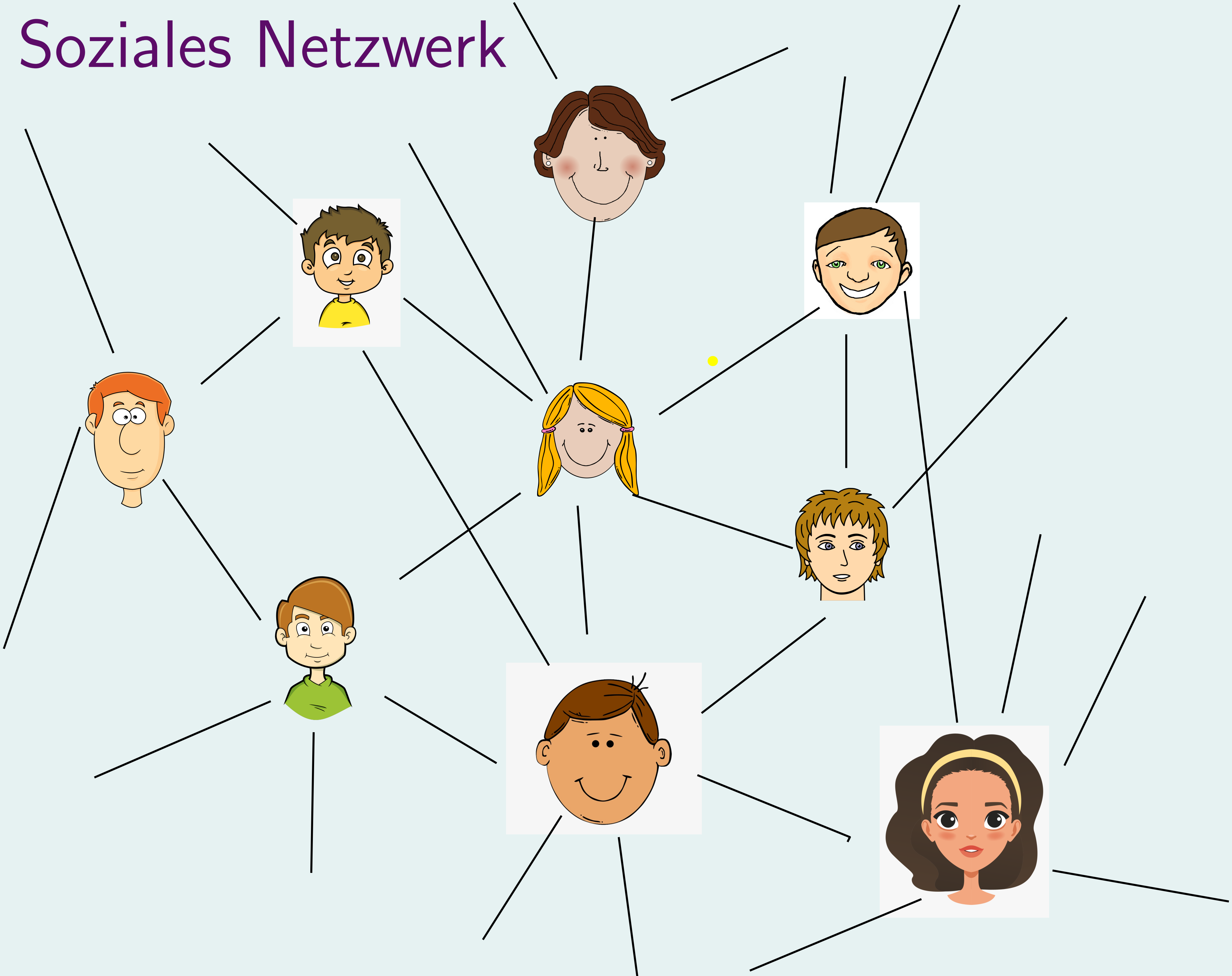
Soziales Netzwerk



Soziales Netzwerk

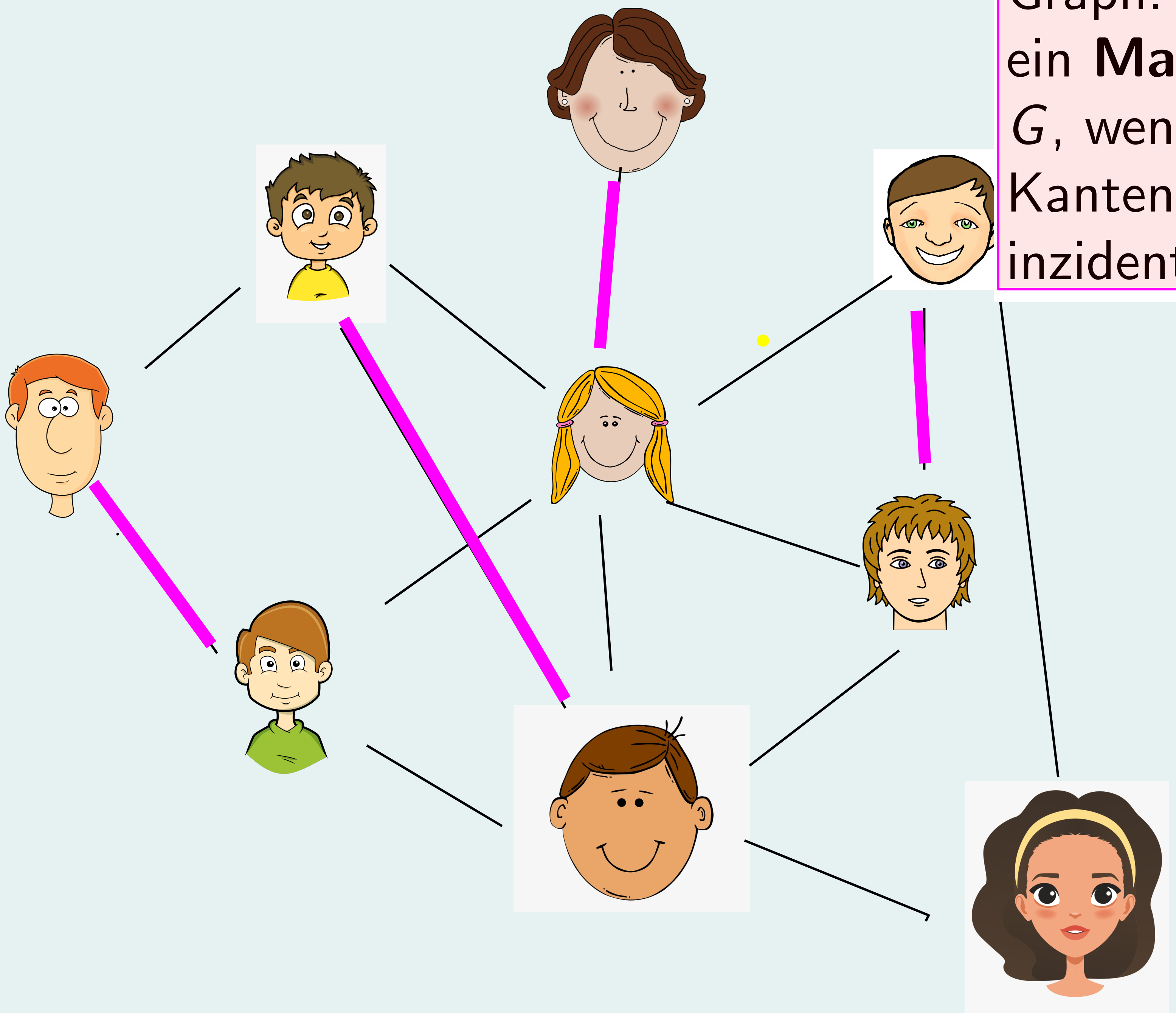


Soziales Netzwerk

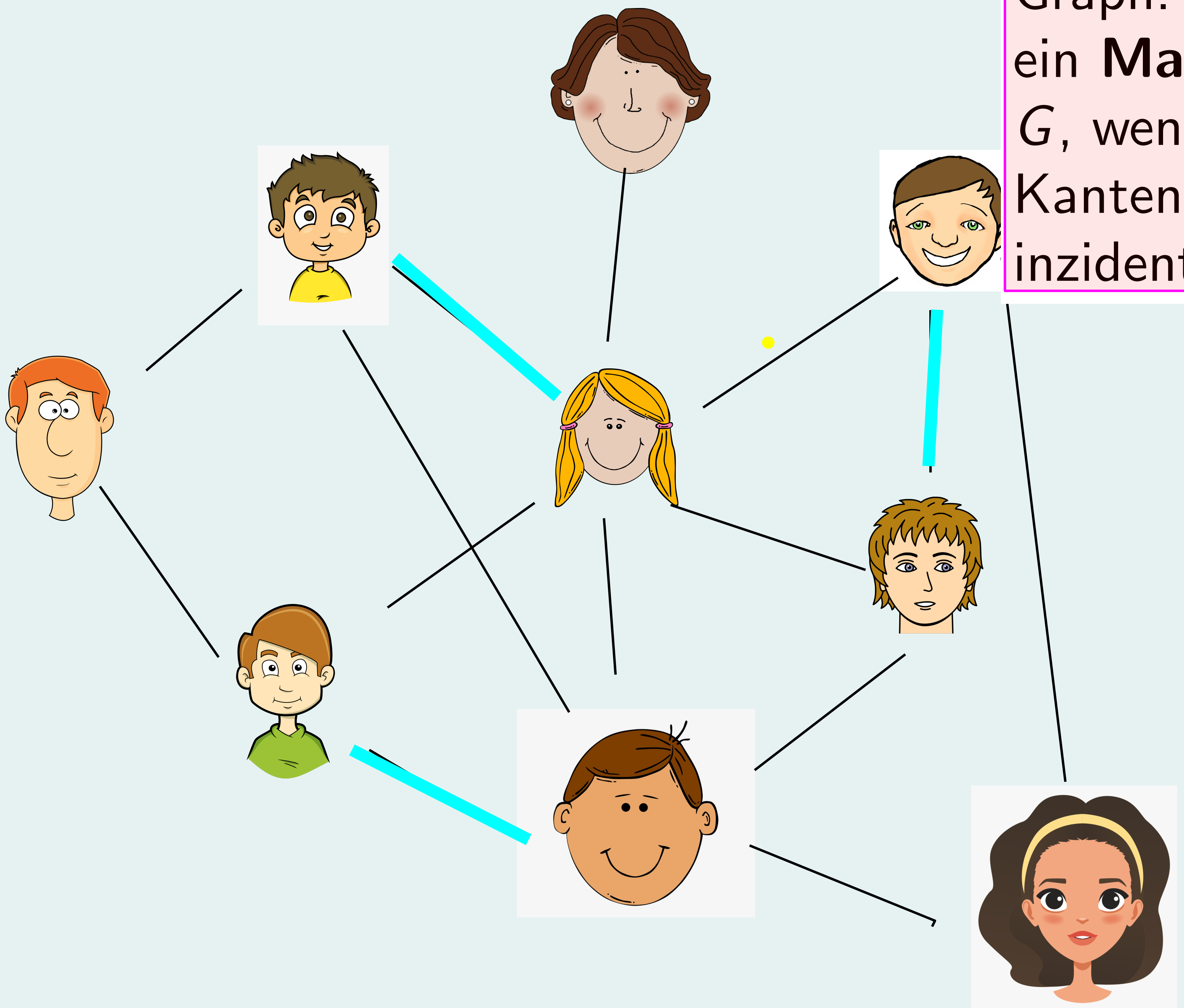


Soziales Netzwerk

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. $M \subset E$ ist ein **Matching** in G, wenn keine zwei Kanten in M inzident sind.

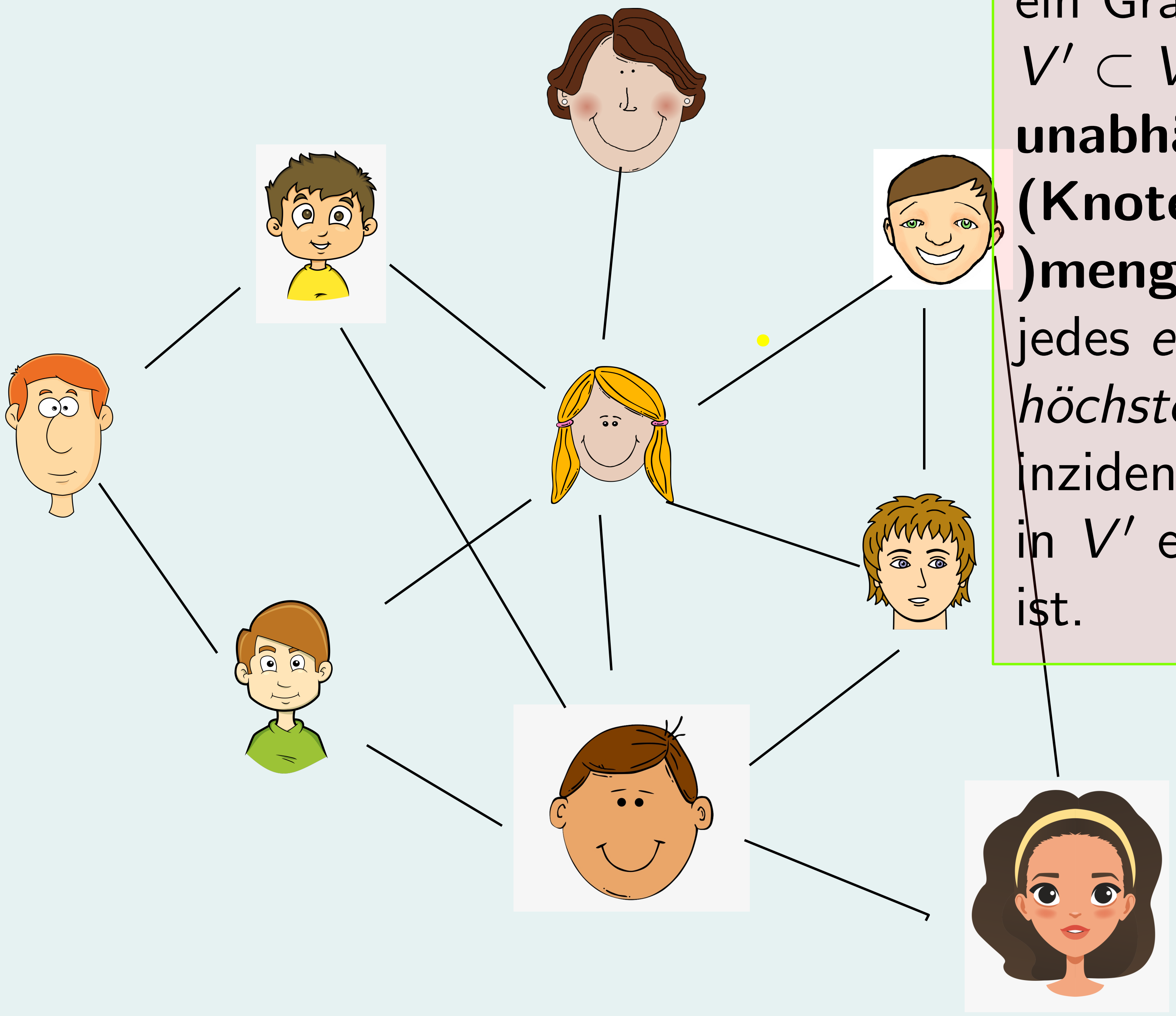


Soziales Netzwerk



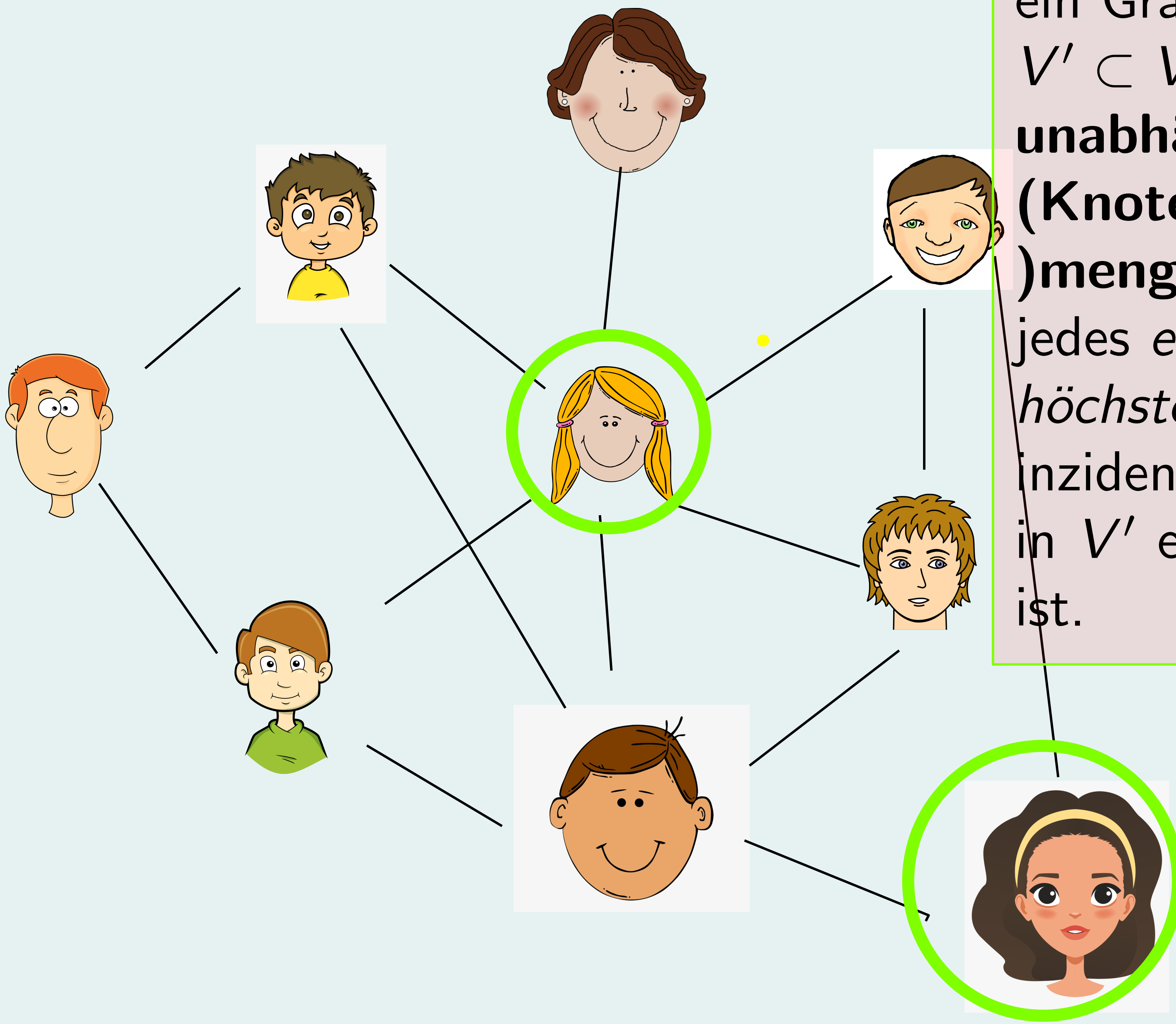
Sei $G = (V, E)$ ein Graph. $M \subset E$ ist ein **Matching** in G, wenn keine zwei Kanten in M inzident sind.

Soziales Netzwerk



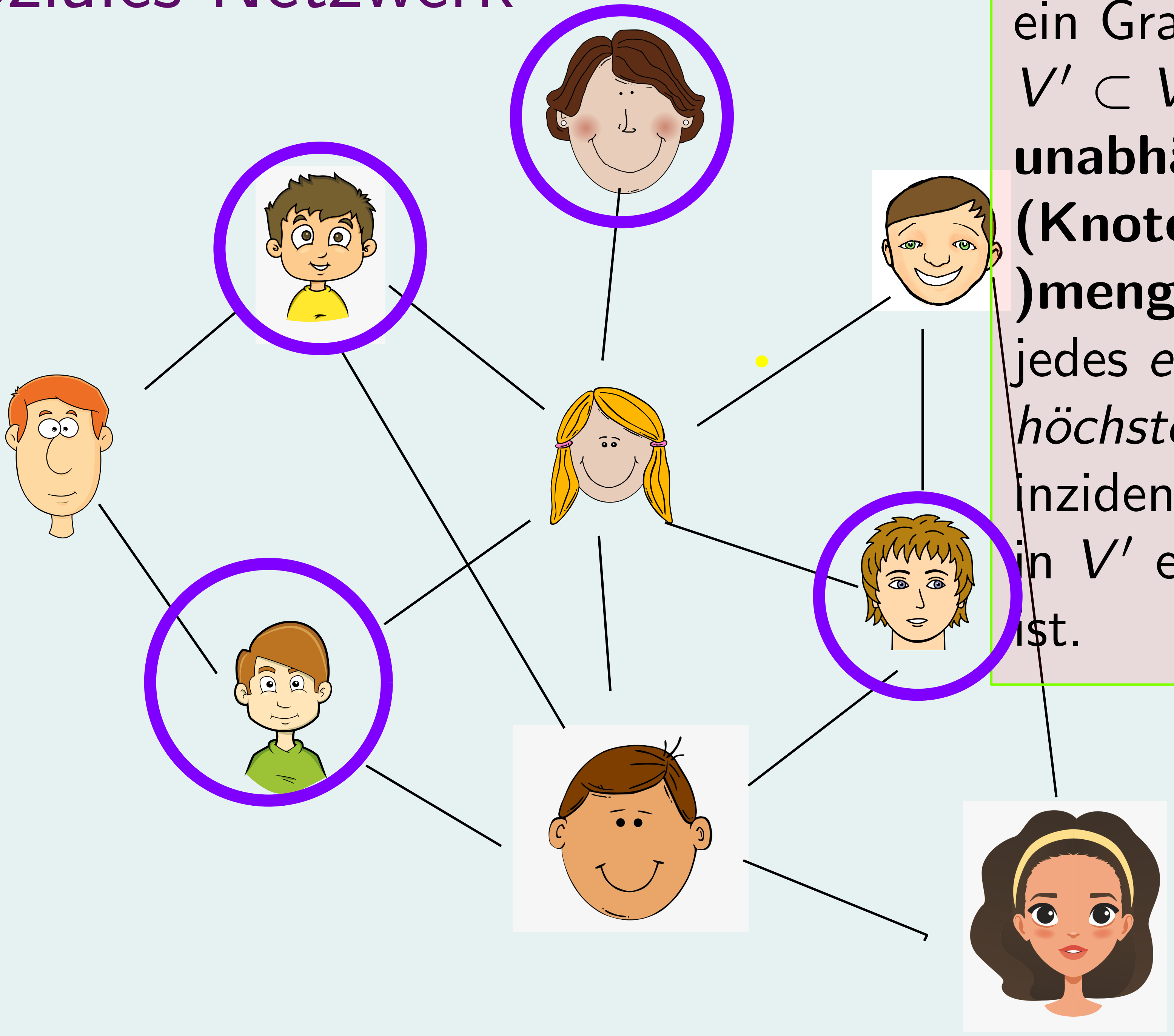
Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
$V' \subset V$ ist eine **unabhängige (Knoten-)menge**, wenn für jedes $e \in E$ *höchstens* ein inzidenter Knoten in V' enthalten ist.

Soziales Netzwerk



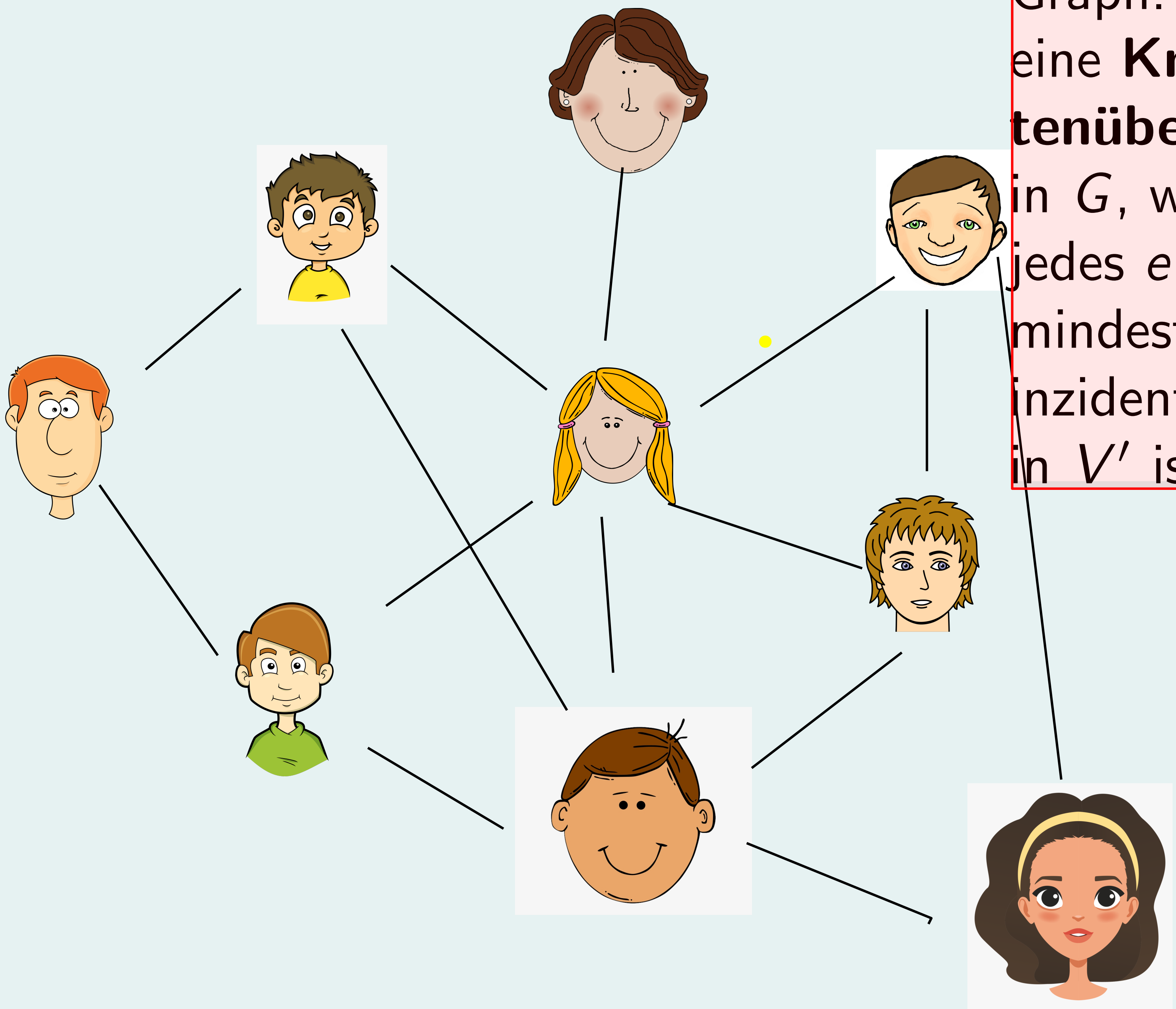
Sei $G = (V, E)$ ein Graph. $V' \subset V$ ist eine **unabhängige (Knoten-)menge**, wenn für jedes $e \in E$ *höchstens* ein inzidenter Knoten in V' enthalten ist.

Soziales Netzwerk



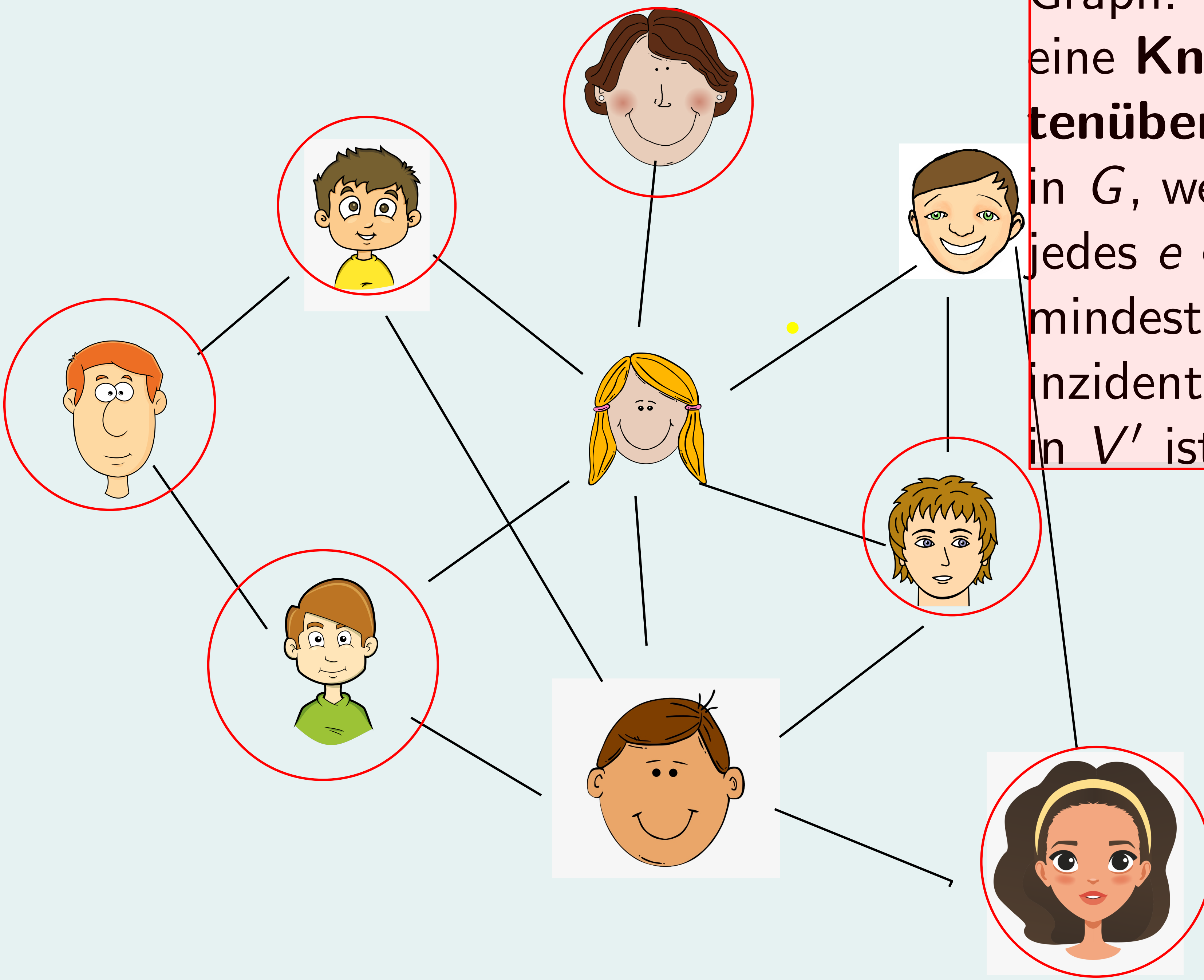
Sei $G = (V, E)$ ein Graph. $V' \subset V$ ist eine **unabhängige (Knoten-)menge**, wenn für jedes $e \in E$ *höchstens* ein inzidenter Knoten in V' enthalten ist.

Soziales Netzwerk



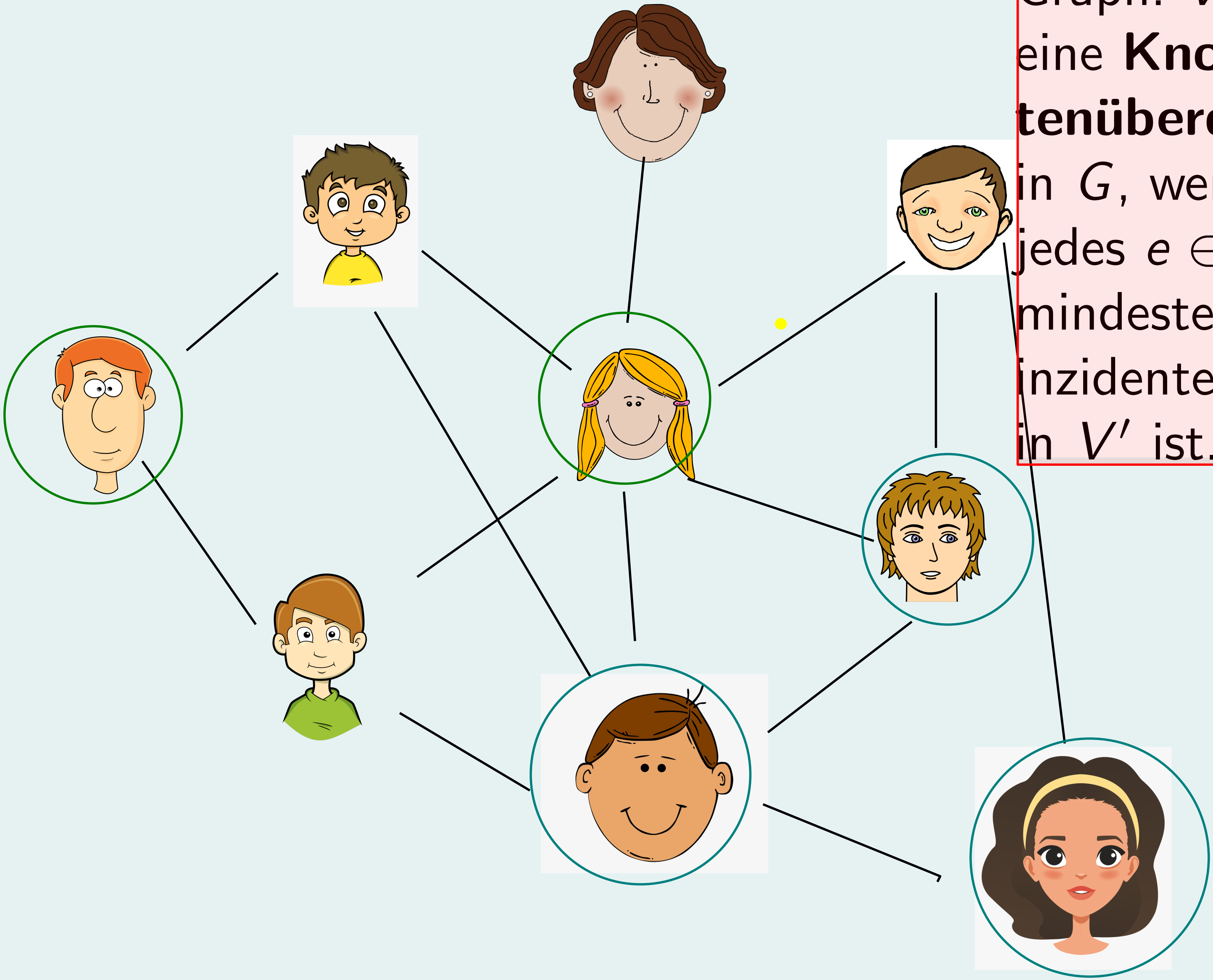
Sei $G = (V, E)$ ein Graph. $V' \subset V$ ist eine **Knotenüberdeckung** in G, wenn für jedes $e \in E$ mindestens ein inzidenter Knoten in V' ist.

Soziales Netzwerk



Sei $G = (V, E)$ ein Graph. $V' \subset V$ ist eine **Knotenüberdeckung** in G, wenn für jedes $e \in E$ mindestens ein inzidenter Knoten in V' ist.

Soziales Netzwerk



Sei $G = (V, E)$ ein Graph. $V' \subset V$ ist eine **Knotenüberdeckung** in G, wenn für jedes $e \in E$ mindestens ein inzidenter Knoten in V' ist.

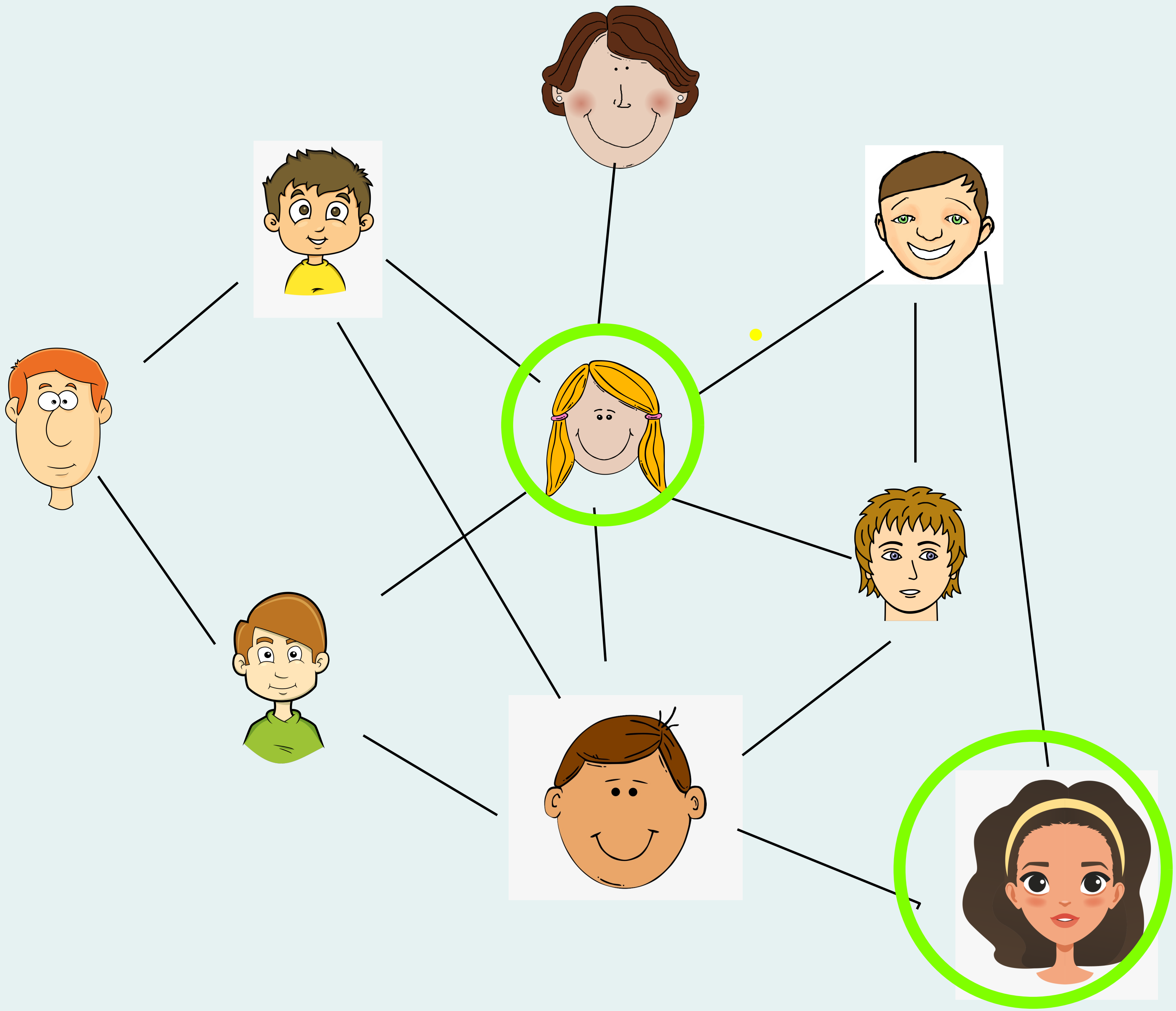
Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Optimierungsprobleme:

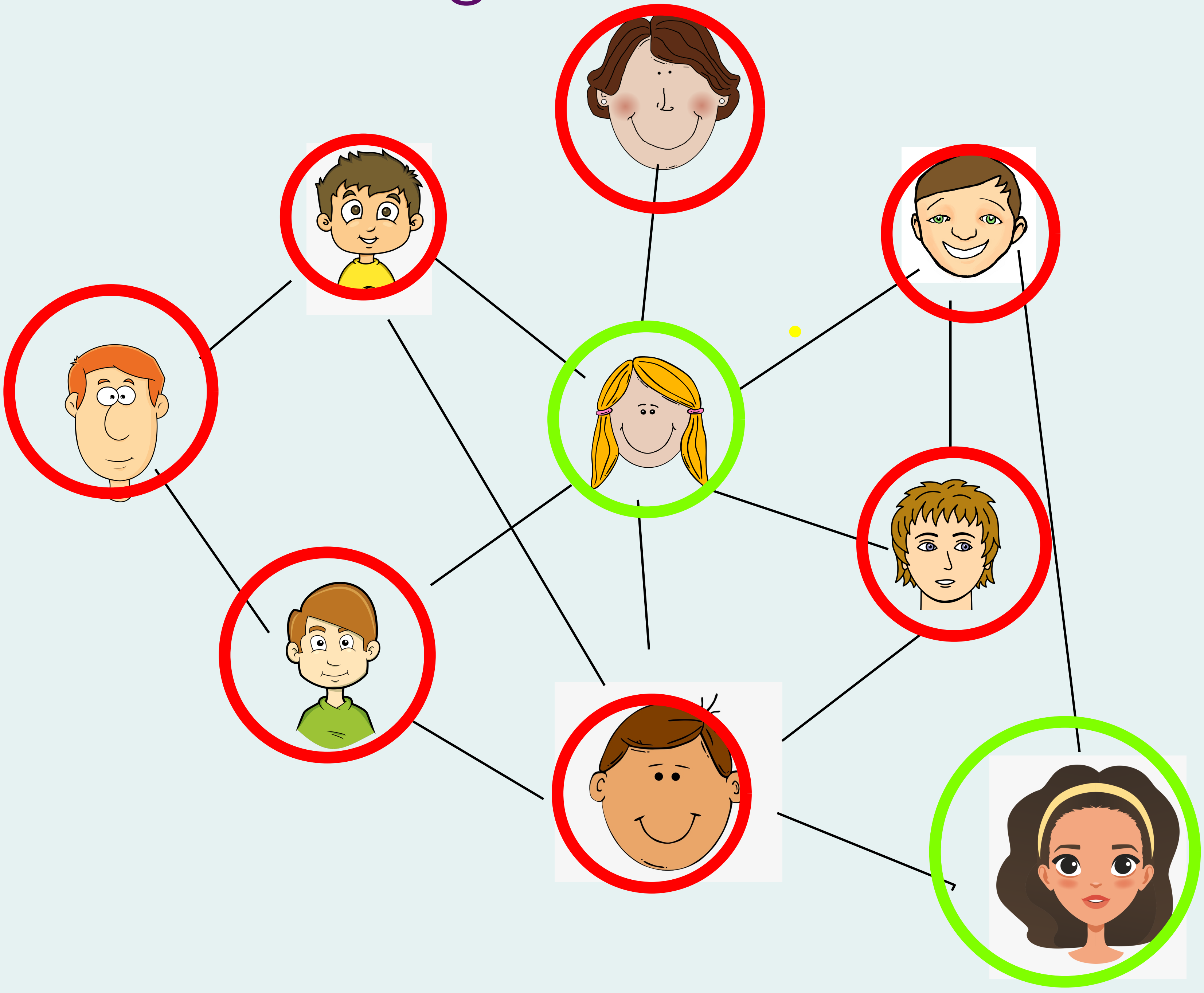
- größtes Matching
- kleinste Knotenüberdeckung
- größte unabhängige Menge

Was haben die Begriffe Matching / Knotenüberdeckung / unabhängige Menge bzw. die dazugehörigen Optimierungsprobleme miteinander zu tun?

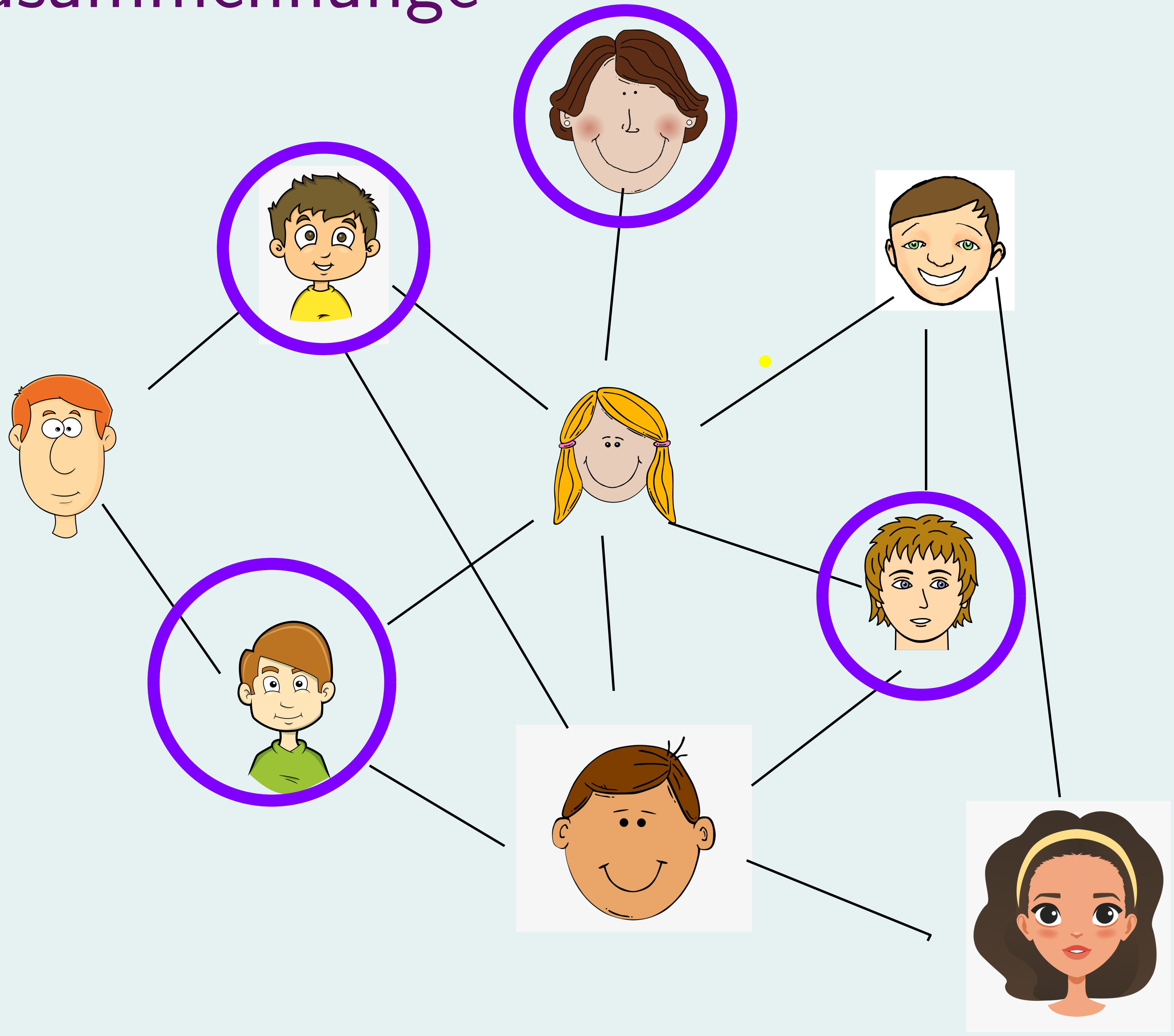
Zusammenhänge



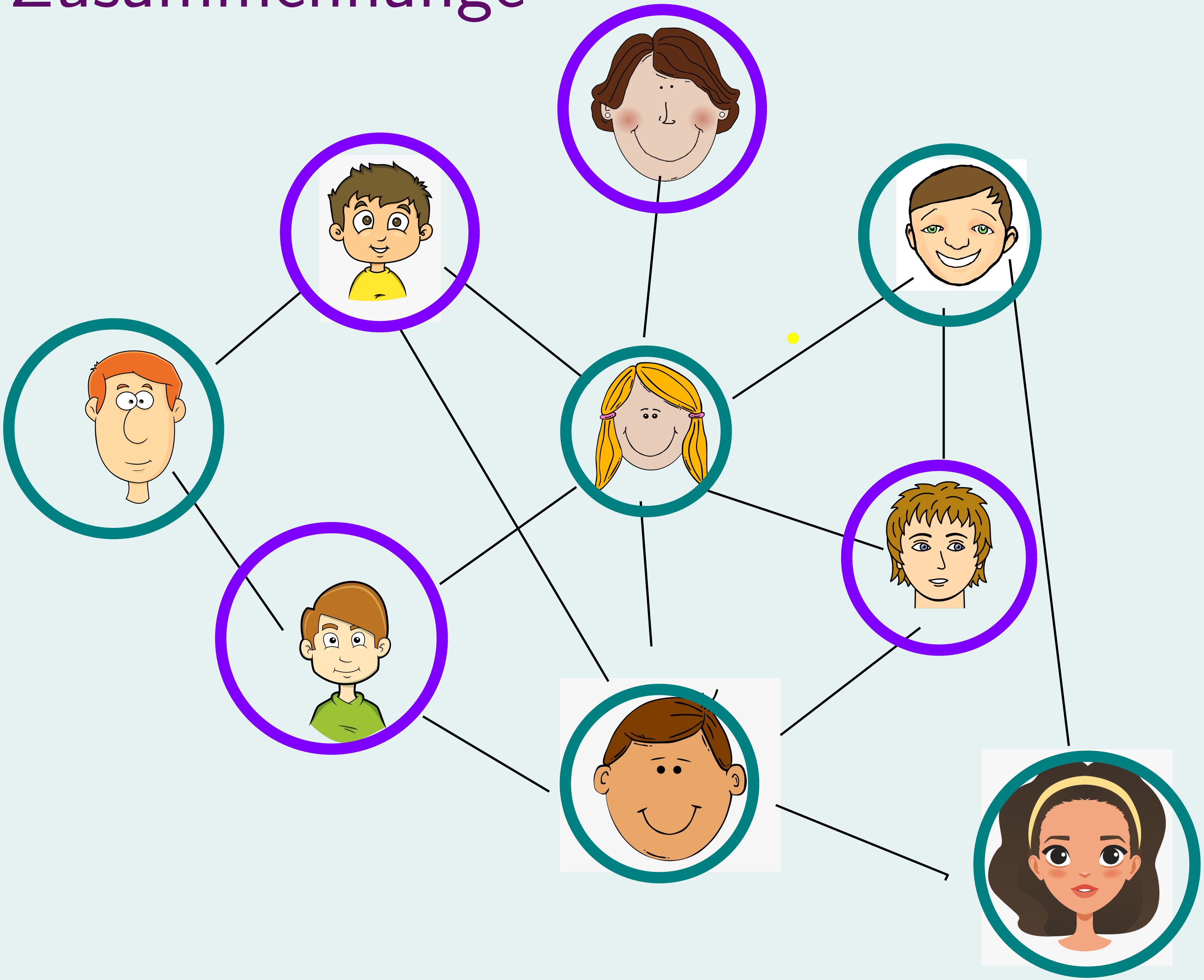
Zusammenhänge



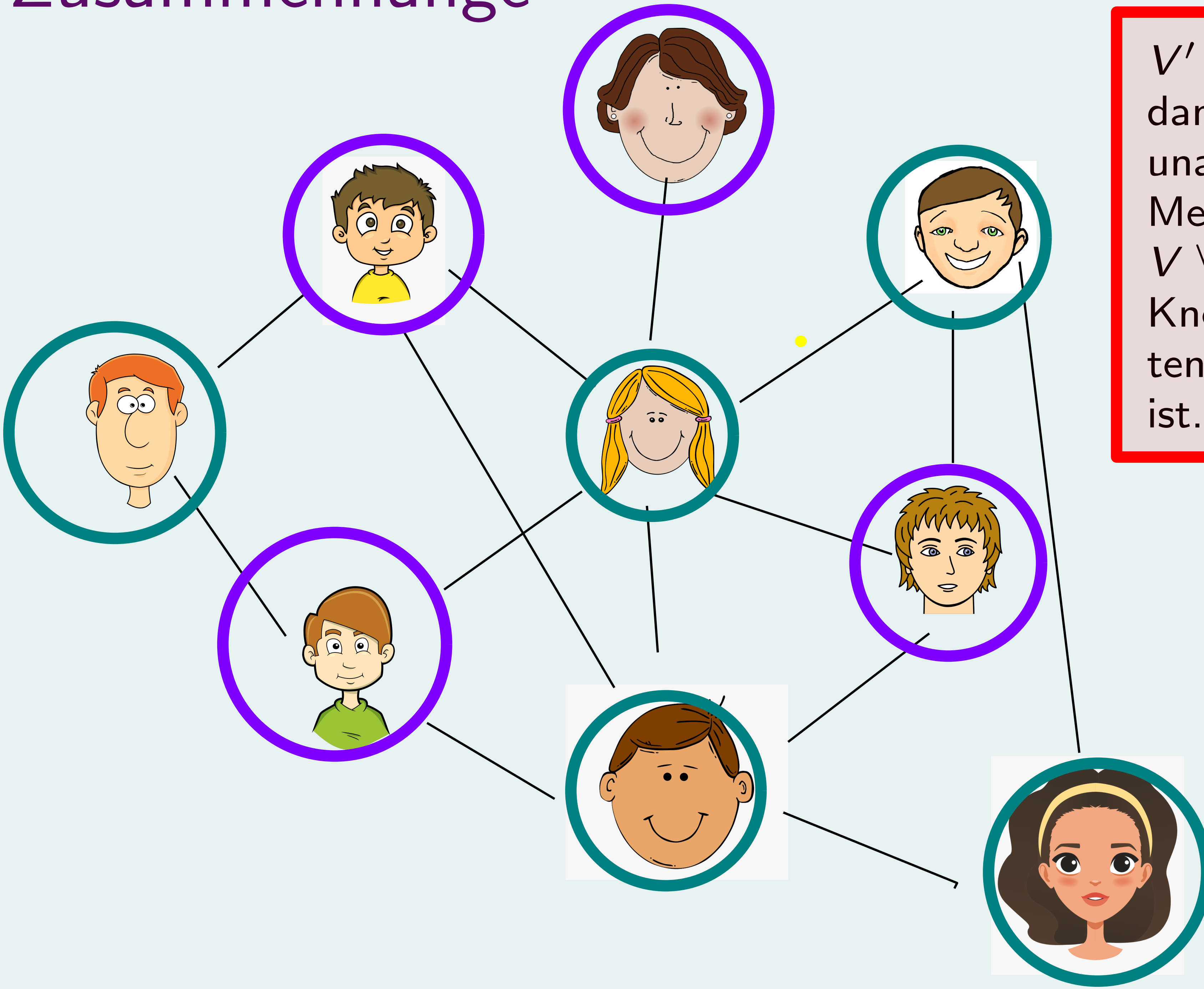
Zusammenhänge



Zusammenhänge

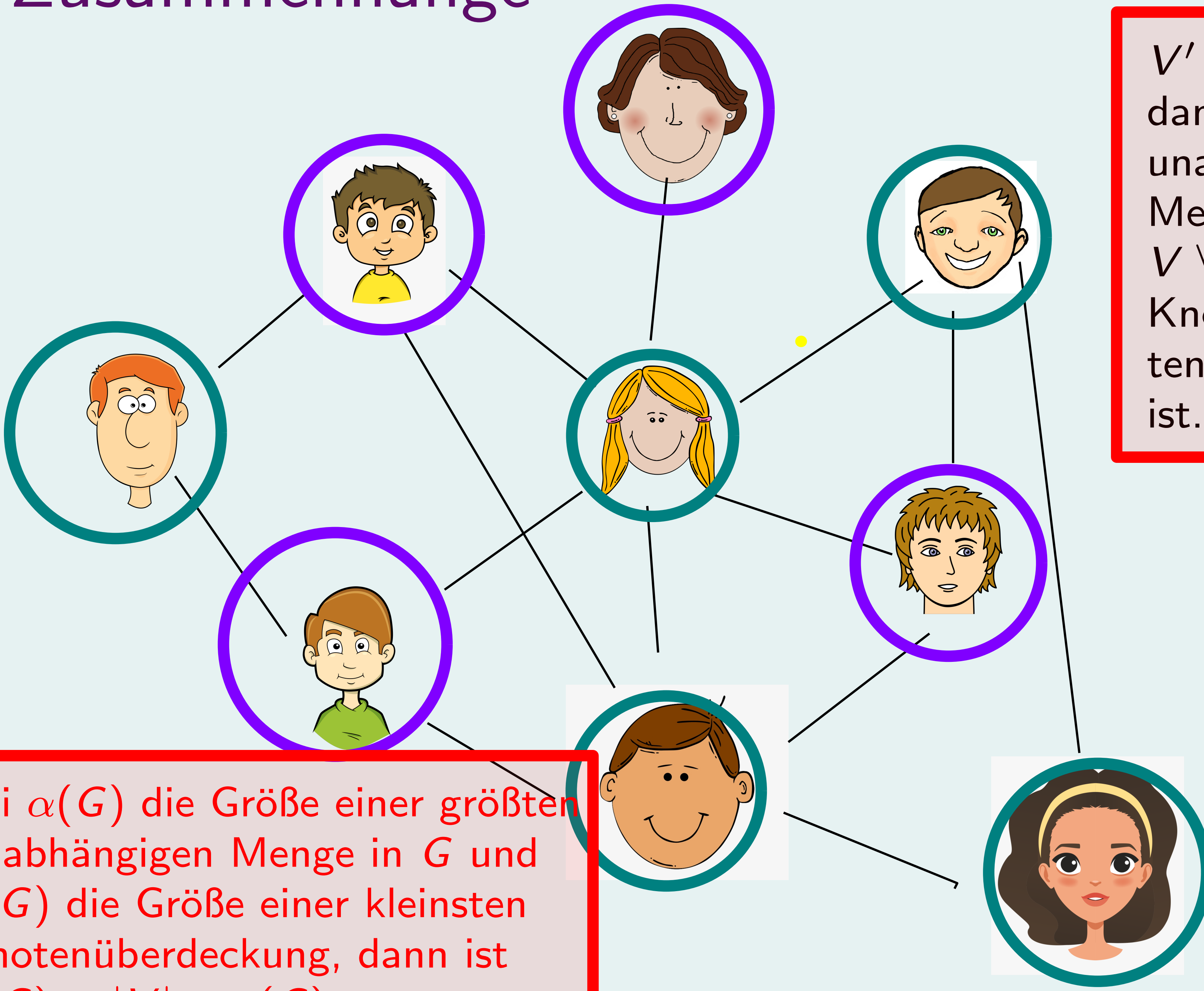


Zusammenhänge



V' ist genau dann eine unabhängige Menge, wenn $V \setminus V'$ eine Knotenüberdeckung ist.

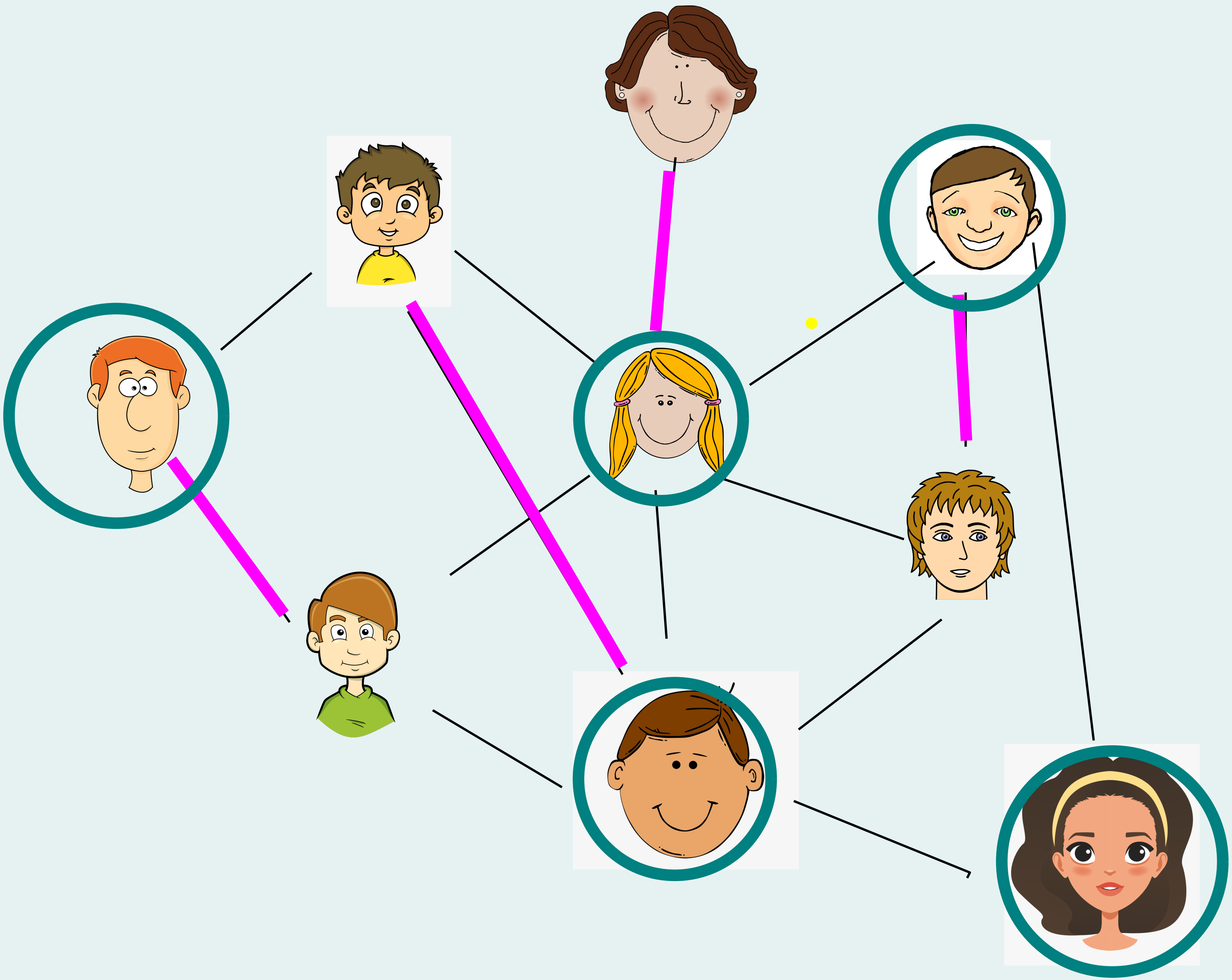
Zusammenhänge



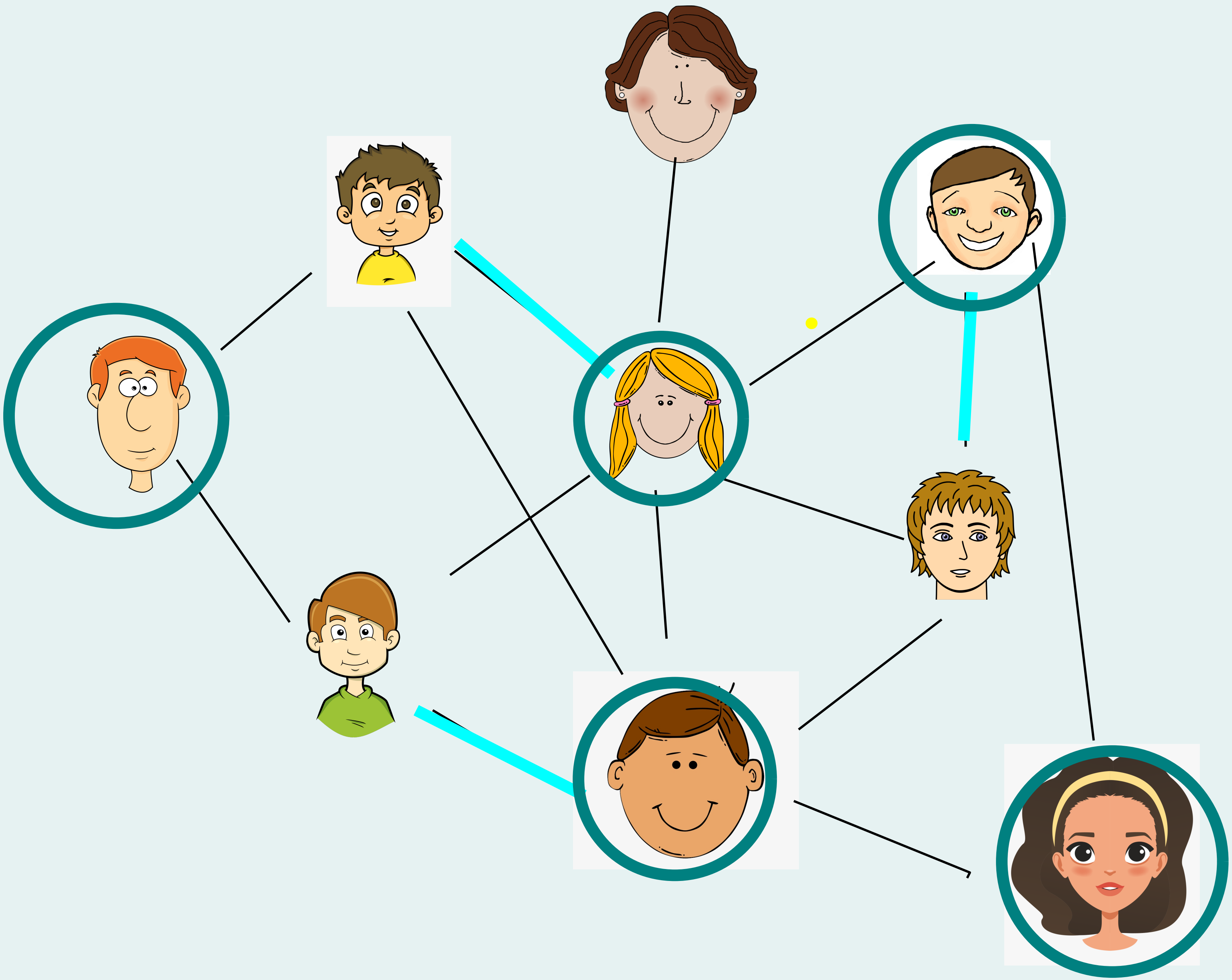
V' ist genau dann eine unabhängige Menge, wenn $V \setminus V'$ eine Knotenüberdeckung ist.

Sei $\alpha(G)$ die Größe einer größten unabhängigen Menge in G und $\tau(G)$ die Größe einer kleinsten Knotenüberdeckung, dann ist $\tau(G) = |V| - \alpha(G)$.

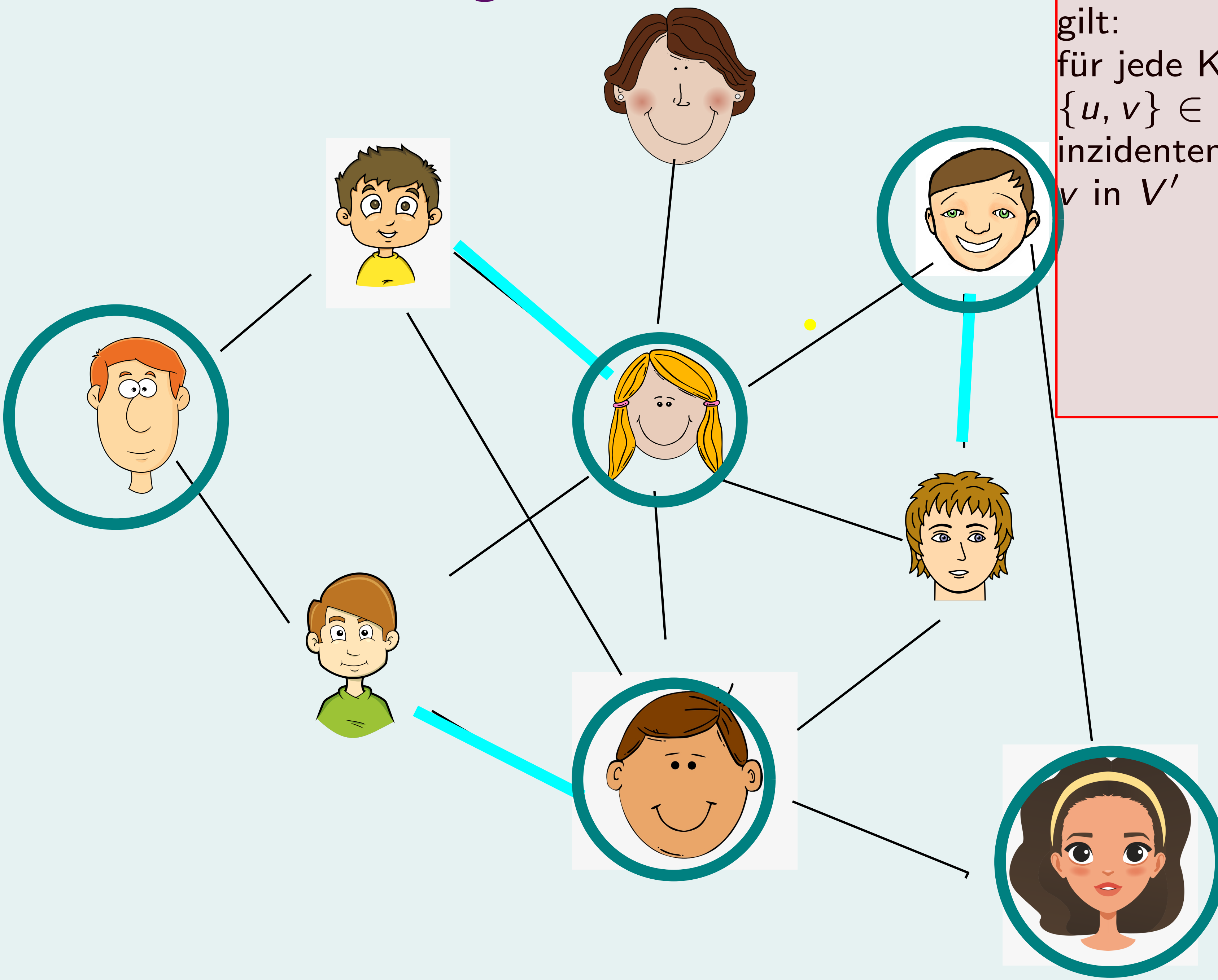
Zusammenhänge



Zusammenhänge

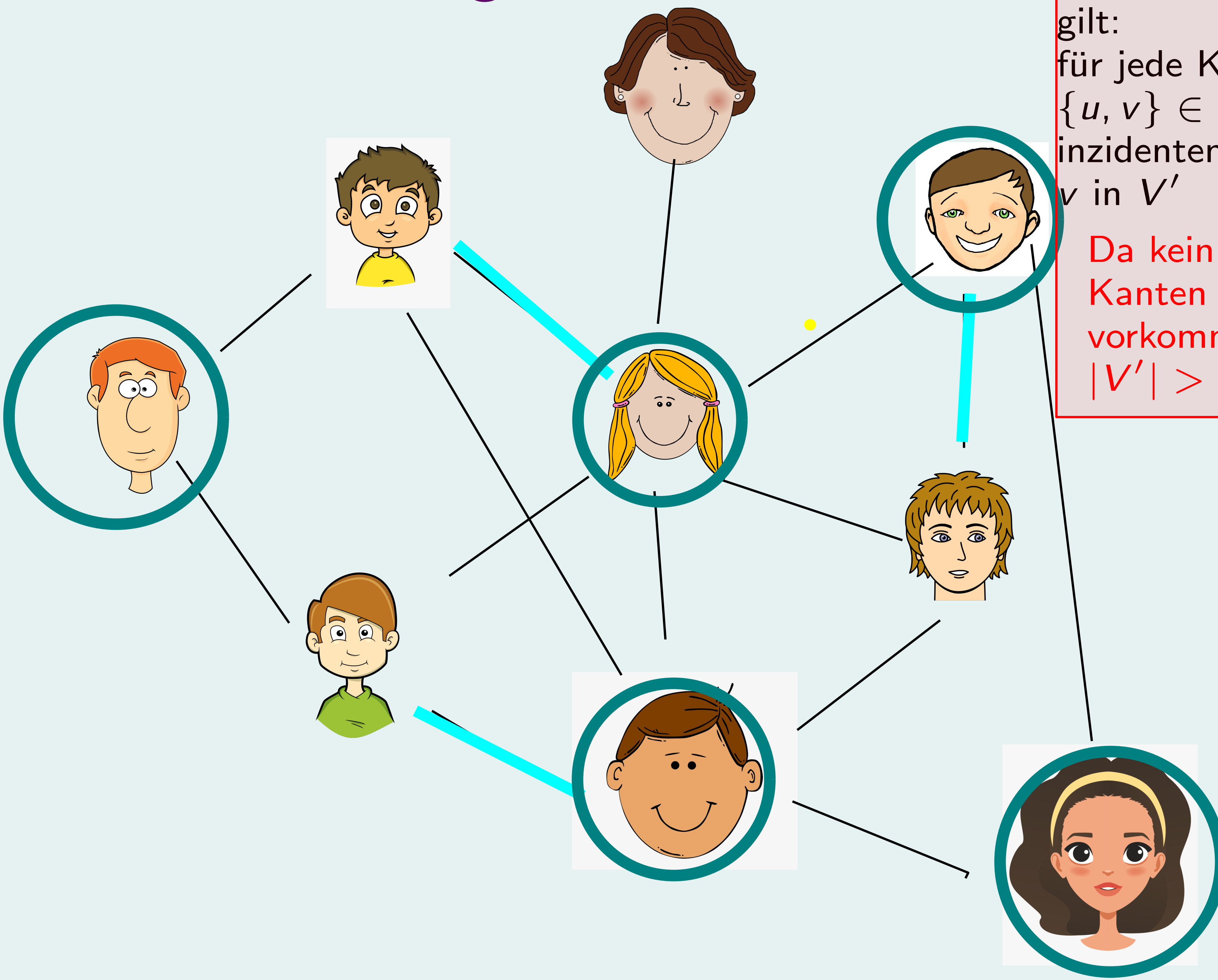


Zusammenhänge



Beobachtung: Für jedes Matching M und jede Knotenüberdeckung V' gilt:
für jede Kante $\{u, v\} \in M$ ist einer der inzidenten Knoten u oder v in V'

Zusammenhänge



Beobachtung: Für jedes Matching M und jede Knotenüberdeckung V' gilt:
für jede Kante $\{u, v\} \in M$ ist einer der inzidenten Knoten u oder v in V'

Da kein Knoten in zwei Kanten $e, e' \in M$ vorkommen kann, gilt $|V'| > M$.

Stichworte heute

Konzepte: Strömungen, b-Flüsse, Matchings, Eckenüberdeckung*, unabhängige Menge*

Optimierungsprobleme: kostenminimaler Fluss, größtes Matching/ größtes gewichtetes Matching, minimale Eckenüberdeckung*, maximale unabhängige Menge*

Modellierung: Hilfsgüterlieferung, Zuordnung von Haushalten und im Aufbau eines Simulationsmodells[1], (unterschiedliche Fragestellungen in sozialen Netzen)

Algorithmen: Algorithmus von Klein