Graphen und diskrete Optimierung

im Bachelorstudiengang 'Informatik und Nachhaltigkeit'

Wdh: Flüsse

Marie Schmidt

19.07.2023

Verschiedenes

Heute keine Sprechstunde um 14:00 Uhr.

Raumwechsel Übung am Freitag (8:15): M4 00.012

Verschiedenes

Heute keine Sprechstunde um 14:00 Uhr.

Raumwechsel Übung am Freitag (8:15): M4 00.012

Mündliche Prüfungen nächste Woche im M4 00.001
Bitte pünktlich (oder zur Sicherheit 5 Minuten eher) da sein und draußen, oder auf dem Flur (Treppenaufgang) warten. Wir holen Sie herein.
Prüfung nur möglich, wenn im WueStudy angemeldet.
Nächste Chance Anfang Oktober.

Ausweisdokument und Studierendenausweis mitbringen!

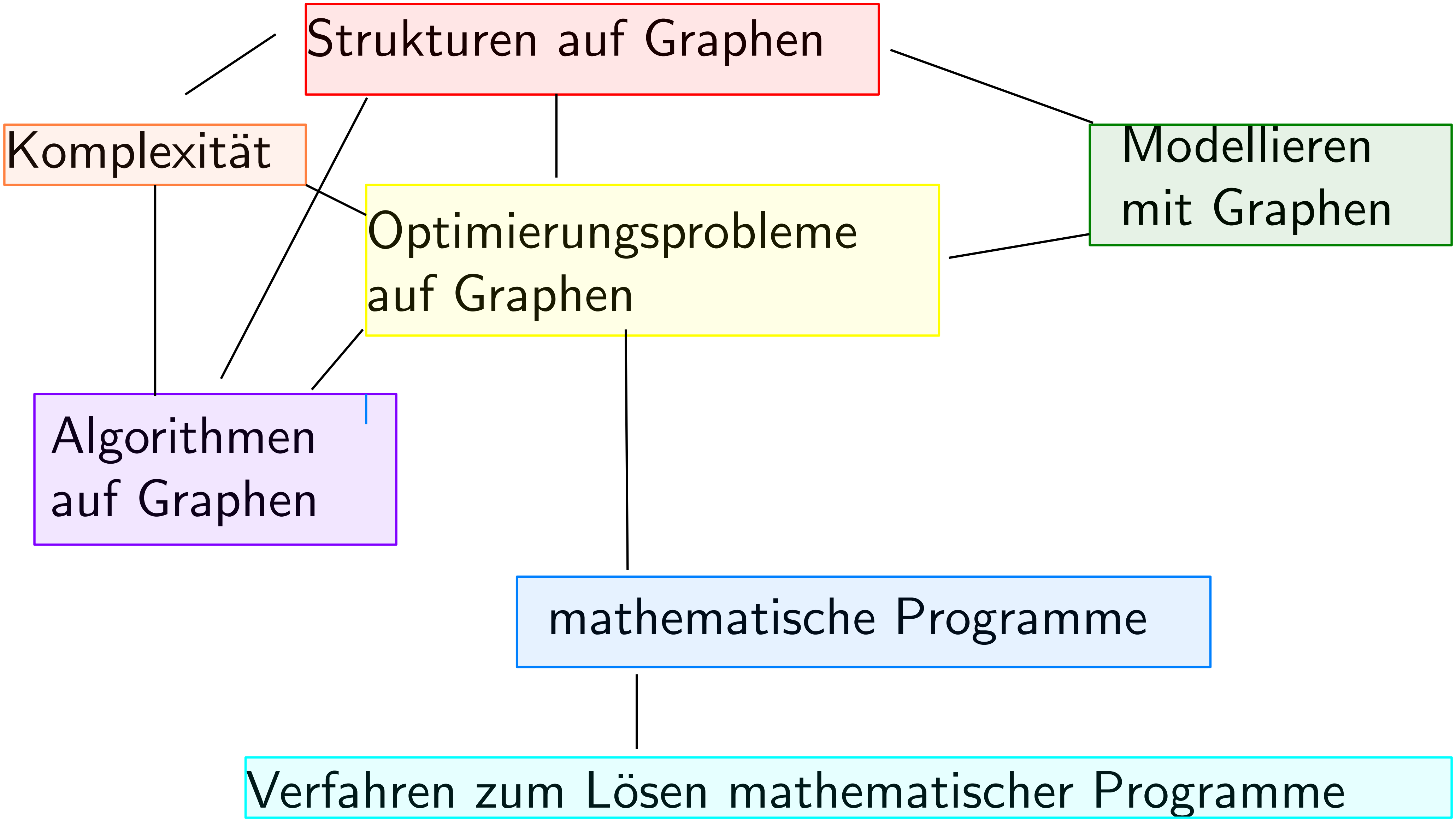
Programm für heute

- kurze Info zum Prüfungsablauf
- Wdh Flüsse (inklusive ein paar Tipps zu Fragen und Antworten)
- weitere Fragen?

Ablauf mündliche Prüfung

- im M4 00.001, bitte pünktlich sein und draußen oder im Treppenaufgang warten, wir holen Sie herein
- Ausweisdokument und Studierendenausweis mitbringen
- Handy aus oder lautlos
- Stifte und Papier sind vorhanden
- Zum Einstieg dürfen Sie ein Thema wählen
(es bietet sich an, dieses Thema besonders gut vorbereitet zu haben!)
- Prüfung dauert etwa 20 Minuten
- Kendra ist als Beisitzerin anwesend und führt Protokoll
- nach Ablauf der Prüfung werden Sie aus dem Raum geschickt und wir beraten uns kurz über Ihre Note, dann dürfen Sie wieder reinkommen und erhalten die Note
- die erhaltene Note ist die **Prüfungsnote** (noch ohne eventuellen Bonus von den Übungszetteln)

Worüber werde ich fragen?



Von allem etwas!

Was ist ein Fluss?

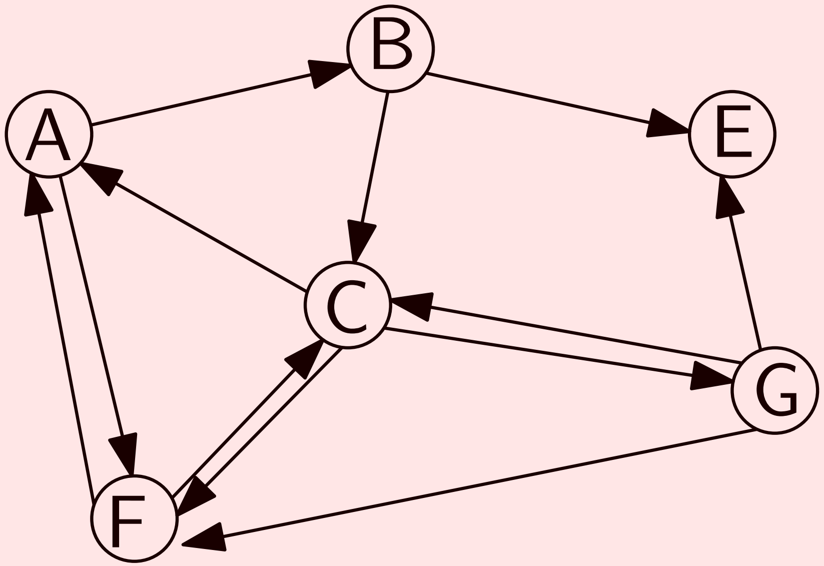
Was ist ein Fluss?

formale Definition?

Was ist ein Fluss?

formale Definition?

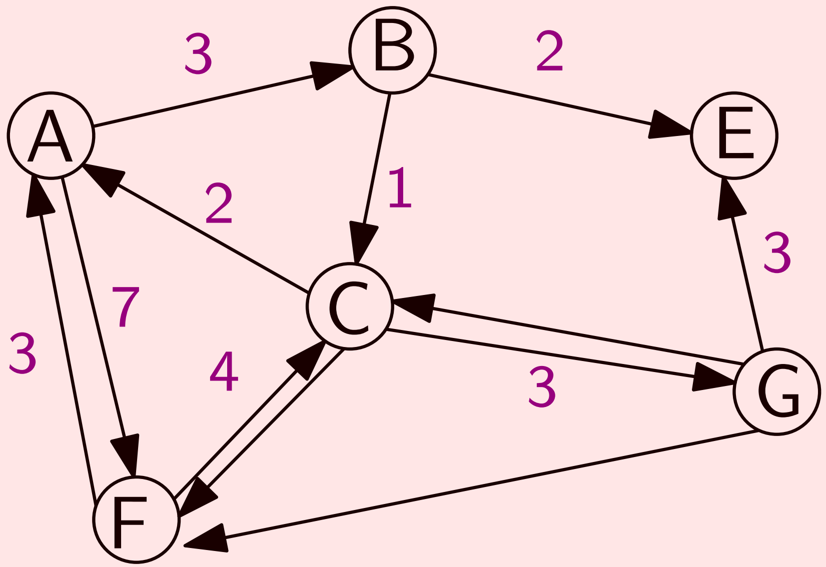
Gegeben: Ein Netzwerk $G = (V, E)$ mit gerichteten Kanten.



Was ist ein Fluss?

formale Definition?

Gegeben: Ein Netzwerk $G = (V, E)$ mit gerichteten Kanten.



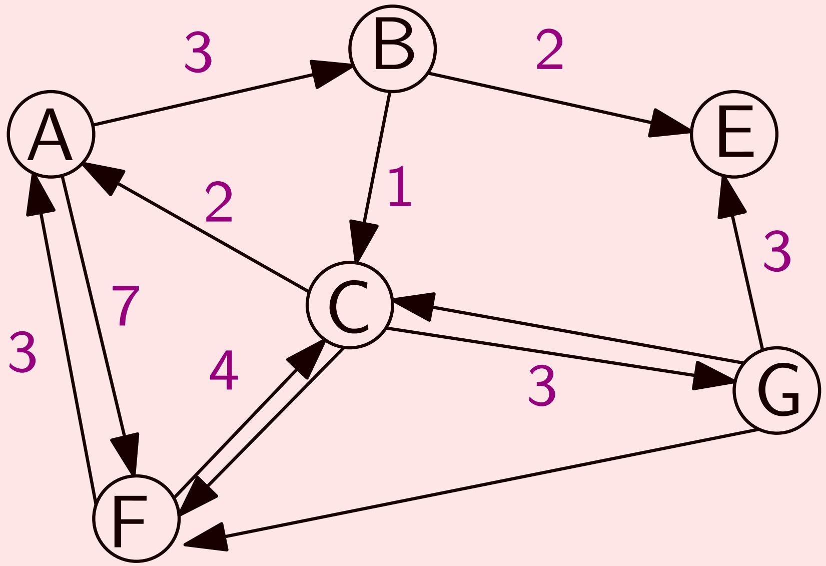
Ein s-t-Fluss ist eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ so dass für alle Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ gilt $\text{Nettozufluss}_f(v) = 0$.

Lilane Zahlen: A-E-Fluss

Was ist ein Fluss?

formale Definition?

Gegeben: Ein Netzwerk $G = (V, E)$ mit gerichteten Kanten.



Lilane Zahlen: A-E-Fluss

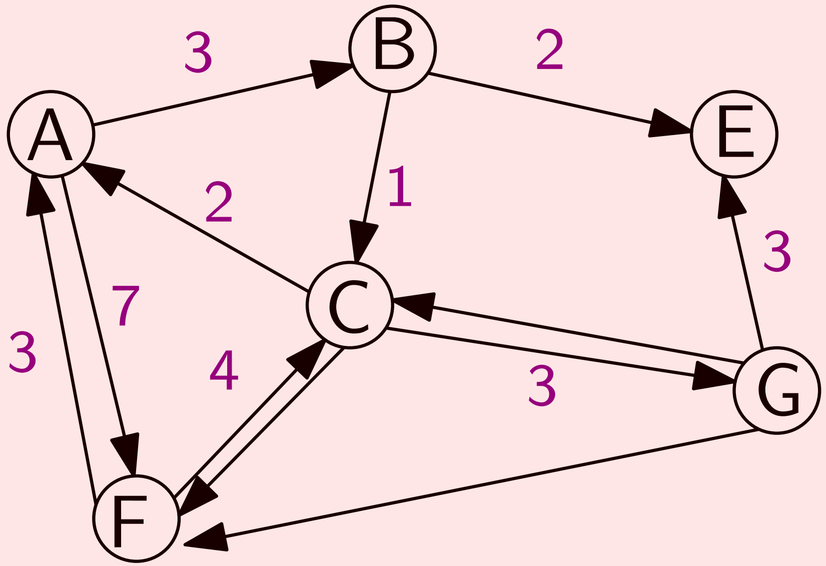
Ein s-t-Fluss ist eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ so dass für alle Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ gilt $\boxed{\text{Nettozufluss}_f(v)} = 0$.

$\text{Nettozufluss}_f(v)$
$= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e)$

Was ist ein Fluss?

formale Definition?

Gegeben: Ein Netzwerk $G = (V, E)$ mit gerichteten Kanten.



Ein s-t-Fluss ist eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ so dass für alle Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ gilt Nettozufluss$_f(v) = 0$.

Der **Wert** dieses Flusses ist $|f| :=$ Nettozufluss$_f(t)$.

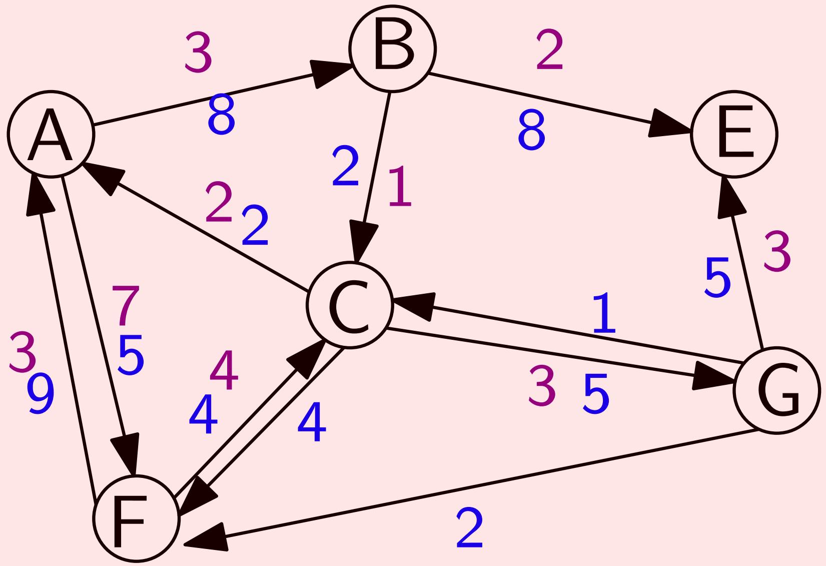
Lilane Zahlen: A-E-Fluss

$|f| = 5$.

Was ist ein Fluss?

formale Definition?

Gegeben: Ein Netzwerk $G = (V, E)$ mit gerichteten Kanten.



Lilane Zahlen: A-E-Fluss

$|f| = 5$.

Blaue Zahlen: Kantenkapazitäten.

Ein s-t-Fluss ist eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ so dass für alle Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ gilt $\text{Nettozufluss}_f(v) = 0$.

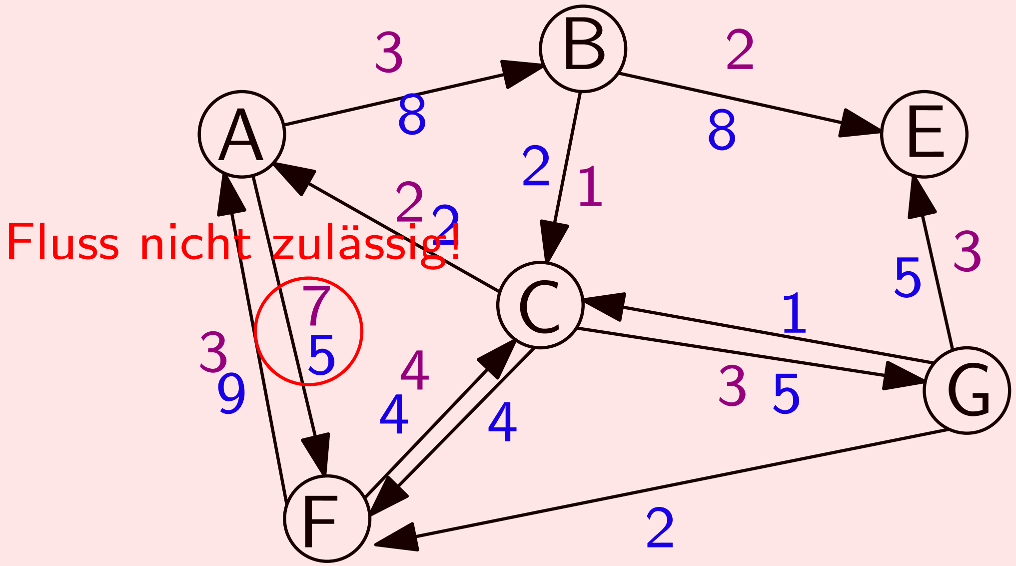
Der **Wert** dieses Flusses ist $|f| := \text{Nettozufluss}_f(t)$.

In Flussproblemen sind oft zusätzlich noch **Kantenkapazitäten** gegeben.

Was ist ein Fluss?

formale Definition?

Gegeben: Ein Netzwerk $G = (V, E)$ mit gerichteten Kanten.



Lilane Zahlen: A-E-Fluss

$|f| = 5$.

Blaue Zahlen: Kantenkapazitäten.

Ein s-t-Fluss ist eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ so dass für alle Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ gilt $\text{Nettozufluss}_f(v) = 0$.

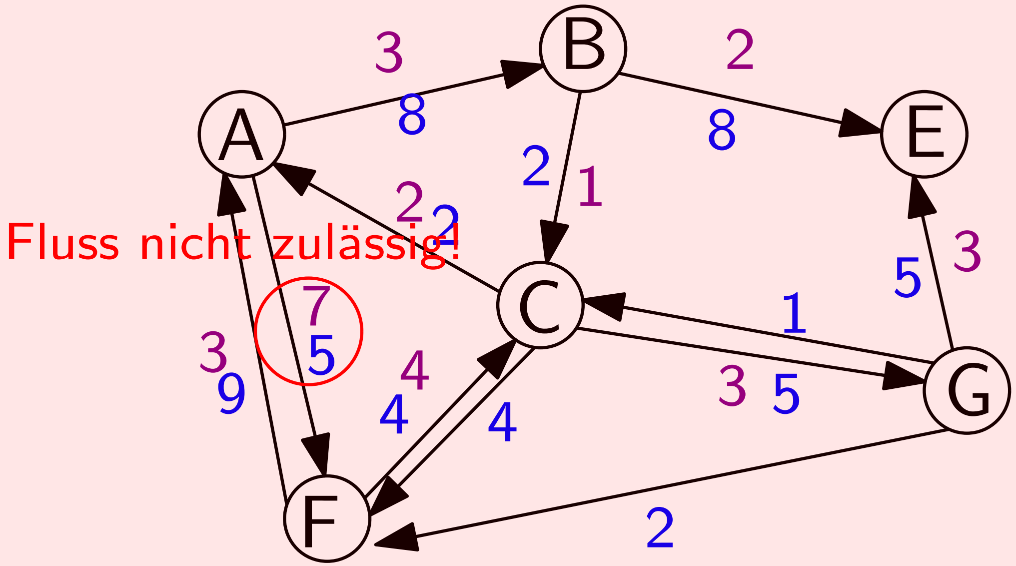
Der **Wert** dieses Flusses ist $|f| := \text{Nettozufluss}_f(t)$.

In Flussproblemen sind oft zusätzlich noch **Kantenkapazitäten** gegeben.

Ein Fluss $f(e)$ heißt **zulässig**, wenn für alle $e \in E$ $f(e) \leq k_e$.

Was ist ein Fluss?

Gegeben: Ein Netzwerk $G = (V, E)$ mit gerichteten Kanten.



Lilane Zahlen: A-E-Fluss
$|f| = 5$.
Blaue Zahlen: Kantenkapazitäten.

Ein s-t-Fluss ist eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ so dass für alle Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ gilt $\text{Nettozufluss}_f(v) = 0$.

Der **Wert** dieses Flusses ist $|f| := \text{Nettozufluss}_f(t)$.
In Flussproblemen sind oft zusätzlich noch **Kantenkapazitäten** gegeben.

Ein Fluss $f(e)$ heißt **zulässig**, wenn für alle $e \in E$ $f(e) \leq k_e$.

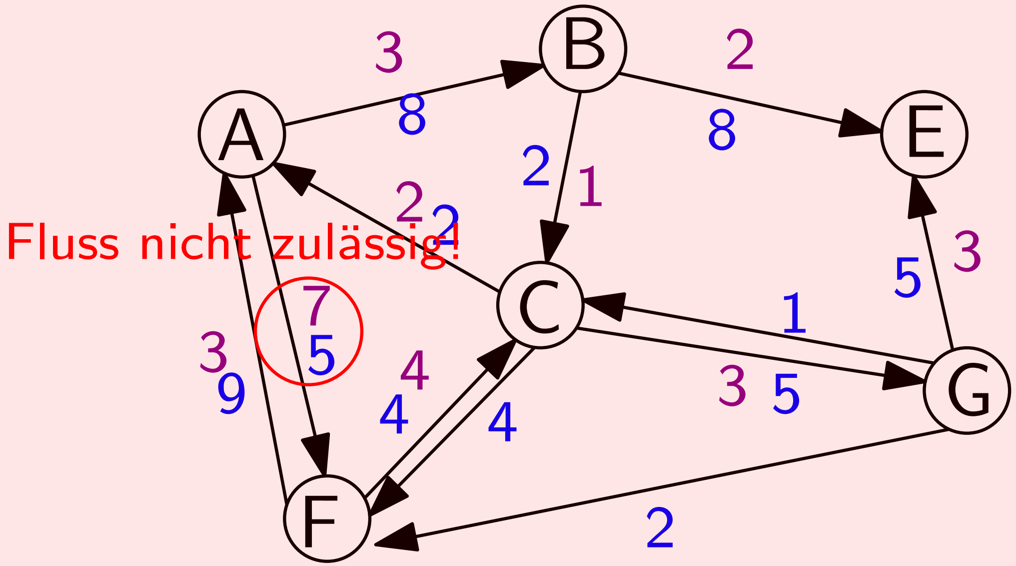
Außer s-t-Flüssen gibt es noch:

- **Strömung** $f : E \to \mathbb{R}$ mit $\text{Nettozufluss}_f(v) = 0 \forall v \in V$ (meistens sind im Kontext von Strömungen noch *untere Schranken* $l(e)$ an den Flusswert auf jeder Kante $e \in E$ gegeben.

Was ist ein Fluss?

formale Definition?

Gegeben: Ein Netzwerk $G = (V, E)$ mit gerichteten Kanten.



Lilane Zahlen: A-E-Fluss

$|f| = 5$.

Blaue Zahlen: Kantenkapazitäten.

Ein s-t-Fluss ist eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ so dass für alle Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ gilt $\text{Nettozufluss}_f(v) = 0$.

Der **Wert** dieses Flusses ist $|f| := \text{Nettozufluss}_f(t)$.

In Flussproblemen sind oft zusätzlich noch **Kantenkapazitäten** gegeben.

Ein Fluss $f(e)$ heißt **zulässig**, wenn für alle $e \in E$ $f(e) \leq k_e$.

Außer s-t-Flüssen gibt es noch:

- **Strömung** $f : E \to \mathbb{R}$ mit $\text{Nettozufluss}_f(v) = 0 \forall v \in V$ (meistens sind im Kontext von Strömungen noch *untere Schranken* $l(e)$ an den Flusswert auf jeder Kante $e \in E$ gegeben.
- Haben wir außerdem noch *Bedarfe* und *Überschüsse* (modelliert als '*negative Bedarfe*') b_v auf den Knoten v, dann nennen wir eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ mit $\text{Nettozufluss}_f(v) = b_v$ **Bedarfsfluss**.

Was kann man mit Flüssen modellieren?

Was sind 'klassische' Flussprobleme?

Was sind 'klassische' Flussprobleme?

Optimierungsprobleme:

Maximaler Fluss

Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.

Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$

Was sind 'klassische' Flussprobleme?

Optimierungsprobleme:

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$
Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$ Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Was sind 'klassische' Flussprobleme?

Optimierungsprobleme:

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$
Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$ Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Es gibt natürlich auch '**Entscheidungsprobleme** mit Flüssen', z.B.

- Gibt es einen zulässigen s-t-Fluss (mit Flusswert $\geq W$)?
- Gibt es eine zulässige Strömung?
- Gibt es einen zulässigen Bedarfsfluss mit Kosten $\leq C$?

Was sind 'klassische' Flussprobleme?

Optimierungsprobleme:

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$
Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$ Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Es gibt natürlich auch '**Entscheidungsprobleme** mit Flüssen', z.B.

.. Gibt es einen zulässigen s-t-Fluss (mit Flusswert $\geq W$)?

.. Gibt es eine zulässige Strömung?

.. Gibt es einen zulässigen Bedarfsfluss mit Kosten $\leq C$?

Was ist die Komplexität dieser Probleme?

Algorithmus für das Problem 'maximaler Fluss'?

Algorithmus für das Problem 'maximaler Fluss'?

- Ford-Fulkerson
- Edmonds-Karp

Algorithmus für das Problem 'maximaler Fluss'?

- Ford-Fulkerson
- Edmonds-Karp

Grundidee dieser Algorithmen?

Algorithmus für das Problem 'maximaler Fluss'?

- Ford-Fulkerson
- Edmonds-Karp

Grundidee dieser Algorithmen?

Erhöhe in jedem Schritt des Algorithmus' den Fluss von s nach t durch Finden eines flußvergrößernden Wegs im Residualgraph.

Algorithmus für das Problem 'maximaler Fluss'?

- Ford-Fulkerson
- Edmonds-Karp

Grundidee dieser Algorithmen?

Erhöhe in jedem Schritt des Algorithmus' den Fluss von s nach t durch Finden eines flußvergrößernden Wegs im Residualgraph.

Definition Residualgraph?

Algorithmus für das Problem 'maximaler Fluss'?

- Ford-Fulkerson
- Edmonds-Karp

Grundidee dieser Algorithmen?

Erhöhe in jedem Schritt des Algorithmus' den Fluss von s nach t durch Finden eines flußvergrößernden Wegs im Residualgraph.

Definition Residualgraph?

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G.
Der **Residualgraph** $G_f = (V, E_f)$ enthält
für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := (u, v)$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := (v, u)$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$

Algorithmus für das Problem 'maximaler Fluss'?

- Ford-Fulkerson
- Edmonds-Karp

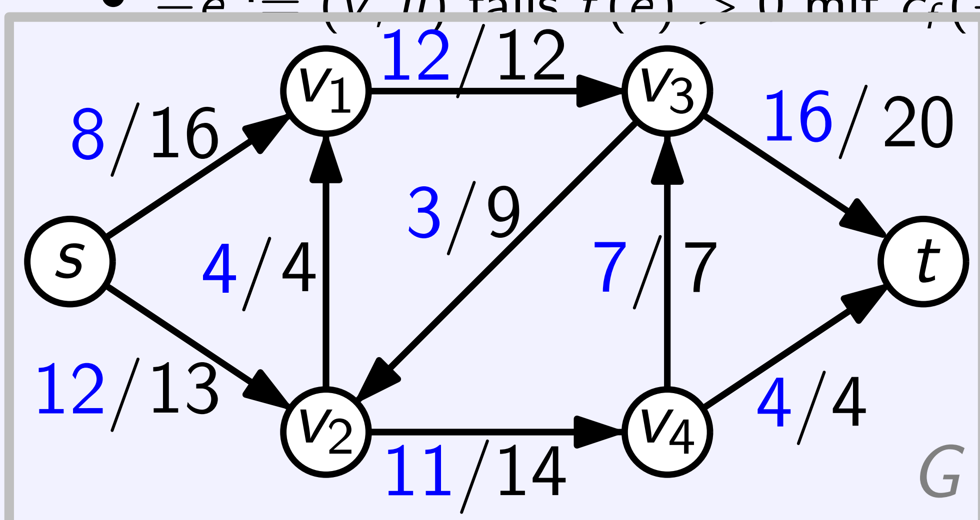
Grundidee dieser Algorithmen?

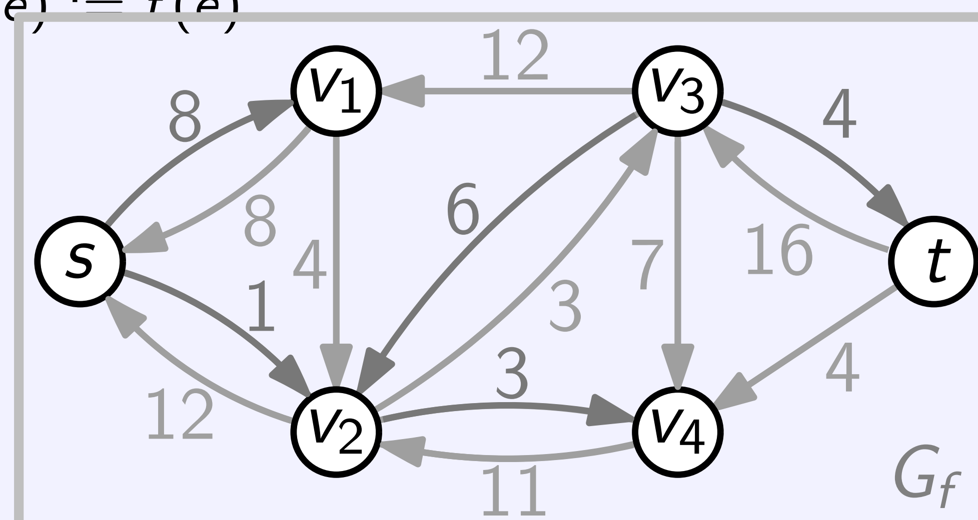
Erhöhe in jedem Schritt des Algorithmus' den Fluss von s nach t durch Finden eines flußvergrößernden Wegs im Residualgraph.

Definition Residualgraph?

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G.
Der **Residualgraph** $G_f = (V, E_f)$ enthält
für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := (u, v)$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := (v, u)$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$





Algorithmus für das Problem 'maximaler Fluss'?

- Ford-Fulkerson
- Edmonds-Karp

Grundidee dieser Algorithmen?

Erhöhe in jedem Schritt des Algorithmus' den Fluss von s nach t durch Finden eines flußvergrößernden Wegs im Residualgraph.

Satz vom flußvergrößerndem Weg: Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal $\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Algorithmus für das Problem 'maximaler Fluss'?

- Ford-Fulkerson
- Edmonds-Karp

Grundidee dieser Algorithmen?

Erhöhe in jedem Schritt des Algorithmus' den Fluss von s nach t durch Finden eines flußvergrößernden Wegs im Residualgraph.

Satz vom flußvergrößerndem Weg: Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal $\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Laufzeit?

Algorithmus für das Problem 'maximaler Fluss'?

- Ford-Fulkerson
- Edmonds-Karp

Grundidee dieser Algorithmen?

Erhöhe in jedem Schritt des Algorithmus' den Fluss von s nach t durch Finden eines flußvergrößernden Wegs im Residualgraph.

Satz vom flußvergrößerndem Weg: Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal $\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Laufzeit?

Ford-Fulkerson: $O(|f^*||E|)$

Algorithmus für das Problem 'maximaler Fluss'?

- Ford-Fulkerson
- Edmonds-Karp

Grundidee dieser Algorithmen?

Erhöhe in jedem Schritt des Algorithmus' den Fluss von s nach t durch Finden eines flußvergrößernden Wegs im Residualgraph.

Satz vom flußvergrößerndem Weg: Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal $\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Laufzeit?

Ford-Fulkerson: $O(|f^*||E|)$

Ist das polynomiell? Pseudo-polynomiell? Oder langsamer?

Algorithmus für das Problem 'maximaler Fluss'?

- Ford-Fulkerson
- Edmonds-Karp

Grundidee dieser Algorithmen?

Erhöhe in jedem Schritt des Algorithmus' den Fluss von s nach t durch Finden eines flußvergrößernden Wegs im Residualgraph.

Satz vom flußvergrößerndem Weg: Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal $\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Laufzeit?

Ford-Fulkerson: $O(|f^*||E|)$

Ist das polynomiell? Pseudo-polynomiell? Oder langsamer?

Edmonds-Karp: Wie Ford-Fulkerson, aber: Wähle nicht *irgendeinen* flussvergrößernden Weg, sondern einen mit minimaler Kantenanzahl.

$O(|V||E|^2)$ - also polynomiell

'Maximaler Fluss' als LP

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{e \in \delta^-(t)} f(e) & \\
\text{so dass} \quad & \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) = 0 & \forall v \in V \setminus \{s, t\} \\
& f(e) \leq c_e & \forall e \in E \\
& f(e) \geq 0 & \forall e \in E
\end{aligned}
$$

'Maximaler Fluss' als LP

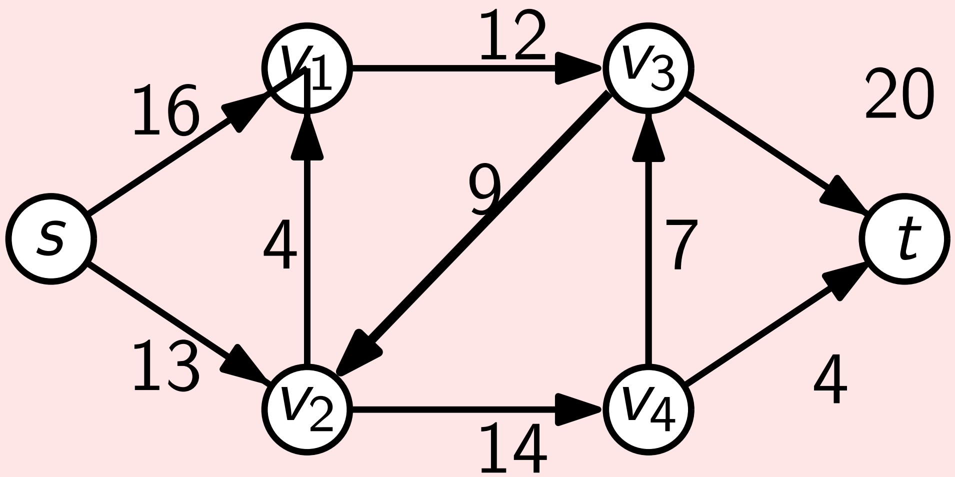
$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{e \in \delta^-(t)} f(e) & \\
\text{so dass} \quad & \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) = 0 & \forall v \in V \setminus \{s, t\} \\
& f(e) \leq c_e & \forall e \in E \\
& f(e) \geq 0 & \forall e \in E
\end{aligned}
$$

Nebenbedingungsmatrix ist TU.
Deswegen gibt es für ganzzahlige Kapazitäten ganzzahlige Flüsse, die optimal sind (**Satz vom ganzzahligen Fluss**)

Wie hängen maximale Flüsse und minimale Schnitte zusammen?

Wie hängen maximale Flüsse und minimale Schnitte zusammen?

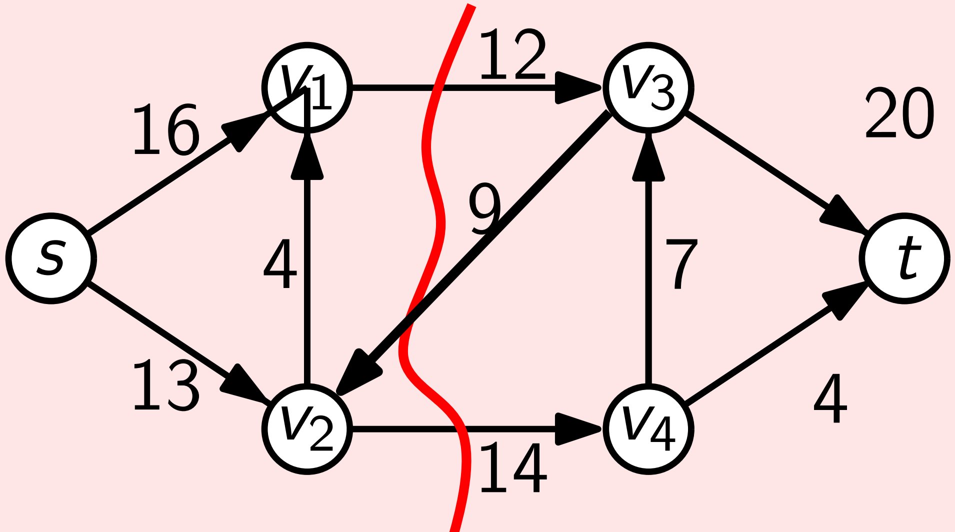
Was ist ein Schnitt?



Wie hängen maximale Flüsse und minimale Schnitte zusammen?

Was ist ein Schnitt?

Ein s-t-**Schnitt** ist eine Zerlegung (S, T) der Knotenmenge $V = S \dot\cup T$ mit $s \in S$, $t \in T$.

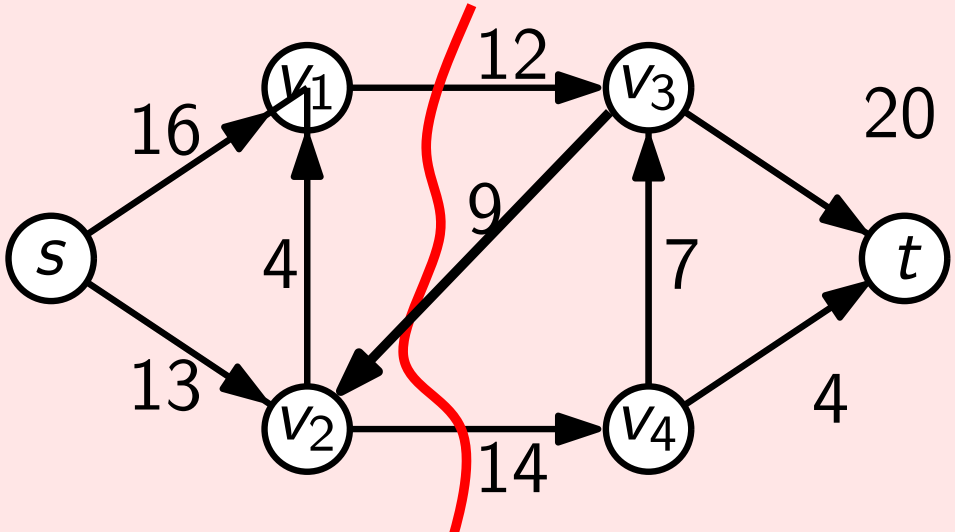


Wie hängen maximale Flüsse und minimale Schnitte zusammen?

Was ist ein Schnitt?

Ein s-t-**Schnitt** ist eine Zerlegung (S, T) der Knotenmenge $V = S \dot\cup T$ mit $s \in S$, $t \in T$.

Die **Kapazität** von S ist $\delta^+(S) := \sum_{(u,v): u \in S, v \in T} c_{(u,v)}$.



Wie hängen maximale Flüsse und minimale Schnitte zusammen?

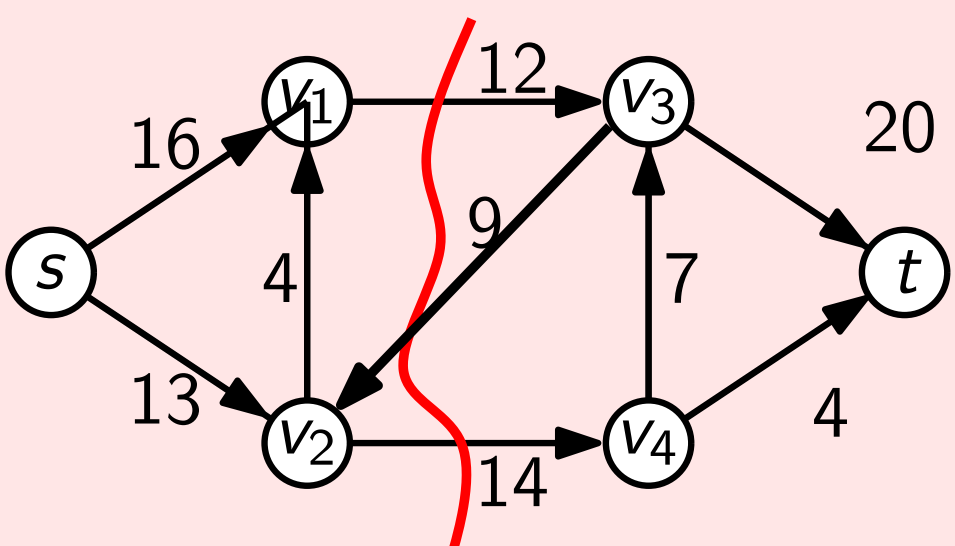
Max-Flow-Min-Cut Theorem
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Was ist ein Schnitt?

Ein s-t-**Schnitt** ist eine Zerlegung (S, T) der Knotenmenge $V = S \dot\cup T$ mit $s \in S$, $t \in T$.

Die **Kapazität** von S ist $\delta^+(S) := \sum_{(u,v):u\in S, v\in T} c_{(u,v)}$.



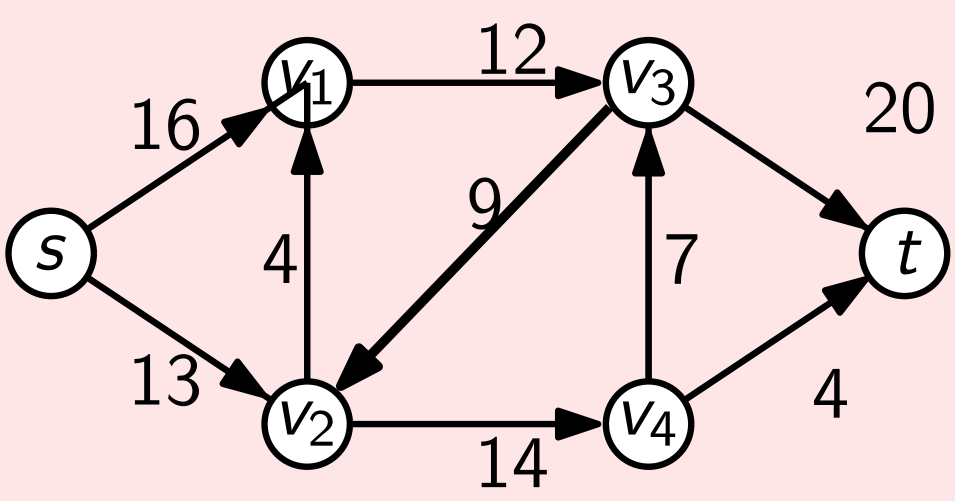
Wie hängen maximale Flüsse und minimale Schnitte zusammen?

Max-Flow-Min-Cut Theorem
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Wie beweist man das?

1. Einfach zu sehen: Für jeden s-t-Fluss f und jeden s-t-Schnitt S gilt: $|f| \leq c(\delta^+(S))$.



Wie hängen maximale Flüsse und minimale Schnitte zusammen?

Max-Flow-Min-Cut Theorem
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Wie beweist man das?

1. Einfach zu sehen: Für jeden s-t-Fluss f und jeden s-t-Schnitt S gilt: $|f| \leq c(\delta^+(S))$.

2. Sei f^* ein maximaler Fluss. Dann kann ich einen Schnitt S^* mit Größe $\delta^+(S^*) = |f^*|$ angeben.

Wie hängen maximale Flüsse und minimale Schnitte zusammen?

Max-Flow-Min-Cut Theorem
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Wie beweist man das?

1. Einfach zu sehen: Für jeden s-t-Fluss f und jeden s-t-Schnitt S gilt: $|f| \leq c(\delta^+(S))$.

2. Sei f^* ein maximaler Fluss. Dann kann ich einen Schnitt S^* mit Größe $\delta^+(S^*) = |f^*|$ angeben.
Nämlich $S^* := \{$alle Knoten, die von s in G_{f^*} erreichbar sind$\}$

Wie hängen maximale Flüsse und minimale Schnitte zusammen?

Max-Flow-Min-Cut Theorem
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Wie beweist man das?

1. Einfach zu sehen: Für jeden s-t-Fluss f und jeden s-t-Schnitt S gilt: $|f| \leq c(\delta^+(S))$.

2. Sei f^* ein maximaler Fluss. Dann kann ich einen Schnitt S^* mit Größe $\delta^+(S^*) = |f^*|$ angeben.
Nämlich $S^* := \{$alle Knoten, die von s in G_{f^*} erreichbar sind$\}$

$$\delta^-(S^*) = \sum_{e \in \delta^+(S^*)} f^*(e) = \sum_{e \in \delta^-(V \setminus S^*)} f^*(e) = \sum_{e \in \delta^-(t)} f^*(t) = |f^*|$$

Wie hängen maximale Flüsse und minimale Schnitte zusammen?

Max-Flow-Min-Cut Theorem
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Wie beweist man das?

1. Einfach zu sehen: Für jeden s-t-Fluss f und jeden s-t-Schnitt S gilt: $|f| \leq c(\delta^+(S))$.

Alternativ:

2. Sei f^* ein maximaler Fluss. Dann kann ich einen Schnitt S^* mit Größe $\delta^+(S^*) = |f^*|$ angeben.
Nämlich $S^* := \{$alle Knoten, die von s in G_{f^*} erreichbar sind$\}$

$$\delta^-(S^*) = \sum_{e \in \delta^+(S^*)} f^*(e) = \sum_{e \in \delta^-(V \setminus S^*)} f^*(e) = \sum_{e \in \delta^-(t)} f^*(t) = |f^*|$$

Wie hängen maximale Flüsse und minimale Schnitte zusammen?

Max-Flow-Min-Cut Theorem
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Wie beweist man das?

Alternativ:
Die beiden Probleme lassen sich als zueinander duale LPs formulieren.

Wie hängen maximale Flüsse und minimale Schnitte zusammen?

Max-Flow-Min-Cut Theorem
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Wie beweist man das?

Alternativ:
Die beiden Probleme lassen sich als zueinander duale LPs formulieren.

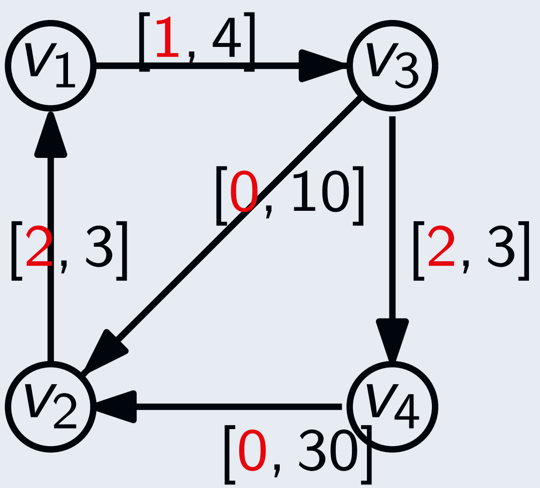
Aussage folgt dann aus Satz über starke Dualität.

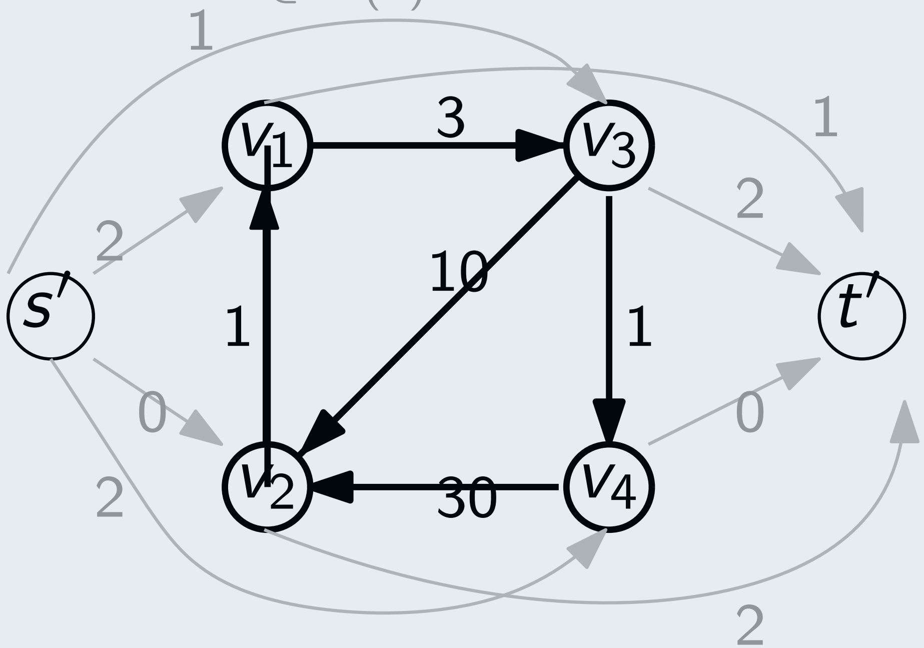
Wie finden wir zulässige Strömungen, wenn untere Kantenkapazitäten gegeben sind?

Wie finden wir zulässige Strömungen, wenn untere Kantenkapazitäten gegeben sind?

Obergraph $G' = (V', E')$: zusätzlich Quelle und Senke, dafür keine unteren Schranken auf Kanten

$V' = V \cup \{s', t'\}$,
$E' = E \cup \{(s', v) : v \in V\} \cup \{(v, t') : v \in V\}$
$l'(e) := 0 \; \forall e \in E'$
$c'(e) := c(e) - l(e) \; \forall e \in E$
$c'((s', v)) = \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)$ und $c'((v, t')) = \sum_{e \in \delta^+(v)} l(e) \; \forall v \in V$

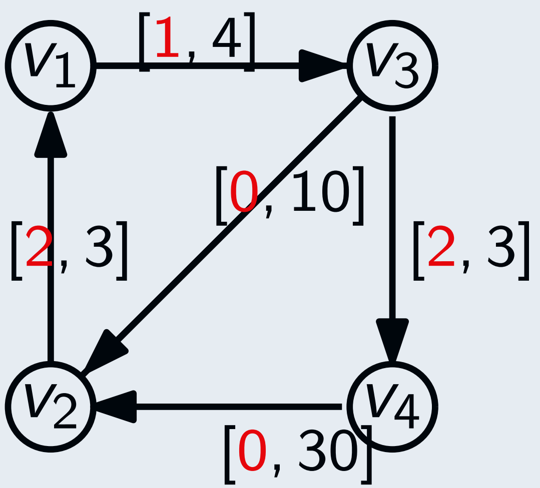


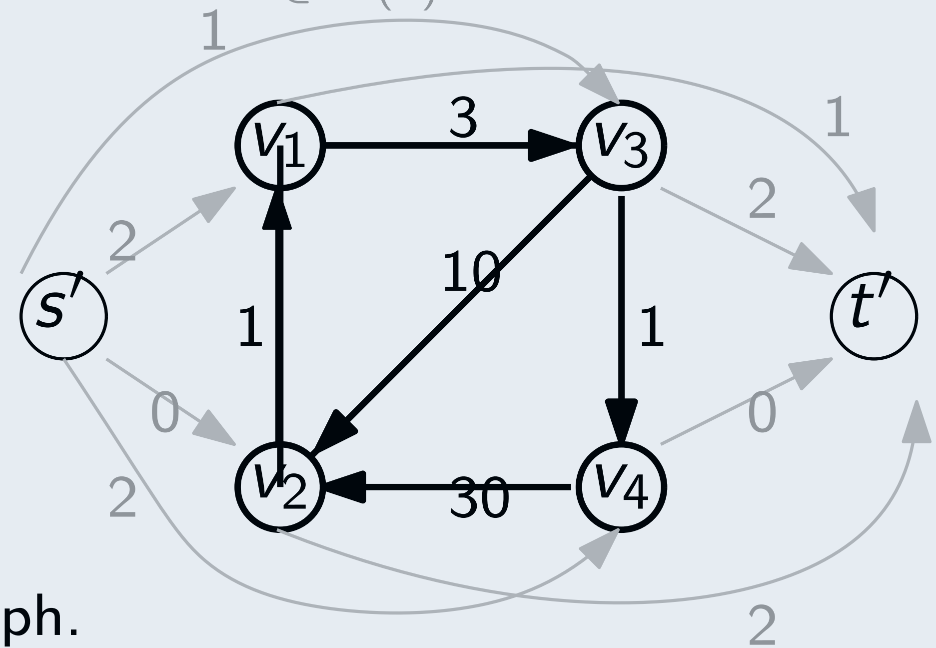


Wie finden wir zulässige Strömungen, wenn untere Kantenkapazitäten gegeben sind?

Obergraph $G' = (V', E')$: zusätzlich Quelle und Senke, dafür keine unteren Schranken auf Kanten

$V' = V \cup \{s', t'\}$,
$E' = E \cup \{(s', v) : v \in V\} \cup \{(v, t') : v \in V\}$
$l'(e) := 0 \ \forall e \in E'$
$c'(e) := c(e) - l(e) \ \forall e \in E$
$c'((s', v)) = \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)$ und $c'((v, t')) = \sum_{e \in \delta^+(v)} l(e) \ \forall v \in V$

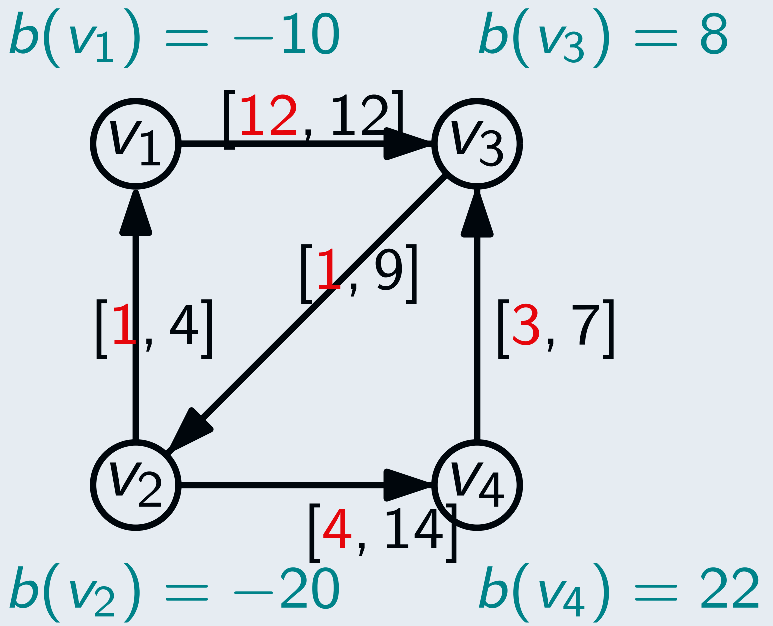




Finde maximalen Fluss f^* im Obergraph.
Hat dieser Wert $|f^*| =$ entspricht er zulässiger Strömung im Urpsrungsgraph.

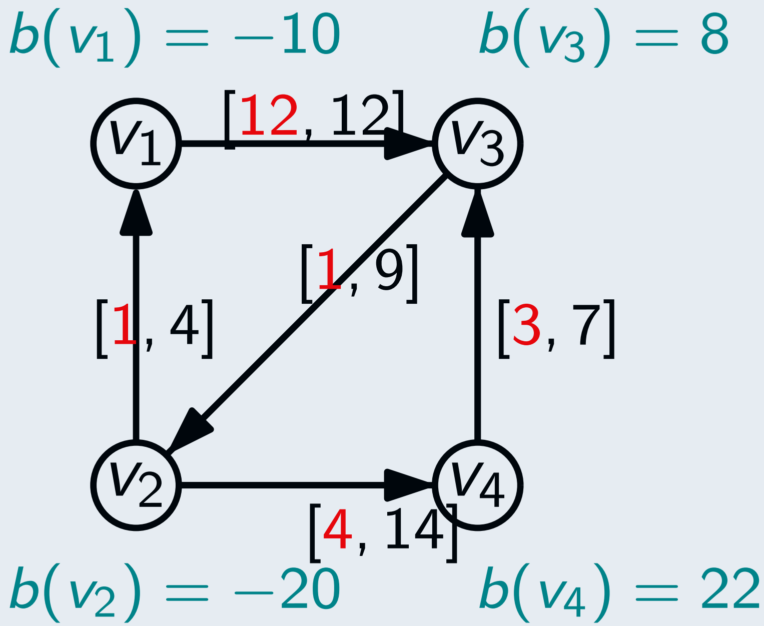
Wie finden wir zulässige Bedarfsflüsse?

Wie finden wir zulässige Bedarfsflüsse?



Wie finden wir zulässige Bedarfsflüsse?

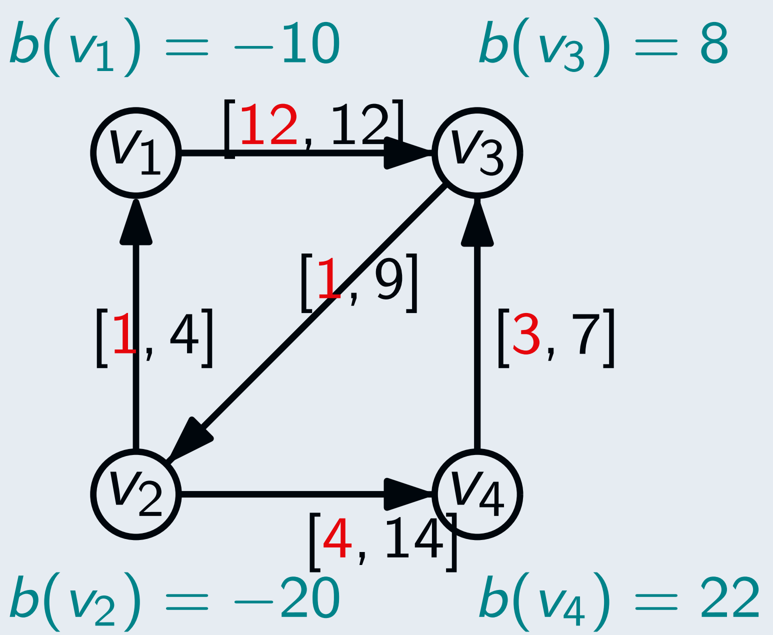
Obergraph, in dem eine zulässige Strömung gefunden werden muss:



Wie finden wir zulässige Bedarfsflüsse?

Obergraph, in dem eine zulässige Strömung gefunden werden muss:

Zusätzlichen Knoten x, der mit allen Bedarfs- und Überflussknoten verbunden wird, ersetzt Bedarfe,
Kanten werden auf Bedarf-/Überflusswerte gesetzt



Wie finden wir zulässige Bedarfsflüsse?

Obergraph, in dem eine zulässige Strömung gefunden werden muss:

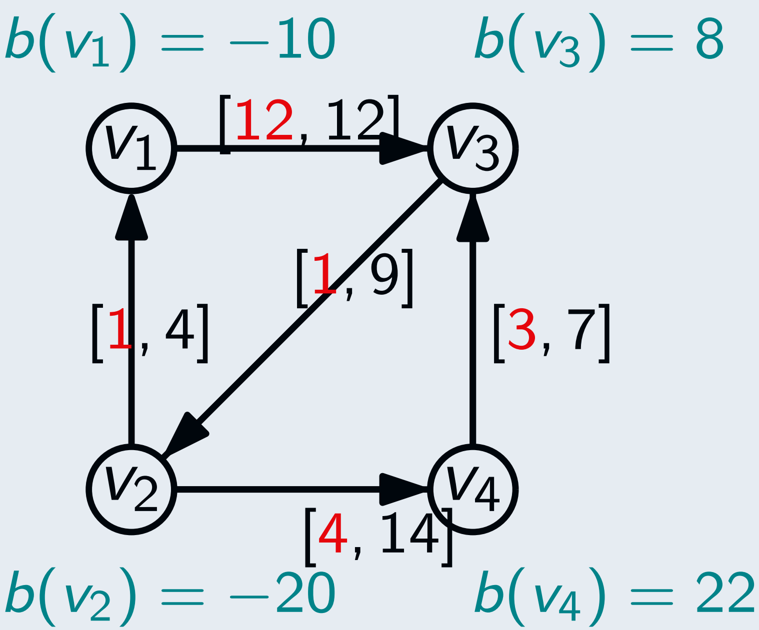
Zusätzlichen Knoten x, der mit allen Bedarfs- und Überflussknoten verbunden wird, ersetzt Bedarfe,
Kanten werden auf Bedarf-/Überflusswerte gesetzt

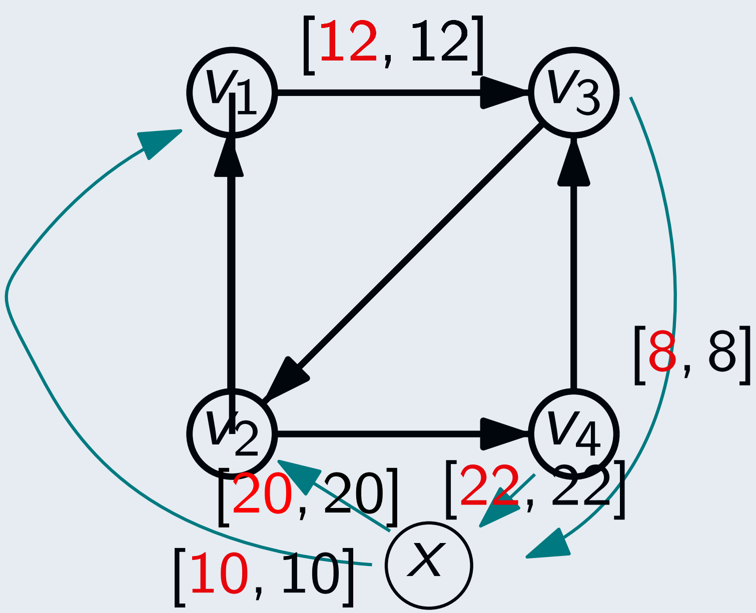
$\hat{V} := V \cup \{x\}$,

$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\} \cup \{(u, x) : u \in V : b(u) > 0\}$

$l(x, v) := c(x, v) := -b(v)\ \forall v \in V$ mit $b(v) < 0$

$l((u, x)) := c((u, x)) := b(u)\ \forall u \in V$ mit $b(u) > 0$





Wie finden wir zulässige Bedarfsflüsse?

Obergraph, in dem eine zulässige Strömung gefunden werden muss:

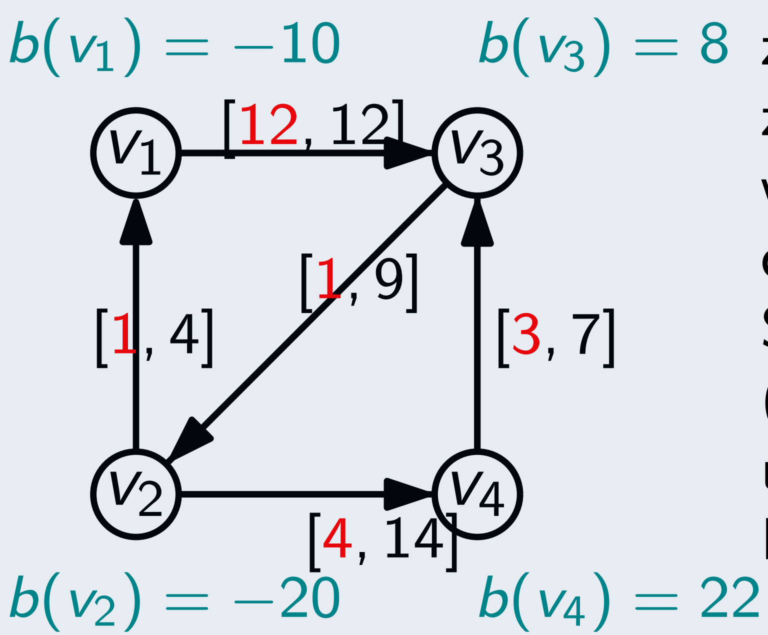
Zusätzlichen Knoten x, der mit allen Bedarfs- und Überflussknoten verbunden wird, ersetzt Bedarfe,
Kanten werden auf Bedarf-/Überflusswerte gesetzt

$\hat{V} := V \cup \{x\}$,

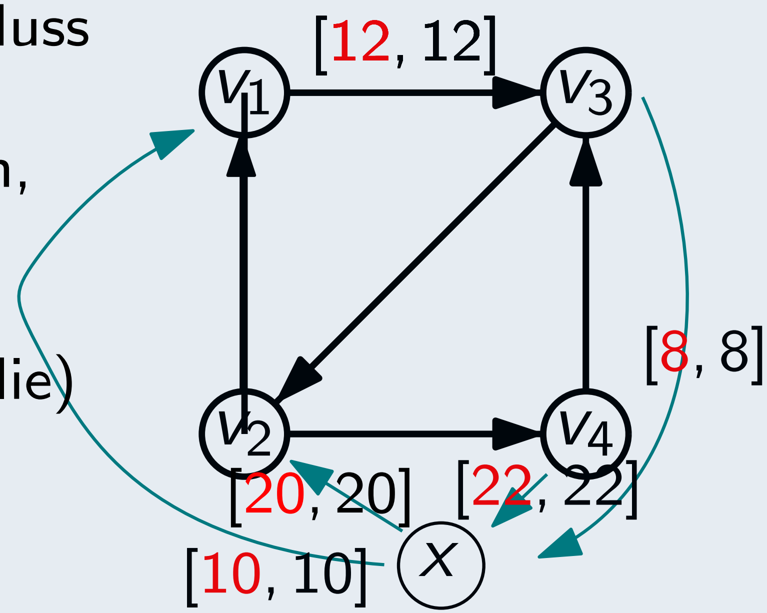
$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\} \cup \{(u, x) : u \in V : b(u) > 0\}$

$l(x, v) := c(x, v) := -b(v)\ \forall v \in V$ mit $b(v) < 0$

$l((u, x)) := c((u, x)) := b(u)\ \forall u \in V$ mit $b(u) > 0$



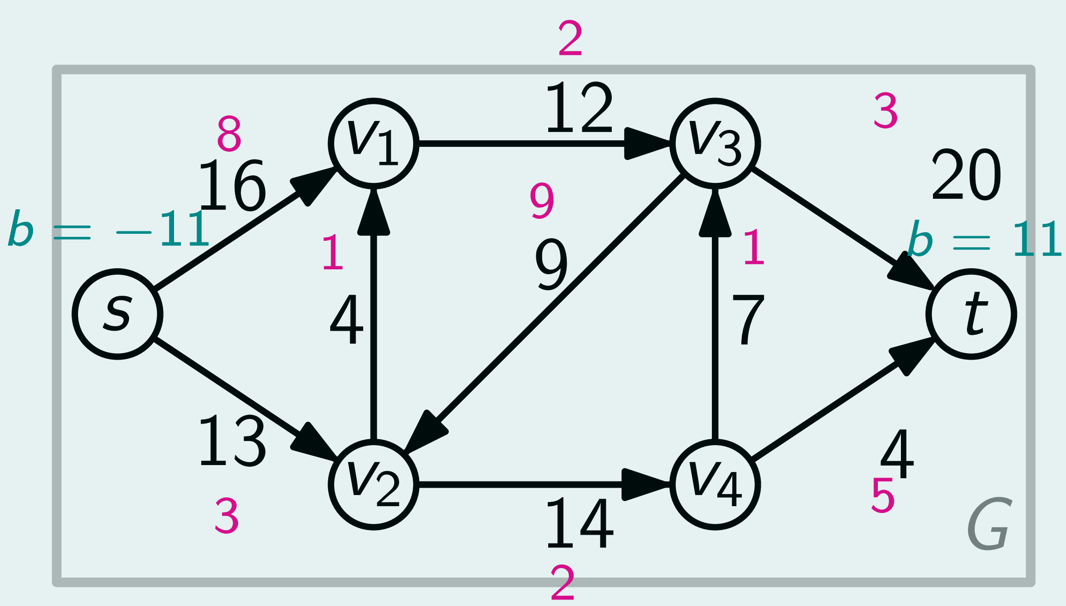
Um hier algorithmisch zulässigen Bedarfsfluss zu finden, erstelle weiteren Obergraph, der die unteren Schranken ersetzt (siehe vorherige Folie) und wende Edmonds-Karp an.



Wie finden wir kostenminimale Flüsse?

Wie finden wir kostenminimale Flüsse?

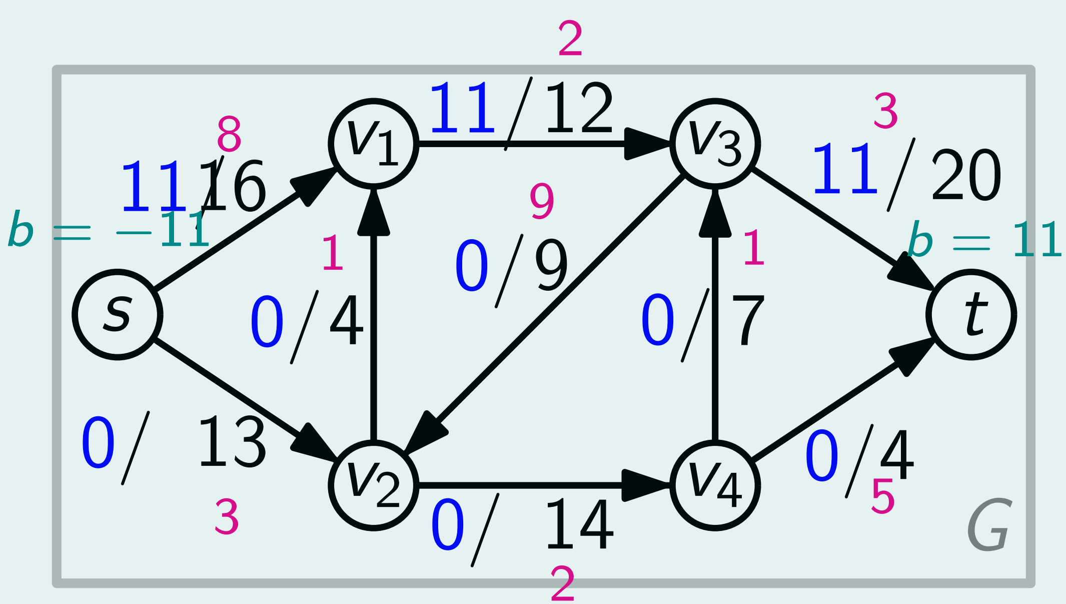
Ausgangssituation: Graph mit Bedarfen, (unteren und) oberen Kapazitätsschranken, Kantenkosten



Wie finden wir kostenminimale Flüsse?

Ausgangssituation: Graph mit Bedarfen, (unteren und) oberen Kapazitätsschranken, Kantenkosten

Finde zulässigen Bedarfsfluss (siehe vorherige Folie)

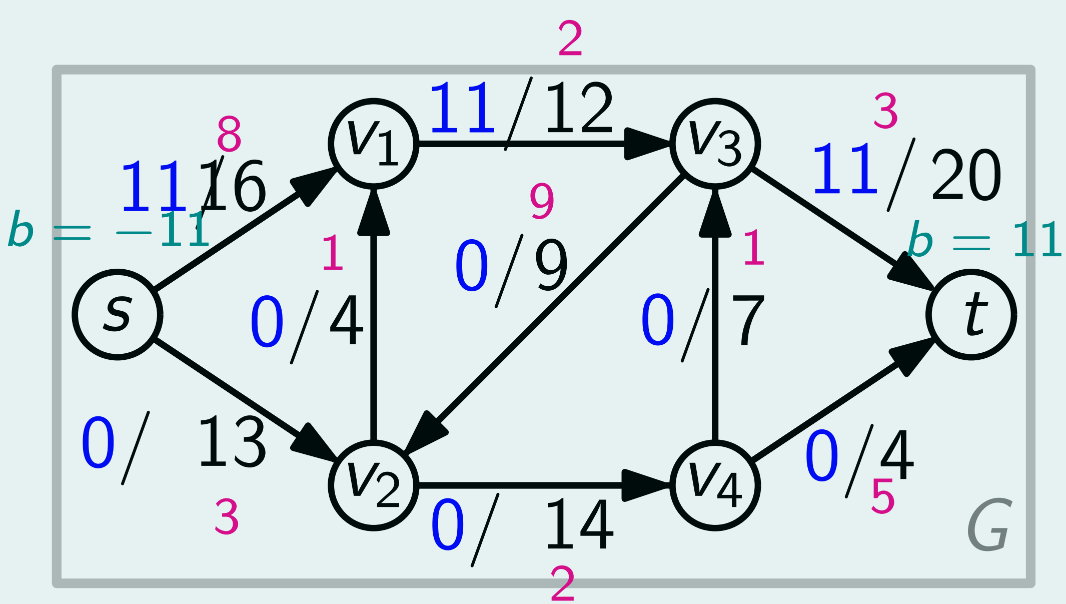


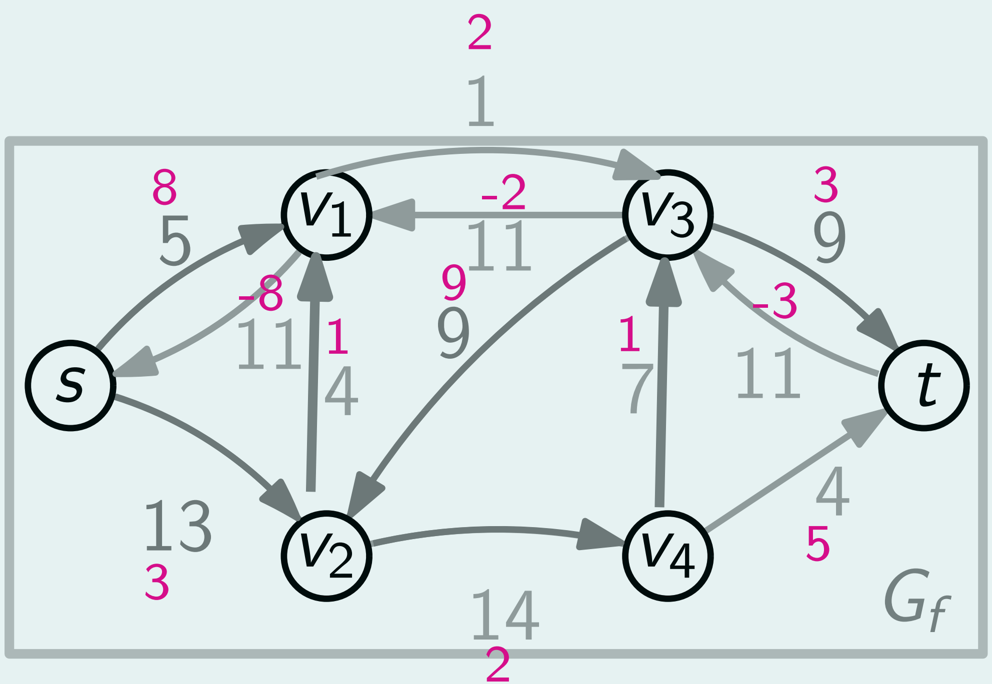
Wie finden wir kostenminimale Flüsse?

Ausgangssituation: Graph mit Bedarfen, (unteren und) oberen Kapazitätsschranken, Kantenkosten

Finde zulässigen Bedarfsfluss (siehe vorherige Folie)

1. Erstelle Residualgraph mit negativen Kosten für rückwärts gerichtete Kanten.





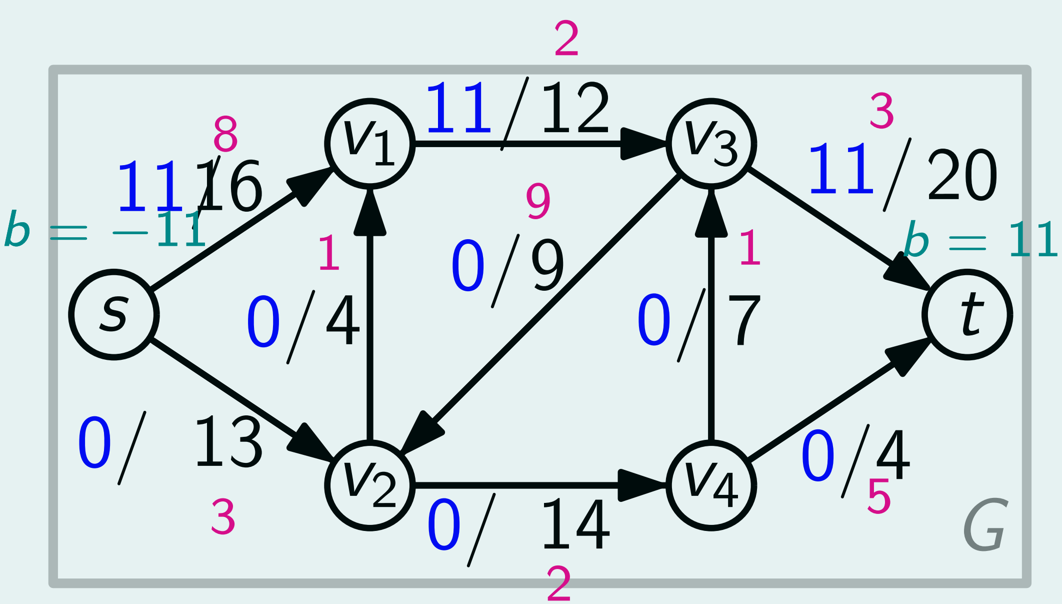
Wie finden wir kostenminimale Flüsse?

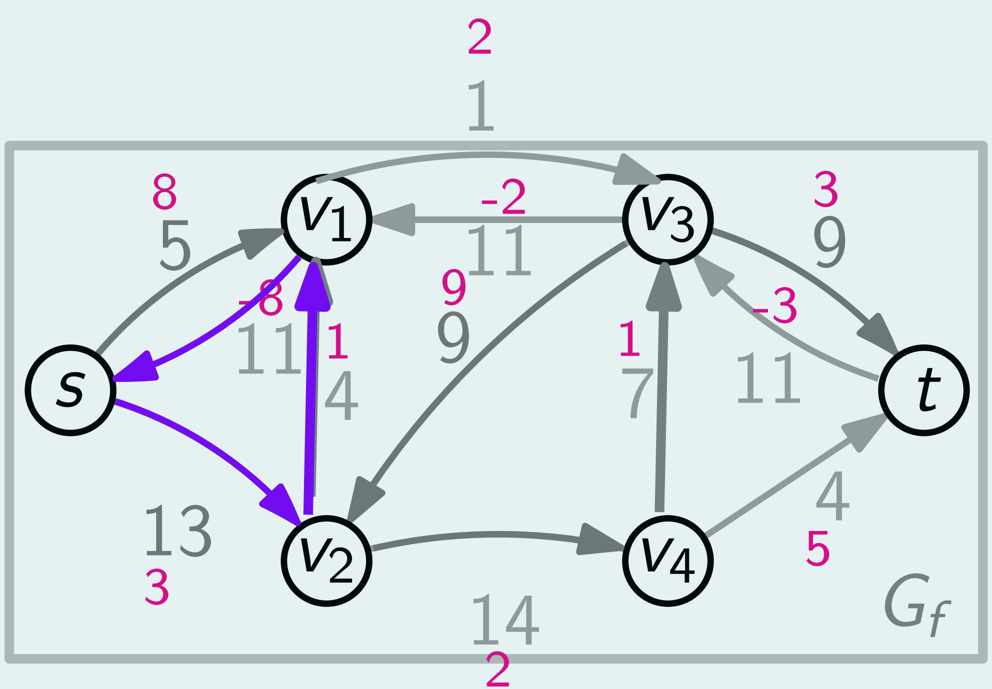
Ausgangssituation: Graph mit Bedarfen, (unteren und) oberen Kapazitätsschranken, Kantenkosten

Finde zulässigen Bedarfsfluss (siehe vorherige Folie)

1. Erstelle Residualgraph mit negativen Kosten für rückwärts gerichtete Kanten.

2. Finde Kreise mit negativen Kosten und erhöhe Fluss (so viel wie möglich, ohne Schranken zu verletzen) entlang dieser Kreise.





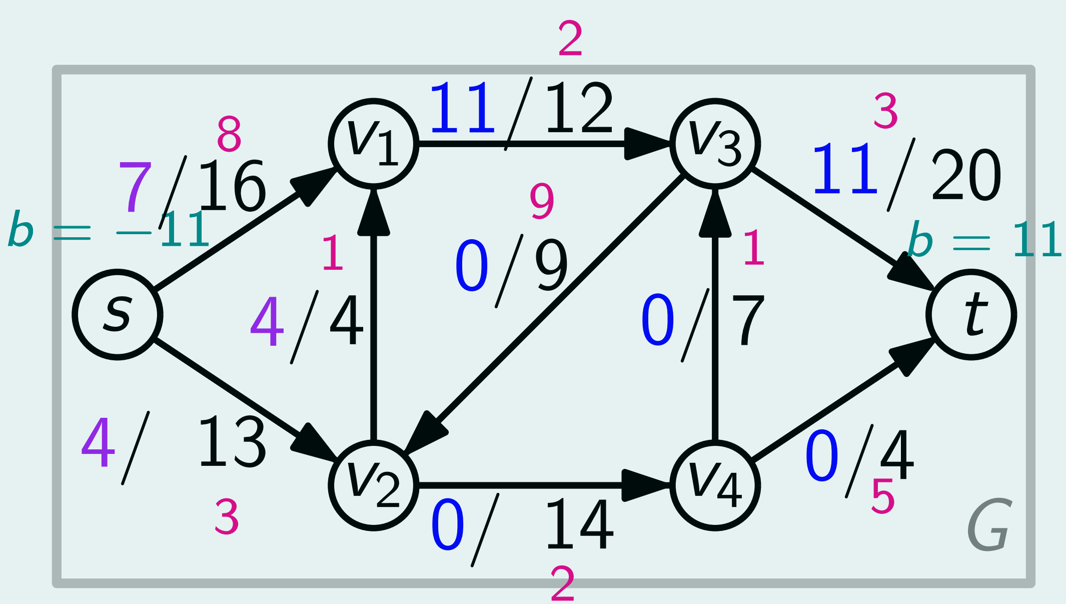
Wie finden wir kostenminimale Flüsse?

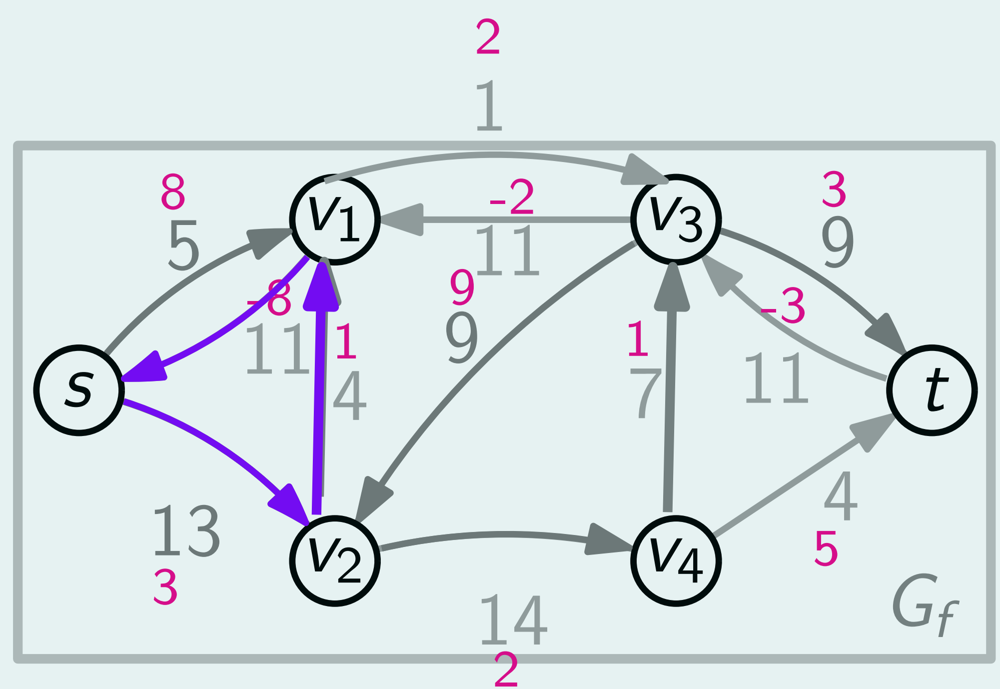
Ausgangssituation: Graph mit Bedarfen, (unteren und) oberen Kapazitätsschranken, Kantenkosten

Finde zulässigen Bedarfsfluss (siehe vorherige Folie)

1. Erstelle Residualgraph mit negativen Kosten für rückwärts gerichtete Kanten.

2. Finde Kreise mit negativen Kosten und erhöhe Fluss (so viel wie möglich, ohne Schranken zu verletzen) entlang dieser Kreise.





Wie finden wir kostenminimale Flüsse?

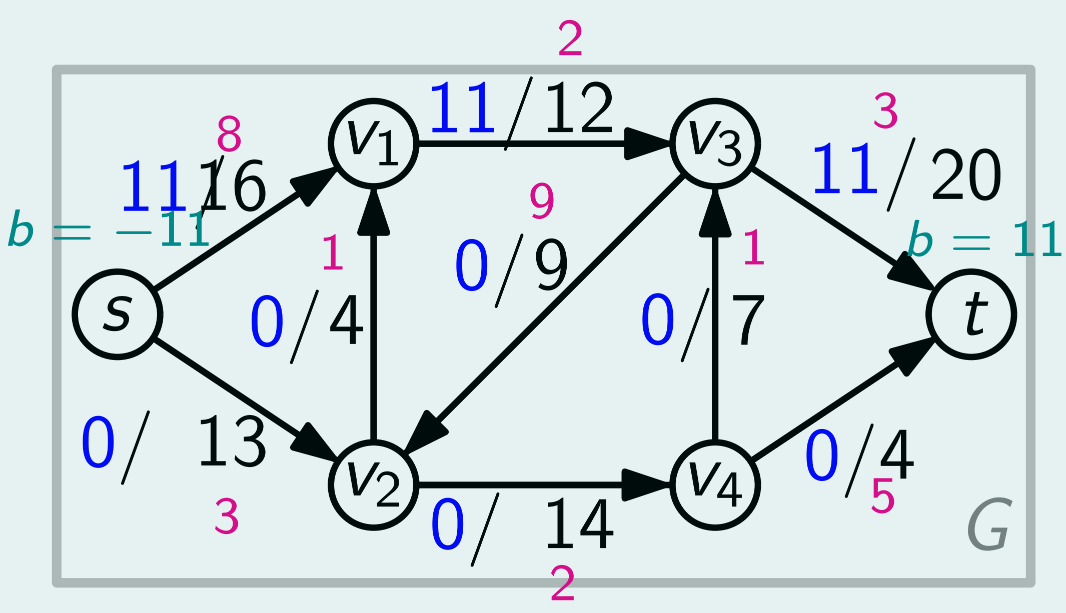
Ausgangssituation: Graph mit Bedarfen, (unteren und) oberen Kapazitätsschranken, Kantenkosten

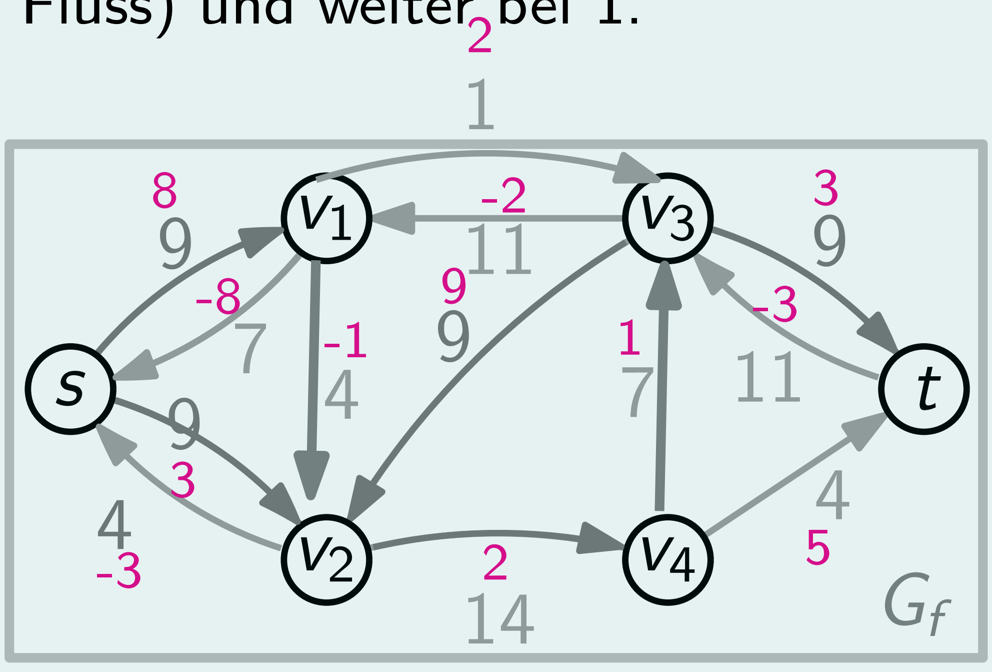
Finde zulässigen Bedarfsfluss (siehe vorherige Folie)

1. Erstelle Residualgraph mit negativen Kosten für rückwärts gerichtete Kanten.

2. Finde Kreise mit negativen Kosten und erhöhe Fluss (so viel wie möglich, ohne Schranken zu verletzen) entlang dieser Kreise.

3. Update Residualgraph (bzgl neuem Fluss) und weiter bei 1.





Kostenminimaler Fluss' als LP

Kostenminimaler Fluss' als LP

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{e \in E} c(e) f(e) \\
\text{so dass} \quad & \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) = b(e) && \forall v \in V \setminus \{s, t\} \\
& f(e) \leq c_e && \forall e \in E \\
& f(e) \geq l_e && \forall e \in E \\
& f(e) \geq 0 && \forall e \in E
\end{aligned}
$$

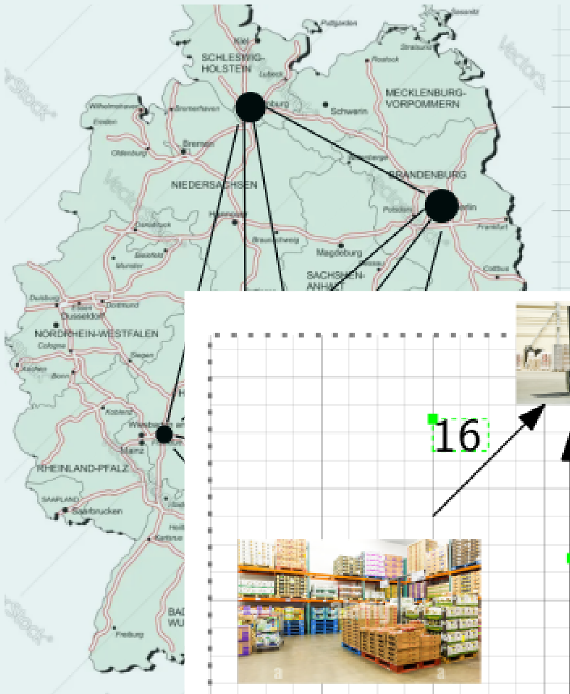
Kostenminimaler Fluss' als LP

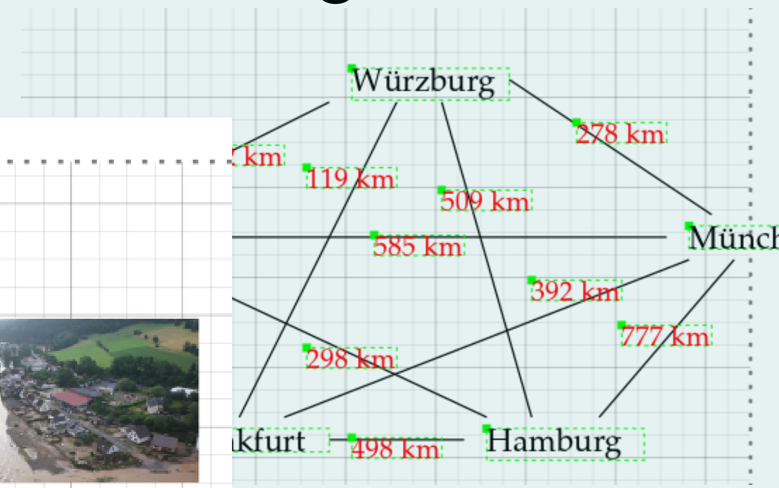
$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{e \in E} c(e) f(e) & \\
\text{so dass} \quad & \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) = b(e) & \forall v \in V \setminus \{s, t\} \\
& f(e) \leq c_e & \forall e \in E \\
& f(e) \geq l_e & \forall e \in E \\
& f(e) \geq 0 & \forall e \in E
\end{aligned}
$$

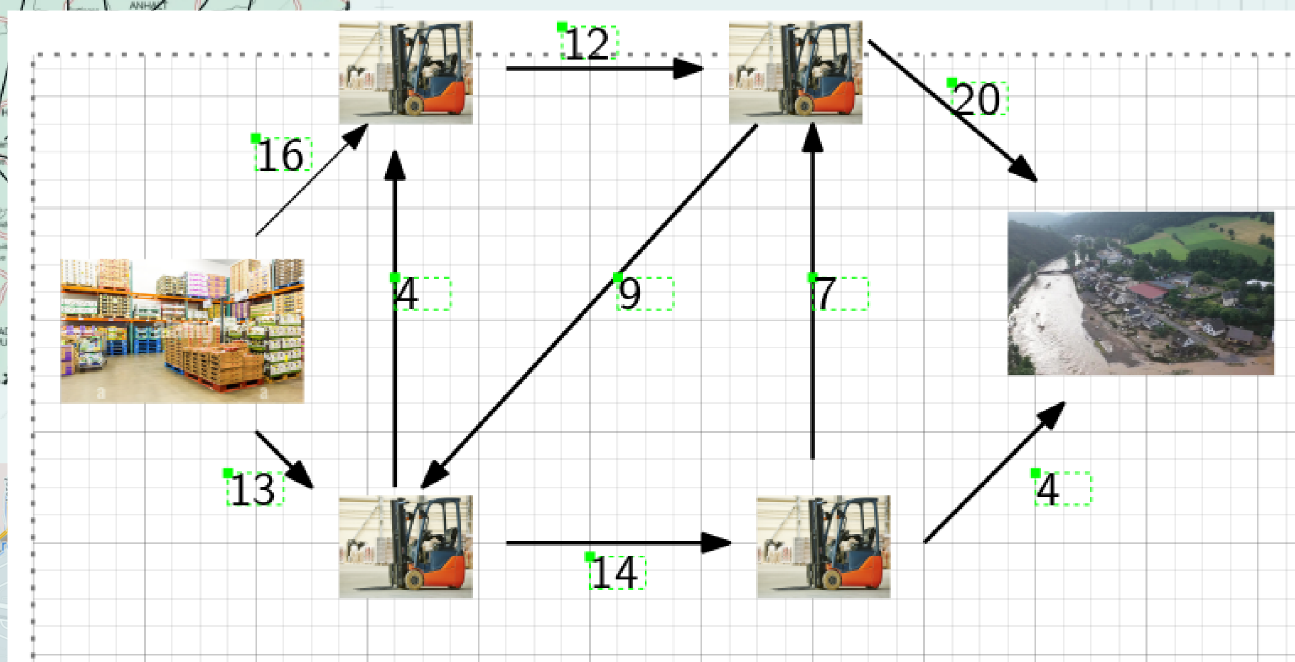
Nebenbedingungsmatrix ist TU.
Deswegen gibt es für ganzzahlige Kapazitäten ganzzahlige Flüsse, die optimal sind (**Satz vom ganzzahligen Fluss**)

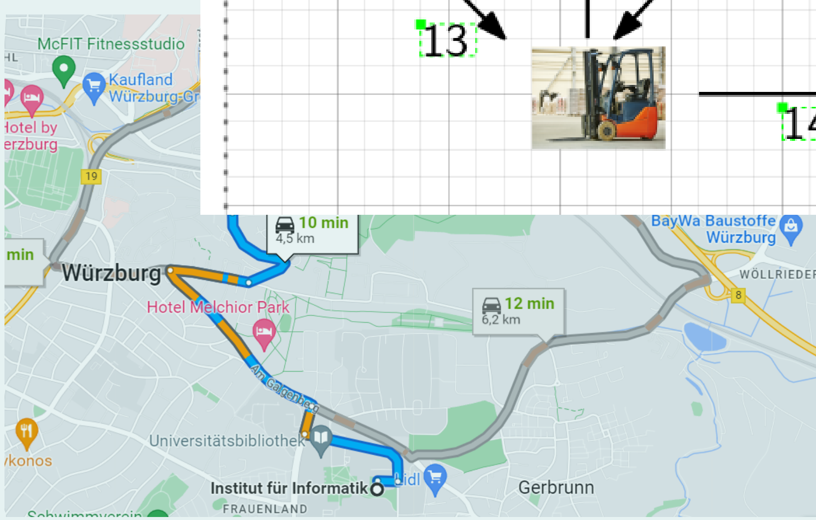
Worum geht es heute: Wege und Touren

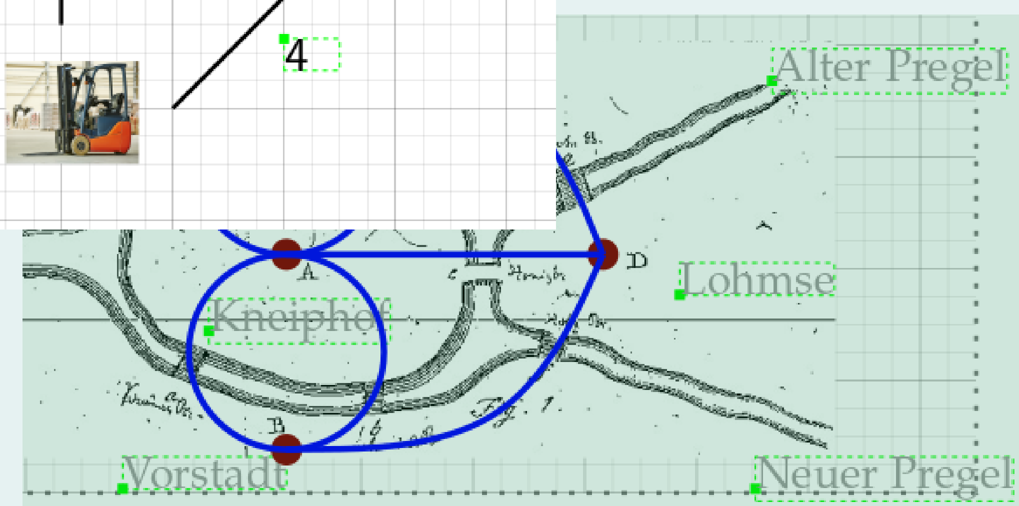
heute: Knoten stehen für Orte, Kanten für Verbindungen zwischen Orten, Kantenlabels für Entfernungen











Agenda

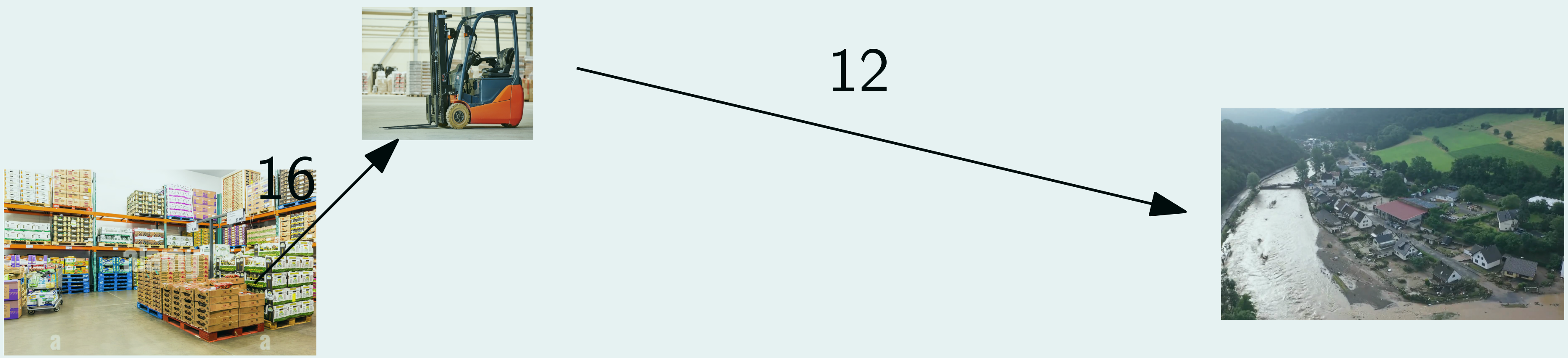
1. Flussprobleme
   - ausführlich und mit Beweisen: maximale Flüsse - und minimale Schnitte auf Netzwerken mit oberen Kantenkapazitätsschranken
   - kurz angerissen und ohne Beweise: Verallgemeinerungen: untere Kantenkapazitätsschranken, Bedarfe, Kosten

Hilfslieferungen im Katastrophenfall

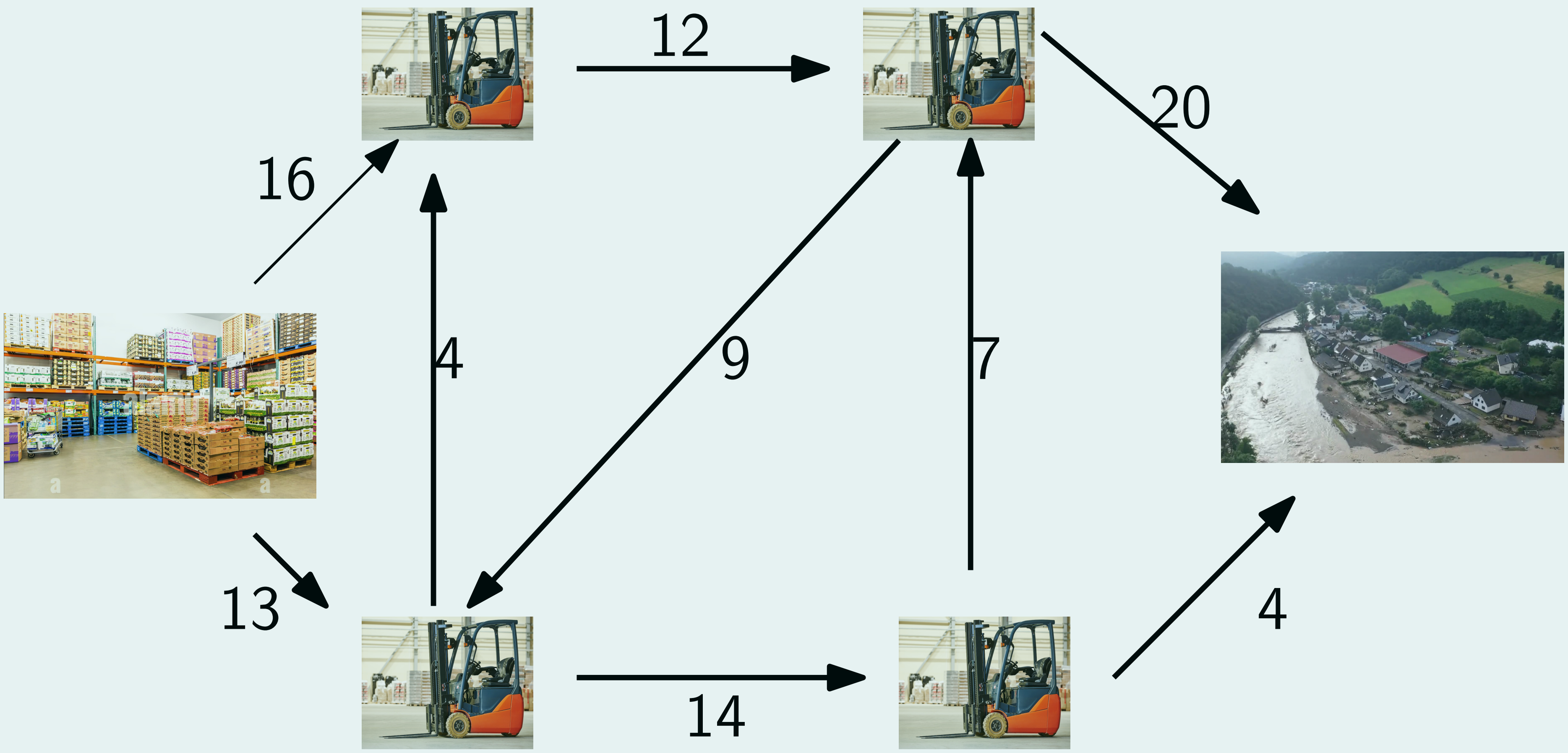
Wie bekommen wir möglichst viele Hilfslieferungen dorthin, wo sie benötigt werden?

Koordination von Hilfsgüterlieferungen als Flussproblem

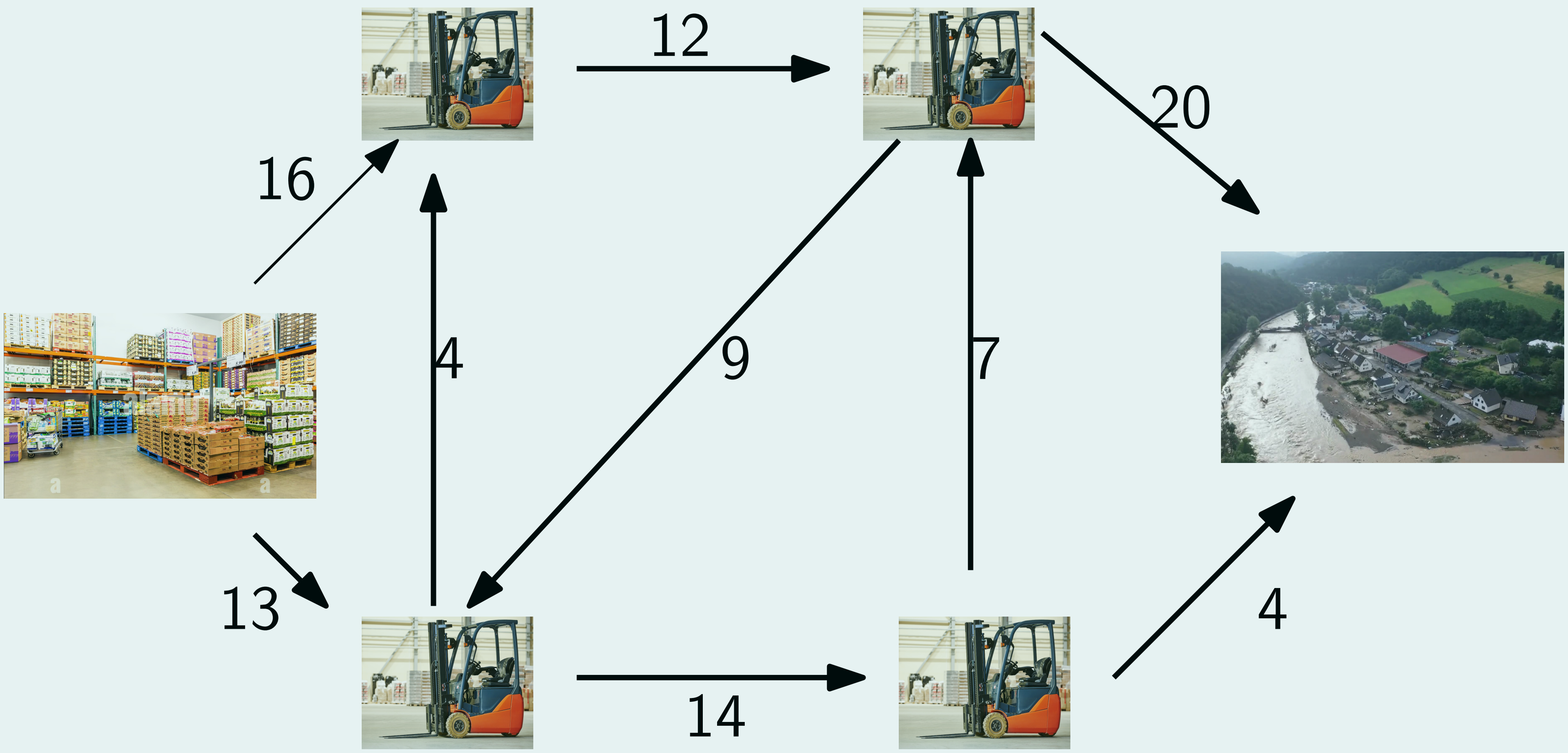
Koordination von Hilfsgüterlieferungen als Flussproblem



Koordination von Hilfsgüterlieferungen als Flussproblem

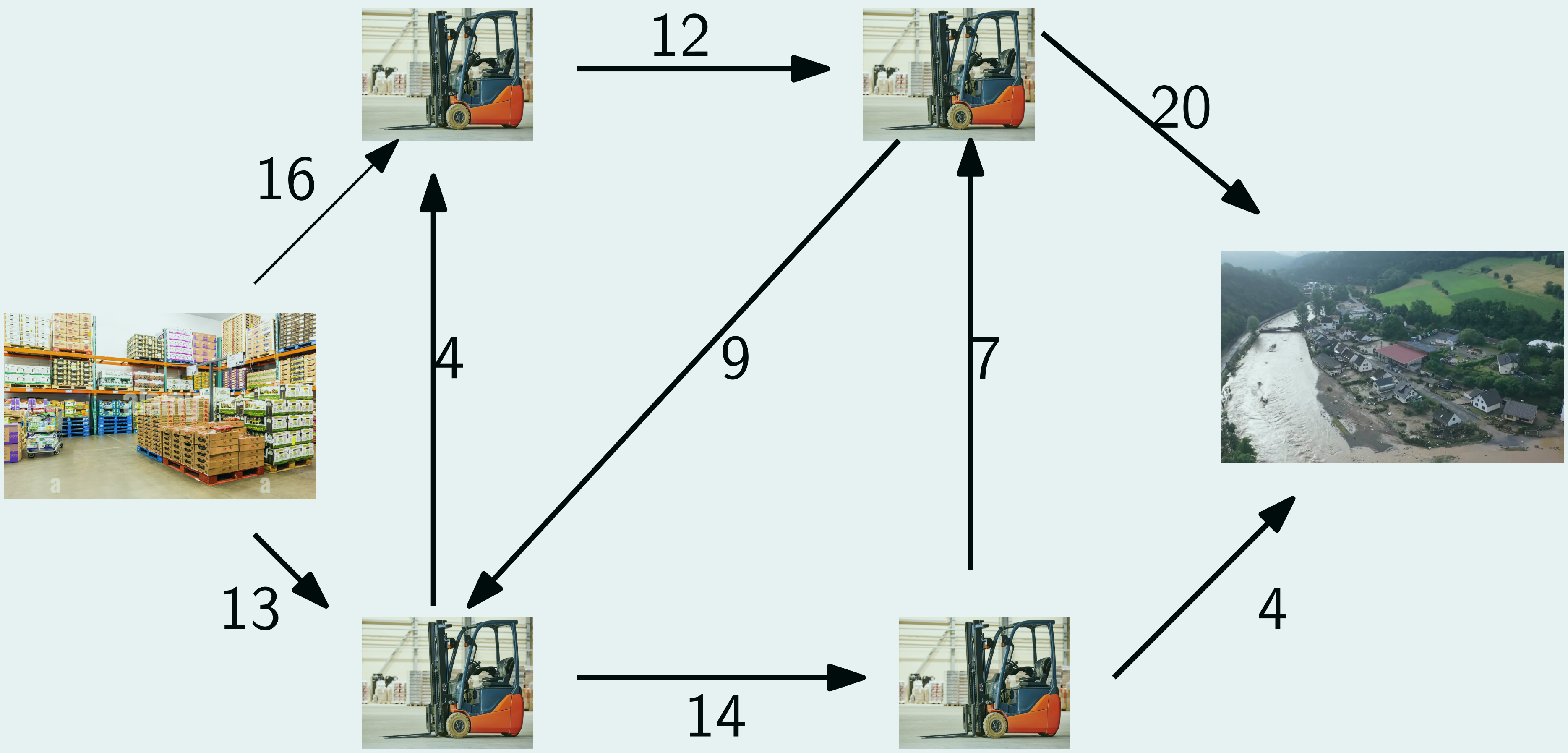


Koordination von Hilfsgüterlieferungen als Flussproblem



Knoten: Zielort mit Bedarf, Startort mit Vorräten, Transshipment-Punkte

Koordination von Hilfsgüterlieferungen als Flussproblem

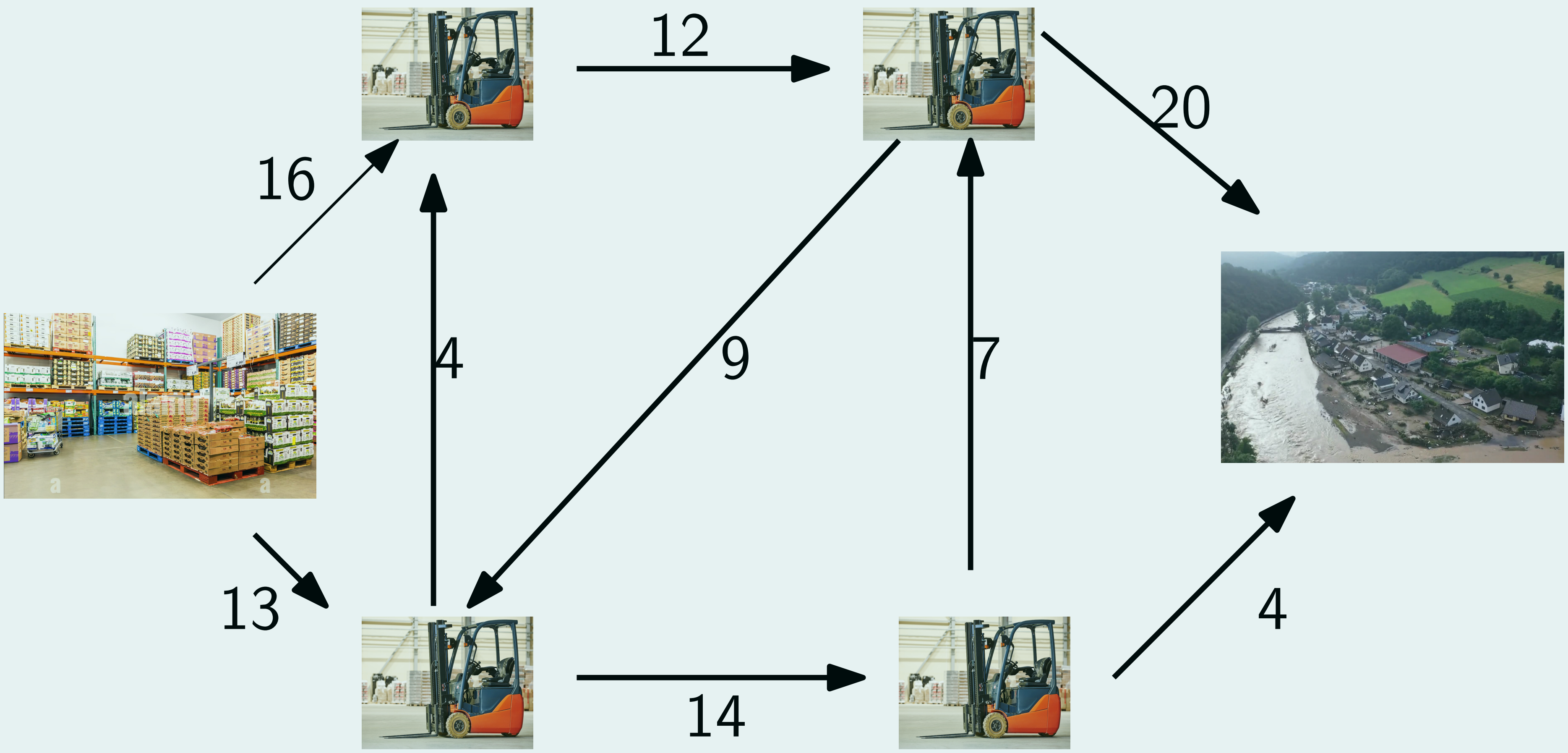


Knoten: Zielort mit Bedarf, Startort mit Vorräten, Transshipment-Punkte

Kanten: Transportwege, die am Stück von einem Fahrzeug zurückgelegt werden

Kantenlabel: Transportkapazitäten der Kanten

Koordination von Hilfsgüterlieferungen als Flussproblem



Knoten: Zielort mit Bedarf, Startort mit Vorräten, Transshipment-Punkte

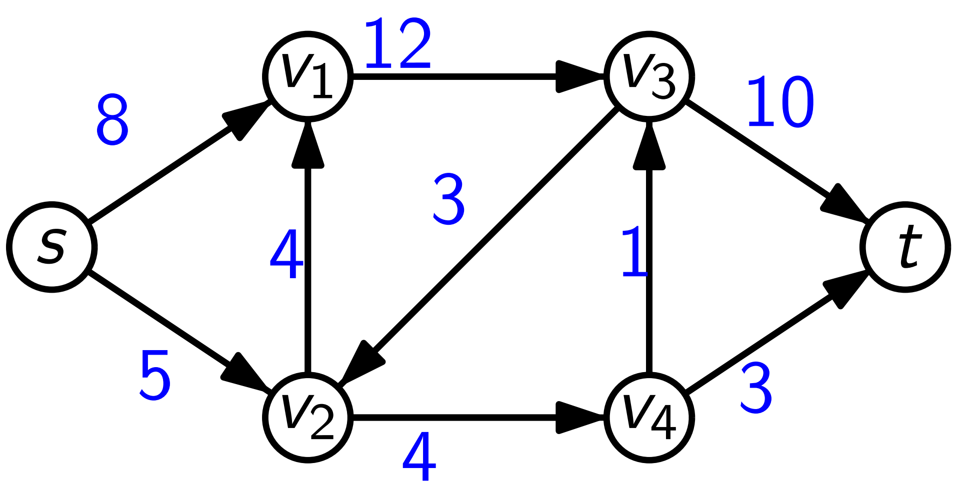
Kanten: Transportwege, die am Stück von einem Fahrzeug zurückgelegt werden

Kantenlabel: Transportkapazitäten der Kanten

Suche: maximalen Hilfsgüterfluss vom Lager zum Zielort

Flüsse

Notation
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.
Fluss: Funktion $f : E \to \mathbb{R}$
$f(e)$ gibt an, wieviel über Kante e fließt.



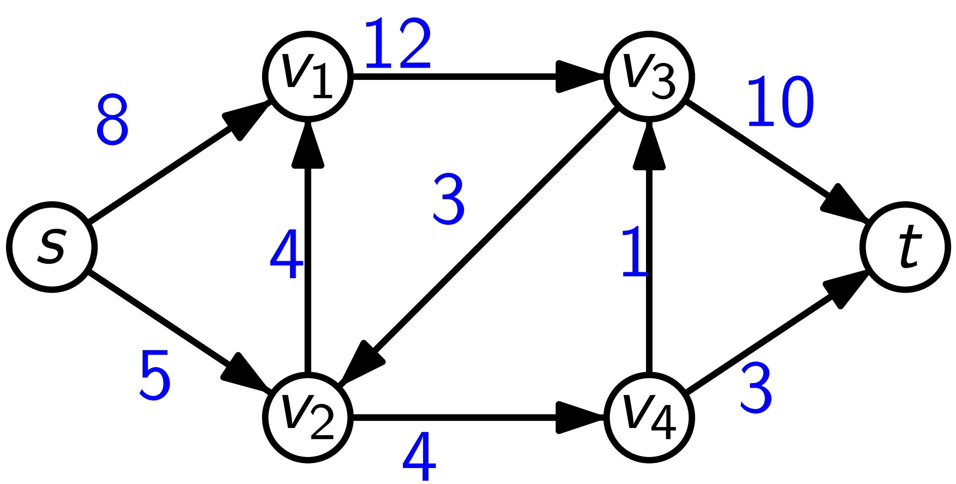
Flüsse

Notation

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.
Fluss: Funktion $f : E \to \mathbb{R}$
$f(e)$ gibt an, wieviel über Kante e fließt.

- $\delta^+(v)$ ausgehende Kanten von v
-$\delta^-(v)$ eingehende Kanten in v

Nettozufluss$_f(v) := f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v)) = \sum_{(u,v)\in E} f((u,v)) - \sum_{(v,w)\in E} f((v,w))$



Flüsse

Notation

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.

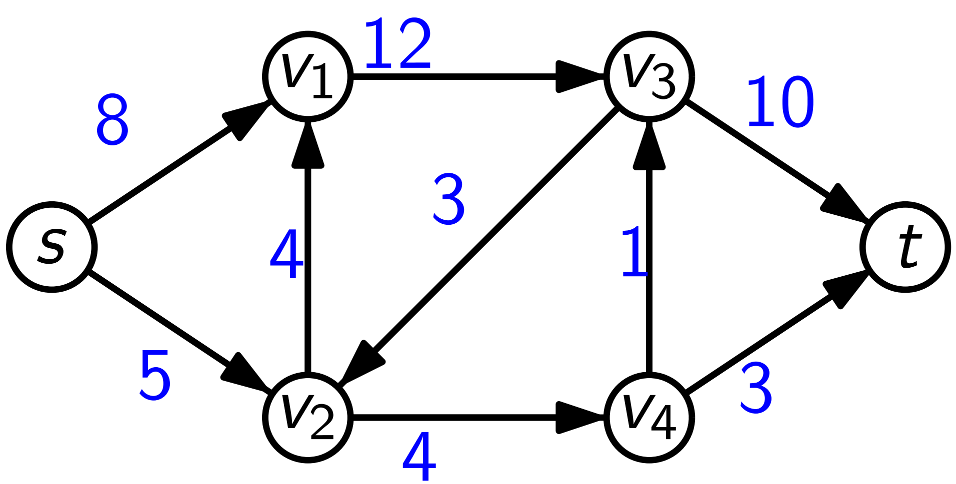
Fluss: Funktion $f : E \to \mathbb{R}$

$f(e)$ gibt an, wieviel über Kante e fließt.

- $\delta^+(v)$ ausgehende Kanten von v
- $\delta^-(v)$ eingehende Kanten in v

$\text{Nettozufluss}_f(v) := f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v)) = \sum_{(u,v)\in E} f((u,v)) - \sum_{(v,w)\in E} f((v,w))$

Seien $s, t \in V$. Ein zulässiger s-t-**Fluss** ist eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ mit $\text{Nettozufluss}_f(v) = 0 \ \forall v \in V \setminus \{s, t, \}$.
Wir nennen s **Quelle** und t **Senke** des Flusses.



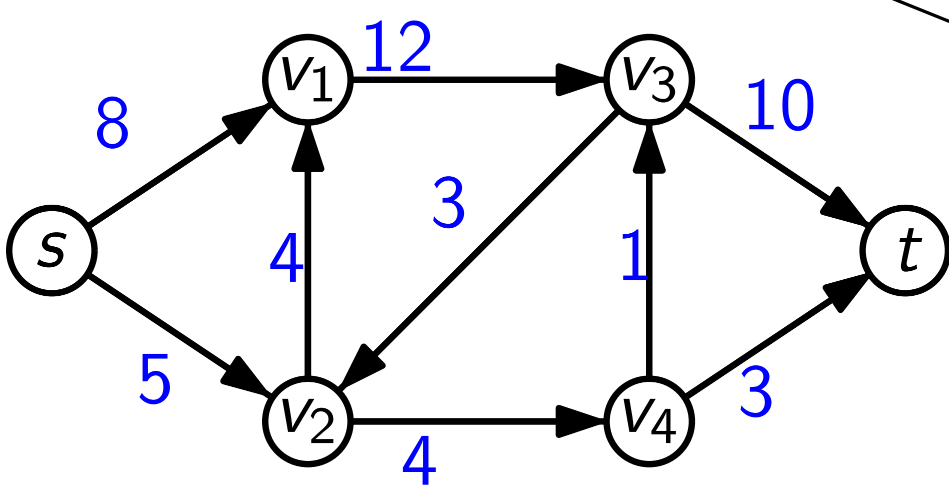
Flüsse

Notation
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.
Fluss: Funktion $f : E \to \mathbb{R}$
$f(e)$ gibt an, wieviel über Kante e fließt.

- $\delta^+(v)$ ausgehende Kanten von v
-$\delta^-(v)$ eingehende Kanten in v

Nettozufluss$_f(v) := f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v)) = \sum_{(u,v)\in E} f((u,v)) - \sum_{(v,w)\in E} f((v,w))$

Seien $s, t \in V$. Ein zulässiger s-t-**Fluss** ist eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ mit Nettozufluss$_f(v) = 0\ \forall v \in V \setminus \{s, t, \}$.
Wir nennen s **Quelle** und t **Senke** des Flusses.



kurz: **'Fluss'**, wenn aus dem Kontext klar ist, was Quelle und Senke sind.

Flüsse

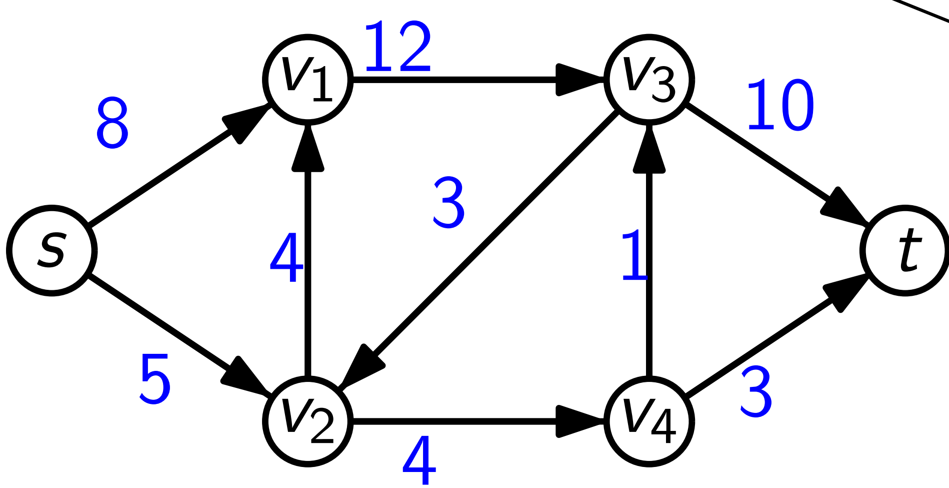
Notation
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.
Fluss: Funktion $f : E \to \mathbb{R}$
$f(e)$ gibt an, wieviel über Kante e fließt.

- $\delta^+(v)$ ausgehende Kanten von v
-$\delta^-(v)$ eingehende Kanten in v

$\text{Nettozufluss}_f(v) := f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v)) = \sum_{(u,v)\in E} f((u,v)) - \sum_{(v,w)\in E} f((v,w))$

Seien $s, t \in V$. Ein zulässiger s-t-**Fluss** ist eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ mit $\text{Nettozufluss}_f(v) = 0 \ \forall v \in V \setminus \{s, t, \}$.
Wir nennen s **Quelle** und t **Senke** des Flusses.

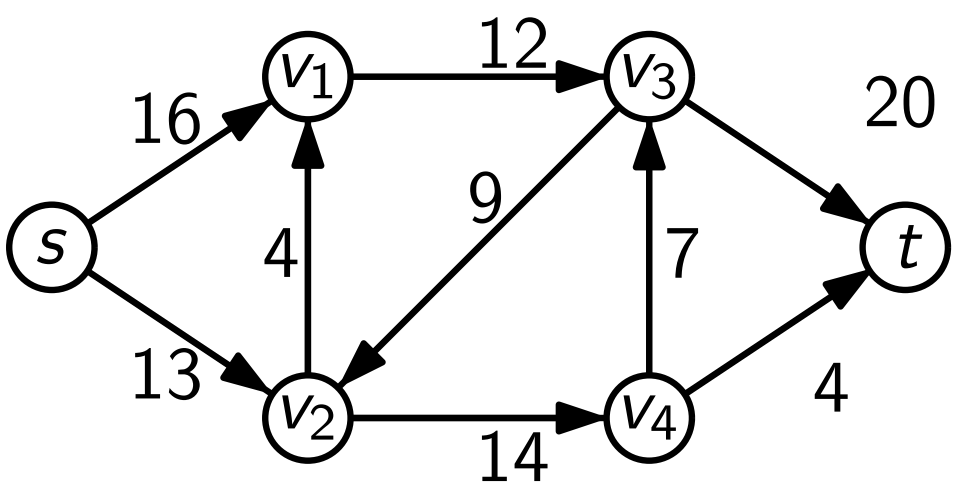
$|f| := \text{Nettozufluss}_f(t)$ heißt **Wert des Flusses**



kurz: **'Fluss'**, wenn aus dem Kontext klar ist, was Quelle und Senke sind.

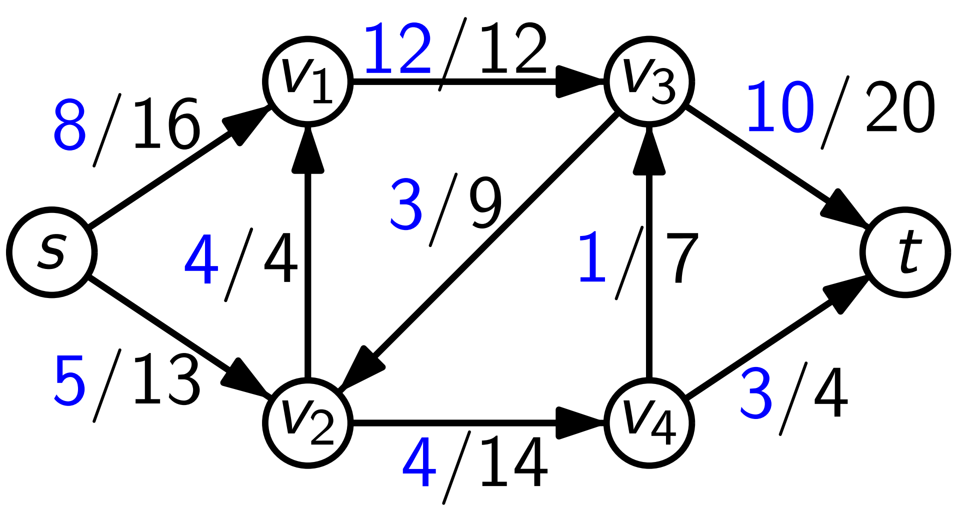
Optimierungsproblem 'Maximaler Fluss'

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$



Optimierungsproblem 'Maximaler Fluss'

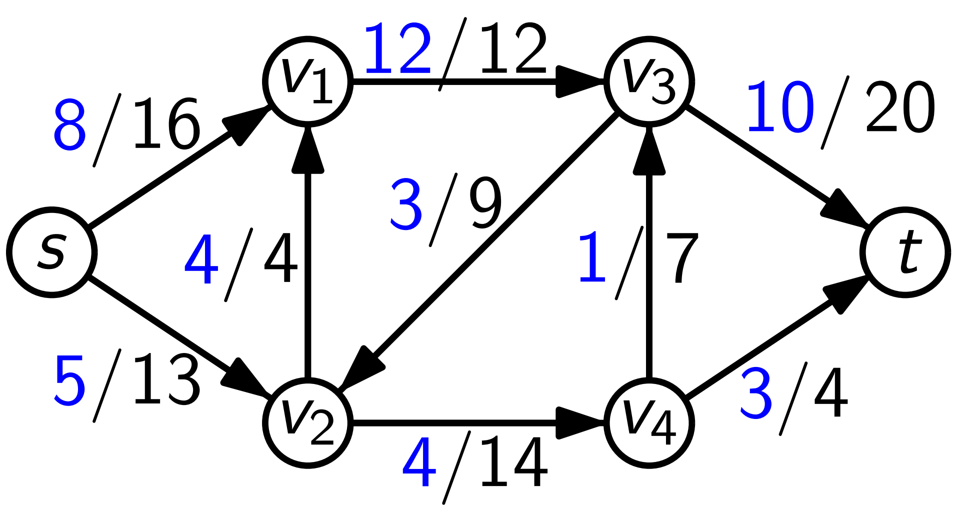
Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$



Optimierungsproblem 'Maximaler Fluss'

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$

Ist das ein maximaler Fluss?

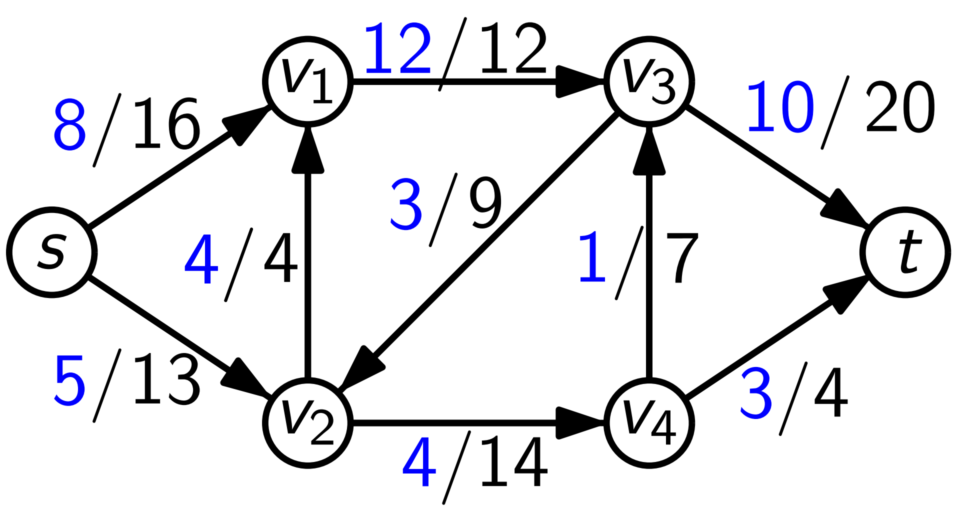


Optimierungsproblem 'Maximaler Fluss'

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$

Ist das ein maximaler Fluss?

Wie kann ich einen Fluss mit größerem Wert finden?



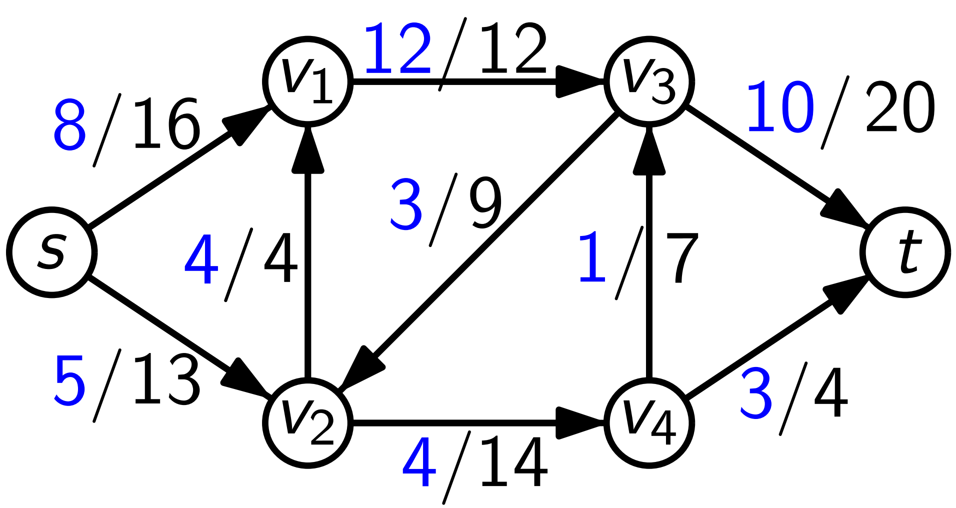
Optimierungsproblem 'Maximaler Fluss'

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \mathrm{Nettozufluss}_f(t)$

Ist das ein maximaler Fluss?

Wie kann ich einen Fluss mit größerem Wert finden?

Beobachtung: Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.



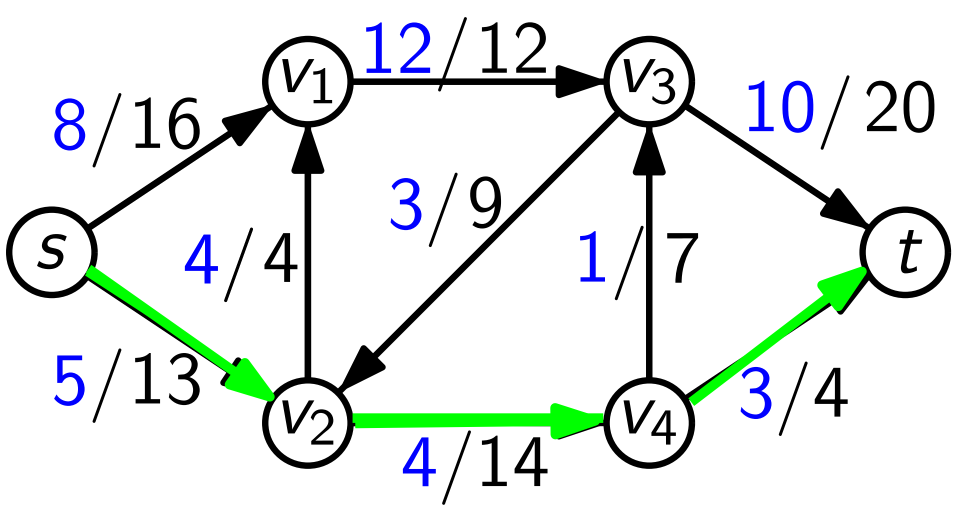
Optimierungsproblem 'Maximaler Fluss'

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$

Ist das ein maximaler Fluss?

Wie kann ich einen Fluss mit größerem Wert finden?

Beobachtung: Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.



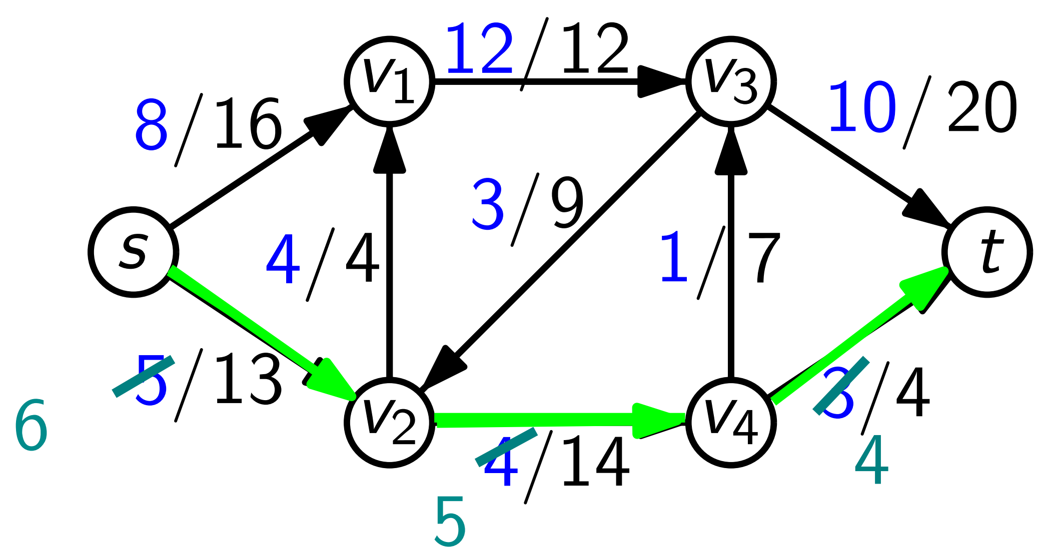
Optimierungsproblem 'Maximaler Fluss'

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$

Ist das ein maximaler Fluss?

Wie kann ich einen Fluss mit größerem Wert finden?

Beobachtung: Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.



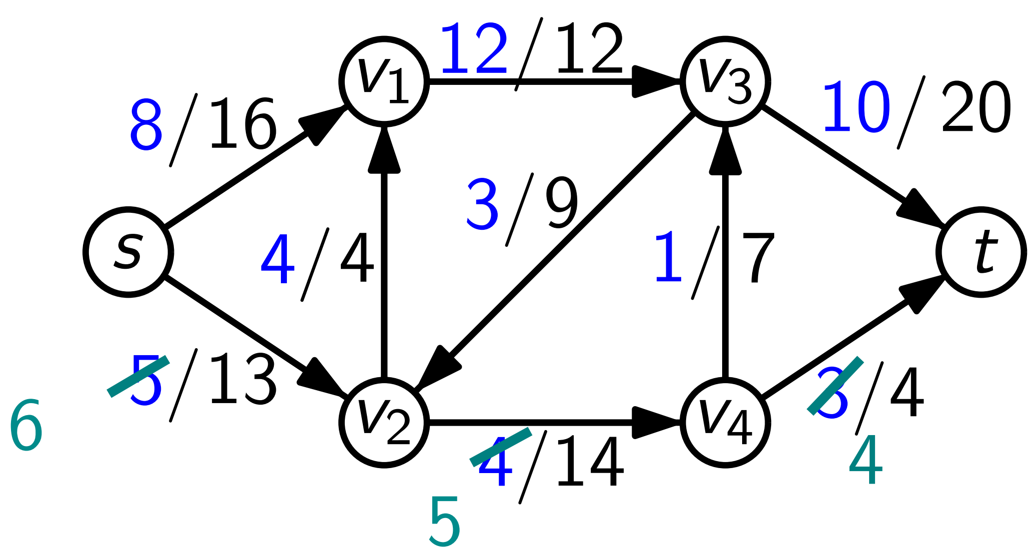
Optimierungsproblem 'Maximaler Fluss'

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$

Ist das ein maximaler Fluss?

Wie kann ich einen Fluss mit größerem Wert finden?

Beobachtung: Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.



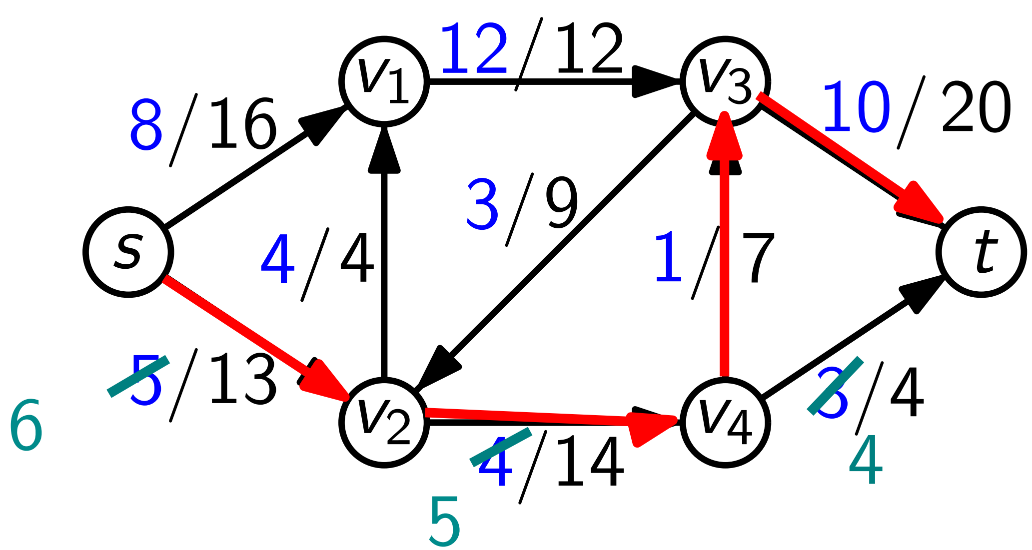
Optimierungsproblem 'Maximaler Fluss'

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$

Ist das ein maximaler Fluss?

Wie kann ich einen Fluss mit größerem Wert finden?

Beobachtung: Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.



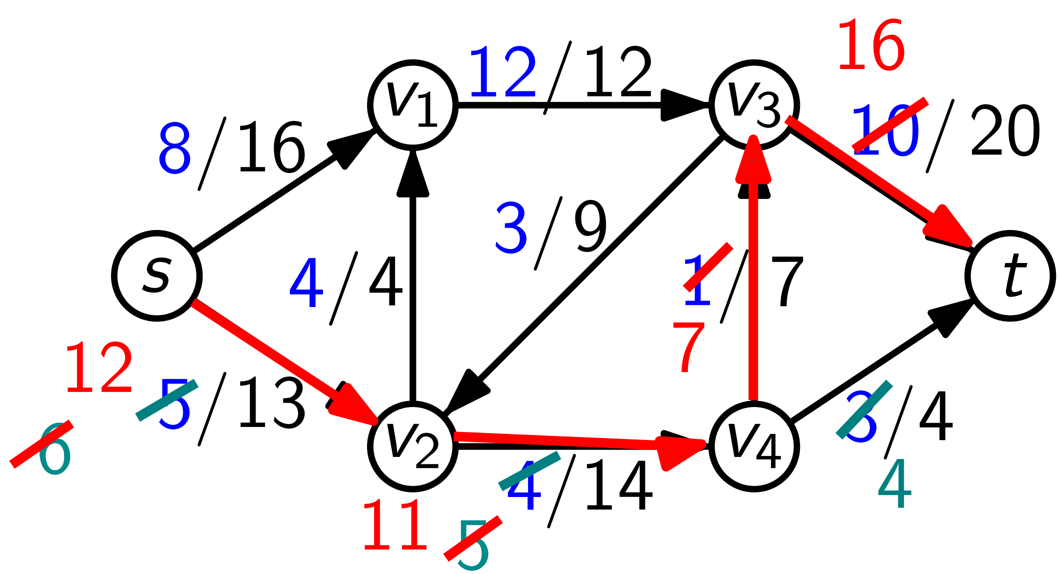
Optimierungsproblem 'Maximaler Fluss'

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$

Ist das ein maximaler Fluss?

Wie kann ich einen Fluss mit größerem Wert finden?

Beobachtung: Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.



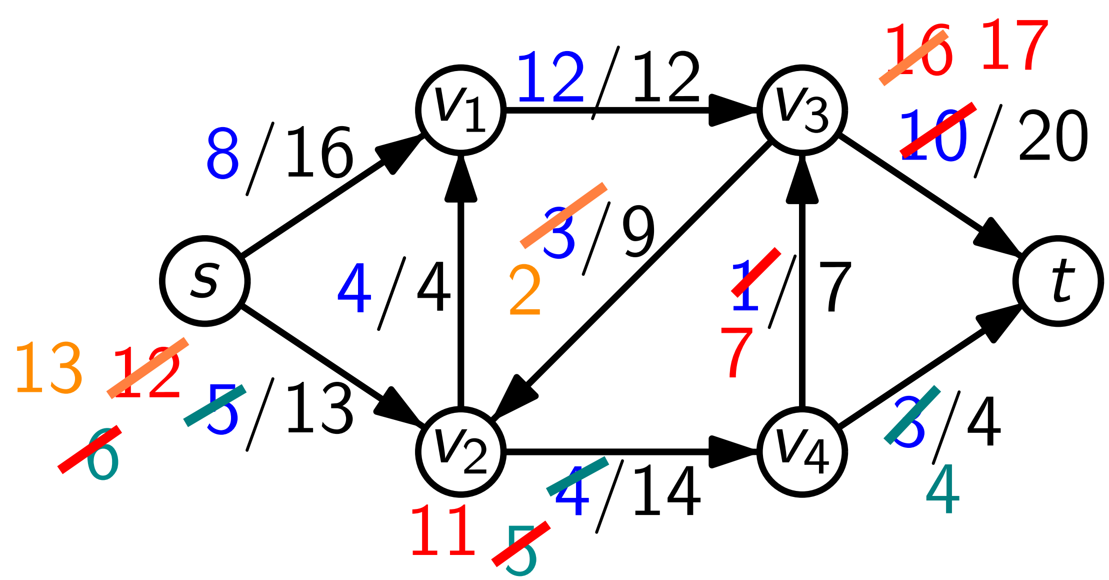
Optimierungsproblem 'Maximaler Fluss'

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$

Ist das ein maximaler Fluss?

Wie kann ich einen Fluss mit größerem Wert finden?

Beobachtung: Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.



Optimierungsproblem 'Maximaler Fluss'

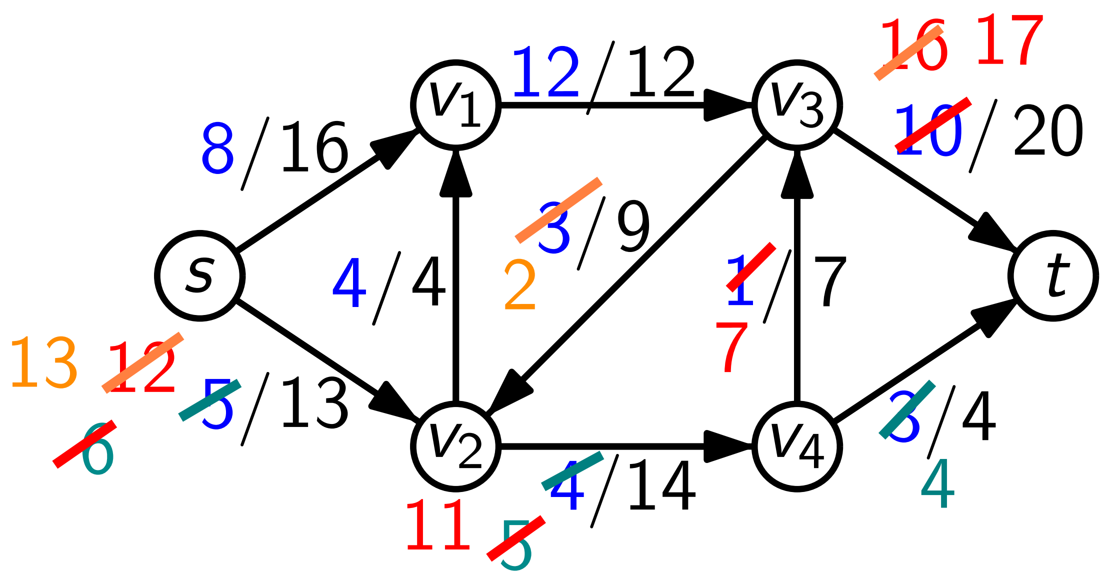
Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$

Ist das ein maximaler Fluss?

Wie kann ich einen Fluss mit größerem Wert finden?

Beobachtung: Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

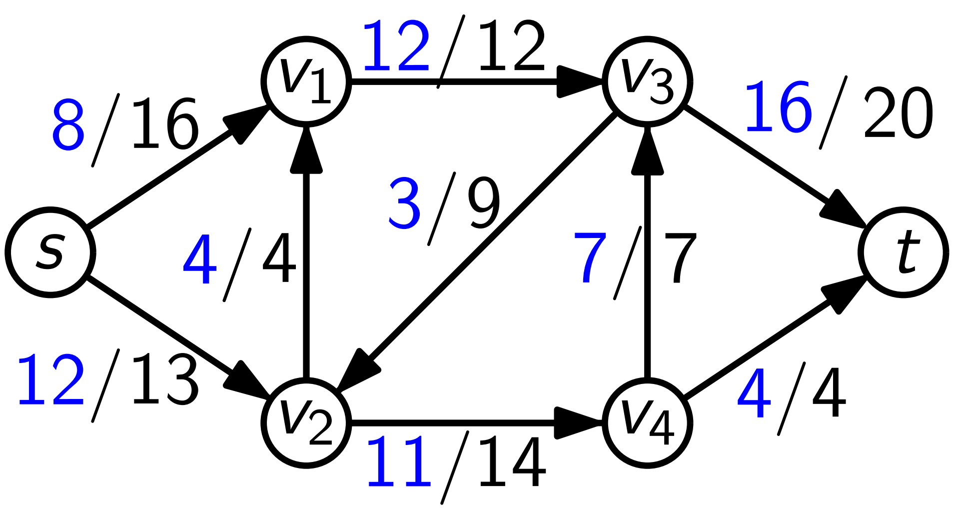
Aber wenn es **keinen** solchen Weg gibt, heißt das **nicht** automatisch, dass wir schon optimal sind.



Residualgraph

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G.
Der **Residualgraph** $G_f = (V, E_f)$ enthält
für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := (u, v)$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := (v, u)$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$

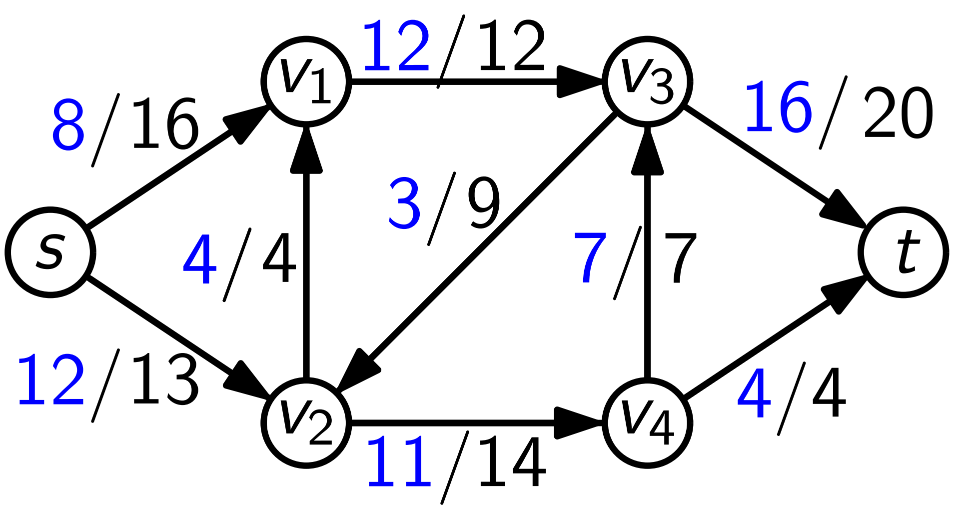


Residualgraph

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G.
Der **Residualgraph** $G_f = (V, E_f)$ enthält
für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := (u, v)$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := (v, u)$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$

Residual-kapazitäten

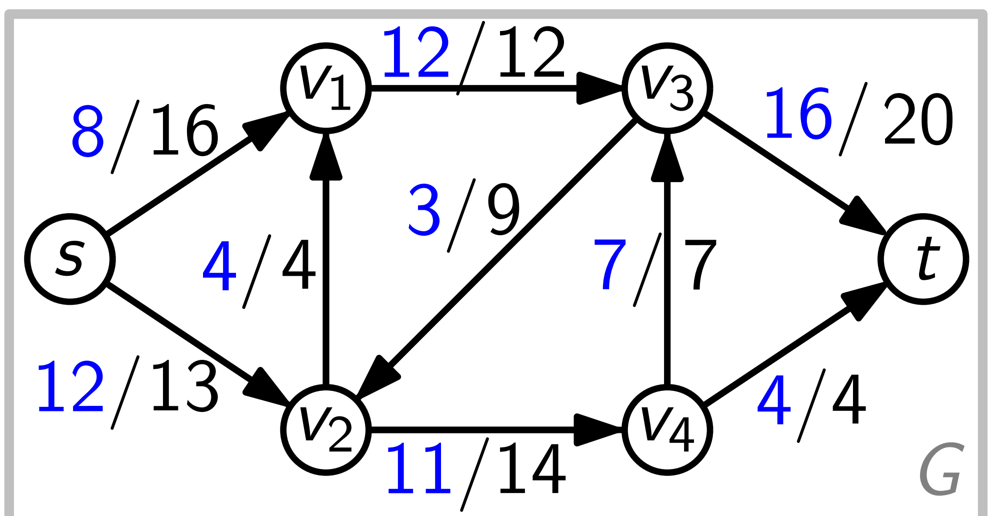


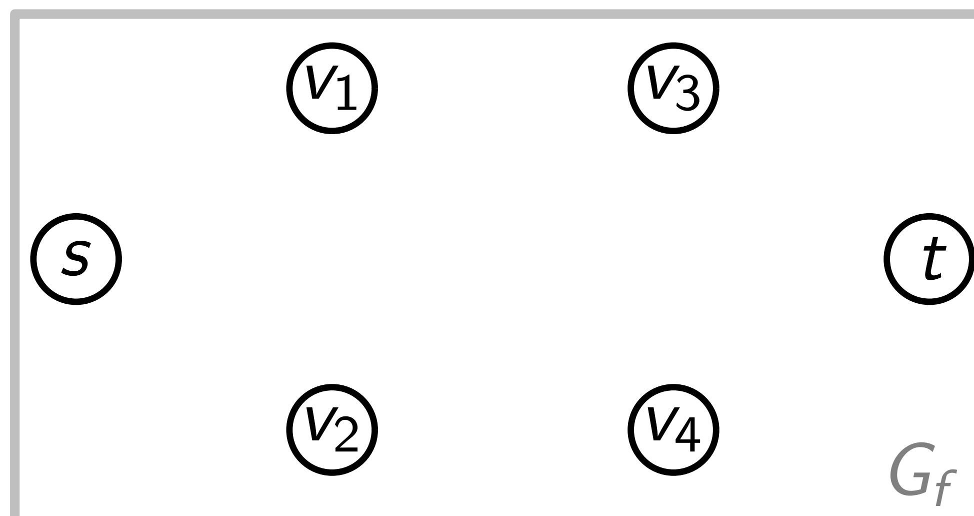
Residualgraph

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G.
Der **Residualgraph** $G_f = (V, E_f)$ enthält
für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := (u, v)$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := (v, u)$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$

Residual-kapazitäten



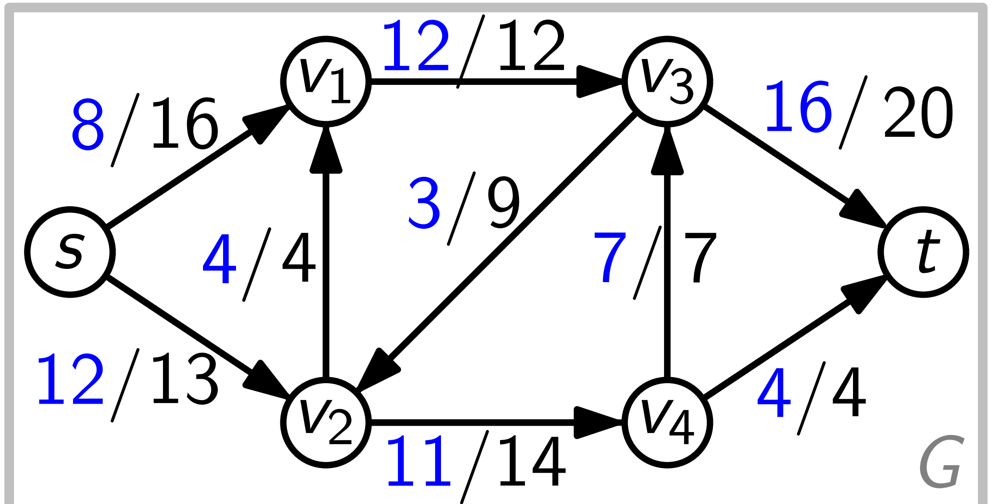


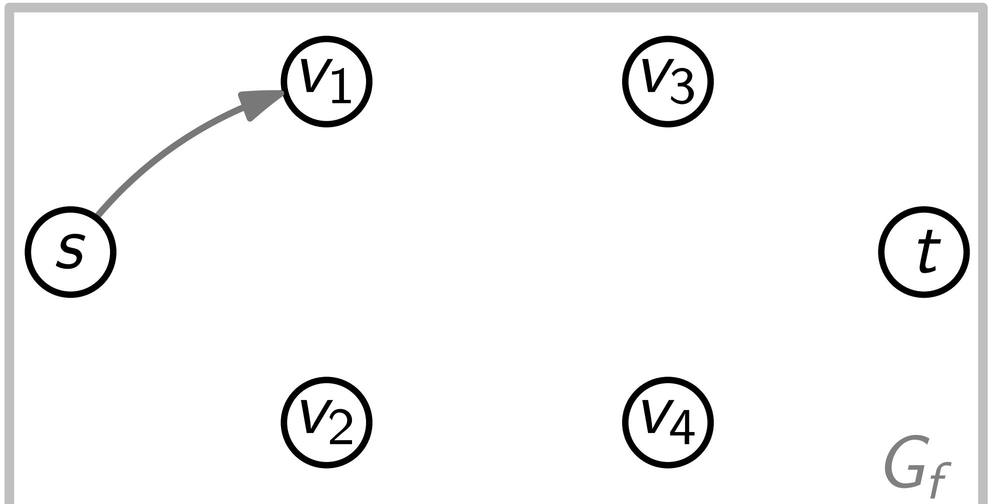
Residualgraph

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G.
Der **Residualgraph** $G_f = (V, E_f)$ enthält
für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := (u, v)$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := (v, u)$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$

Residual-kapazitäten





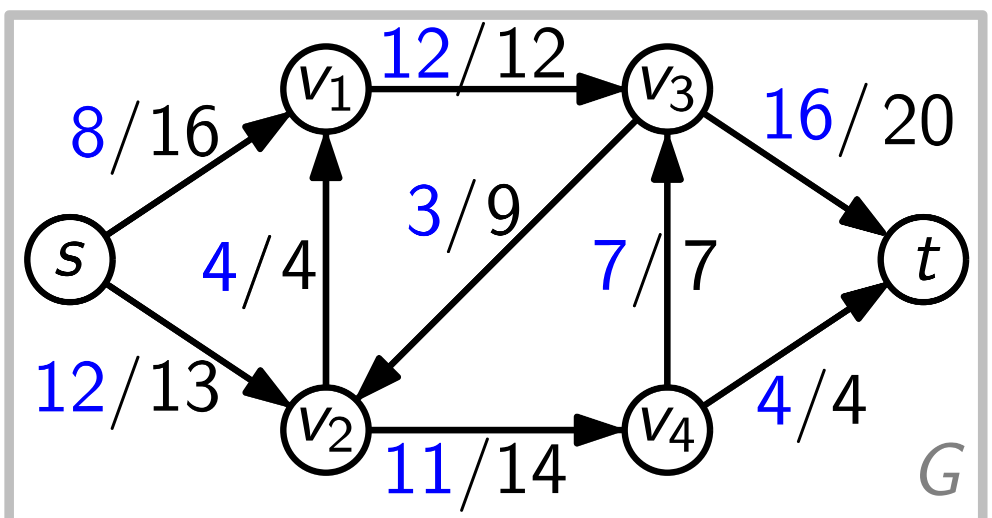
Residualgraph

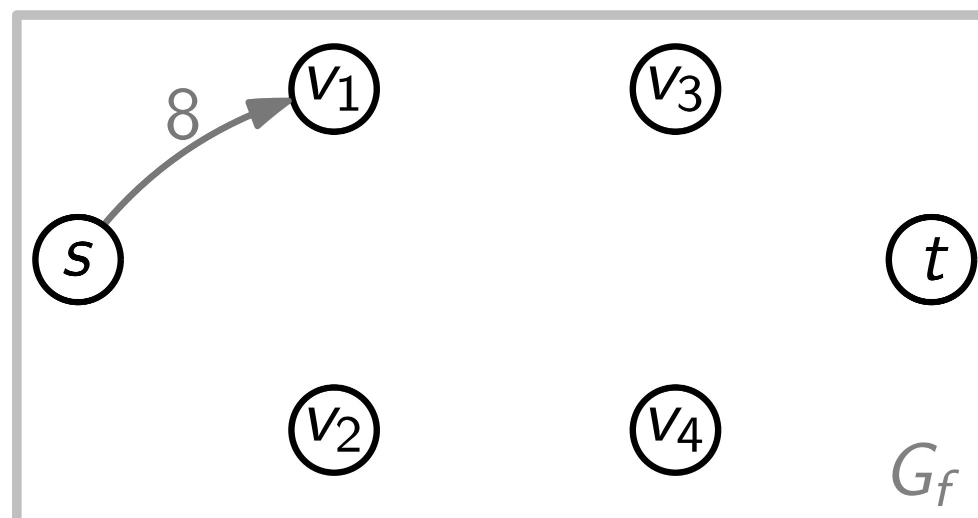
$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G.

Der **Residualgraph** $G_f = (V, E_f)$ enthält
für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := (u, v)$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := (v, u)$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$

Residual-kapazitäten





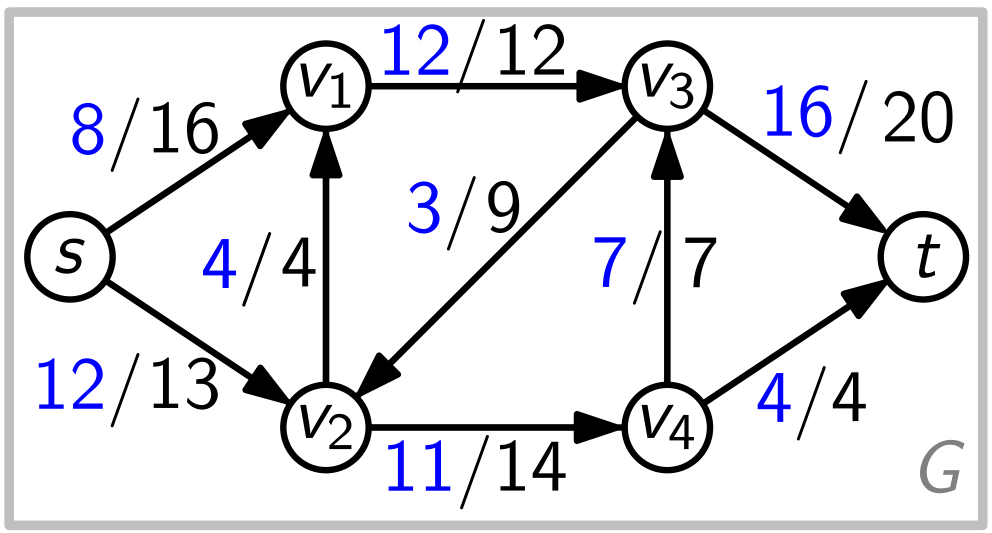
Residualgraph

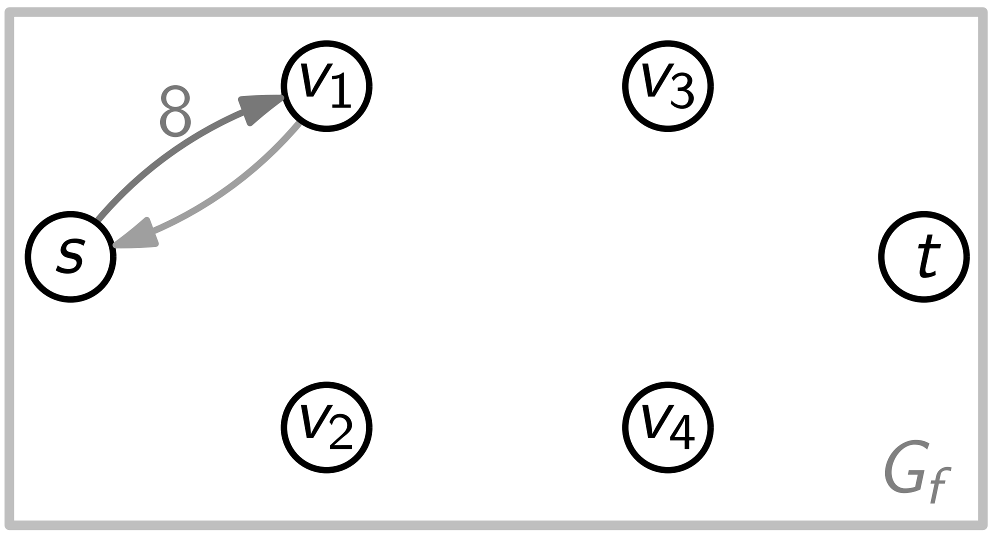
$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G.

Der **Residualgraph** $G_f = (V, E_f)$ enthält
für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := (u, v)$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := (v, u)$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$

Residual-kapazitäten





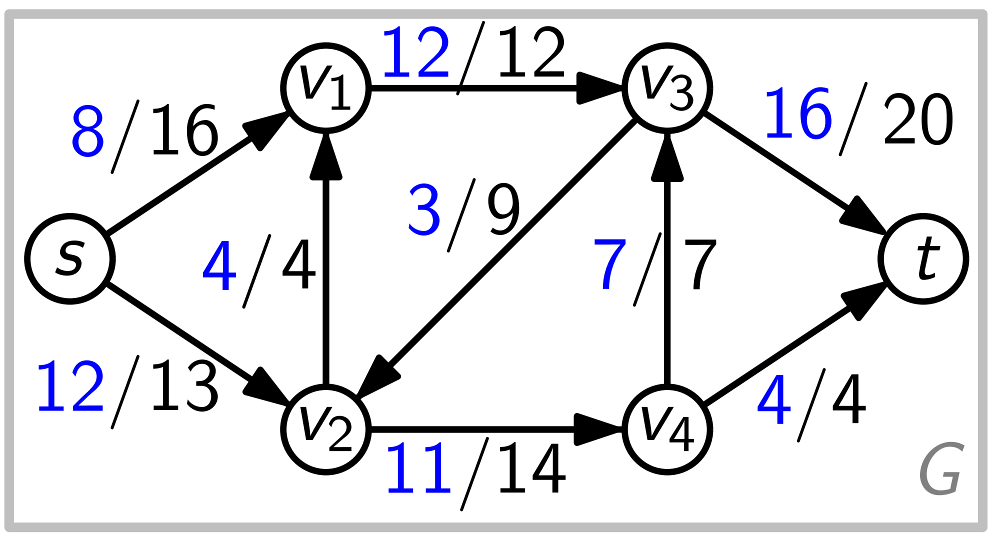
Residualgraph

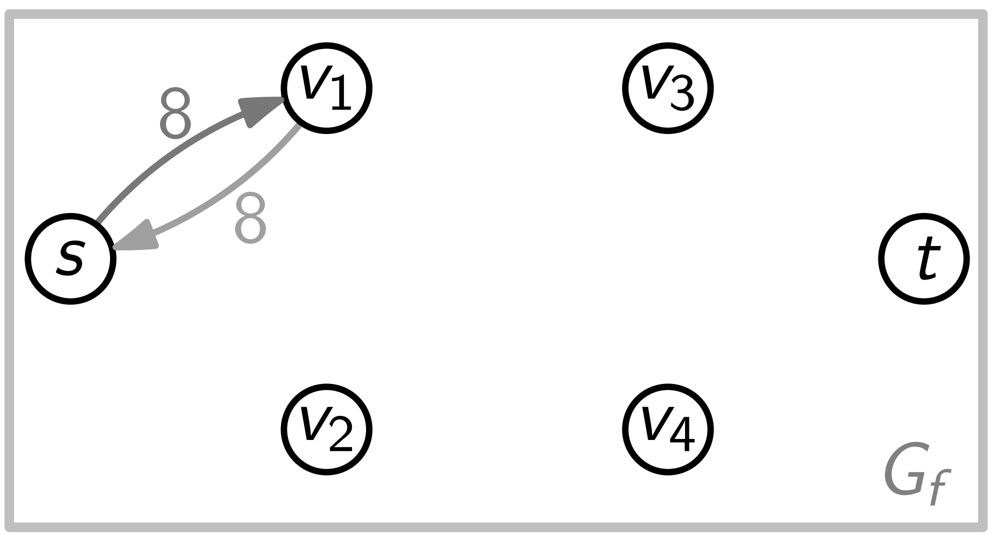
$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G.

Der **Residualgraph** $G_f = (V, E_f)$ enthält
für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := (u, v)$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := (v, u)$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$

Residual-kapazitäten





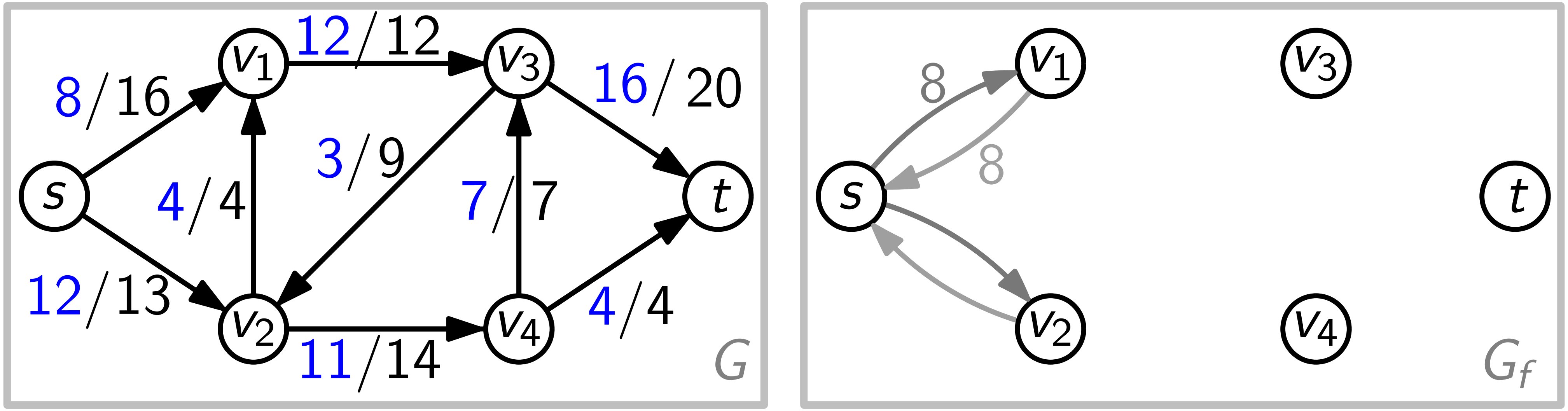
Residualgraph

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G.

Der **Residualgraph** $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := (u, v)$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := (v, u)$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$

Residual-kapazitäten

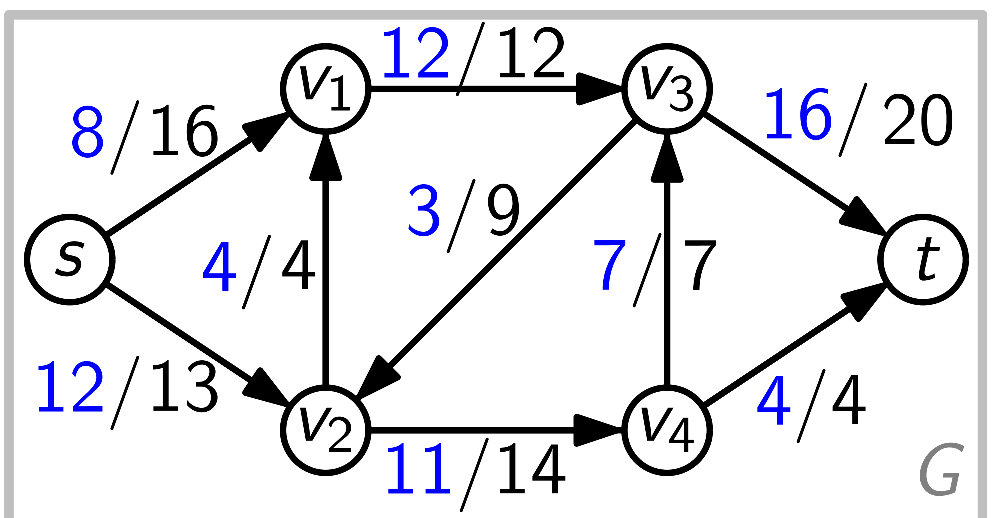


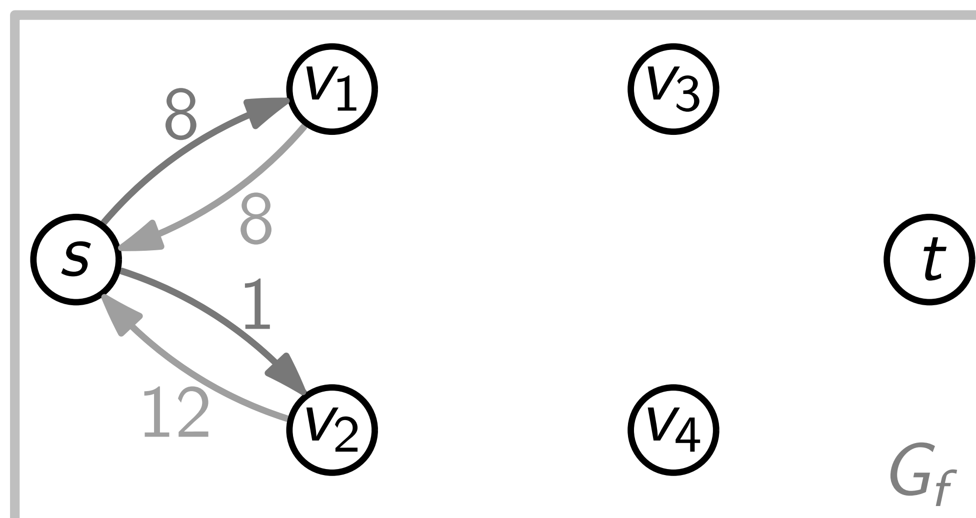
Residualgraph

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G.
Der **Residualgraph** $G_f = (V, E_f)$ enthält
für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := (u, v)$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := (v, u)$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$

Residual-kapazitäten





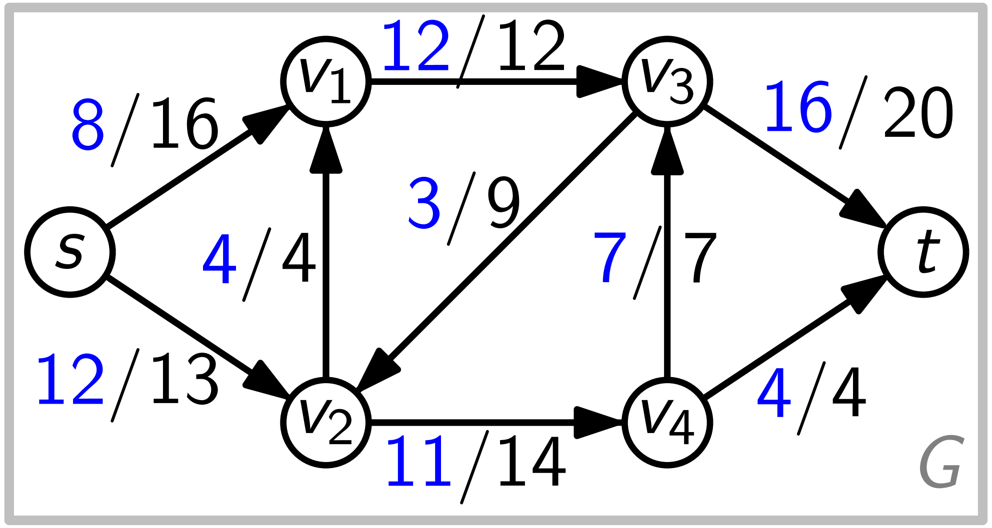
Residualgraph

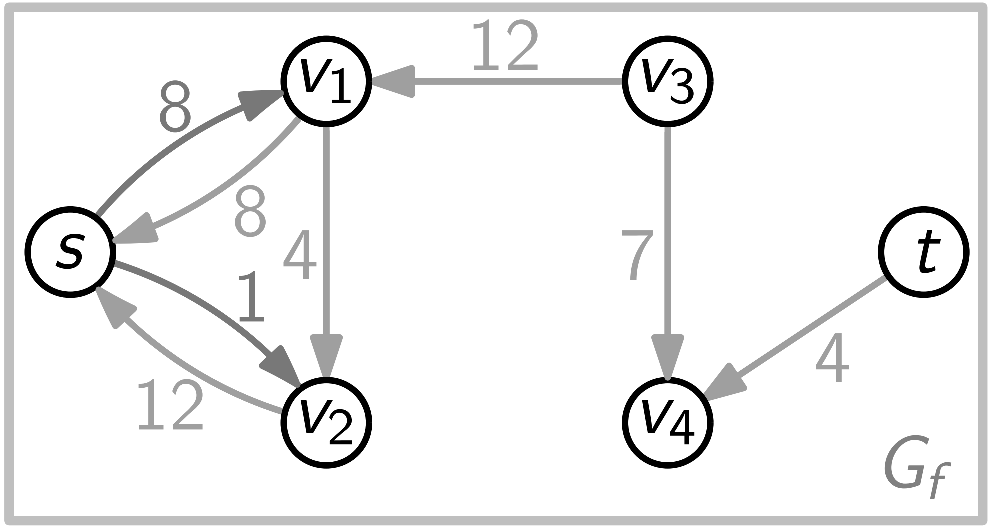
$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G.

Der **Residualgraph** $G_f = (V, E_f)$ enthält
für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := (u, v)$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := (v, u)$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$

Residual-kapazitäten





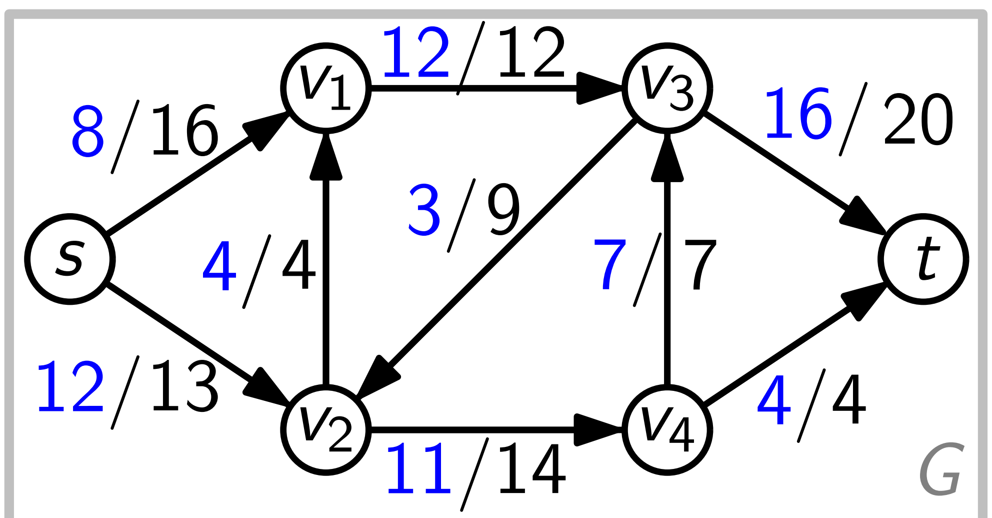
Residualgraph

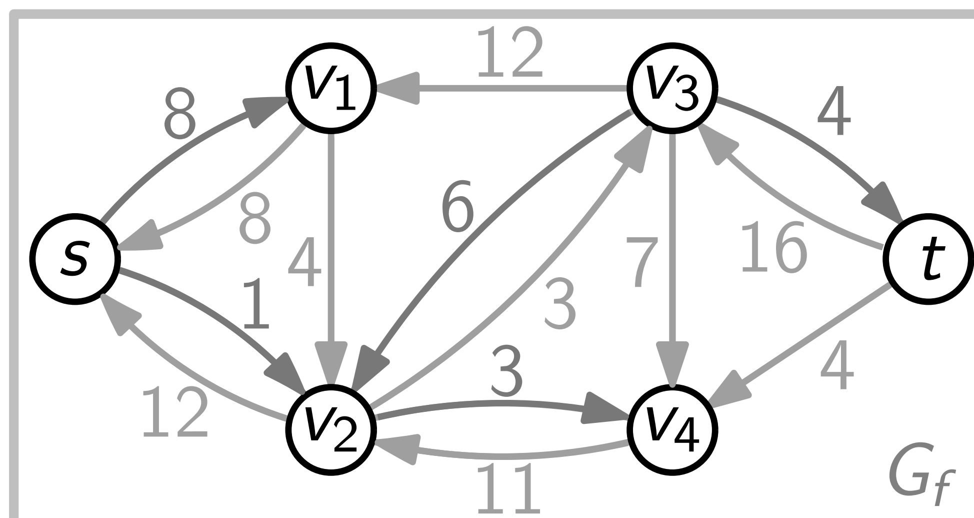
$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G.

Der **Residualgraph** $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := (u, v)$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := (v, u)$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$

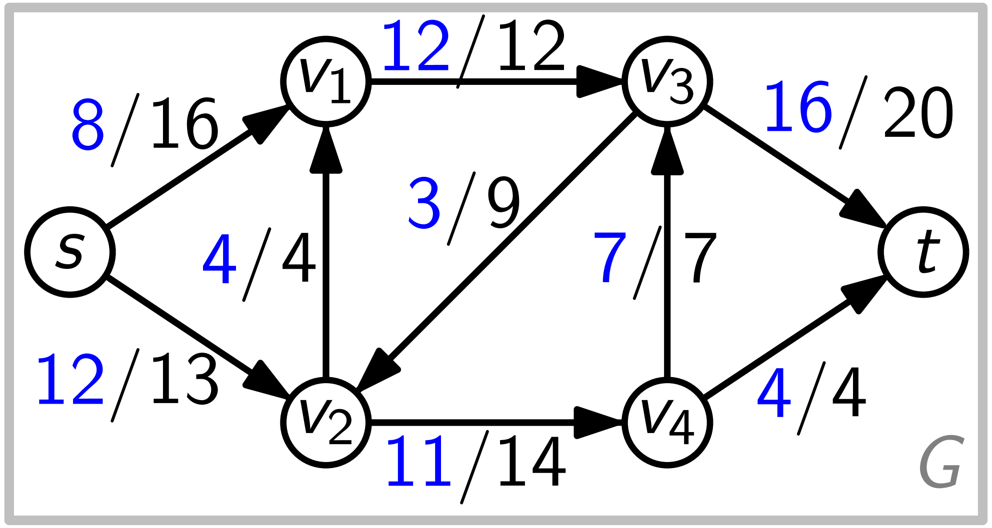
Residual-kapazitäten

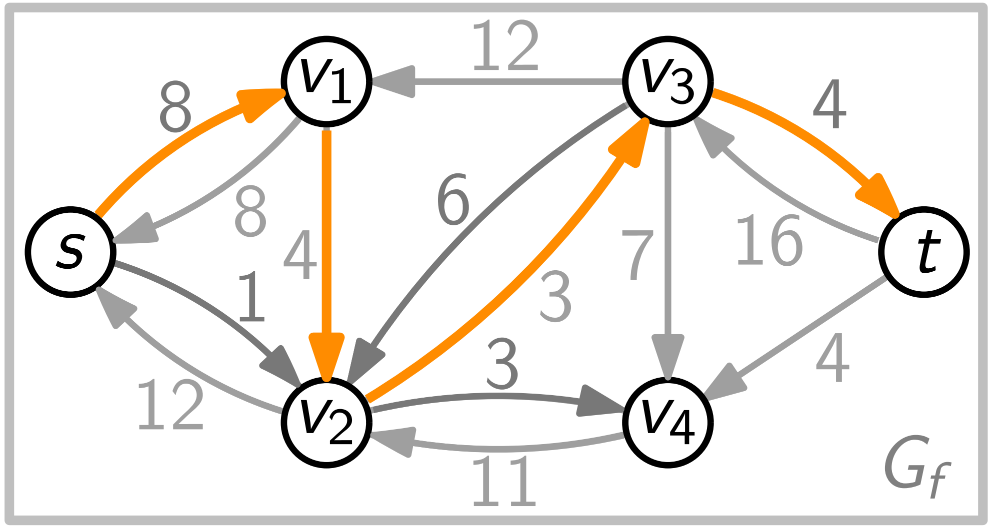




Residualgraph

Ein s-t-Weg $W = (V_W, E_W)$ in G_f heißt **flussvergrößernder Weg** für f.

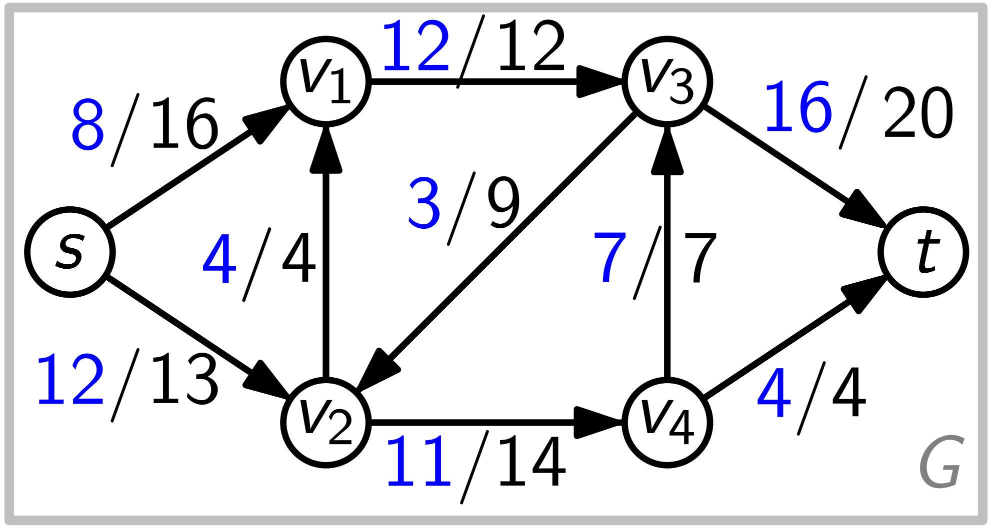


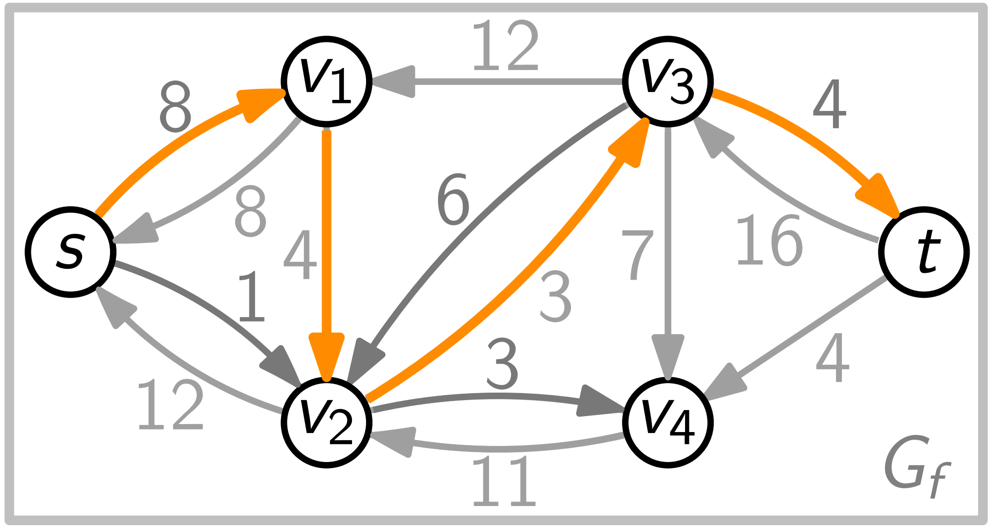


Residualgraph

Ein s-t-Weg $W = (V_W, E_W)$ in G_f heißt **flussvergrößernder Weg** für f.

Die **Residualkapazität** von W ist $\Delta_W := \min_{e \in W} c_f(e)$,



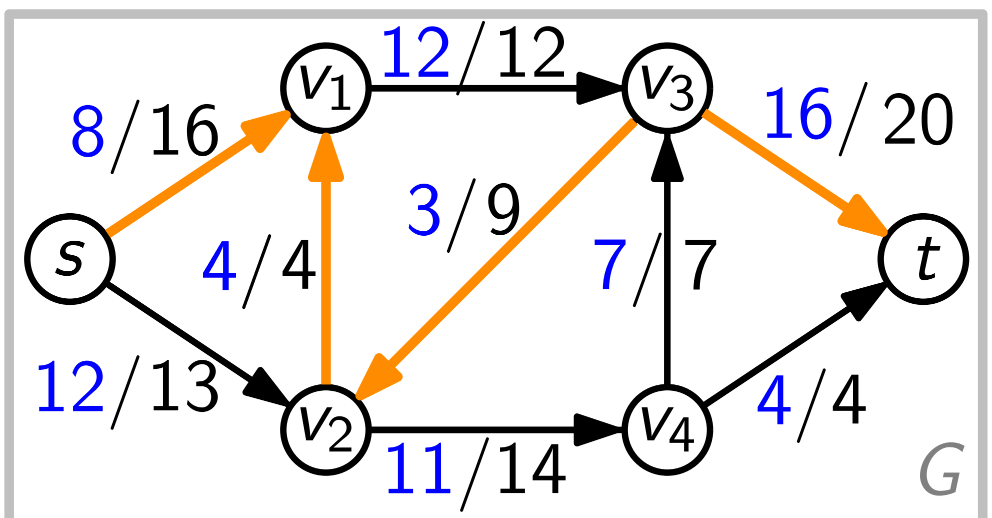


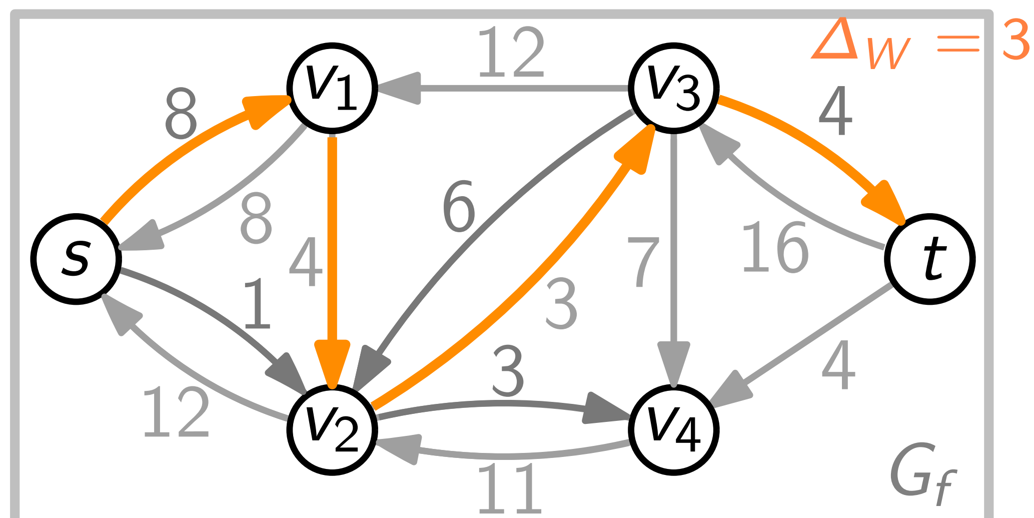
Residualgraph

Ein s-t-Weg $W = (V_W, E_W)$ in G_f heißt **flussvergrößernder Weg** für f.

Die **Residualkapazität** von W ist $\Delta_W := \min_{e \in W} c_f(e)$,

Definiere neuen s-t-Fluss $\hat{f}$ auf G kantenweise: für alle $e = (u, v) \in E$:





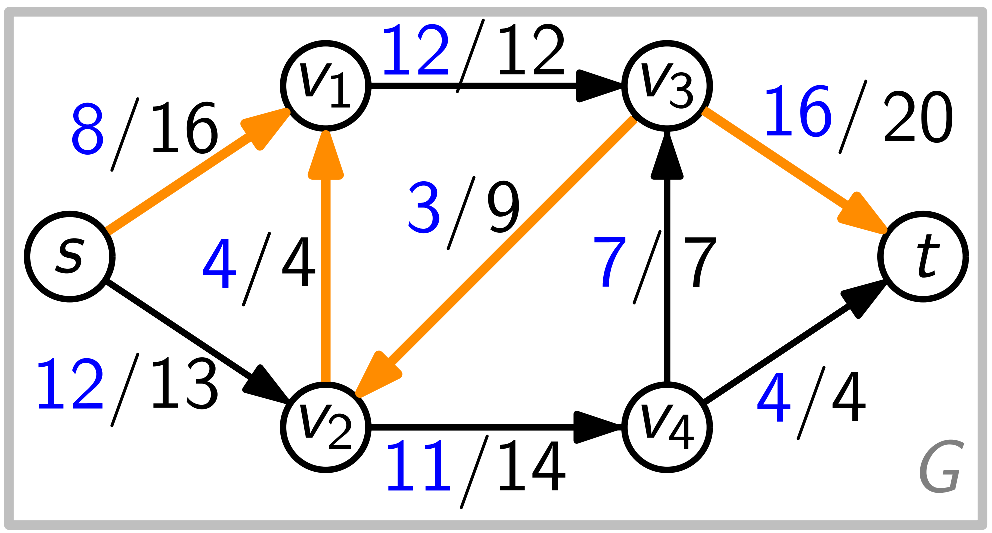
Residualgraph

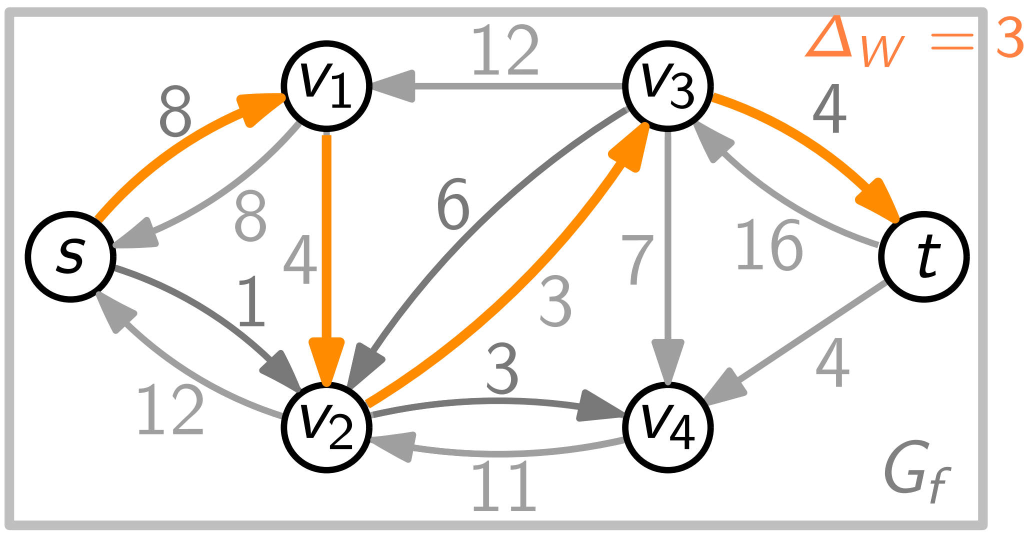
Ein s-t-Weg $W = (V_W, E_W)$ in G_f heißt **flussvergrößernder Weg** für f.

Die **Residualkapazität** von W ist $\Delta_W := \min_{e \in W} c_f(e)$,

Definiere neuen s-t-Fluss $\hat{f}$ auf G kantenweise: für alle $e = (u, v) \in E$:

- falls $(u, v) \in E_W$: $\hat{f}(e) = f(e) + \Delta_W$





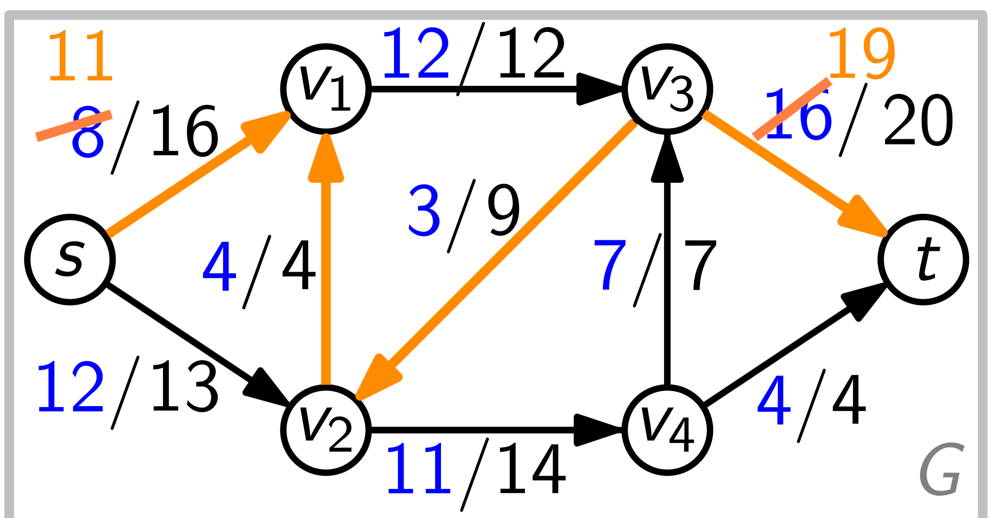
Residualgraph

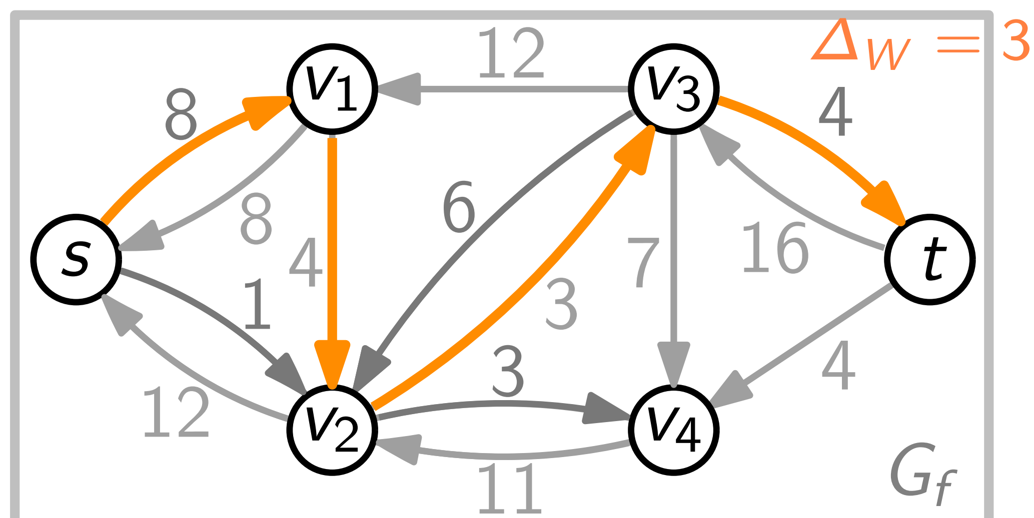
Ein s-t-Weg $W = (V_W, E_W)$ in G_f heißt **flussvergrößernder Weg** für f.

Die **Residualkapazität** von W ist $\Delta_W := \min_{e \in W} c_f(e)$,

Definiere neuen s-t-Fluss $\hat{f}$ auf G kantenweise: für alle $e = (u, v) \in E$:

- falls $(u, v) \in E_W$: $\hat{f}(e) = f(e) + \Delta_W$





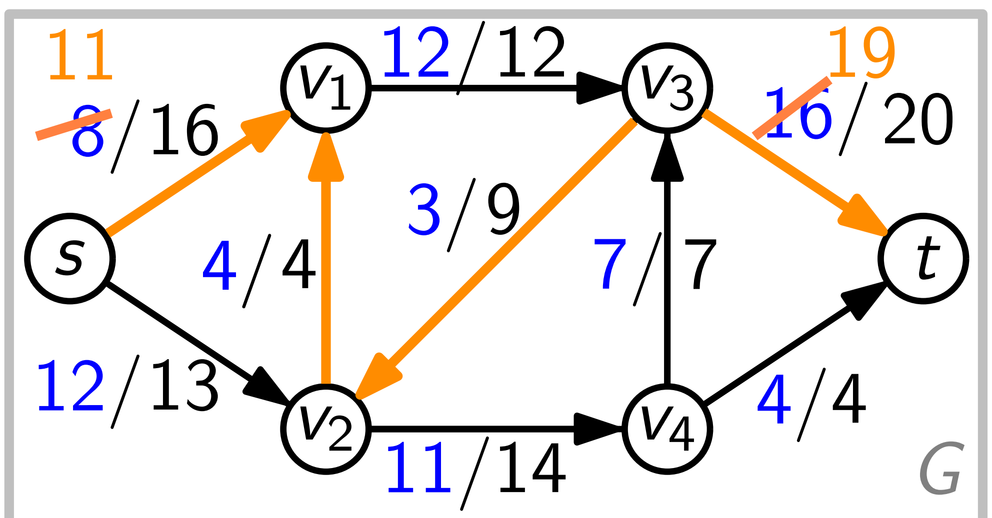
Residualgraph

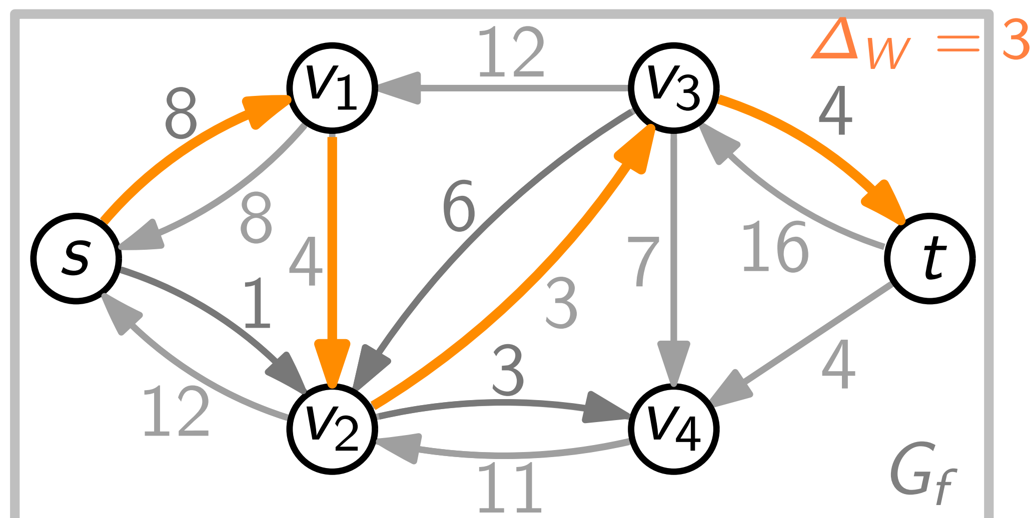
Ein s-t-Weg $W = (V_W, E_W)$ in G_f heißt **flussvergrößernder Weg** für f.

Die **Residualkapazität** von W ist $\Delta_W := \min_{e \in W} c_f(e)$,

Definiere neuen s-t-Fluss $\hat{f}$ auf G kantenweise: für alle $e = (u, v) \in E$:

- falls $(u, v) \in E_W$: $\hat{f}(e) = f(e) + \Delta_W$
- falls $(v, u) \in E_W$: $\hat{f}(e) = f(e) - \Delta_W$





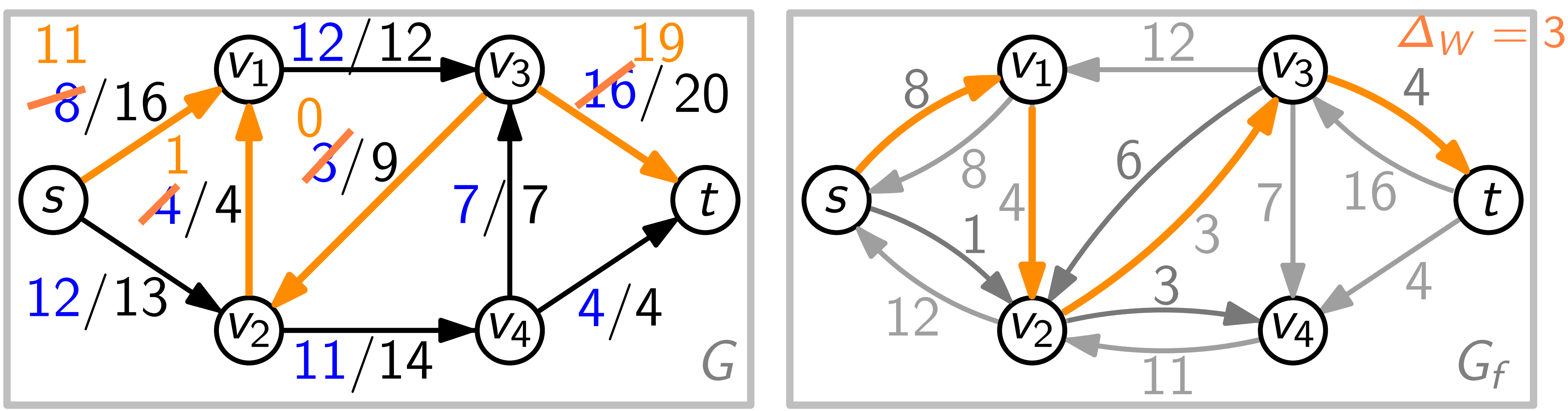
Residualgraph

Ein s-t-Weg $W = (V_W, E_W)$ in G_f heißt **flussvergrößernder Weg** für f.

Die **Residualkapazität** von W ist $\Delta_W := \min_{e \in W} c_f(e)$,

Definiere neuen s-t-Fluss $\hat{f}$ auf G kantenweise: für alle $e = (u, v) \in E$:

- falls $(u, v) \in E_W$: $\hat{f}(e) = f(e) + \Delta_W$
- falls $(v, u) \in E_W$: $\hat{f}(e) = f(e) - \Delta_W$



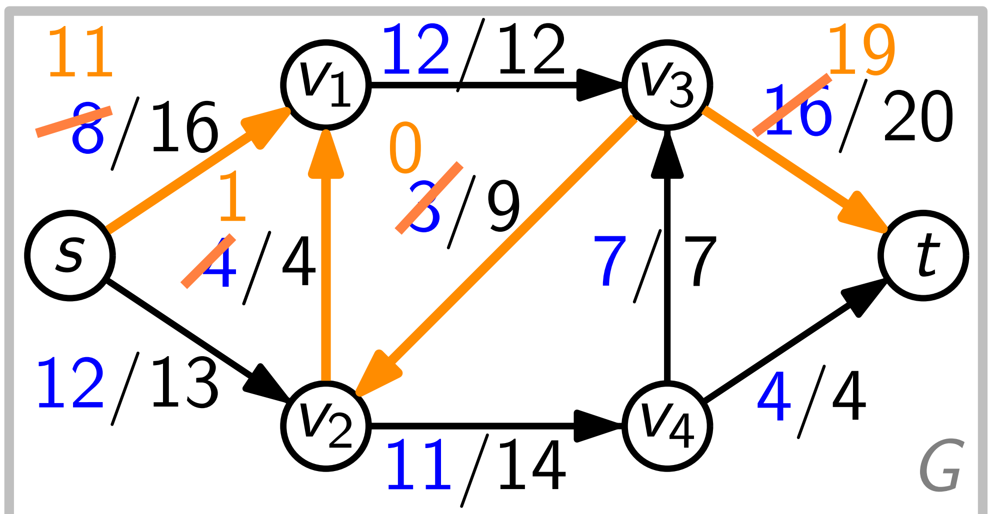
Residualgraph

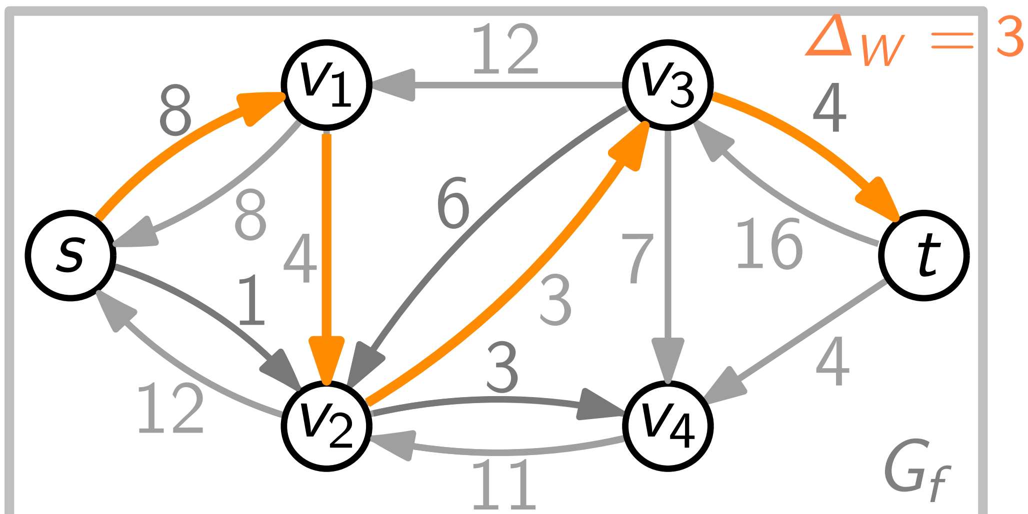
Ein s-t-Weg $W = (V_W, E_W)$ in G_f heißt **flussvergrößernder Weg** für f.

Die **Residualkapazität** von W ist $\Delta_W := \min_{e \in W} c_f(e)$,

Definiere neuen s-t-Fluss $\hat{f}$ auf G kantenweise: für alle $e = (u, v) \in E$:

- falls $(u, v) \in E_W$: $\hat{f}(e) = f(e) + \Delta_W$
- falls $(v, u) \in E_W$: $\hat{f}(e) = f(e) - \Delta_W$
- sonst: $\hat{f}(e) = f(e)$





Residualgraph

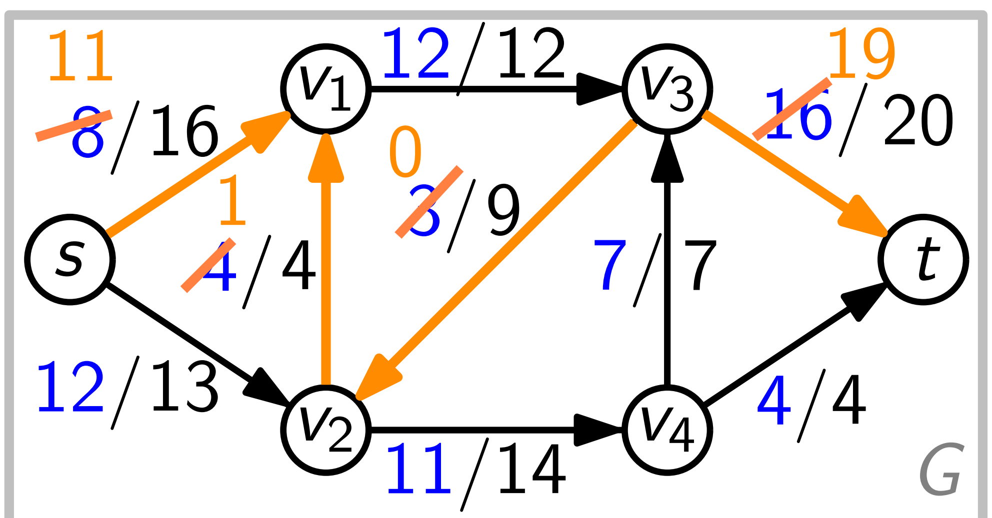
Ein s-t-Weg $W = (V_W, E_W)$ in G_f heißt **flussvergrößernder Weg** für f.

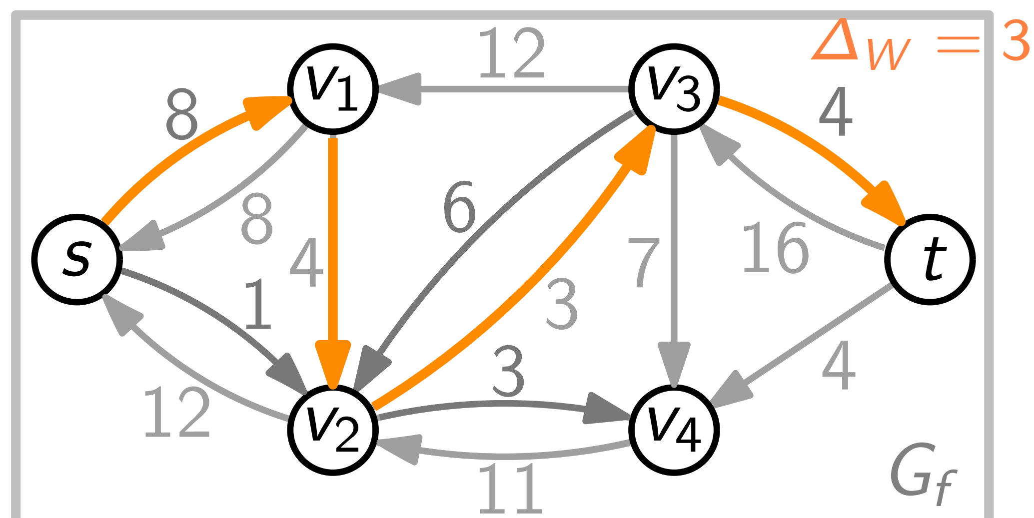
Die **Residualkapazität** von W ist $\Delta_W := \min_{e \in W} c_f(e)$,

Definiere neuen s-t-Fluss $\hat{f}$ auf G kantenweise: für alle $e = (u, v) \in E$:

- falls $(u, v) \in E_W$: $\hat{f}(e) = f(e) + \Delta_W$
- falls $(v, u) \in E_W$: $\hat{f}(e) = f(e) - \Delta_W$
- sonst: $\hat{f}(e) = f(e)$

Begründen Sie: 1. $\hat{f}$ ist ein s-t-Fluss
2. $\hat{f}$ ist ein *zulässiger* s-t-Fluss
3. $|\hat{f}| = |f| + \Delta_W$
4. Wenn f^* ein maximaler Fluss ist, gibt es in G_{f^*} keinen Weg von s nach t.

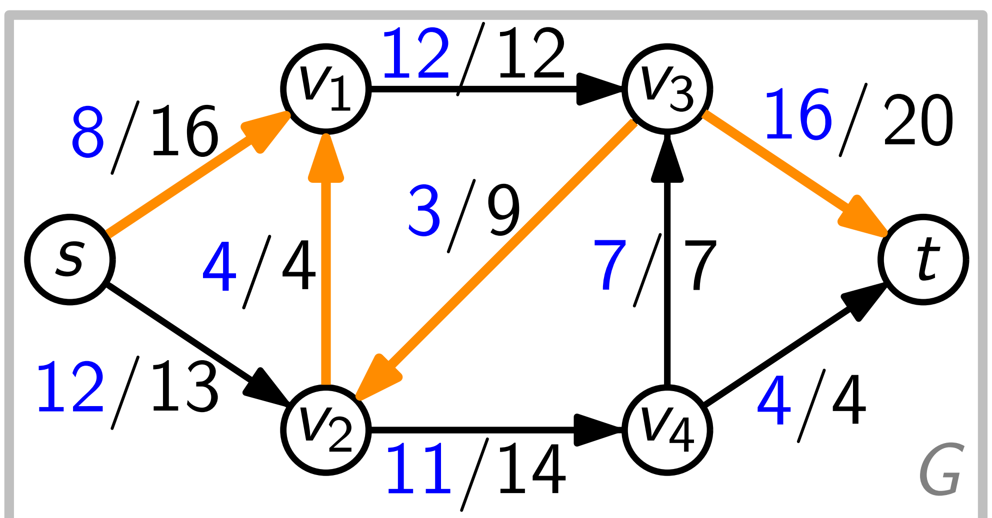


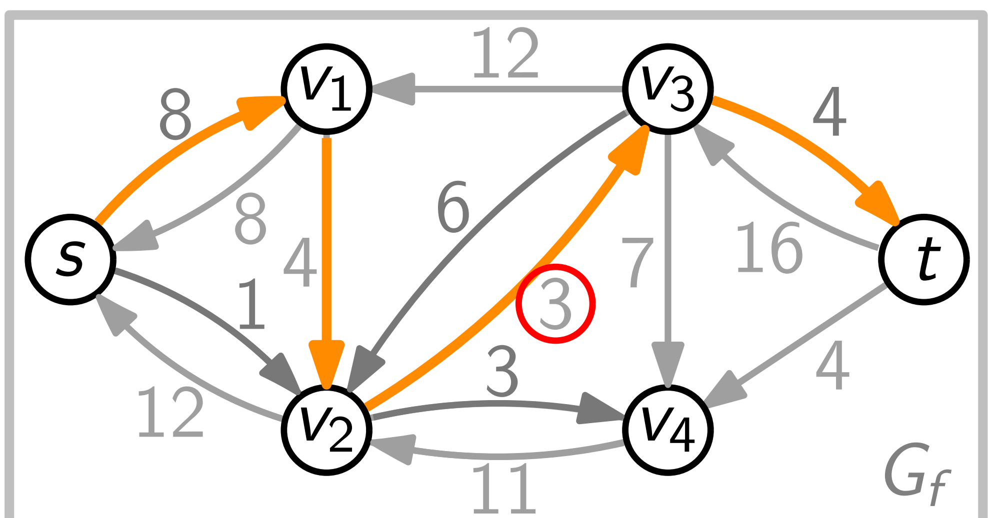


Der Satz vom flussvergrößernden Weg

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.



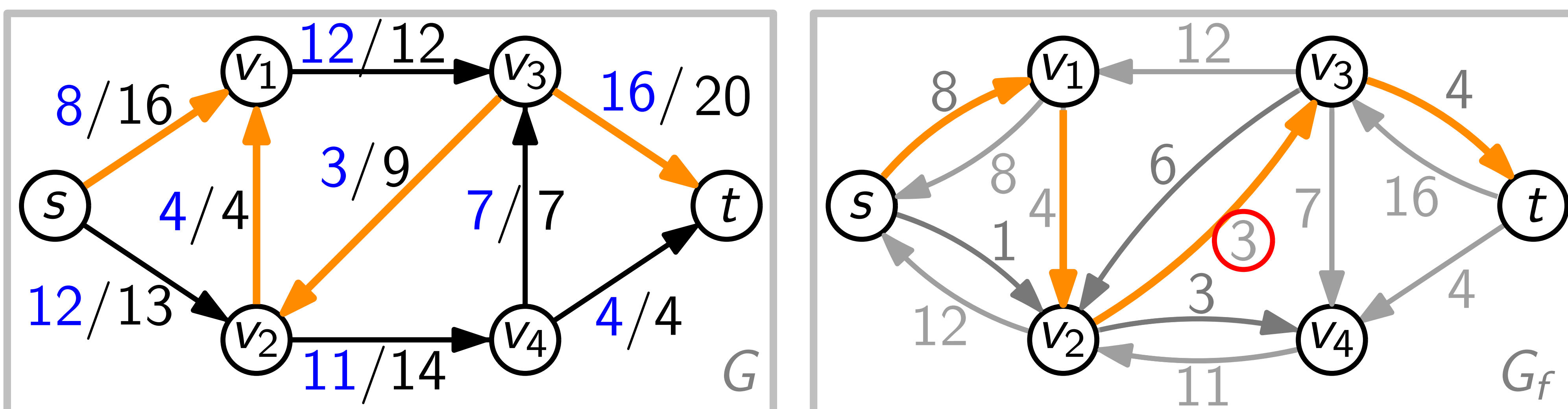


Der Satz vom flussvergrößernden Weg

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis?



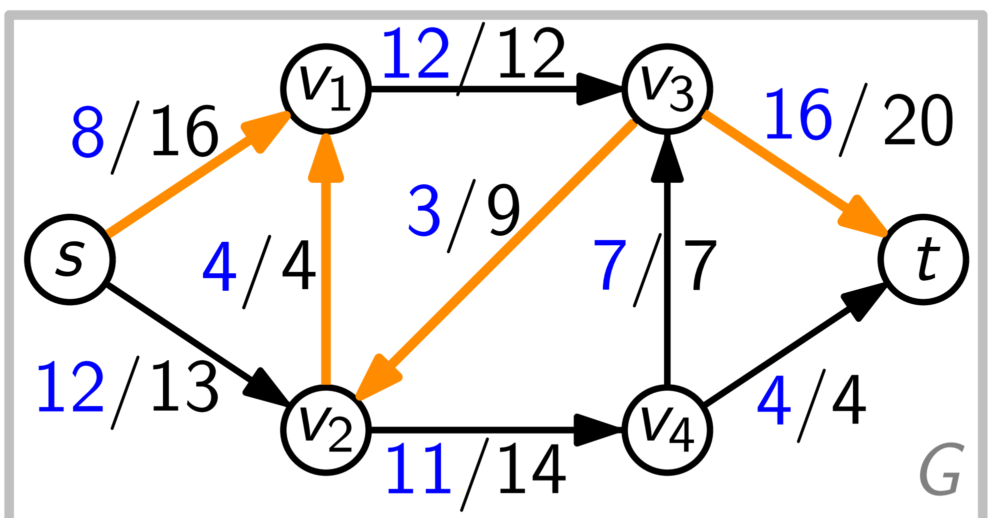
Der Satz vom flussvergrößernden Weg

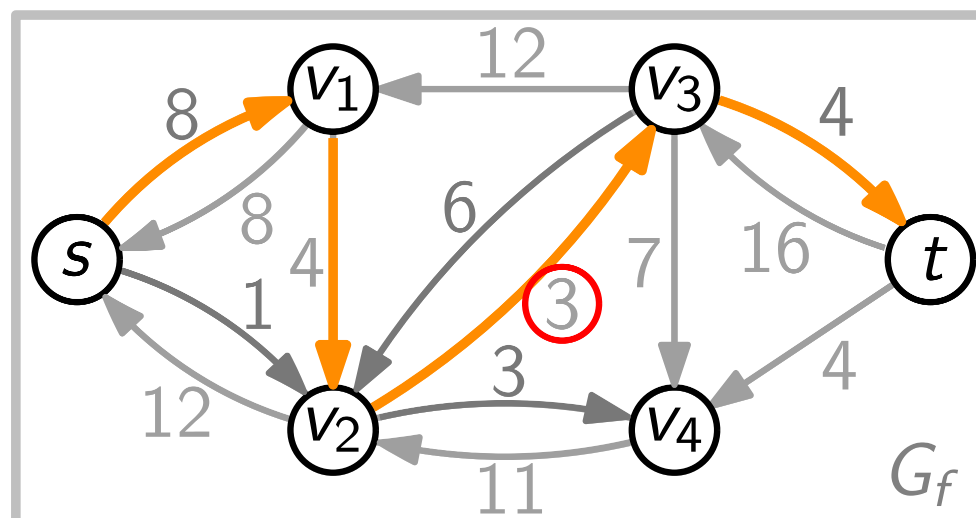
$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis?

"$\Rightarrow$ siehe Überlegungen vorherige Seite





Der Satz vom flussvergrößernden Weg

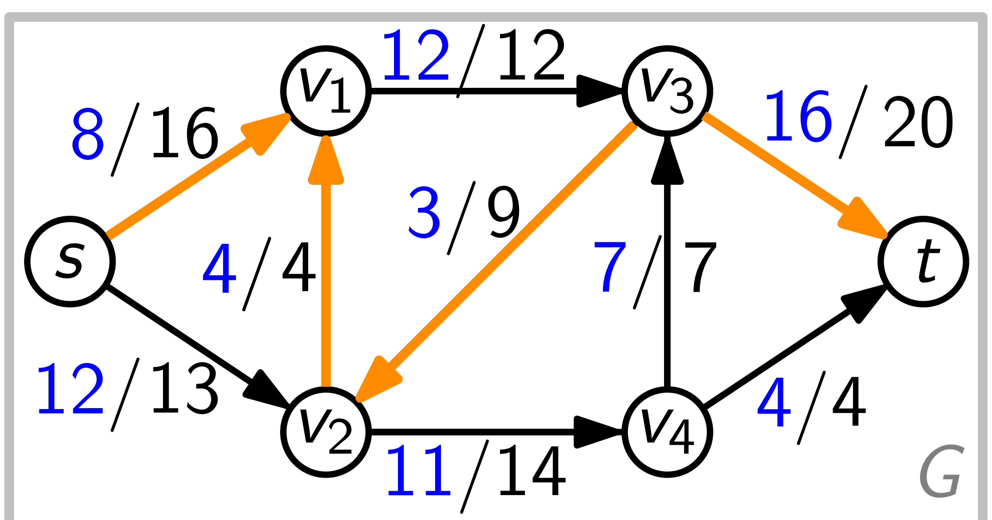
$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

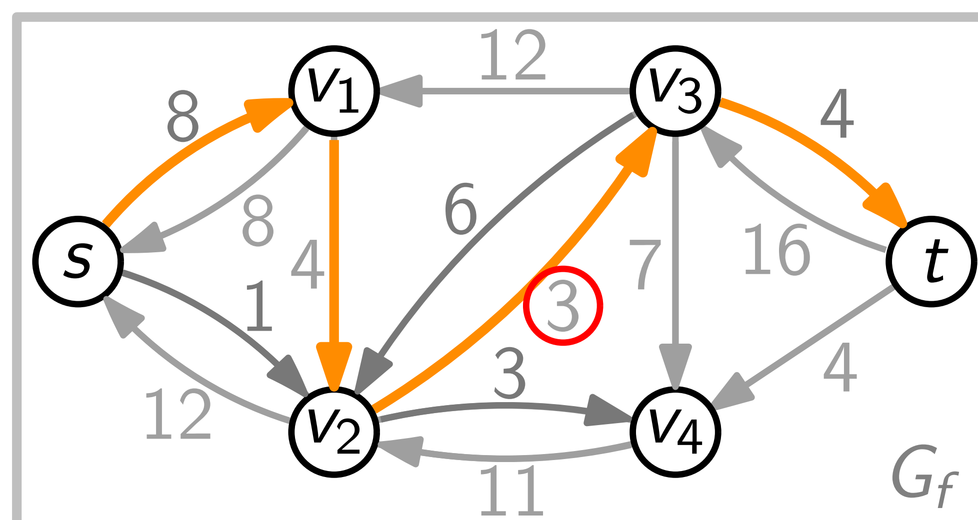
Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis?

"$\Rightarrow$ siehe Überlegungen vorherige Seite

"$\Leftarrow$" Beweis Rückrichtung folgt später!





Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f

Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
Erstelle Residualgraph G_f
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{(u,v)\in W} c_f((u,v))$
  for $(u,v) \in W$ **do**
    if $(u,v) \in E$ **then**
      $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
    else
      $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
    end if
  end for
  Erstelle Residualgraph G_f
end while
return f

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f

Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
Erstelle Residualgraph G_f
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{(u,v) \in W} c_f((u,v))$
  for $(u,v) \in W$ **do**
    if $(u,v) \in E$ **then**
      $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
    else
      $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
    end if
  end for
  Erstelle Residualgraph G_f
end while
return f

Korrektheit?

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f
  Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
  Erstelle Residualgraph G_f
  while G_f enthält s-t-Weg W **do**
    $\Delta_W = \min_{(u,v)\in W} c_f((u,v))$
    for $(u,v) \in W$ **do**
      if $(u,v) \in E$ **then**
        $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
      else
        $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
      end if
    end for
    Erstelle Residualgraph G_f
  end while
  return f

Korrektheit: Folgt, falls Algorithmus terminiert, direkt aus Satz vom flussvergrößernden Pfad

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f
  Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
  Erstelle Residualgraph G_f
  while G_f enthält s-t-Weg W **do**
    $\Delta_W = \min_{(u,v) \in W} c_f((u, v))$
    for $(u, v) \in W$ **do**
      if $(u, v) \in E$ **then**
        $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
      else
        $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
      end if
    end for
    Erstelle Residualgraph G_f
  end while
  return f

Korrektheit: Folgt, falls Algorithmus terminiert, direkt aus Satz vom flussvergrößernden Pfad

Laufzeit?

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f
  Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
  Erstelle Residualgraph G_f
  while G_f enthält s-t-Weg W **do**
    $\Delta_W = \min_{(u,v) \in W} c_f((u,v))$
    for $(u,v) \in W$ **do**
      if $(u,v) \in E$ **then**
        $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
      else
        $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
      end if
    end for
    Erstelle Residualgraph G_f
  end while
  return f

Korrektheit: Folgt, falls Algorithmus terminiert, direkt aus Satz vom flussvergrößernden Pfad

Laufzeit? 1. $c\colon E \to \mathbb{N}$:
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f

Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
Erstelle Residualgraph G_f
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{(u,v) \in W} c_f((u, v))$
  for $(u, v) \in W$ **do**
    if $(u, v) \in E$ **then**
      $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
    else
      $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
    end if
  end for
  Erstelle Residualgraph G_f
end while
return f

Erstelle G_f:
$O(|V| + |E|) = O(|E|)$

Korrektheit: Folgt, falls Algorithmus terminiert, direkt aus Satz vom flussvergrößernden Pfad

Laufzeit? 1. $c\colon E \to \mathbb{N}$:
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f

Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
Erstelle Residualgraph G_f
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{(u,v)\in W} c_f((u,v))$
  for $(u,v) \in W$ **do**
    if $(u,v) \in E$ **then**
      $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
    else
      $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
    end if
  end for
  Erstelle Residualgraph G_f
end while
return f

Erstelle G_f:
$O(|V| + |E|) = O(|E|)$

Berechnung von s-t-Wegen

Korrektheit: Folgt, falls Algorithmus terminiert, direkt aus Satz vom flussvergrößernden Pfad

Laufzeit?
1. $c \colon E \to \mathbb{N}$:
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f

Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
Erstelle Residualgraph G_f
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{(u,v)\in W} c_f((u,v))$
  for $(u,v) \in W$ **do**
    if $(u,v) \in E$ **then**
      $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
    else
      $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
    end if
  end for
  Erstelle Residualgraph G_f
end while
return f

Erstelle G_f:
$O(|V| + |E|) = O(|E|)$

Berechnung von s-t-Wegen
– Breitensuche
– Tiefensuche

Korrektheit: Folgt, falls Algorithmus terminiert, direkt aus Satz vom flussvergrößernden Pfad

Laufzeit? 1. $c\colon E \to \mathbb{N}$:
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f
  Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
  Erstelle Residualgraph G_f
  while G_f enthält s-t-Weg W **do**
    $\Delta_W = \min_{(u,v)\in W} c_f((u, v))$
    for $(u, v) \in W$ **do**
      if $(u, v) \in E$ **then**
        $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
      else
        $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
      end if
    end for
    Erstelle Residualgraph G_f
  end while
  return f

Erstelle G_f:
$O(|V| + |E|) = O(|E|)$

Berechnung von s-t-Wegen
– Breitensuche
– Tiefensuche
$\Big\}$ $O(|E|)$ Zeit

Korrektheit: Folgt, falls Algorithmus terminiert, direkt aus Satz vom flussvergrößernden Pfad

Laufzeit?
1. $c\colon E \to \mathbb{N}$:
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f
  Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
  Erstelle Residualgraph G_f
  while G_f enthält s-t-Weg W **do**
    $\Delta_W = \min_{(u,v) \in W} c_f((u, v))$
    for $(u, v) \in W$ **do**
      if $(u, v) \in E$ **then**
        $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
      else
        $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
      end if
    end for
    Erstelle Residualgraph G_f
  end while
  return f

Erstelle G_f:
$O(|V| + |E|) = O(|E|)$

Berechnung von s-t-Wegen
$\left.\begin{array}{l}\text{– Breitensuche}\\ \text{– Tiefensuche}\end{array}\right\} O(|E|)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe

Korrektheit: Folgt, falls Algorithmus terminiert, direkt aus Satz vom flussvergrößernden Pfad

Laufzeit? 1. $c \colon E \to \mathbb{N}$:
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f

Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
Erstelle Residualgraph G_f
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{(u,v) \in W} c_f((u, v))$
  for $(u, v) \in W$ **do**
    if $(u, v) \in E$ **then**
      $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
    else
      $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
    end if
  end for
  Erstelle Residualgraph G_f
end while
return f

Erstelle G_f:
$O(|V| + |E|) = O(|E|)$

Berechnung von s-t-Wegen
$\left.\begin{array}{l}\text{– Breitensuche}\\ \text{– Tiefensuche}\end{array}\right\} O(|E|)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe
– in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert

Korrektheit: Folgt, falls Algorithmus terminiert, direkt aus Satz vom flussvergrößernden Pfad

Laufzeit?
1. $c\colon E \to \mathbb{N}$:
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f

```
Initialisiere: f(e) = 0 für alle e ∈ E
Erstelle Residualgraph G_f
while G_f enthält s-t-Weg W do
    Δ_W = min_{(u,v)∈W} c_f((u,v))
    for (u,v) ∈ W do
        if (u,v) ∈ E then
            f_(u,v) = f_(u,v) + Δ_W
        else
            f_(v,u) = f_(v,u) − Δ_W
        end if
    end for
    Erstelle Residualgraph G_f
end while
return f
```

Erstelle G_f:
$O(|V| + |E|) = O(|E|)$

Berechnung von s-t-Wegen
$\left.\begin{array}{l}\text{– Breitensuche}\\ \text{– Tiefensuche}\end{array}\right\} O(|E|)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe
– in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert
– max. $|f^\star|$ Durchläufe, wobei $f^\star$ ein max. Fluss

Korrektheit: Folgt, falls Algorithmus terminiert, direkt aus Satz vom flussvergrößernden Pfad

Laufzeit?
1. $c\colon E \to \mathbb{N}$:
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f

Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
Erstelle Residualgraph G_f
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{(u,v) \in W} c_f((u, v))$
  for $(u, v) \in W$ **do**
    if $(u, v) \in E$ **then**
      $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
    else
      $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
    end if
  end for
  Erstelle Residualgraph G_f
end while
return f

Erstelle G_f:
$O(|V| + |E|) = O(|E|)$

Berechnung von s-t-Wegen
$\left.\begin{array}{l}\text{– Breitensuche}\\ \text{– Tiefensuche}\end{array}\right\} O(|E|)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe
- in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert
- max. $|f^\star|$ Durchläufe, wobei $f^\star$ ein max. Fluss

Korrektheit: Folgt, falls Algorithmus terminiert, direkt aus Satz vom flussvergrößernden Pfad

Laufzeit?
1. $c \colon E \to \mathbb{N}$: $O(|f^\star| \cdot |E|)$
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f
  Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
  Erstelle Residualgraph G_f
  while G_f enthält s-t-Weg W **do**
    $\Delta_W = \min_{(u,v)\in W} c_f((u,v))$
    for $(u, v) \in W$ **do**
      if $(u, v) \in E$ **then**
        $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
      else
        $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
      end if
    end for
    Erstelle Residualgraph G_f
  end while
  return f

Erstelle G_f:
$O(|V| + |E|) = O(|E|)$

Berechnung von s-t-Wegen
– Breitensuche
– Tiefensuche
$\left.\right\}$ $O(|E|)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe
– in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert
– max. $|f^\star|$ Durchläufe, wobei $f^\star$ ein max. Fluss

Korrektheit: Folgt, falls Algorithmus terminiert, direkt aus Satz vom flussvergrößernden Pfad

Laufzeit?
1. $c\colon E \to \mathbb{N}$: $O(|f^\star| \cdot |E|)$
2. $\mathbb{Q}_{>0}$:
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f
  Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
  Erstelle Residualgraph G_f
  while G_f enthält s-t-Weg W **do**
    $\Delta_W = \min_{(u,v)\in W} c_f((u,v))$
    for $(u,v) \in W$ **do**
      if $(u,v) \in E$ **then**
        $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
      else
        $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
      end if
    end for
    Erstelle Residualgraph G_f
  end while
  return f

Erstelle G_f:
$O(|V| + |E|) = O(|E|)$

Berechnung von s-t-Wegen
$\left.\begin{array}{l}\text{– Breitensuche} \\ \text{– Tiefensuche}\end{array}\right\}$ $O(|E|)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe
– in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert
– max. $|f^\star|$ Durchläufe, wobei $f^\star$ ein max. Fluss

Korrektheit: Folgt, falls Algorithmus terminiert, direkt aus Satz vom flussvergrößernden Pfad

Laufzeit?
1. $c\colon E \to \mathbb{N}$: $O(|f^\star| \cdot |E|)$
2. $\mathbb{Q}_{>0}$: erweitern...
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f
  Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
  Erstelle Residualgraph G_f
  while G_f enthält s-t-Weg W **do**
    $\Delta_W = \min_{(u,v)\in W} c_f((u,v))$
    for $(u,v) \in W$ **do**
      if $(u,v) \in E$ **then**
        $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
      else
        $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
      end if
    end for
    Erstelle Residualgraph G_f
  end while
  return f

Erstelle G_f:
$O(|V| + |E|) = O(|E|)$

Berechnung von s-t-Wegen
– Breitensuche
– Tiefensuche
$\left.\right\}$ $O(|E|)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe
– in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert
– max. $|f^\star|$ Durchläufe, wobei $f^\star$ ein max. Fluss

Korrektheit: Folgt, falls Algorithmus terminiert, direkt aus Satz vom flussvergrößernden Pfad

Laufzeit?
1. $c\colon E \to \mathbb{N}$: $O(|f^\star| \cdot |E|)$
2. $\mathbb{Q}_{>0}$: erweitern...
3. $\mathbb{R}_{>0}$:

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f

Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
Erstelle Residualgraph G_f
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{(u,v) \in W} c_f((u, v))$
  for $(u, v) \in W$ **do**
    if $(u, v) \in E$ **then**
      $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
    else
      $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
    end if
  end for
  Erstelle Residualgraph G_f
end while
return f

Erstelle G_f:
$O(|V| + |E|) = O(|E|)$

Berechnung von s-t-Wegen
$\left.\begin{array}{l}\text{– Breitensuche}\\ \text{– Tiefensuche}\end{array}\right\} O(|E|)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe
- in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert
- max. $|f^\star|$ Durchläufe, wobei $f^\star$ ein max. Fluss

Korrektheit: Folgt, falls Algorithmus terminiert, direkt aus Satz vom flussvergrößernden Pfad

Laufzeit?
1. $c \colon E \to \mathbb{N}$: $O(|f^\star| \cdot |E|)$
2. $\mathbb{Q}_{>0}$: erweitern...
3. $\mathbb{R}_{>0}$: problematisch!

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f

Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
Erstelle Residualgraph G_f
while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{(u,v) \in W} c_f((u,v))$
  for $(u,v) \in W$ **do**
    if $(u,v) \in E$ **then**
      $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
    else
      $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
    end if
  end for
  Erstelle Residualgraph G_f
end while
return f

Erstelle G_f:
$O(|V| + |E|) = O(|E|)$

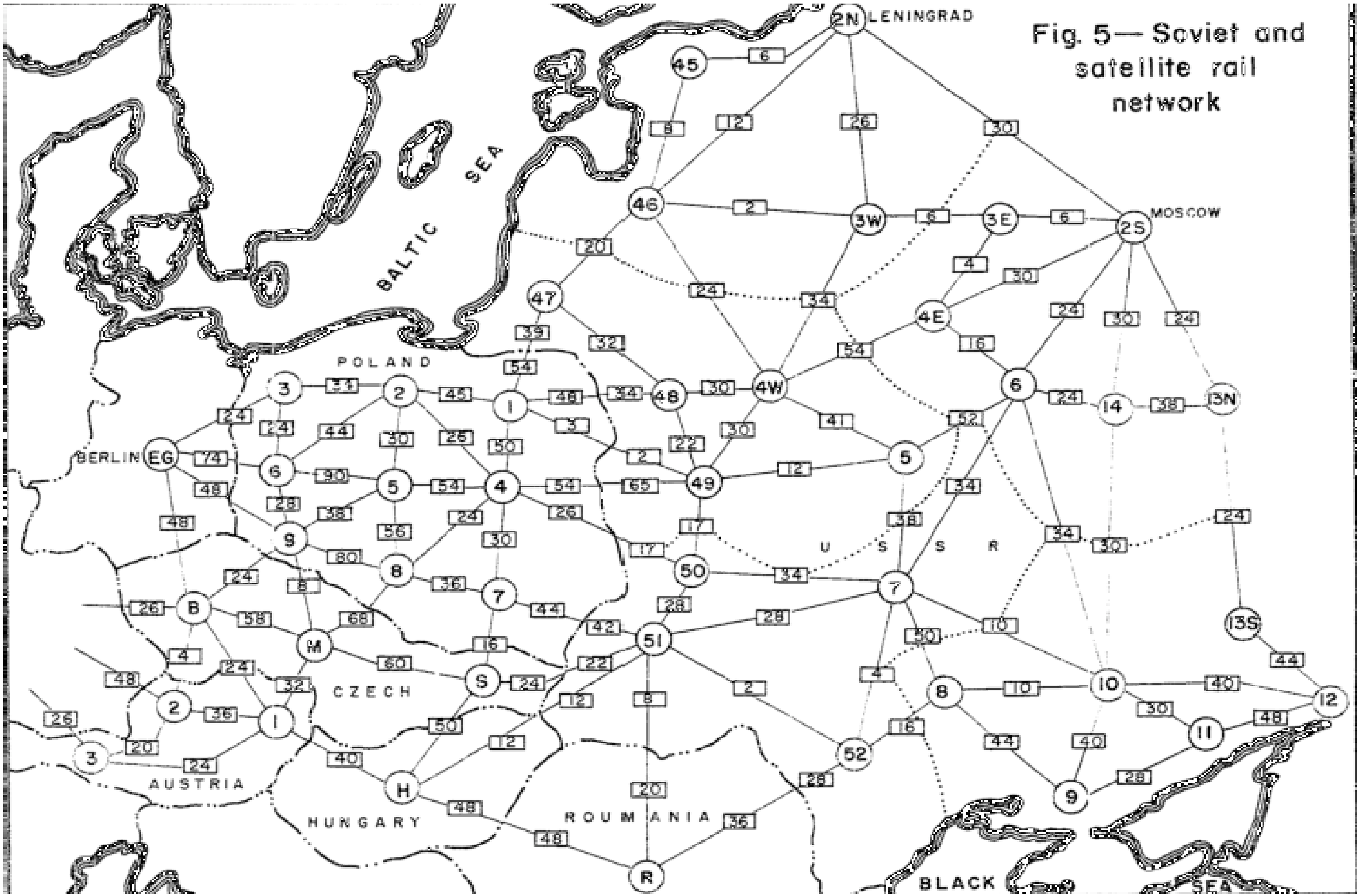
Berechnung von s-t-Wegen
– Breitensuche
– Tiefensuche
$\left.\right\}$ $O(|E|)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe
– in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert
– max. $|f^\star|$ Durchläufe, wobei $f^\star$ ein max. Fluss

Korrektheit: Folgt, falls Algorithmus terminiert, direkt aus Satz vom flussvergrößernden Pfad

Laufzeit?
1. $c\colon E \to \mathbb{N}$: $O(|f^\star| \cdot |E|)$
2. $\mathbb{Q}_{>0}$: erweitern...
3. $\mathbb{R}_{>0}$: problematisch!

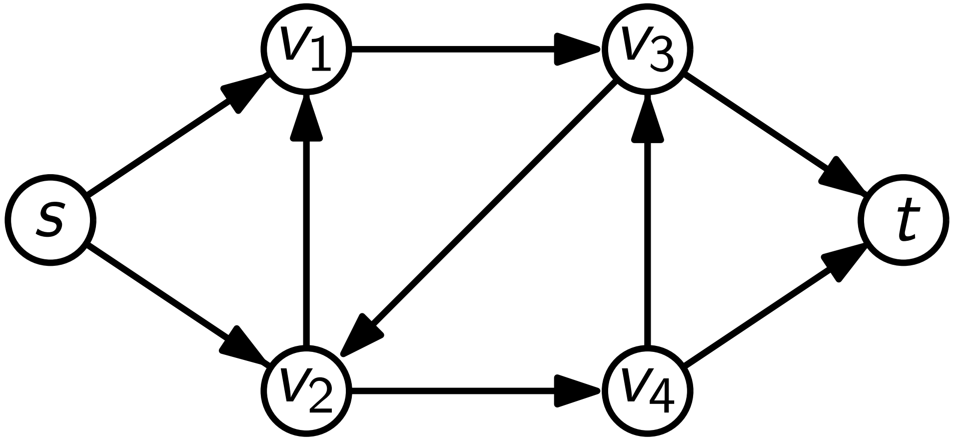
Flüsse und Schnitte



Schnitte

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$.

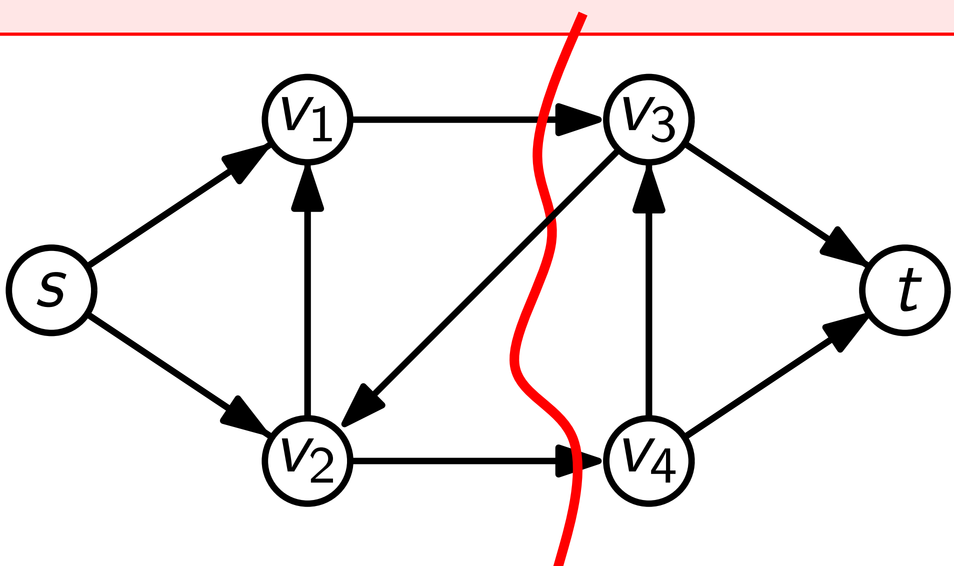
Ein s-t-**Schnitt** ist eine Zerlegung (S, T) der Knotenmenge $V = S \dot{\cup} T$ mit $s \in S$, $t \in T$.



Schnitte

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$.

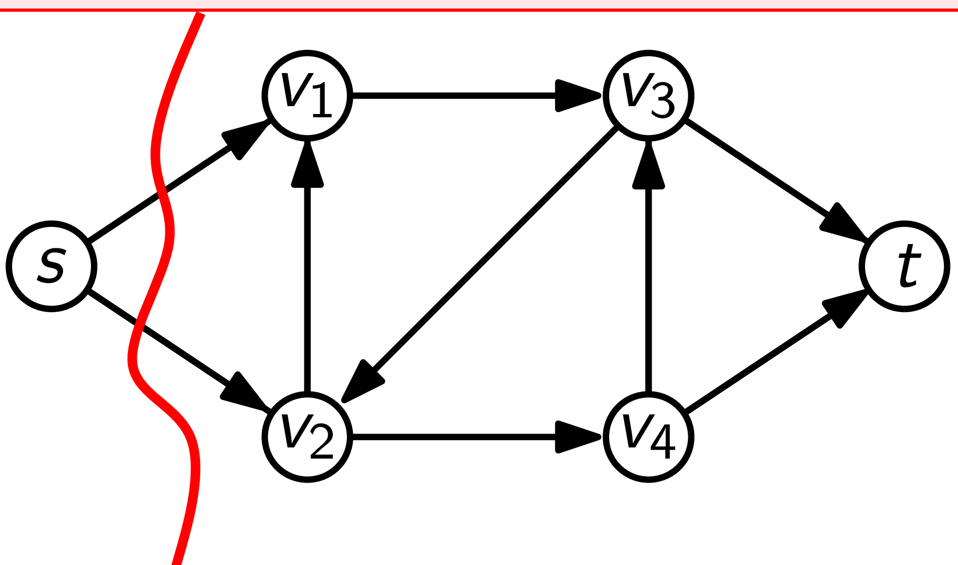
Ein s-t-**Schnitt** ist eine Zerlegung (S, T) der Knotenmenge $V = S \dot{\cup} T$ mit $s \in S$, $t \in T$.



Schnitte

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$.

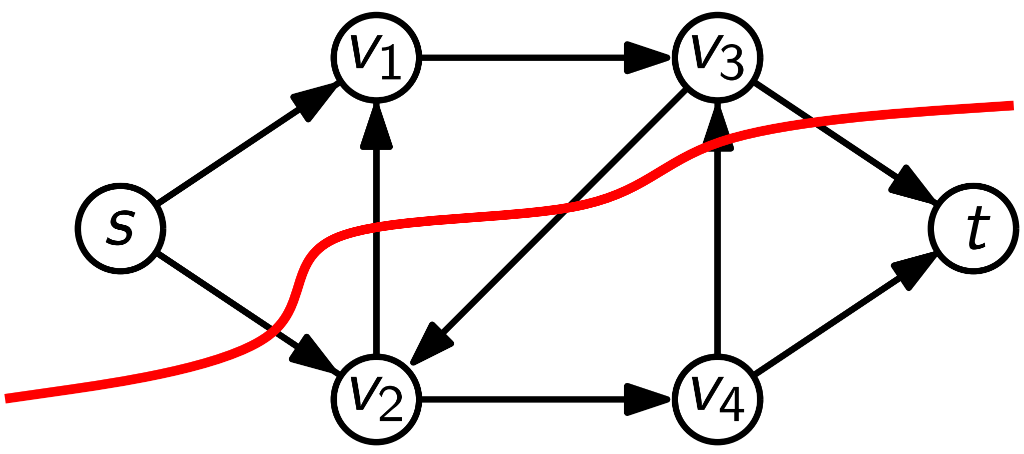
Ein s-t-**Schnitt** ist eine Zerlegung (S, T) der Knotenmenge $V = S \dot{\cup} T$ mit $s \in S$, $t \in T$.



Schnitte

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$.

Ein s-t-**Schnitt** ist eine Zerlegung (S, T) der Knotenmenge $V = S \dot\cup T$ mit $s \in S$, $t \in T$.

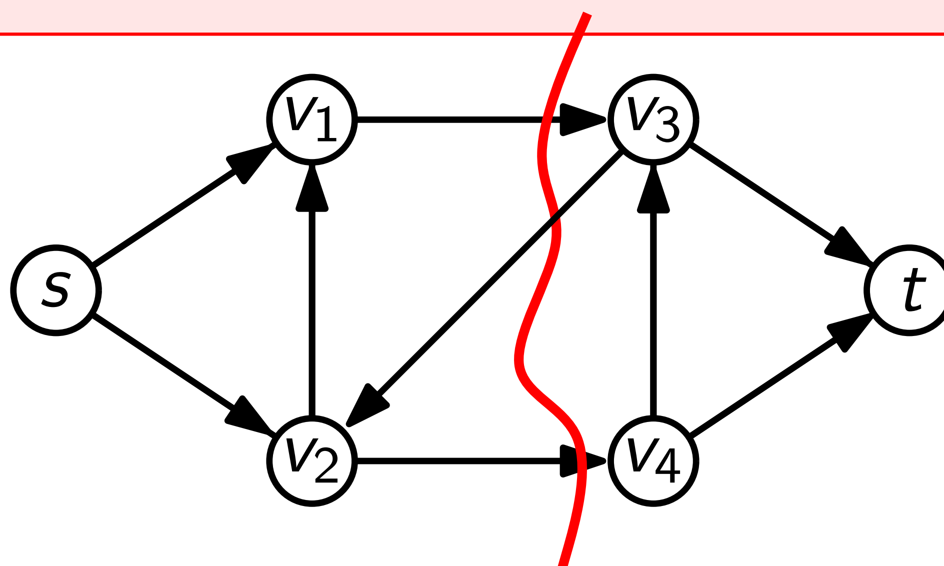


Schnitte

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$.

Ein s-t-**Schnitt** ist eine Zerlegung (S, T) der Knotenmenge $V = S \dot{\cup} T$ mit $s \in S$, $t \in T$.

$\delta^+(S) := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\}$

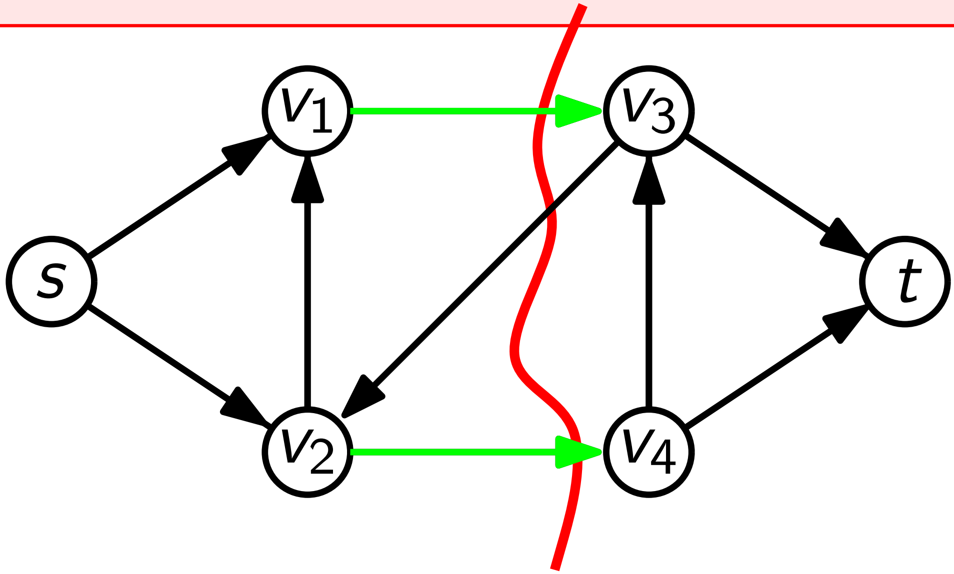


Schnitte

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$.

Ein s-t-**Schnitt** ist eine Zerlegung (S, T) der Knotenmenge $V = S \dot\cup T$ mit $s \in S$, $t \in T$.

$\delta^+(S) := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\}$

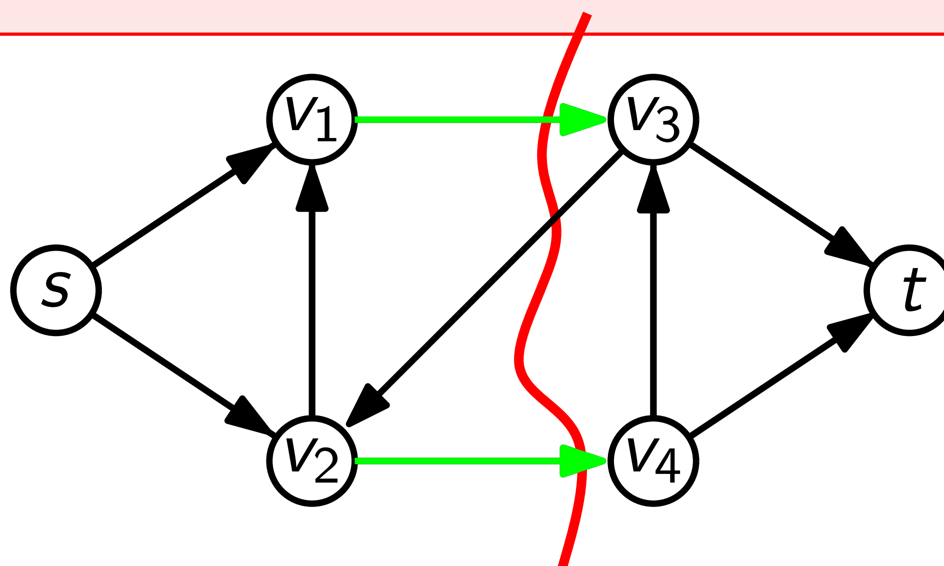


Schnitte

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$.

Ein s-t-**Schnitt** ist eine Zerlegung (S, T) der Knotenmenge $V = S \dot\cup T$ mit $s \in S$, $t \in T$.

$\delta^+(S) := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\}$



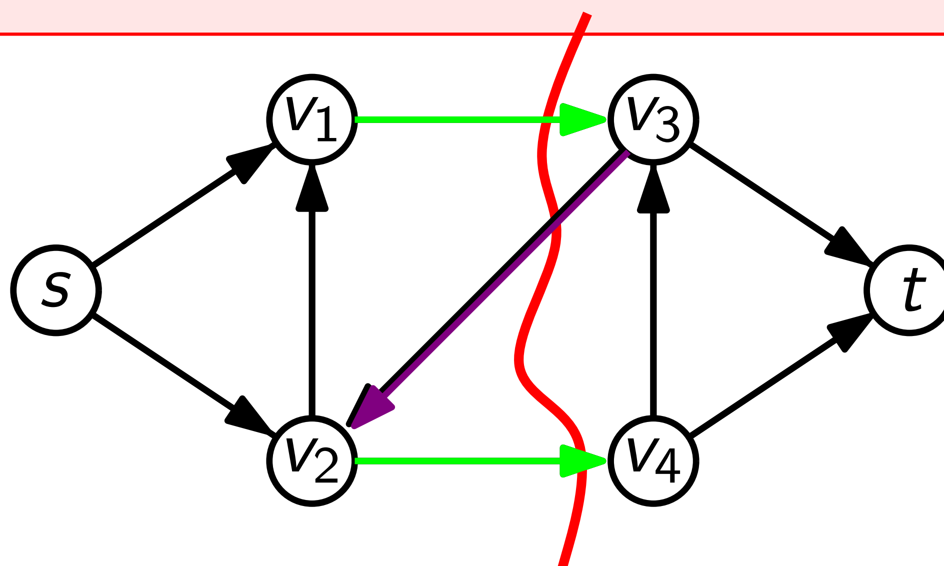
Schnitte

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$.

Ein s-t-**Schnitt** ist eine Zerlegung (S, T) der Knotenmenge $V = S \dot\cup T$ mit $s \in S$, $t \in T$.

$\delta^+(S) := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\}$

$\delta^-(S) = \{(u, v) \in E \mid u \in T, v \in S\}$



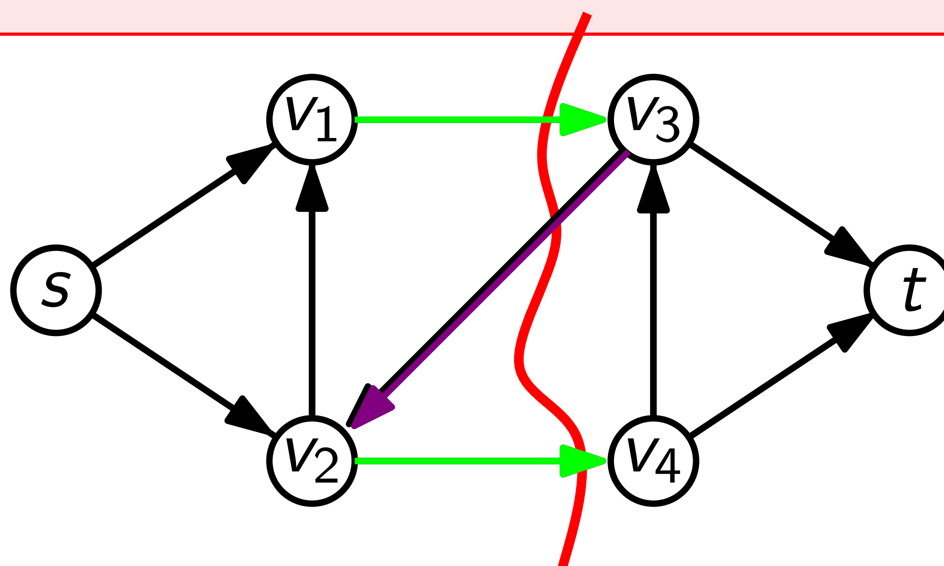
Schnitte

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$.

Ein s-t-**Schnitt** ist eine Zerlegung (S, T) der Knotenmenge $V = S \dot\cup T$ mit $s \in S$, $t \in T$.

$\delta^+(S) := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\}$

$\delta^-(S) = \{(u, v) \in E \mid u \in T, v \in S\}$



Schnitte

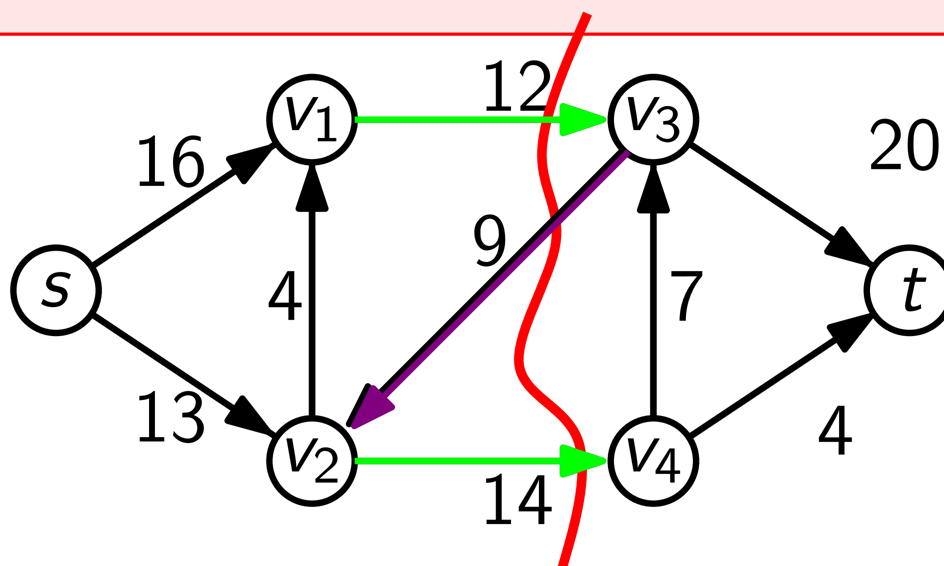
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$.

Ein s-t-**Schnitt** ist eine Zerlegung (S, T) der Knotenmenge $V = S \dot\cup T$ mit $s \in S$, $t \in T$.

$\delta^+(S) := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\}$

$\delta^-(S) = \{(u, v) \in E \mid u \in T, v \in S\}$

Seien $c(e)$ für $e \in E$ Kantenkapazitäten.
Die **Kapazität** von Schnitt (S, T) ist $c(\delta^+(S)) := \sum_{e \in \delta^+(S)} c(e)$



Schnitte

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$.

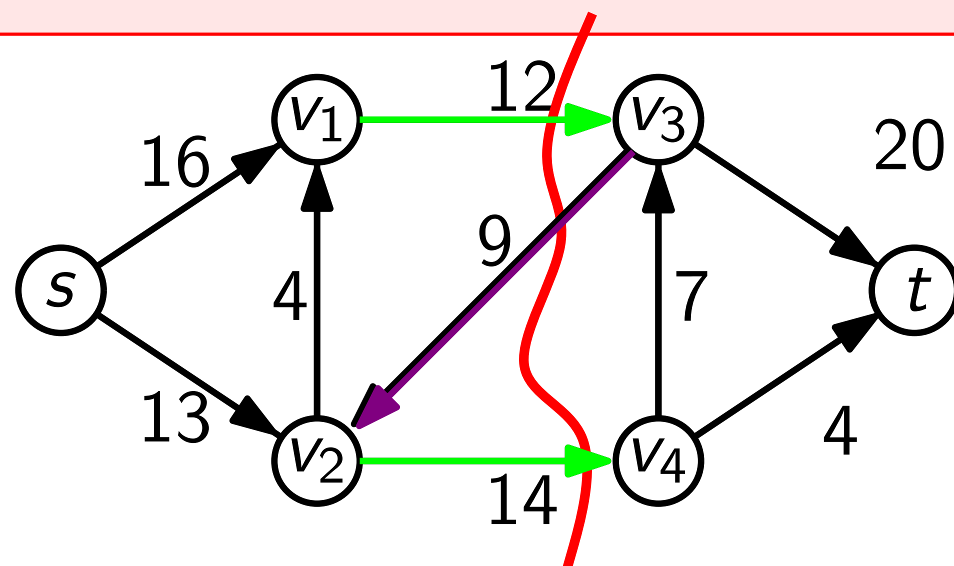
Ein s-t-**Schnitt** ist eine Zerlegung (S, T) der Knotenmenge $V = S \dot\cup T$ mit $s \in S$, $t \in T$.

$\delta^+(S) := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\}$

$\delta^-(S) = \{(u, v) \in E \mid u \in T, v \in S\}$

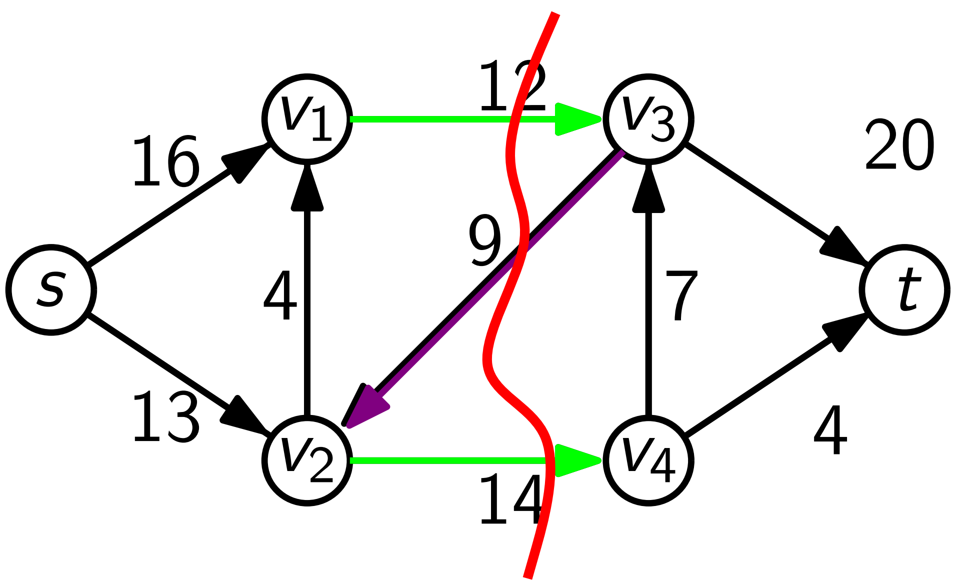
Seien $c(e)$ für $e \in E$ Kantenkapazitäten.
Die **Kapazität** von Schnitt (S, T) ist $c(\delta^+(S)) := \sum_{e \in \delta^+(S)} c(e)$

$c(\delta^+(S)) = 26$



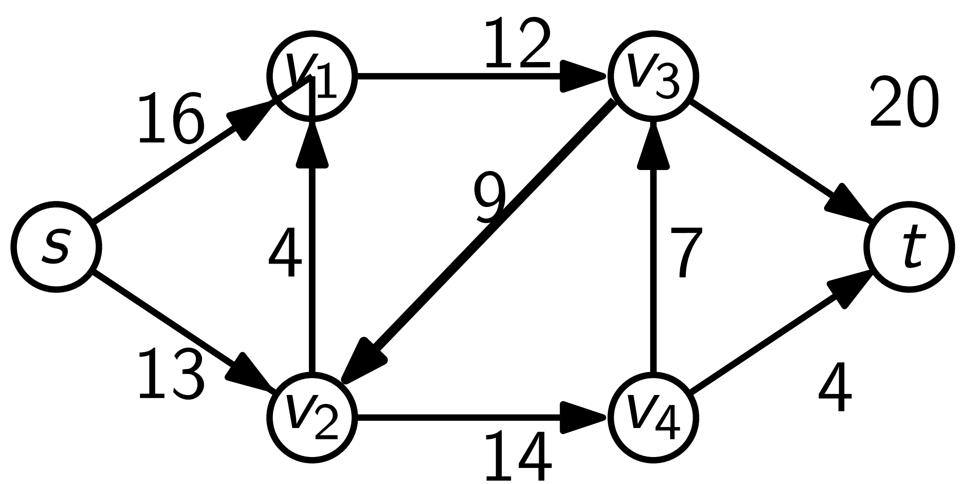
Optimierungsproblem 'Minimaler Schnitt'

Minimaler Schnitt
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: s-t Schnitt mit minimaler Kapazität $c(\delta^+(S))$.



Zusammenhang Flüsse und Schnitte

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$

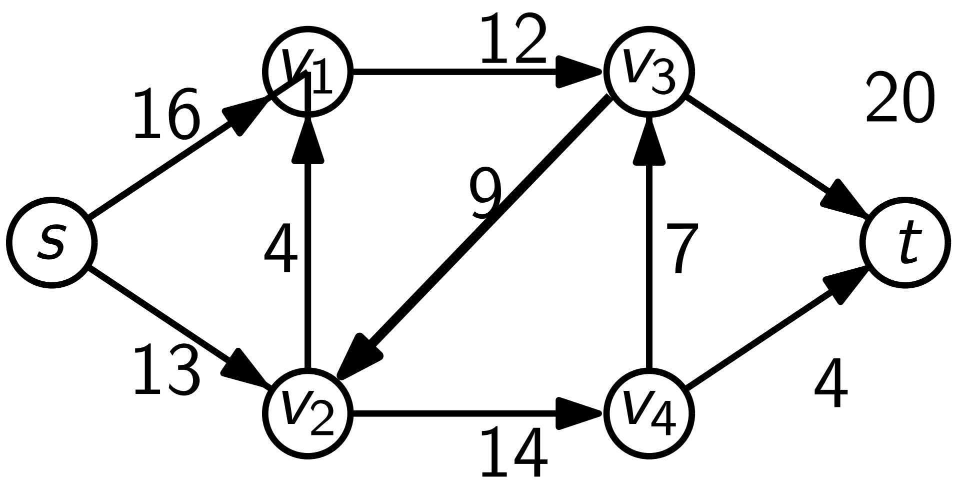


Minimaler Schnitt
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: s-t Schnitt mit minimaler Kapazität $c(\delta^+(S))$.

Zusammenhang Flüsse und Schnitte

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$

Was haben diese beiden Optimierungsproblem miteinander zu tun?

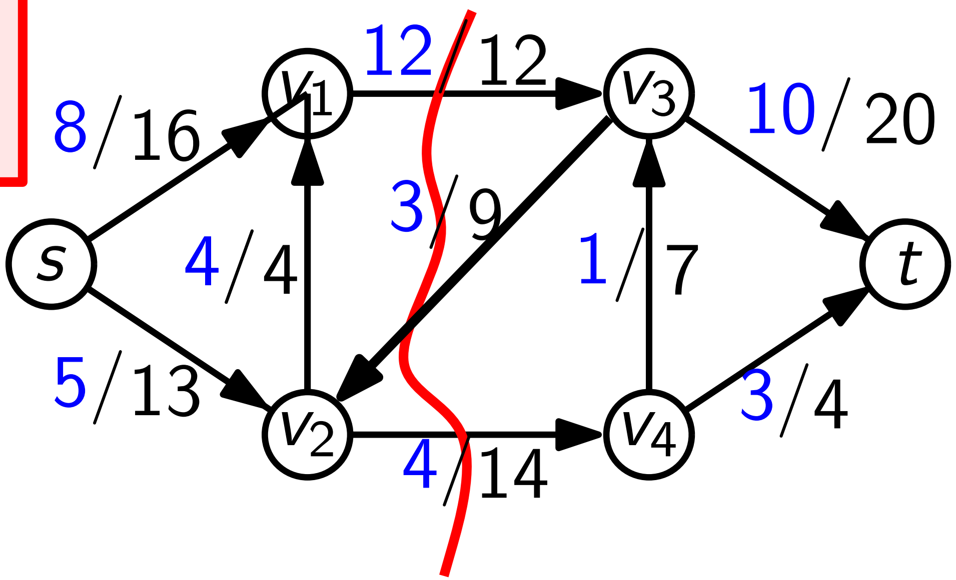


Minimaler Schnitt
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: s-t Schnitt mit minimaler Kapazität $c(\delta^+(S))$.

Zusammenhang Flüsse und Schnitte

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$

Lemma: Ist f ein s-t-Fluss und (S, T) ein s-t-Schnitt, so gilt:
$|f| = f(\delta^+(S)) - f(\delta^-(S))$



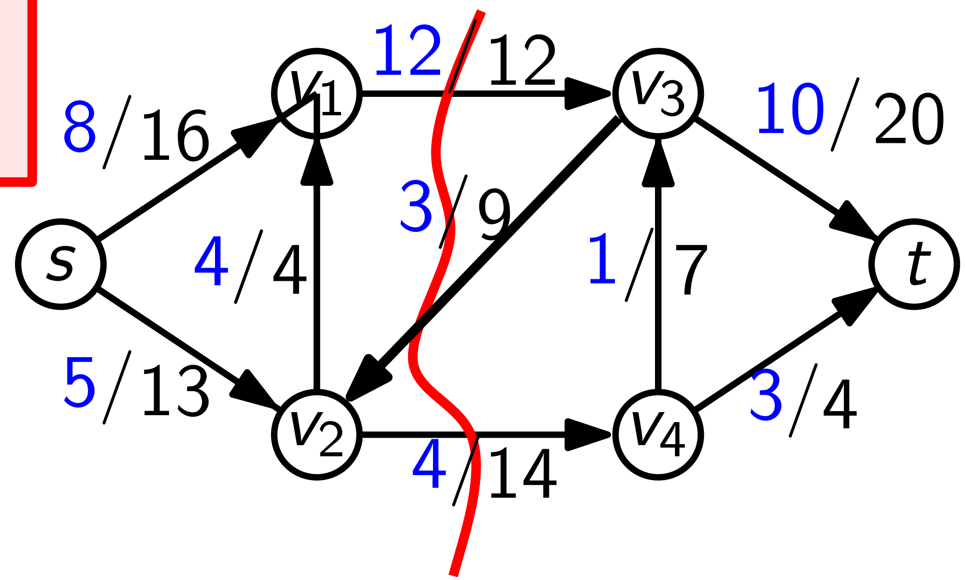
Minimaler Schnitt
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: s-t Schnitt mit minimaler Kapazität $c(\delta^+(S))$.

Zusammenhang Flüsse und Schnitte

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$

Lemma: Ist f ein s-t-Fluss und (S, T) ein s-t-Schnitt, so gilt:
$|f| = f(\delta^+(S)) - f(\delta^-(S))$

Intuitiv klar?



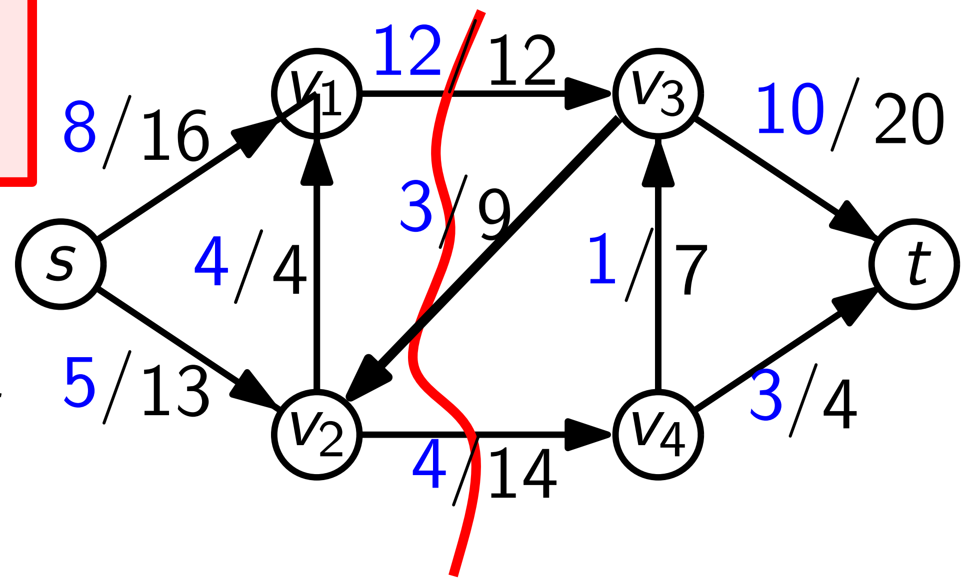
Minimaler Schnitt
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: s-t Schnitt mit minimaler Kapazität $c(\delta^+(S))$.

Zusammenhang Flüsse und Schnitte

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$

Lemma: Ist f ein s-t-Fluss und (S, T) ein s-t-Schnitt, so gilt:
$|f| = f(\delta^+(S)) - f(\delta^-(S))$

Beweis: $|f| = Nettozufluss_f(t)$
$= \sum_{v \in T} Nettozufluss_f(v)$
$=$
$\sum_{v \in T} \left(\sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^+(v)} f \right.$
$= \sum_{e \in \delta^-(T)} f(e) - \sum_{e \in \delta^+(T)} f(e)$
$= \sum_{e \in \delta^+(S)} f(e) - \sum_{e \in \delta^-(S)} f(e)$

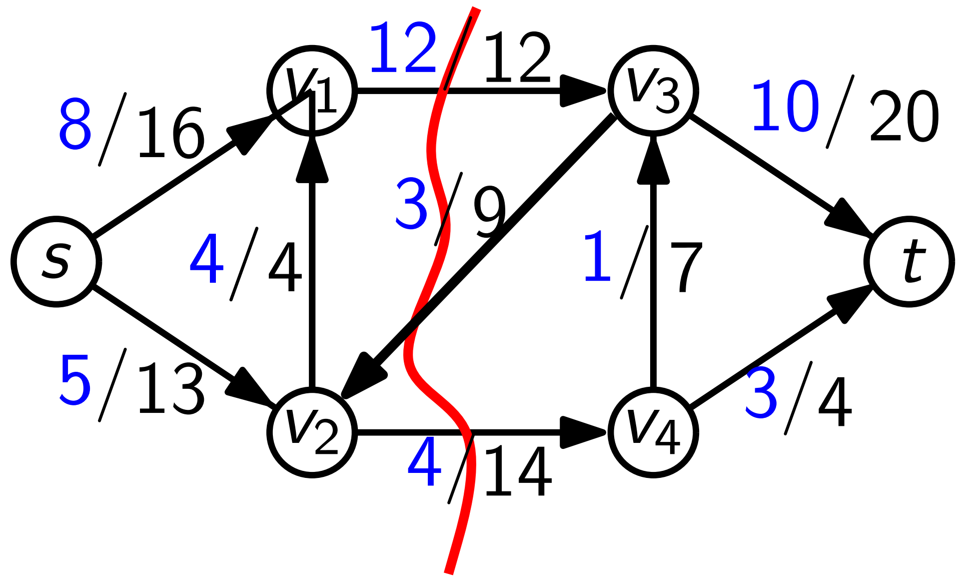


Minimaler Schnitt
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: s-t Schnitt mit minimaler Kapazität $c(\delta^+(S))$.

Zusammenhang Flüsse und Schnitte

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$

Korollar: Sei f ein zulässiger s-t-Fluss und (S, T) ein s-t-Schnitt.
Dann ist $|f| \leq c(\delta^+(S))$.



Minimaler Schnitt
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: s-t Schnitt mit minimaler Kapazität $c(\delta^+(S))$.

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ $\checkmark$

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ ✓

'$\Leftarrow$':

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ $\checkmark$

'$\Leftarrow$': Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ ✓

'$\Leftarrow$':Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ ✓

'$\Leftarrow$':Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v \text{ ist in } G_f \text{ von } s \text{ erreichbar}\}$,

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ ✓

'$\Leftarrow$': Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v$ ist in G_f von s erreichbar$\}$,

Dann gilt: $T := V \setminus S = \{v \in V : v$ ist in G_f von s nicht erreichbar$\} \ni t$, denn sonst gäbe es s-t-Weg in G_f und also flussvergrößernden Weg in G.

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ ✓

'$\Leftarrow$': Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v$ ist in G_f von s erreichbar$\}$,

Dann gilt: $T := V \setminus S = \{v \in V : v$ ist in G_f von s nicht erreichbar$\} \ni t$, denn sonst gäbe es s-t-Weg in G_f und also flussvergrößernden Weg in G.

Also ist (S, T) ein s-t-Schnitt.

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ $\checkmark$

'$\Leftarrow$':Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v \text{ ist in } G_f \text{ von } s \text{ erreichbar}\}$, (S, T) ist s-t-Schnitt.

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ ✓

'$\Leftarrow$': Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v \text{ ist in } G_f \text{ von } s \text{ erreichbar}\}$, (S, T) ist s-t-Schnitt.
Betrachte $(u, v) \in \delta^+(S)$:

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ ✓

'$\Leftarrow$': Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v \text{ ist in } G_f \text{ von } s \text{ erreichbar}\}$, (S, T) ist s-t-Schnitt.
Betrachte $(u, v) \in \delta^+(S)$: es gilt $f((u, v)) = c((u, v))$

(sonst gäbe es Kante (u, v) in G_f, Endknoten v wäre also über u in G_f erreichbar: Widerspruch zu $v \in T = V \setminus S$)

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ ✓

'$\Leftarrow$': Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v \text{ ist in } G_f \text{ von } s \text{ erreichbar}\}$, (S, T) ist s-t-Schnitt.
Betrachte $(u, v) \in \delta^+(S)$: es gilt $f((u, v)) = c((u, v))$

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ ✓

'$\Leftarrow$': Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v \text{ ist in } G_f \text{ von } s \text{ erreichbar}\}$, (S, T) ist s-t-Schnitt.
Betrachte $(u, v) \in \delta^+(S)$: es gilt $f((u, v)) = c((u, v))$
Betrachte $(u, v) \in \delta^-(S)$:

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ ✓

'$\Leftarrow$': Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v \text{ ist in } G_f \text{ von } s \text{ erreichbar}\}$, (S, T) ist s-t-Schnitt.
Betrachte $(u, v) \in \delta^+(S)$: es gilt $f((u, v)) = c((u, v))$
Betrachte $(u, v) \in \delta^-(S)$: es gilt $f((u, v)) = 0$

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ ✓

'$\Leftarrow$': Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v \text{ ist in } G_f \text{ von } s \text{ erreichbar}\}$, (S, T) ist s-t-Schnitt.
Betrachte $(u, v) \in \delta^+(S)$: es gilt $f((u, v)) = c((u, v))$
Betrachte $(u, v) \in \delta^-(S)$: es gilt $f((u, v)) = 0$

(sonst gäbe es Kante (v, u) in G_f, u wäre also über v in G_f erreichbar: Widerspruch zu $u \in T = V \setminus S$)

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ ✓

'$\Leftarrow$': Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v \text{ ist in } G_f \text{ von } s \text{ erreichbar}\}$, (S, T) ist s-t-Schnitt.
Betrachte $(u, v) \in \delta^+(S)$: es gilt $f((u, v)) = c((u, v))$
Betrachte $(u, v) \in \delta^-(S)$: es gilt $f((u, v)) = 0$

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ ✓

'$\Leftarrow$': Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v$ ist in G_f von s erreichbar$\}$, (S, T) ist s-t-Schnitt.
Betrachte $(u, v) \in \delta^+(S)$: es gilt $f((u, v)) = c((u, v))$
Betrachte $(u, v) \in \delta^-(S)$: es gilt $f((u, v)) = 0$
$c(\delta^+(S)) = \sum_{e \in \delta^+(S)} c(e)$

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ ✓

'$\Leftarrow$': Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v$ ist in G_f von s erreichbar$\}$, (S, T) ist s-t-Schnitt.
Betrachte $(u, v) \in \delta^+(S)$: es gilt $f((u, v)) = c((u, v))$
Betrachte $(u, v) \in \delta^-(S)$: es gilt $f((u, v)) = 0$
$c(\delta^+(S)) = \sum_{e \in \delta^+(S)} c(e) = \sum_{e \in \delta^+(S)} f(e)$

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ ✓

'$\Leftarrow$': Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v \text{ ist in } G_f \text{ von } s \text{ erreichbar}\}$, (S, T) ist s-t-Schnitt.
Betrachte $(u, v) \in \delta^+(S)$: es gilt $f((u, v)) = c((u, v))$
Betrachte $(u, v) \in \delta^-(S)$: es gilt $f((u, v)) = 0$

$$c(\delta^+(S)) = \sum_{e\in\delta^+(S)} c(e) = \sum_{e\in\delta^+(S)} f(e) = \sum_{e\in\delta^+(S)} f(e) - \underbrace{\sum_{e\in\delta^-(S)} f(e)}_{0}$$

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ ✓

'$\Leftarrow$':Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v \text{ ist in } G_f \text{ von } s \text{ erreichbar}\}$, (S, T) ist s-t-Schnitt.
Betrachte $(u, v) \in \delta^+(S)$: es gilt $f((u, v)) = c((u, v))$
Betrachte $(u, v) \in \delta^-(S)$: es gilt $f((u, v)) = 0$

$$
\begin{aligned}
c(\delta^+(S)) = \textstyle\sum_{e\in\delta^+(S)} c(e) &= \textstyle\sum_{e\in\delta^+(S)} f(e) \\
&= \textstyle\sum_{e\in\delta^+(S)} f(e) - \underbrace{\sum_{e\in\delta^-(S)} f(e)}_{0} \\
&= |f^*|
\end{aligned}
$$

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ $\checkmark$

'$\Leftarrow$':Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v \text{ ist in } G_f \text{ von } s \text{ erreichbar}\}$, (S, T) ist s-t-Schnitt.

Dann gilt $c(\delta^+(S)) = |f|$

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

"$\Rightarrow$ ✓

'$\Leftarrow$':Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v \text{ ist in } G_f \text{ von } s \text{ erreichbar}\}$, (S, T) ist s-t-Schnitt.
Dann gilt $c(\delta^+(S)) = |f|$
Wegen $|f^*| \leq c(\delta^+) \leq |f| \leq |f^*|$ für einen maximalen Fluss f^* folgt:

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis.

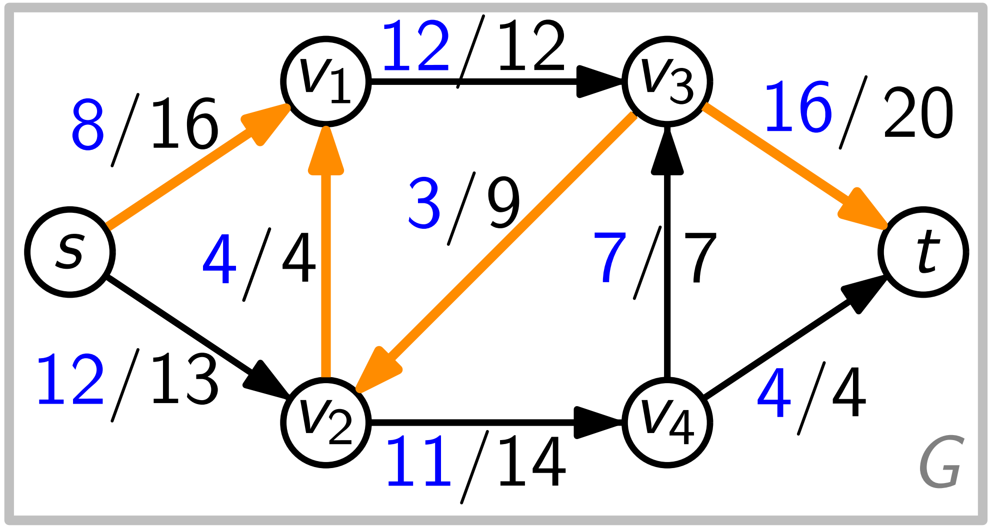
"$\Rightarrow$ ✓

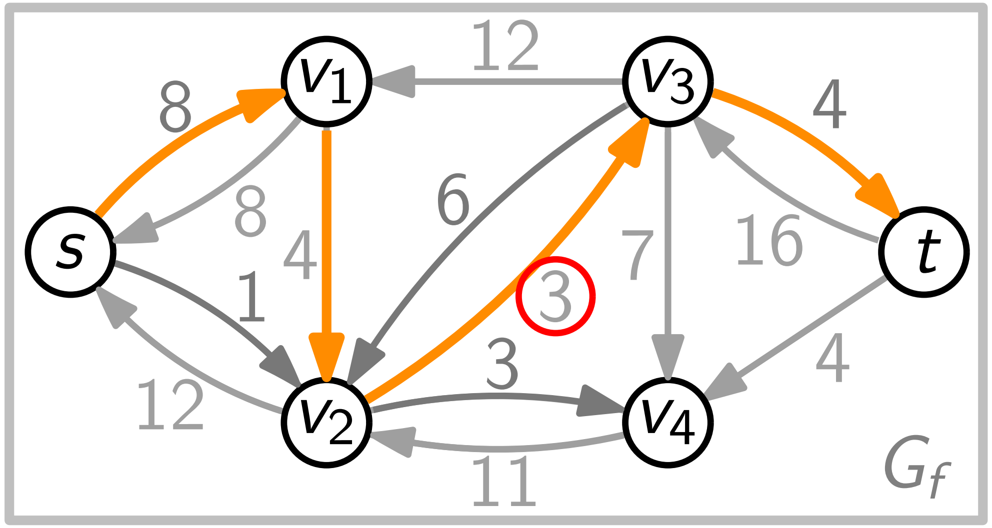
'$\Leftarrow$': Sei f ein Fluss, für den es keinen flussvergrößernden Weg in G_f gibt.
Sei $S := \{v \in V : v$ ist in G_f von s erreichbar$\}$, (S, T) ist s-t-Schnitt.
Dann gilt $c(\delta^+(S)) = |f|$
Wegen $|f^*| \leq c(\delta^+) \leq |f| \leq |f^*|$ für einen maximalen Fluss f^* folgt:
$|f| = |f^*|$, also ist f maximal.

Der Satz vom flussvergrößernden Weg - jetzt mit Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.



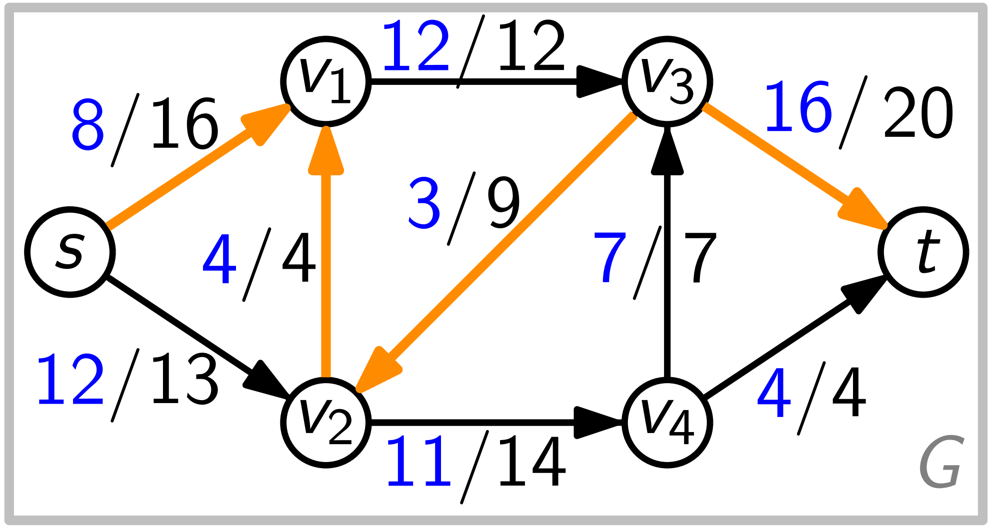


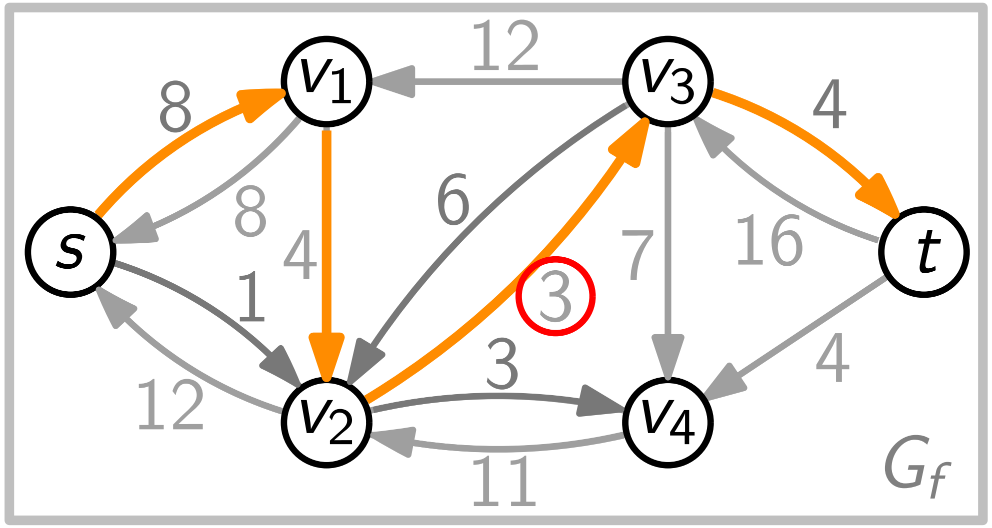
Der Satz vom flussvergrößernden Weg - jetzt mit Beweis

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und f s-t-Fluss auf G, G_f Residualgraph

Satz vom flussvergrößernden Weg
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f.

Beweis?
"$\Rightarrow$ ✓
"$\Leftarrow$" folgern wir jetzt aus dem Max-Flow-Min-Cut-Theorem





Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f
  Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
  Erstelle Residualgraph G_f
  while G_f enthält s-t-Weg W **do**
    $\Delta_W = \min_{(u,v) \in W} c_f((u, v))$
    for $(u, v) \in W$ **do**
      if $(u, v) \in E$ **then**
        $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
      else
        $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
      end if
    end for
    Erstelle Residualgraph G_f
  end while
  return f

Erstelle G_f:
$O(|V| + |E|) = O(|E|)$

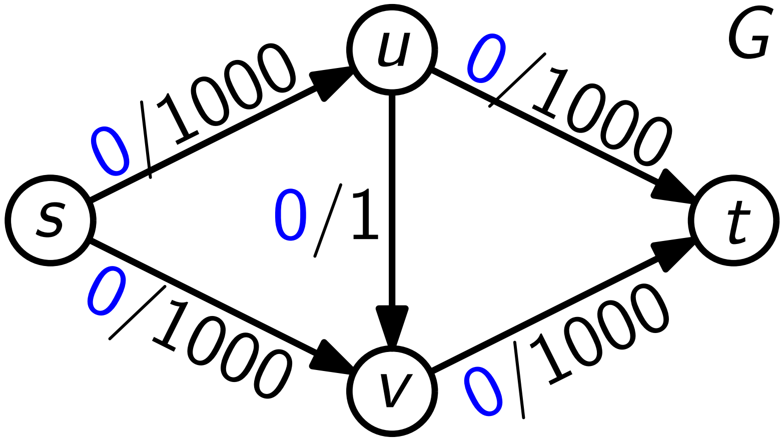
Berechnung von s-t-Wegen
$\left.\begin{array}{l}\text{– Breitensuche}\\ \text{– Tiefensuche}\end{array}\right\} O(|E|)$ Zeit

Anz. Schleifendurchläufe
- in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert
- max. $|f^\star|$ Durchläufe, wobei $f^\star$ ein max. Fluss

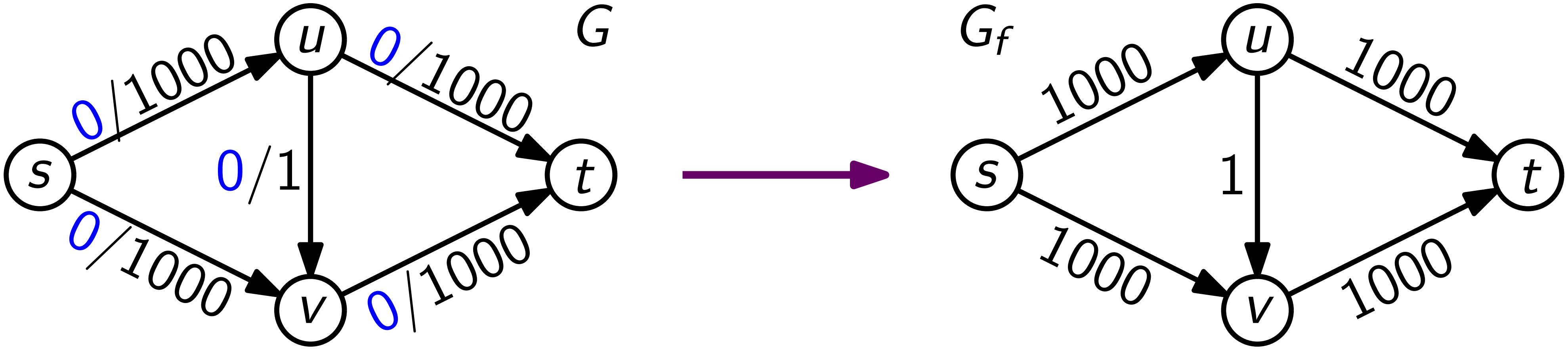
Korrektheit: Folgt, falls Algorithmus terminiert, direkt aus Satz vom flussvergrößernden Pfad

Laufzeit?
1. $c \colon E \to \mathbb{N}$: $O(|f^\star| \cdot |E|)$
2. $\mathbb{Q}_{>0}$: erweitern...
3. $\mathbb{R}_{>0}$: problematisch!

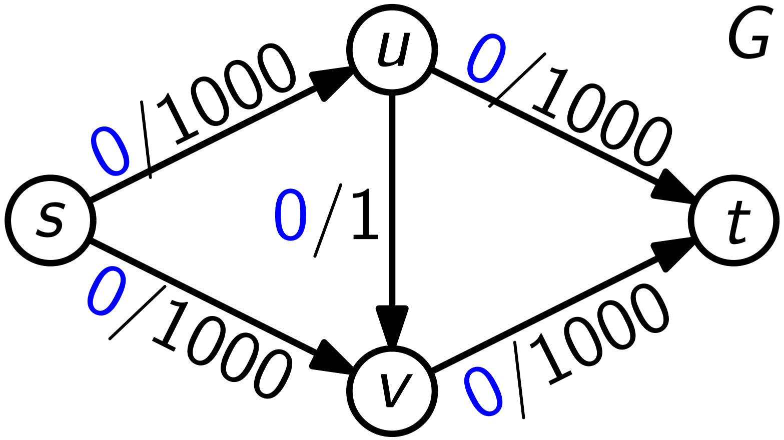
Ford-Fulkerson im Beispiel

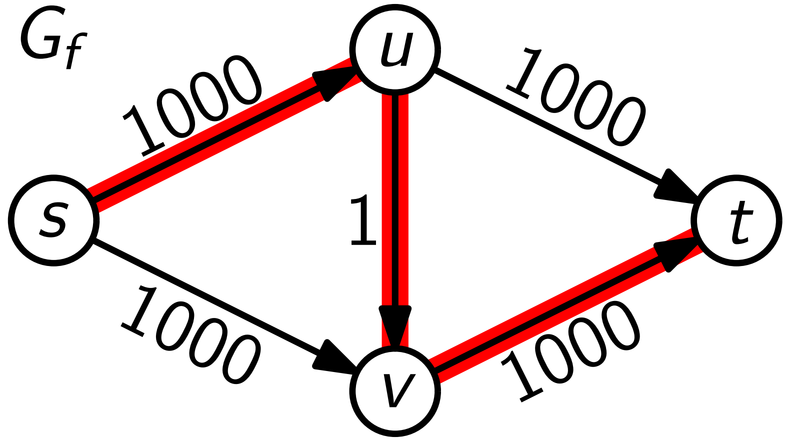


Ford-Fulkerson im Beispiel

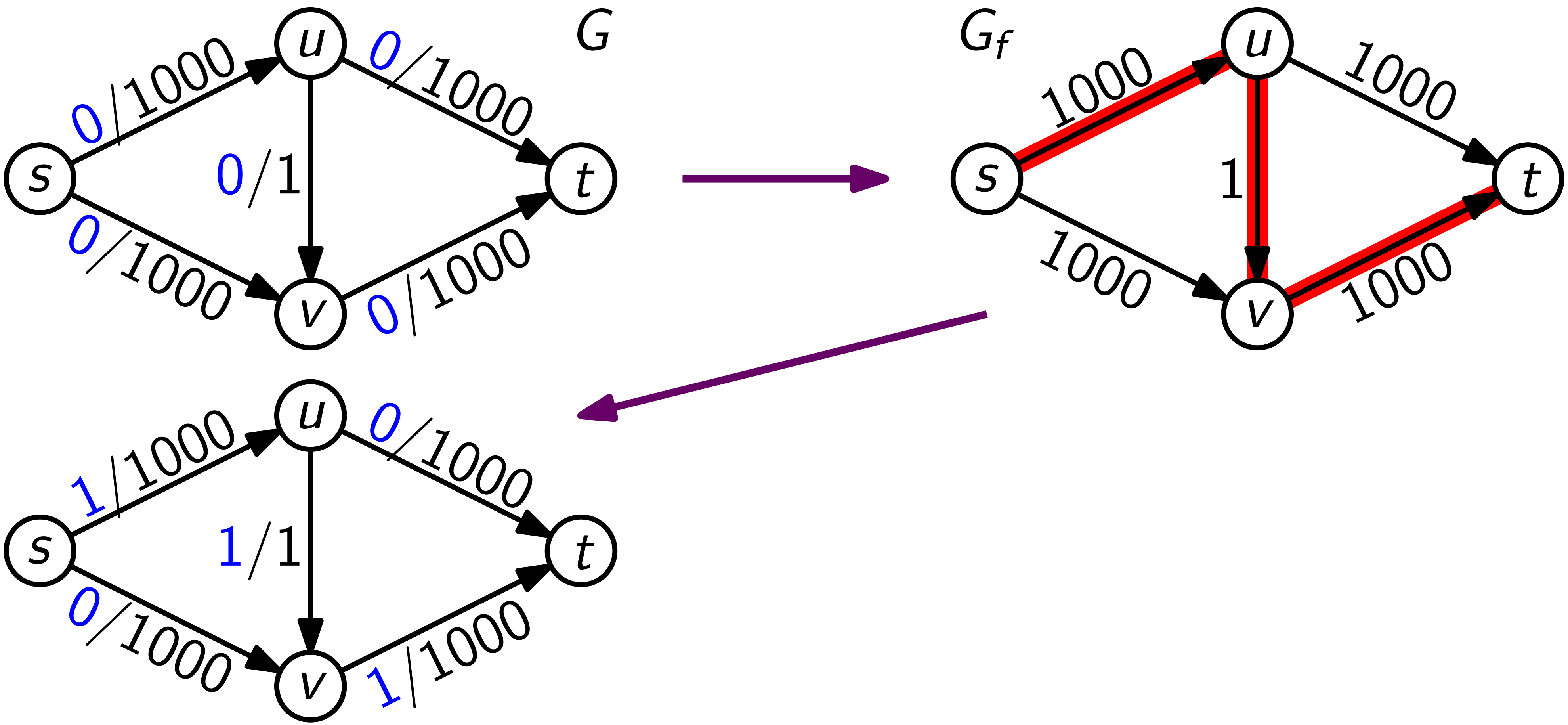


Ford-Fulkerson im Beispiel

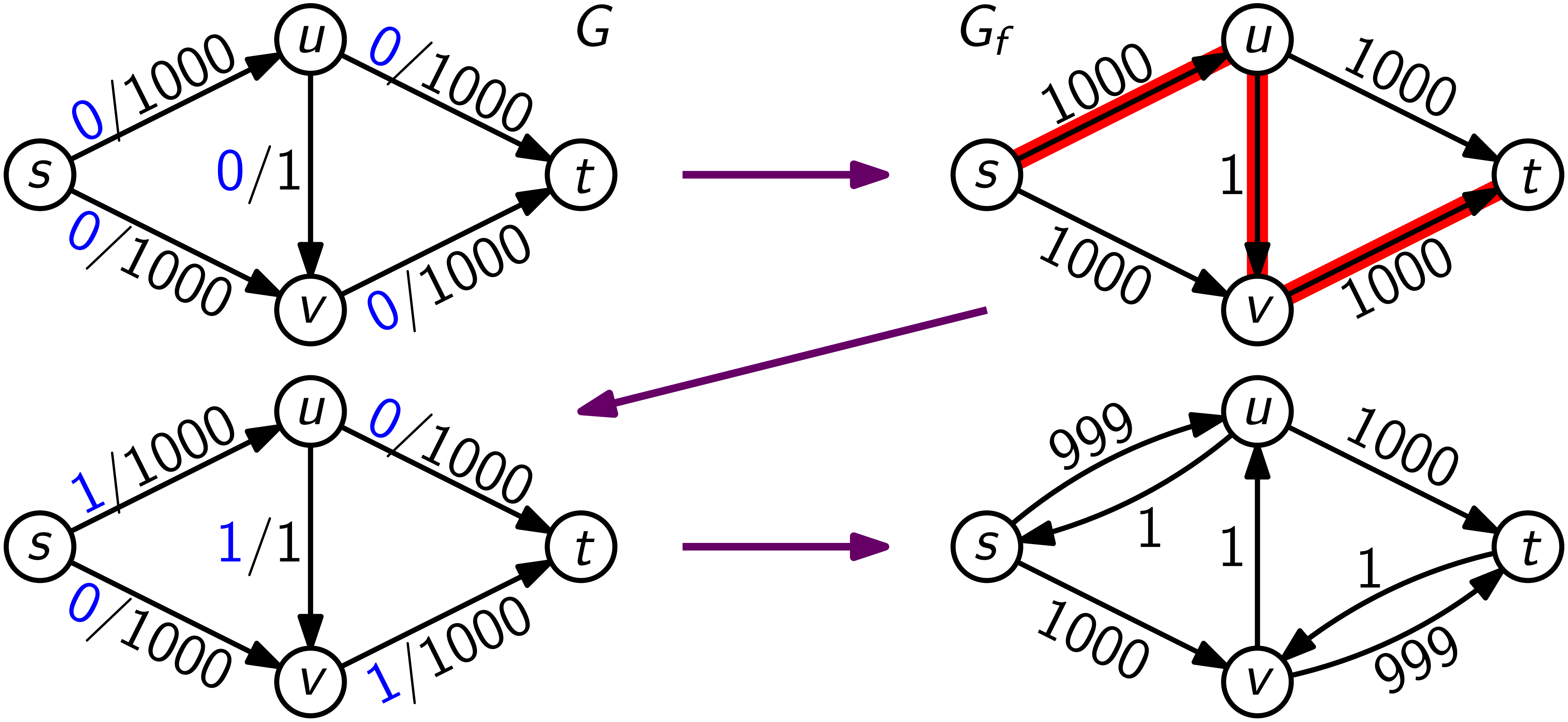




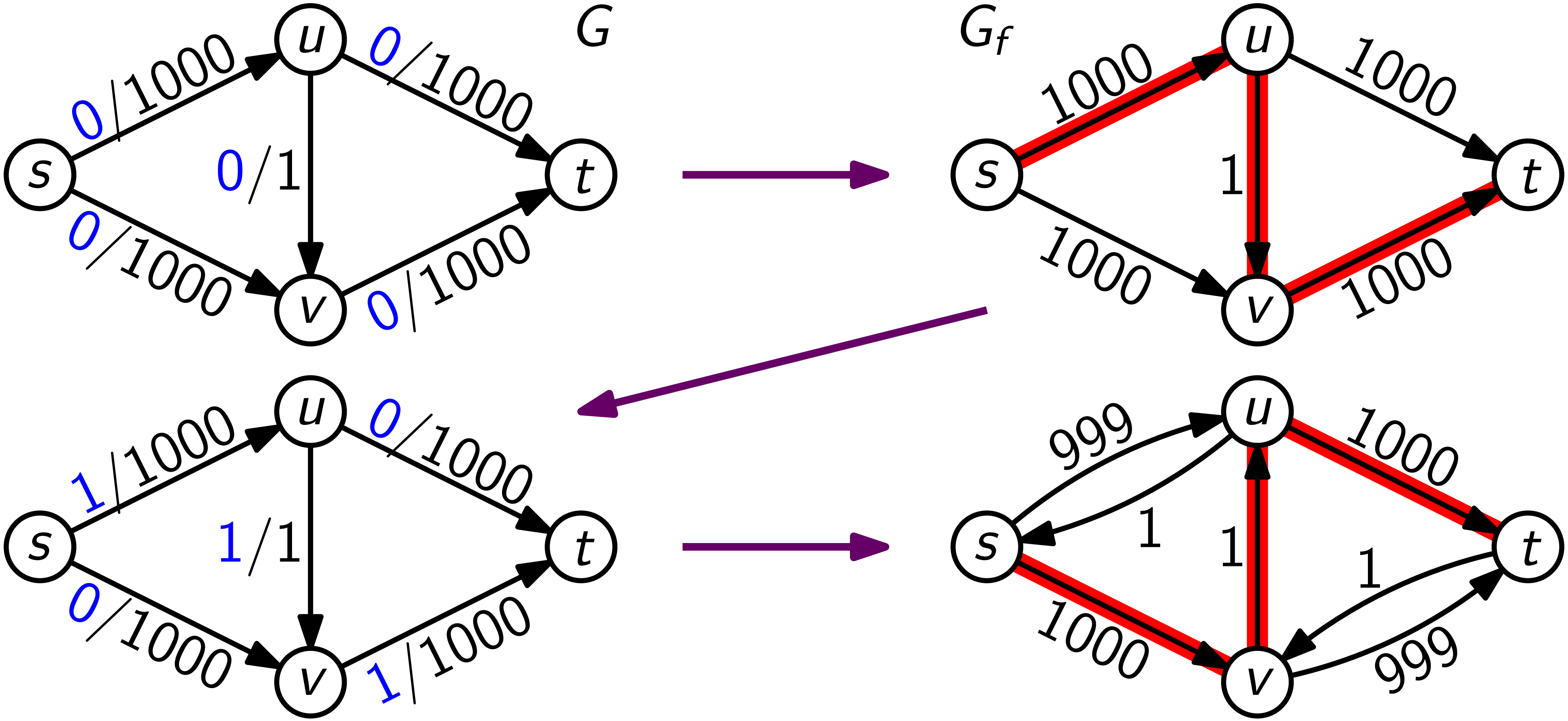
Ford-Fulkerson im Beispiel



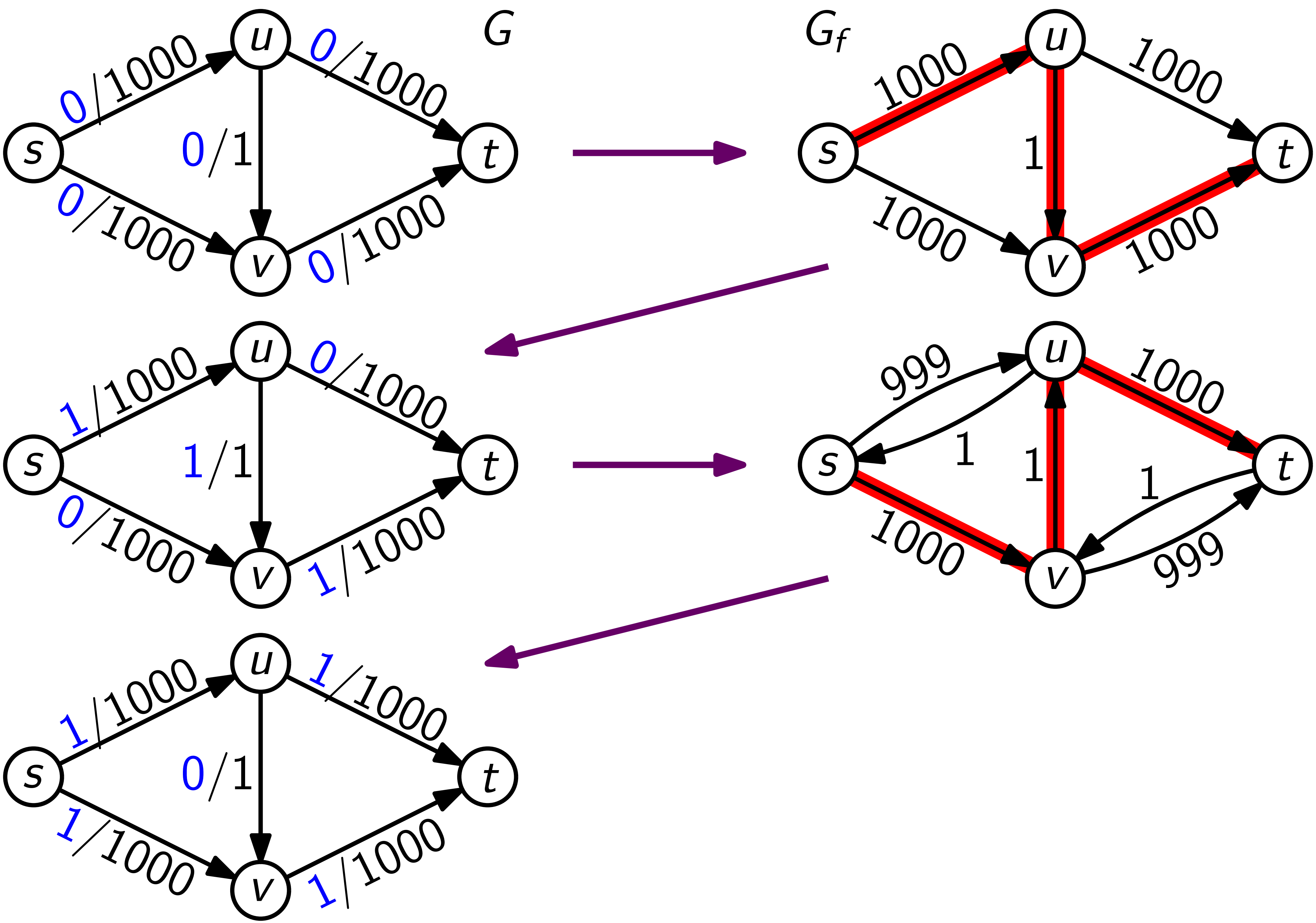
Ford-Fulkerson im Beispiel



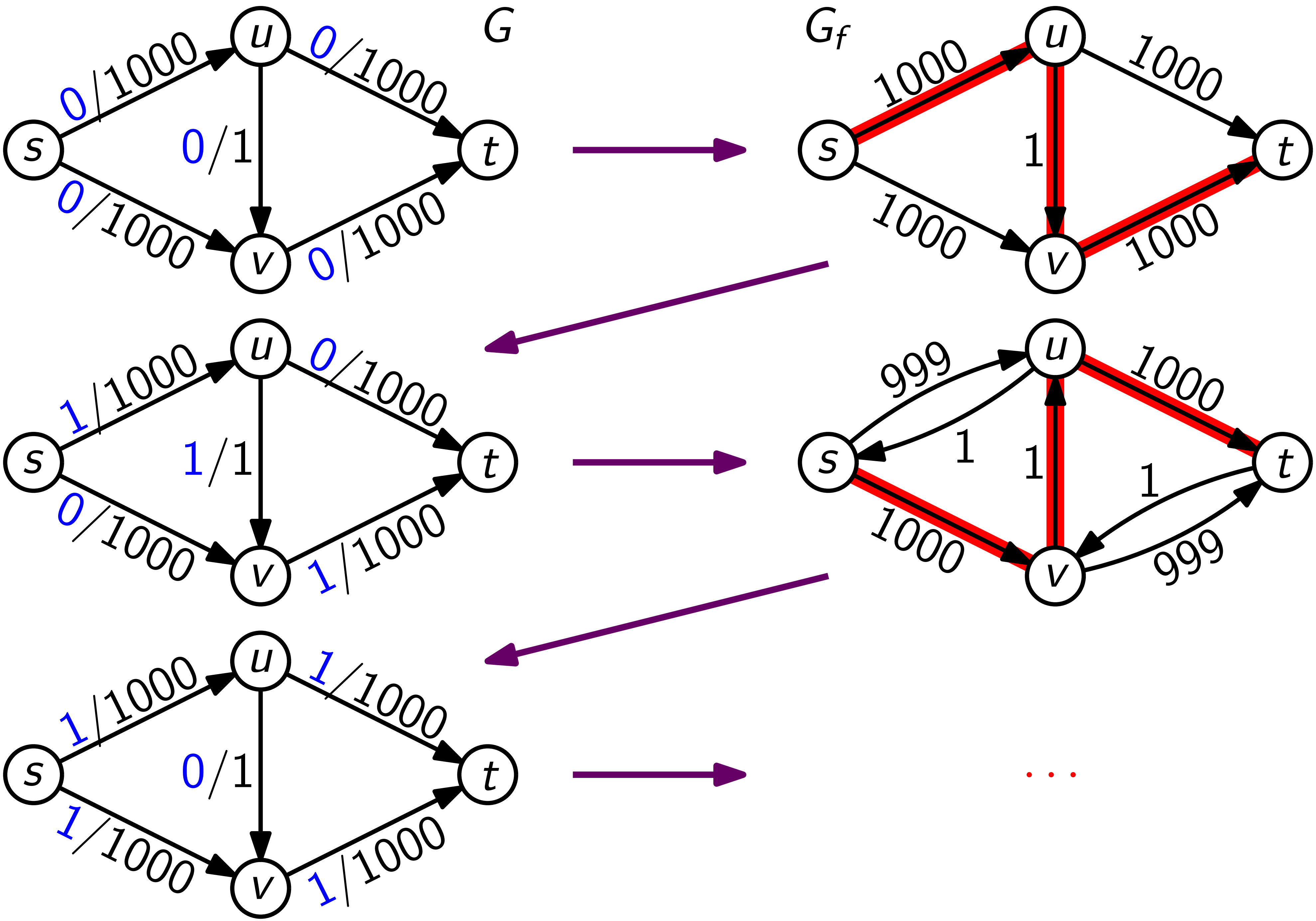
Ford-Fulkerson im Beispiel



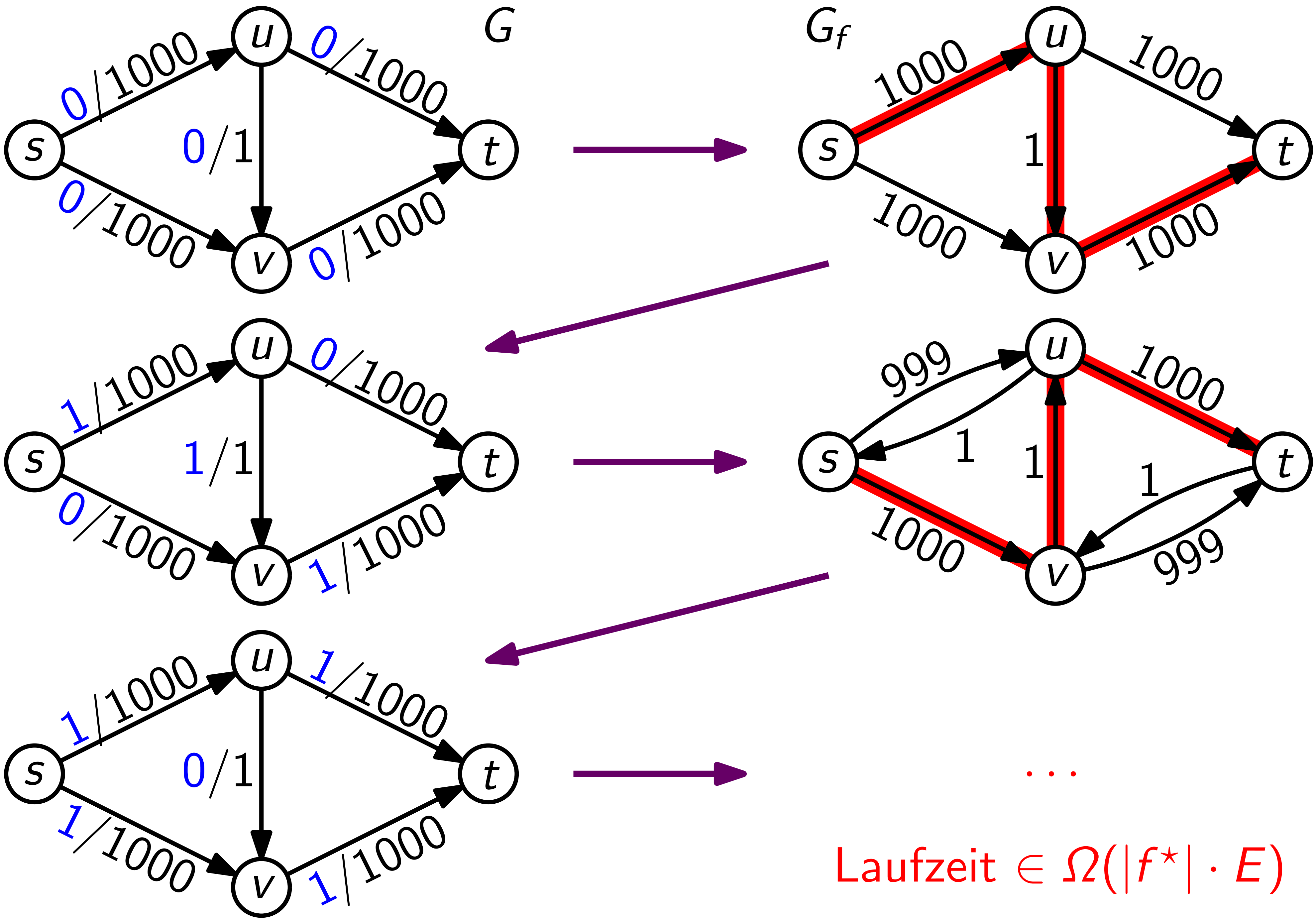
Ford-Fulkerson im Beispiel



Ford-Fulkerson im Beispiel



Ford-Fulkerson im Beispiel



Laufzeit $\in \Omega(|f^\star| \cdot E)$

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t
Ensure: s-t-Fluss f

```
Initialisiere: f(e) = 0 für alle e ∈ E
Erstelle Residualgraph G_f
while G_f enthält s-t-Weg do
    Bestimme s-t-Weg W
    Δ_W = min_{(u,v)∈W} c_f((u,v))
    for (u,v) ∈ W do
        if (u,v) ∈ E then
            f_(u,v) = f_(u,v) + Δ_W
        else
            f_(v,u) = f_(v,u) − Δ_W
        end if
    end for
    Erstelle Residualgraph G_f
end while
return f
```

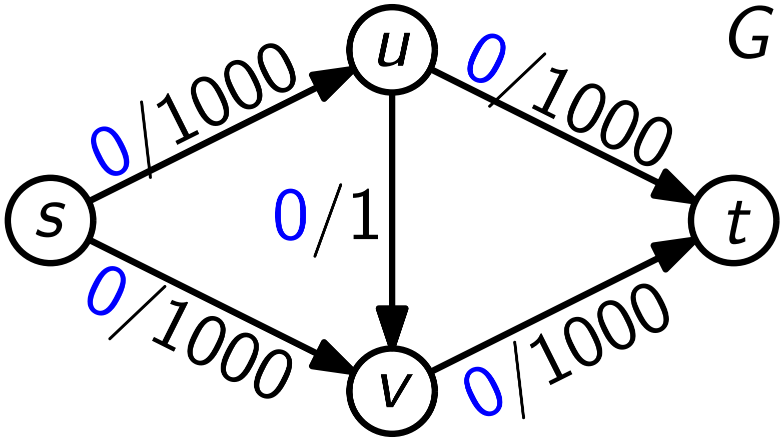
Der Algorithmus von Edmonds & Karp

Require: Gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t

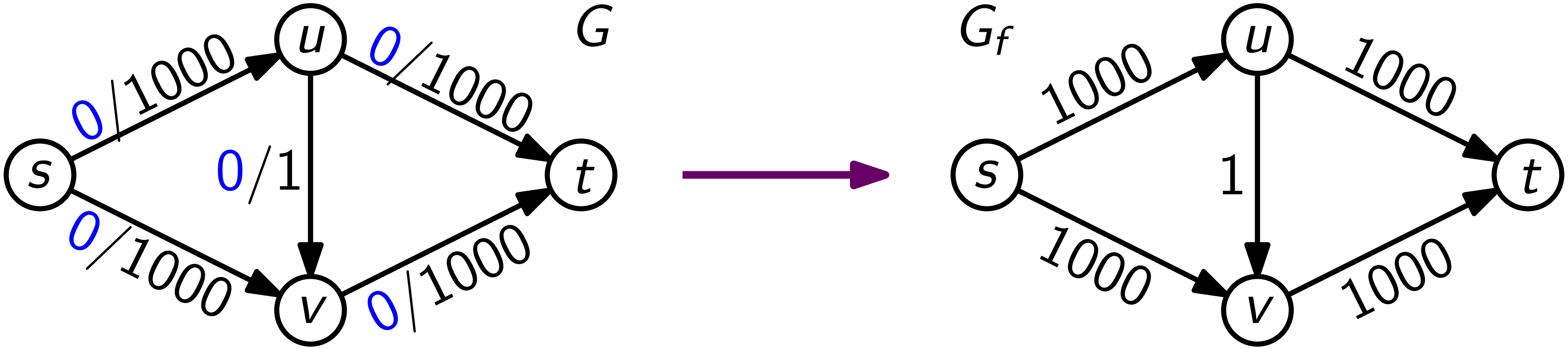
Ensure: s-t-Fluss f

Initialisiere: $f(e) = 0$ für alle $e \in E$
Erstelle Residualgraph G_f
while G_f enthält s-t-Weg **do**
    Bestimme s-t-Weg W dessen Länge minimal bezüglich Kantenanzahl ist
    $\Delta_W = \min_{(u,v) \in W} c_f((u, v))$
    for $(u, v) \in W$ **do**
        if $(u, v) \in E$ **then**
            $f_{(u,v)} = f_{(u,v)} + \Delta_W$
        else
            $f_{(v,u)} = f_{(v,u)} - \Delta_W$
        end if
    end for
    Erstelle Residualgraph G_f
end while
return f

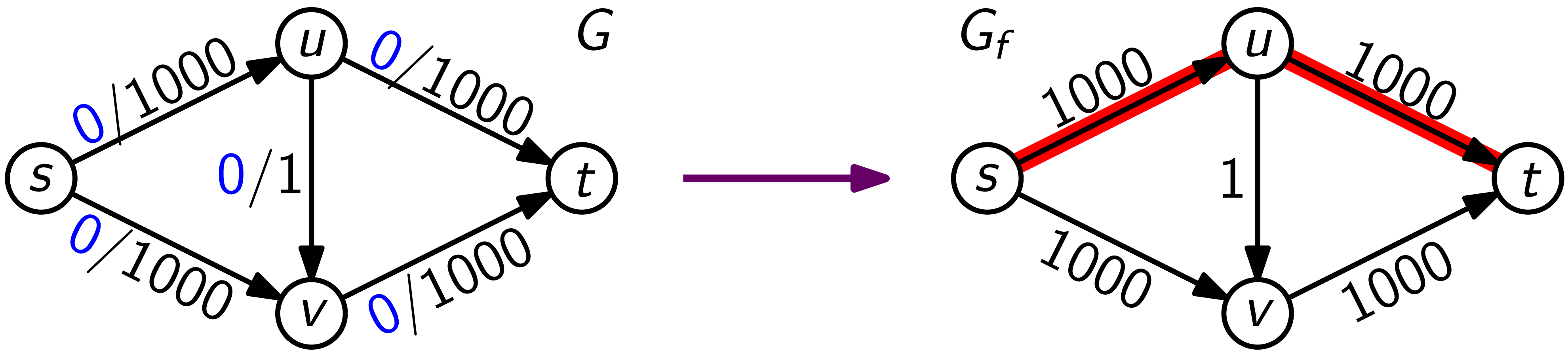
Edmonds-Karp im Beispiel



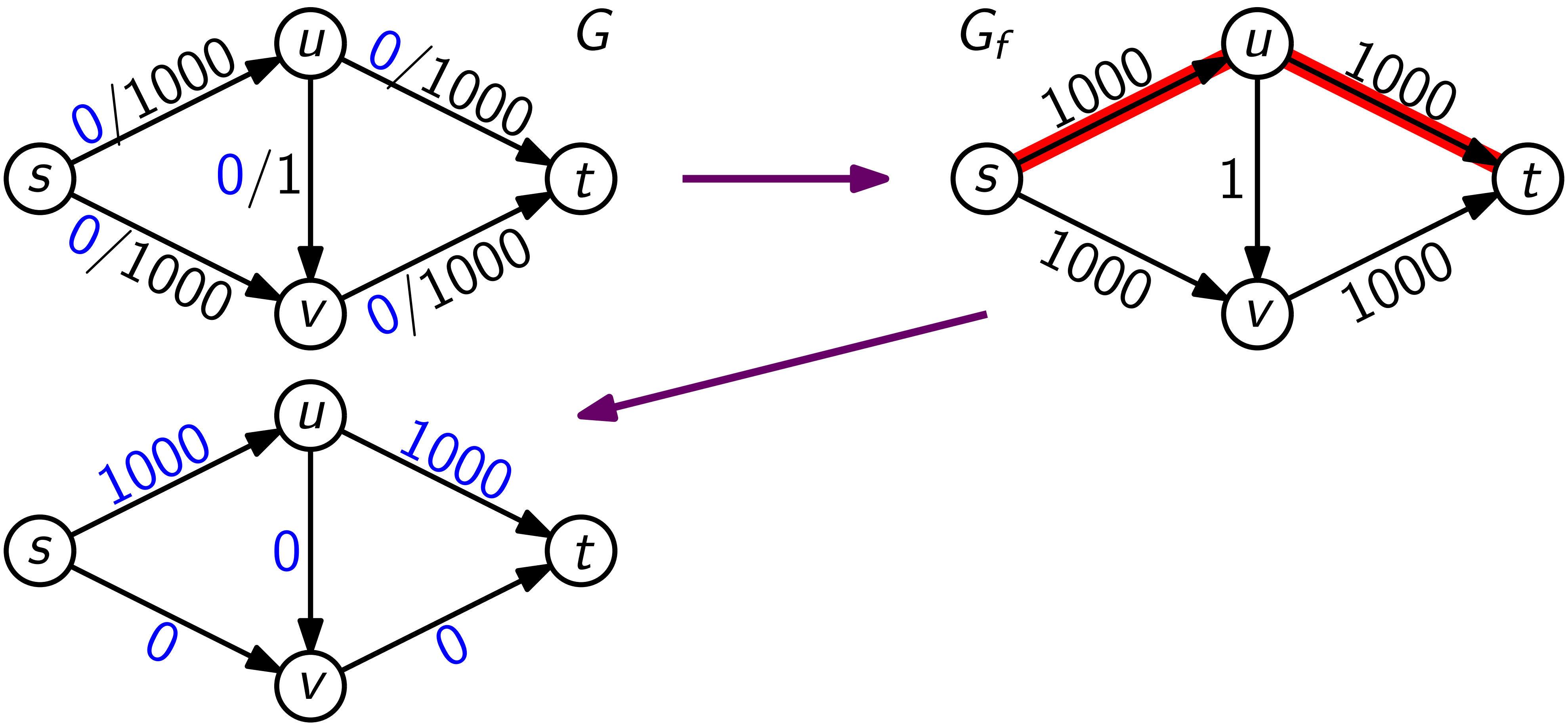
Edmonds-Karp im Beispiel



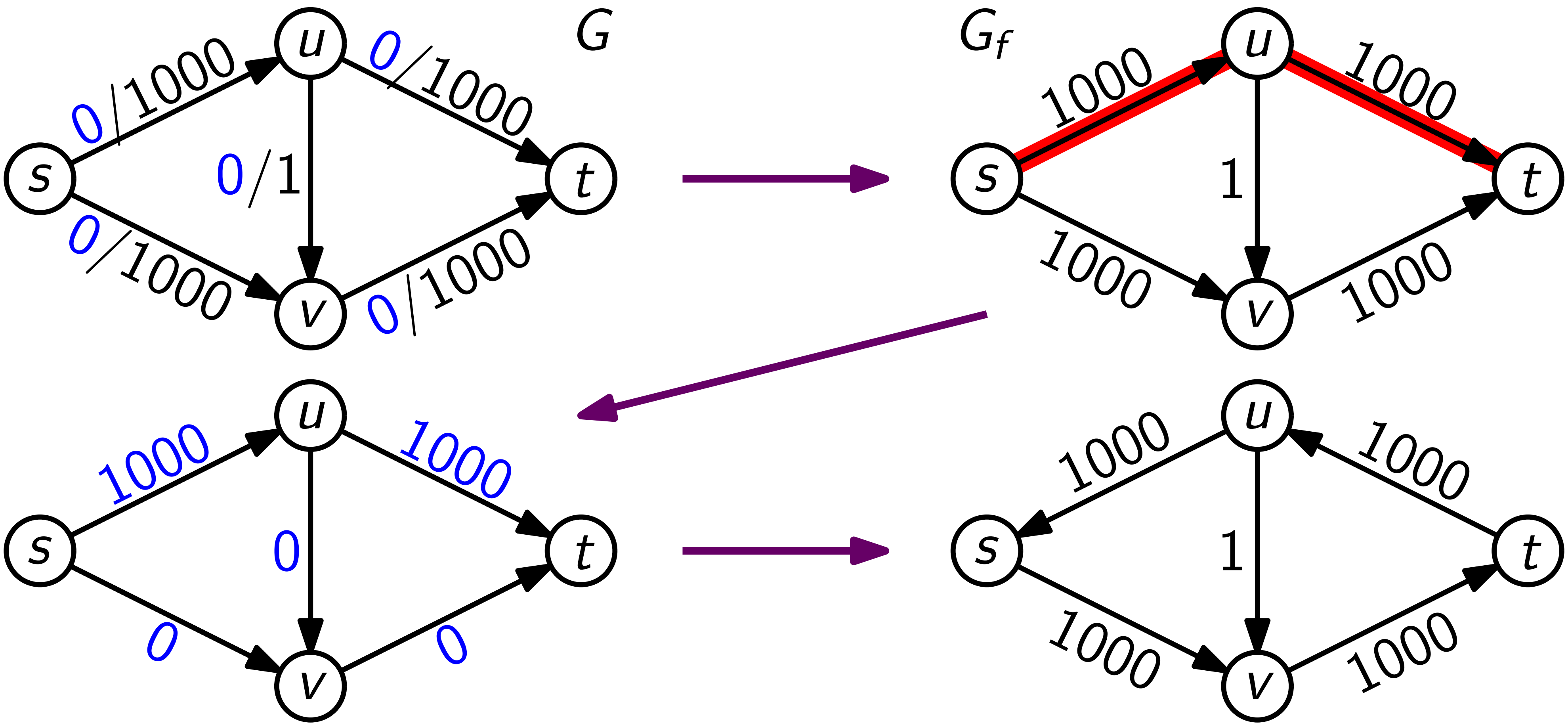
Edmonds-Karp im Beispiel



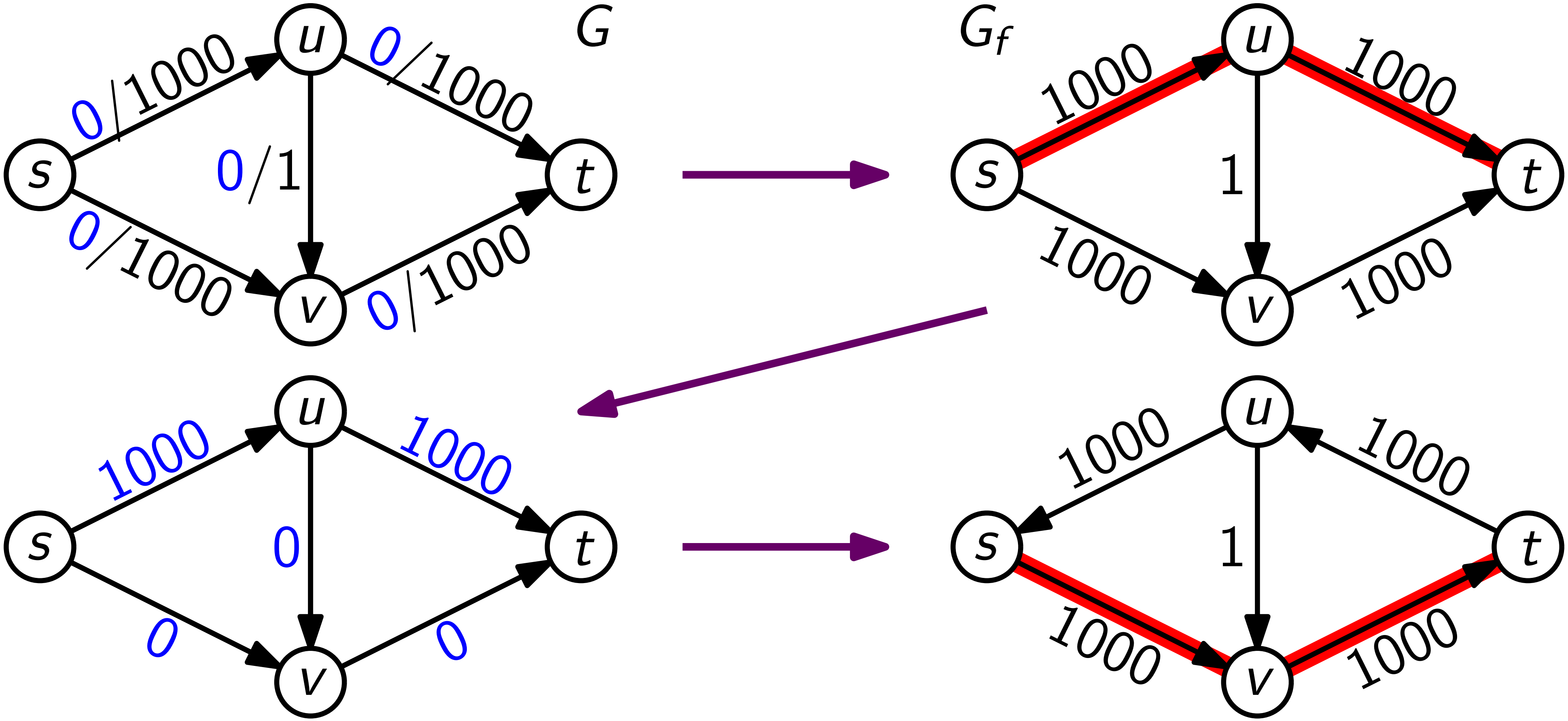
Edmonds-Karp im Beispiel



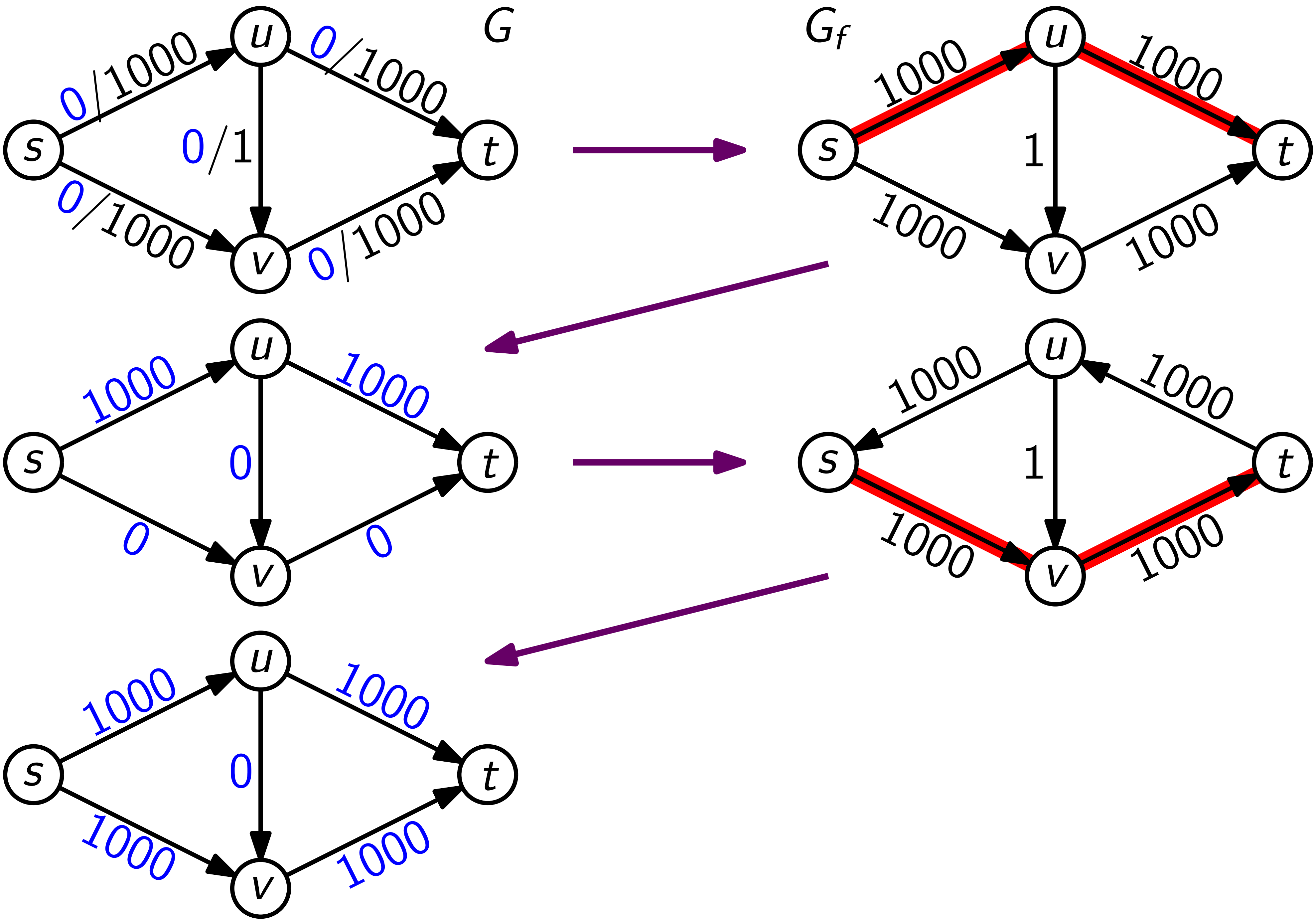
Edmonds-Karp im Beispiel



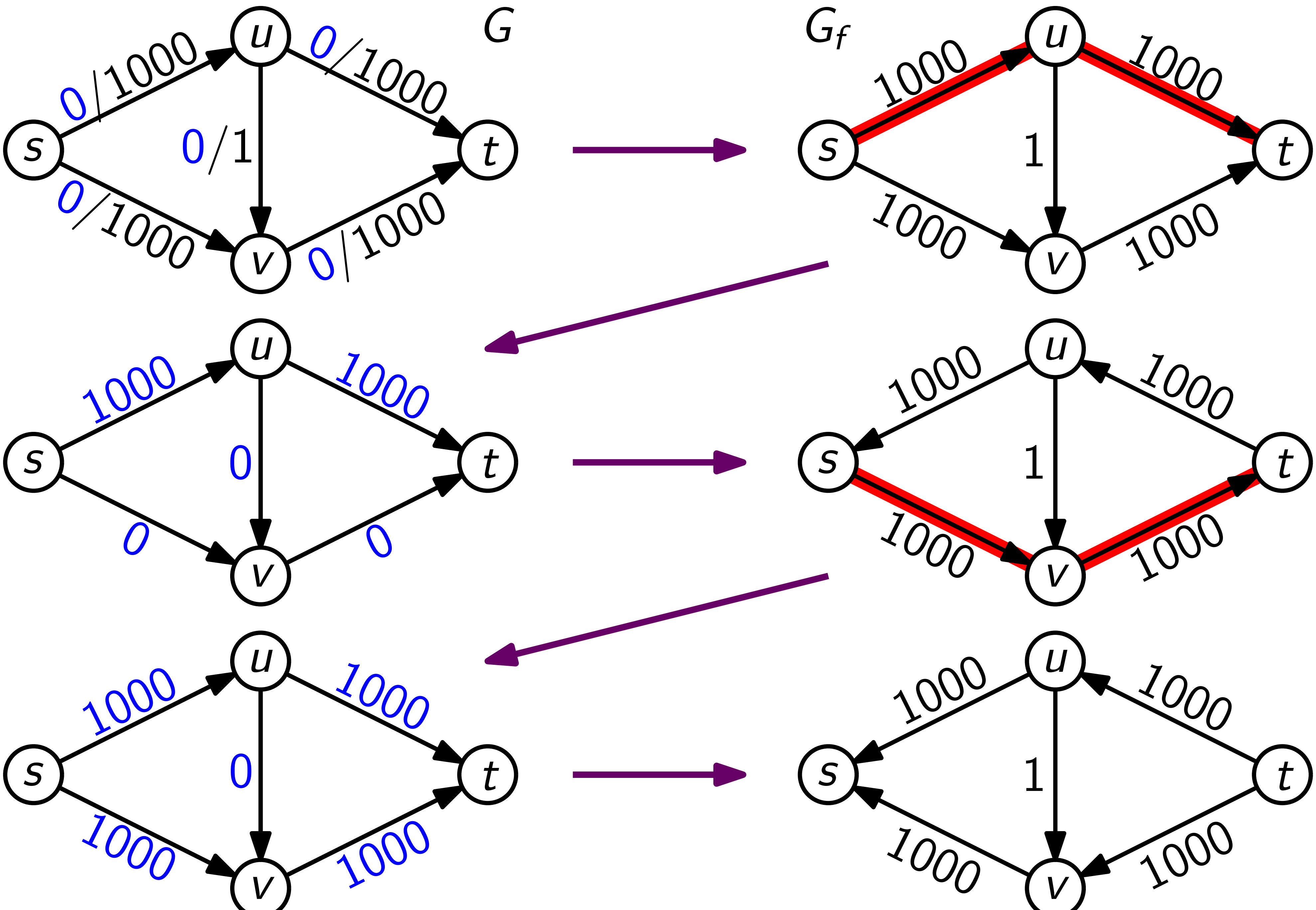
Edmonds-Karp im Beispiel



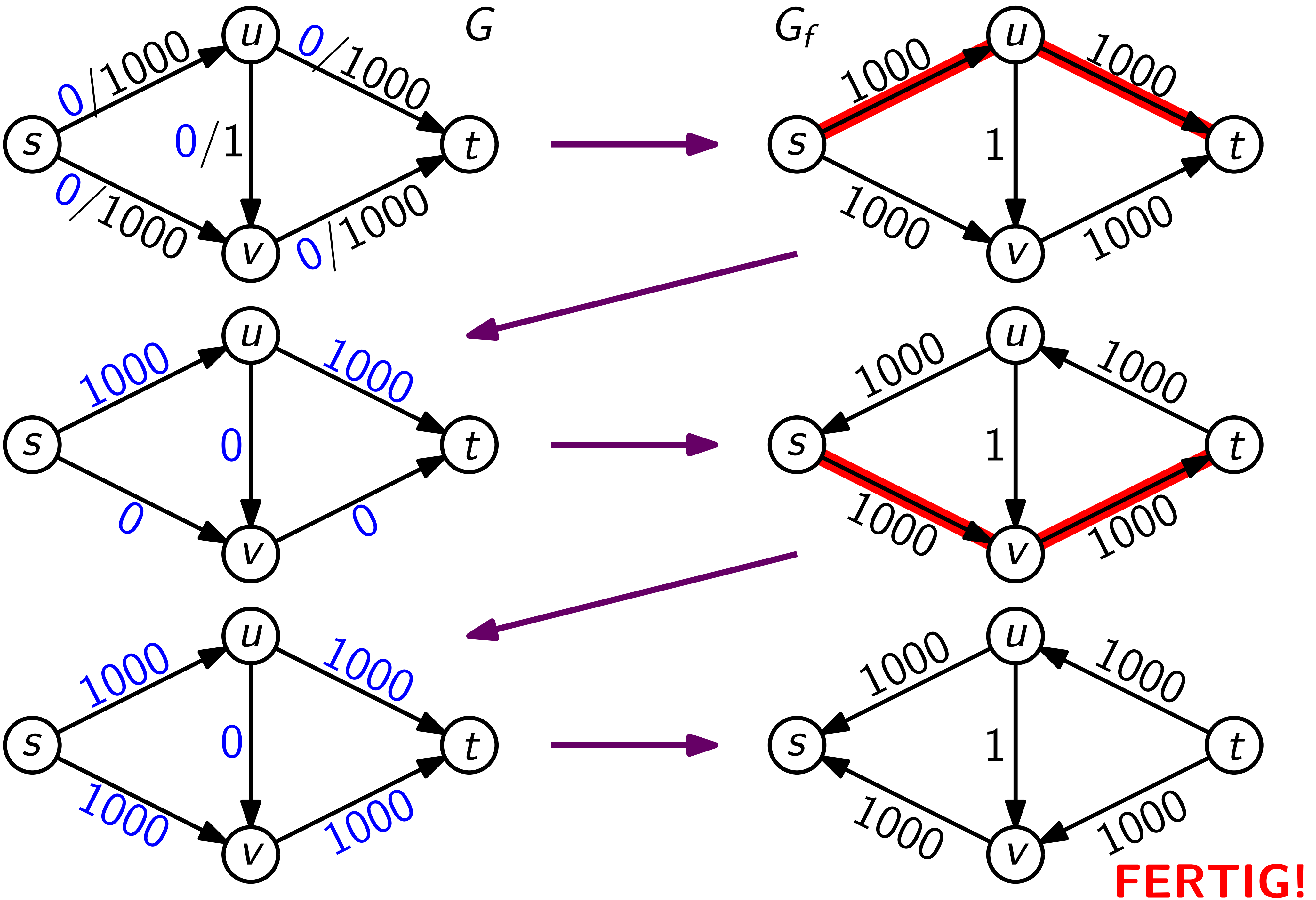
Edmonds-Karp im Beispiel



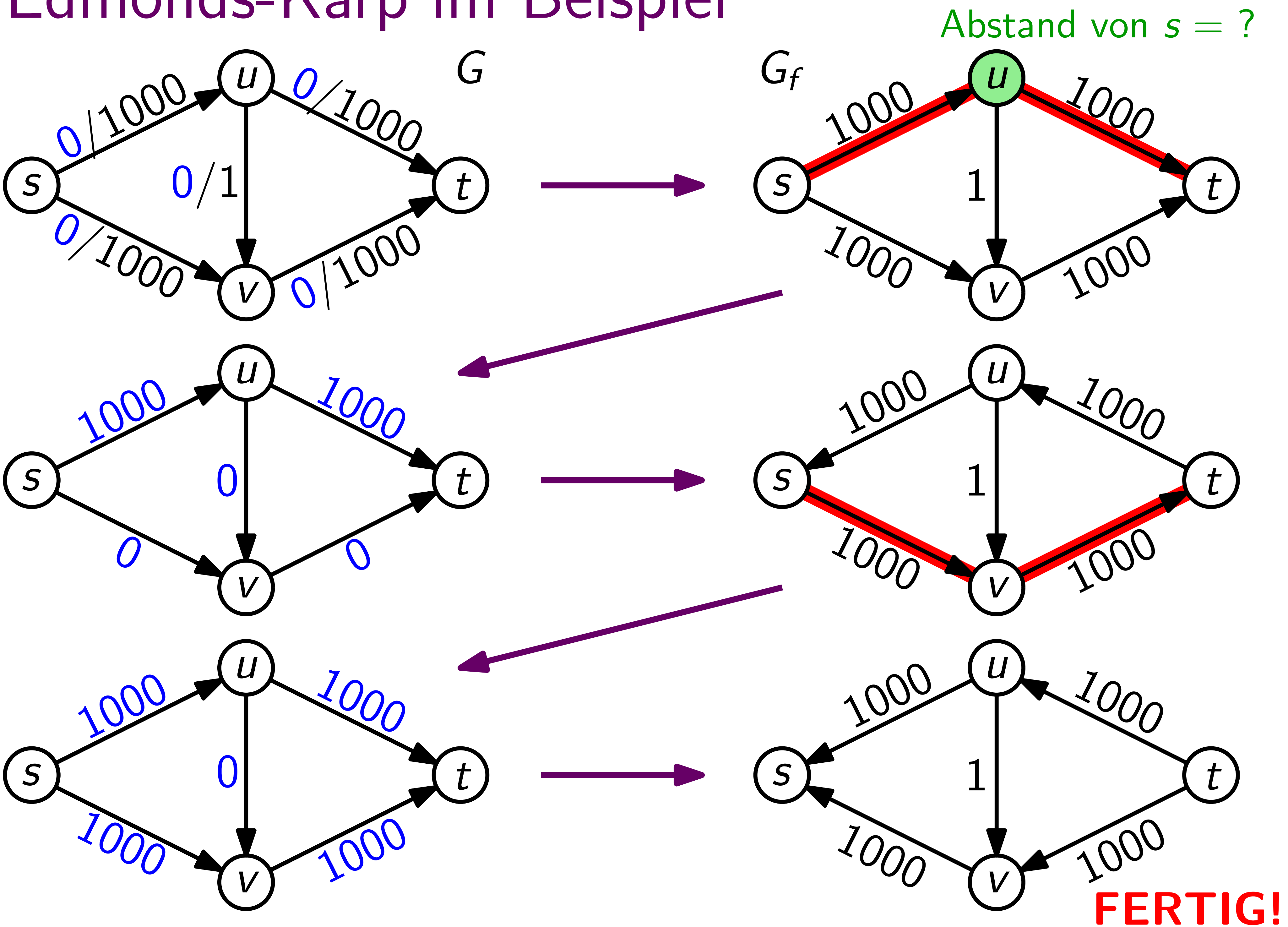
Edmonds-Karp im Beispiel



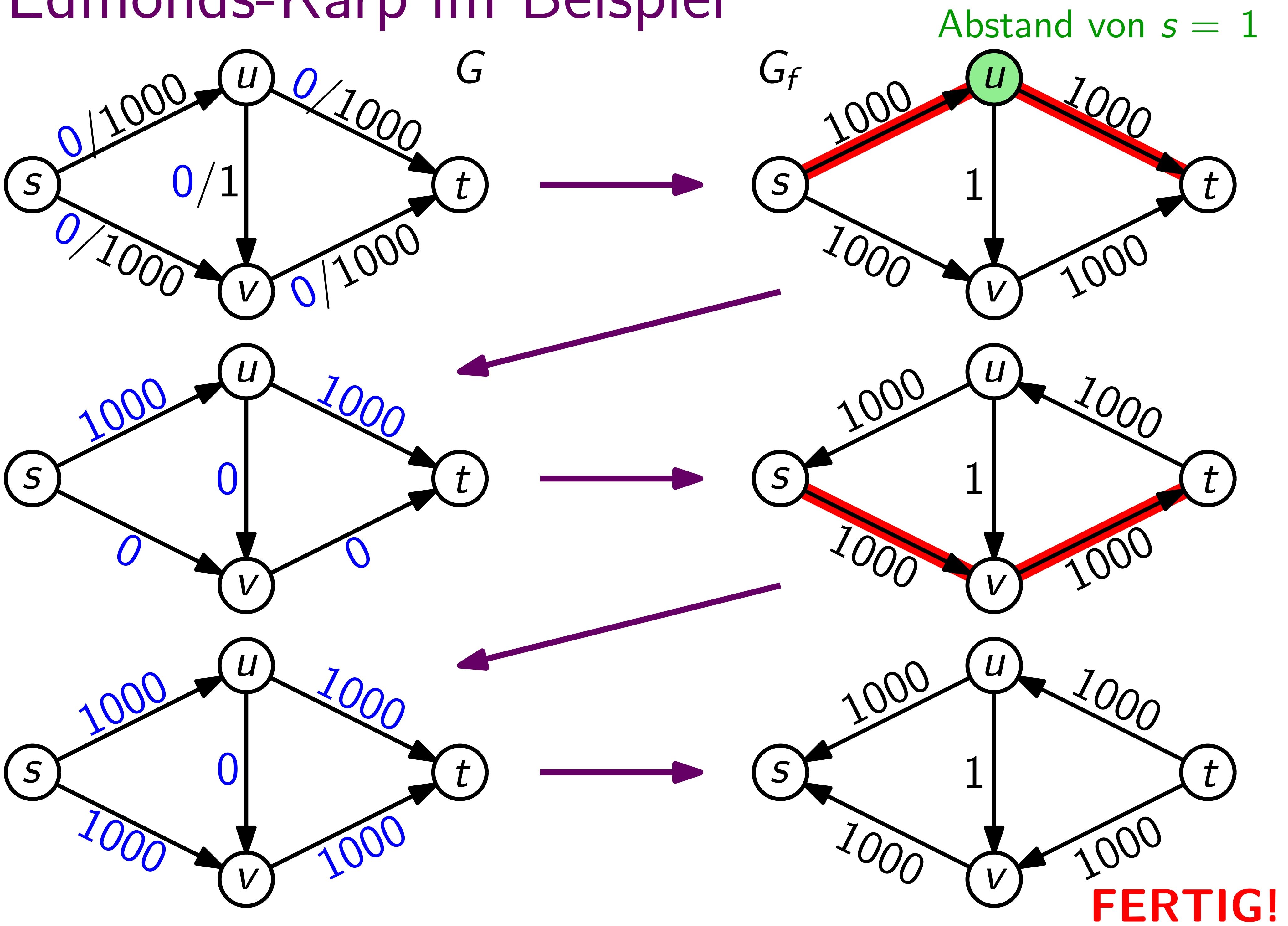
Edmonds-Karp im Beispiel



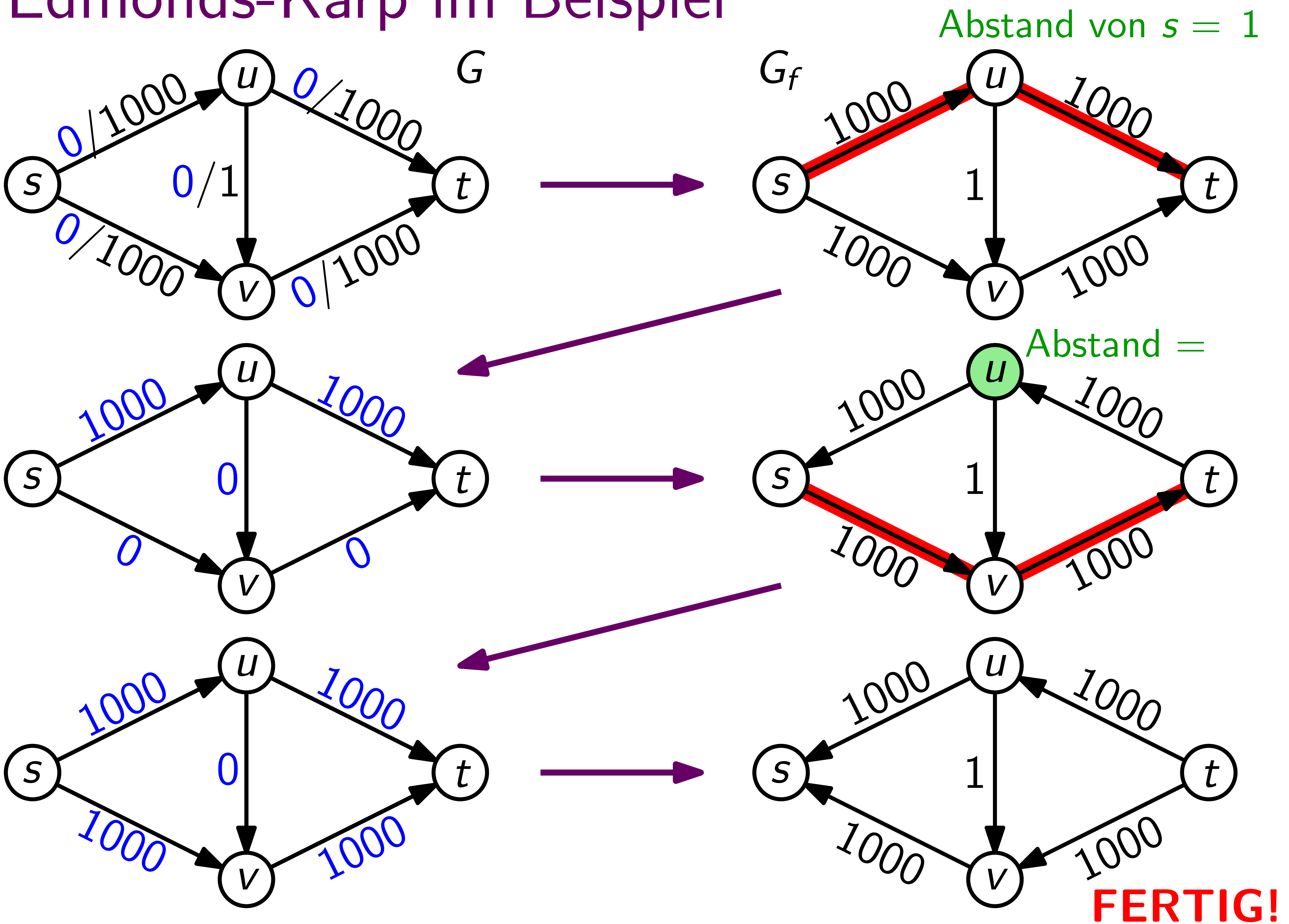
Edmonds-Karp im Beispiel



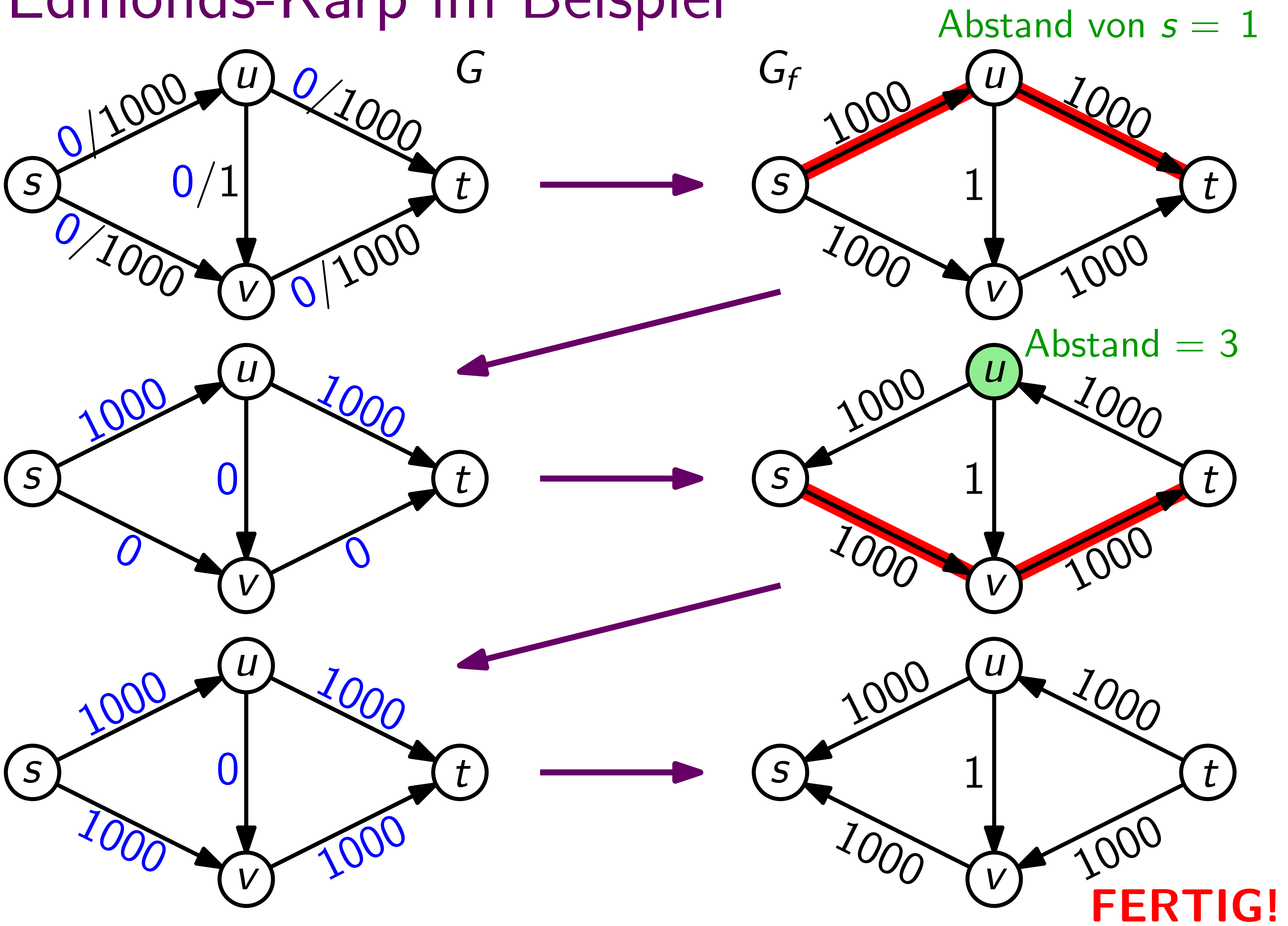
Edmonds-Karp im Beispiel



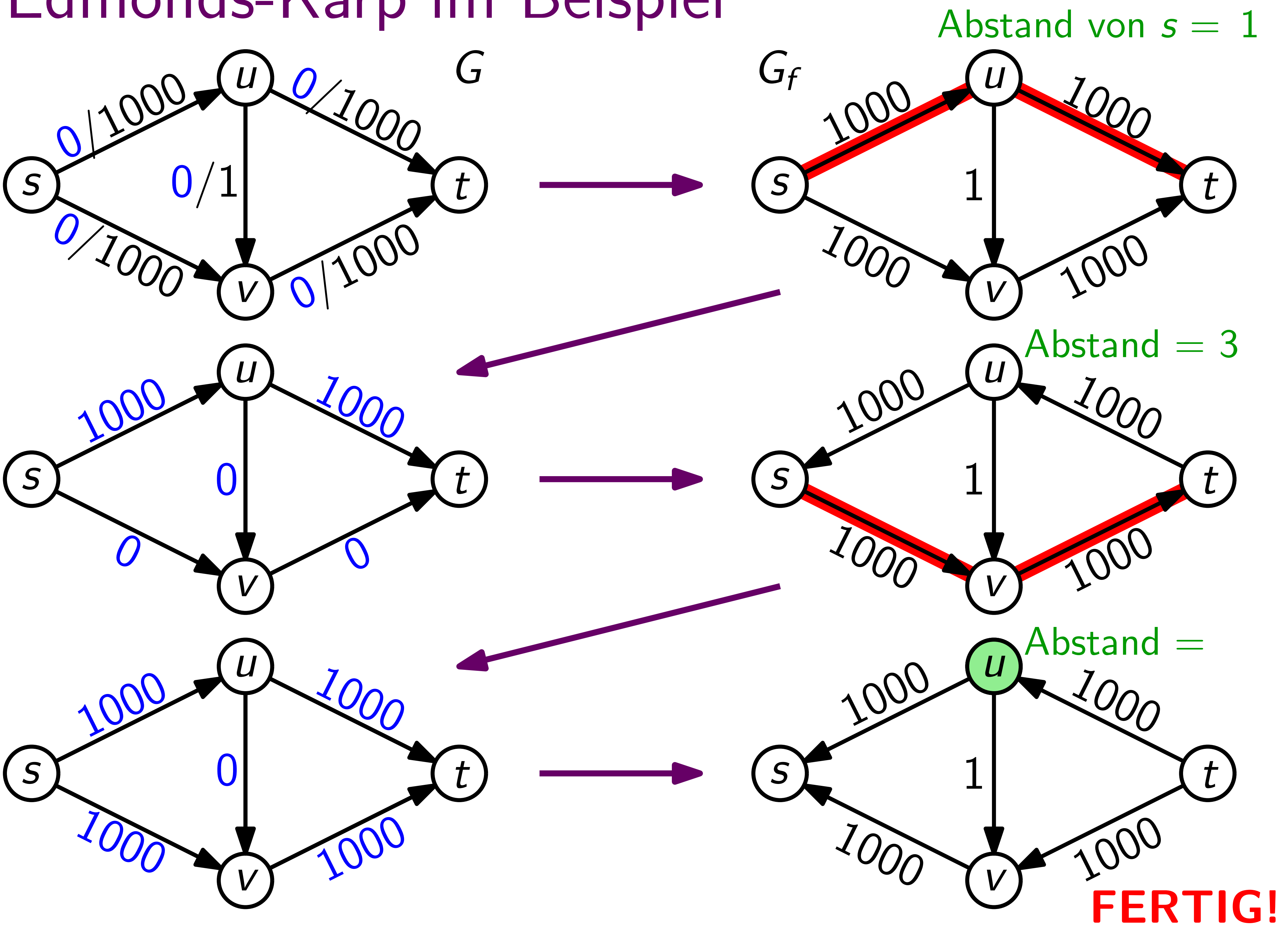
Edmonds-Karp im Beispiel



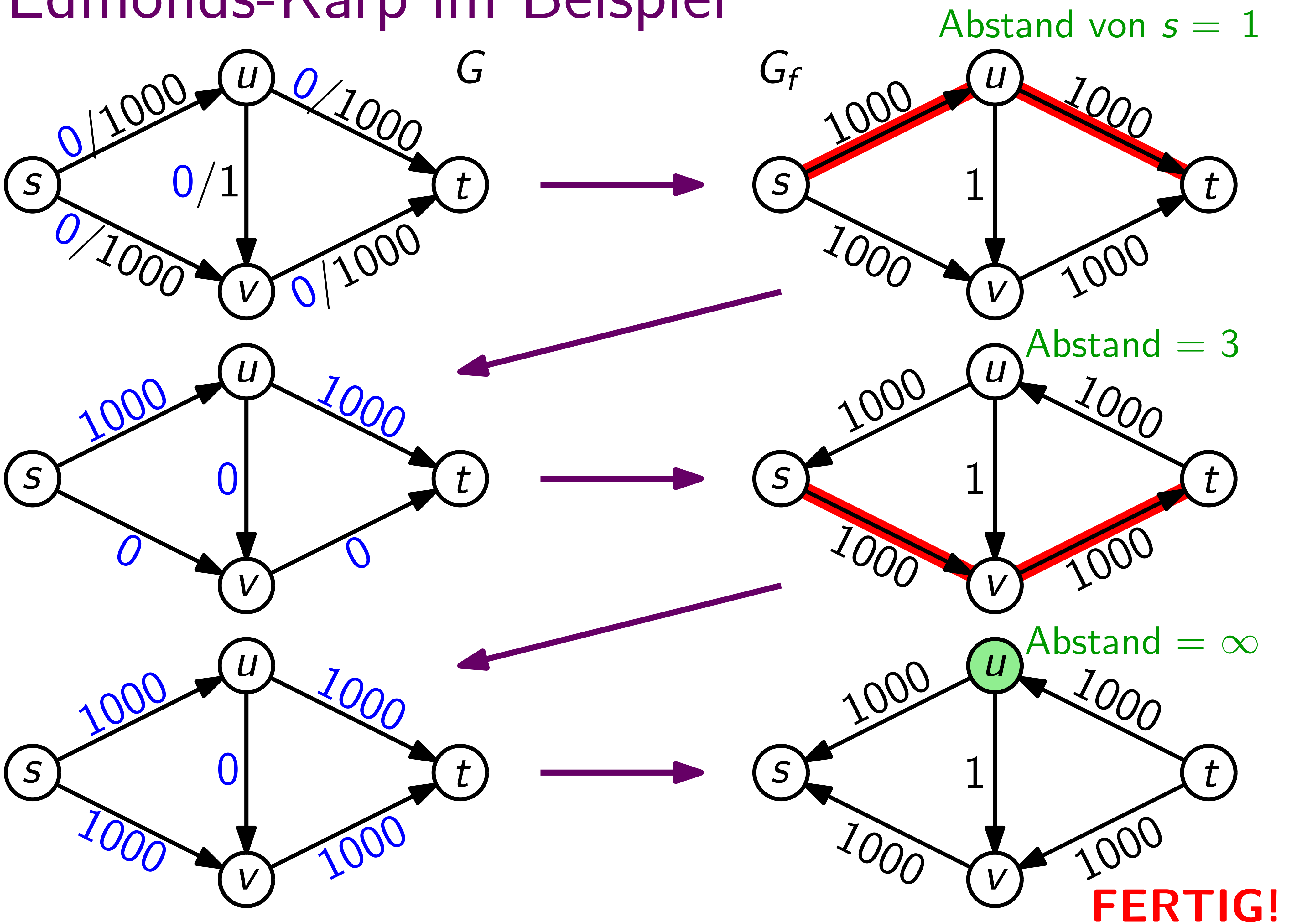
Edmonds-Karp im Beispiel



Edmonds-Karp im Beispiel



Edmonds-Karp im Beispiel



Anzahl Flusserhöhungen & Laufzeit

Satz
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Kantenkapazitäten $c(e)$ für $e \in E$, Quelle s, Senke t.
Der Edmonds-Karp-Algorithmus findet einen maximalen s-t-Fluss in G in $O(|V||E|^2)$ Zeit.

Beweis:

zu zeigen: Der Edmonds-Karp-Algorithmus führt $O(|V||E|)$ Flussvergrößerungen durch.
$\rightarrow$ siehe Extrafolien im WueCampus

Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem - Beweis

Max-Flow-Min-Cut Theorem
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Beweis.

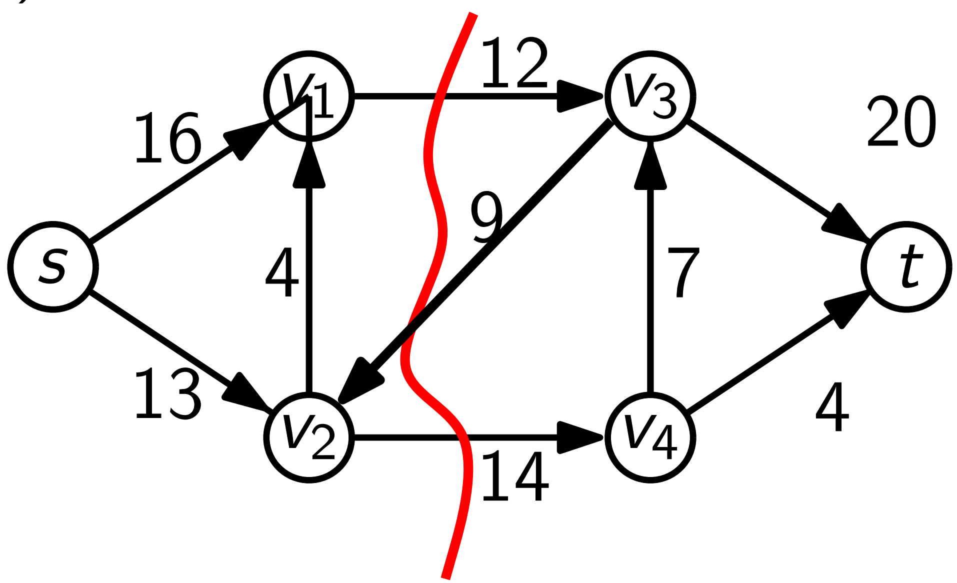
Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem - Beweis

Max-Flow-Min-Cut Theorem
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Beweis.

Korollar Y:
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss und (S, T) ein s-t-Schnitt.
Dann ist $|f| \leq c(\delta^+(S))$.



Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem - Beweis

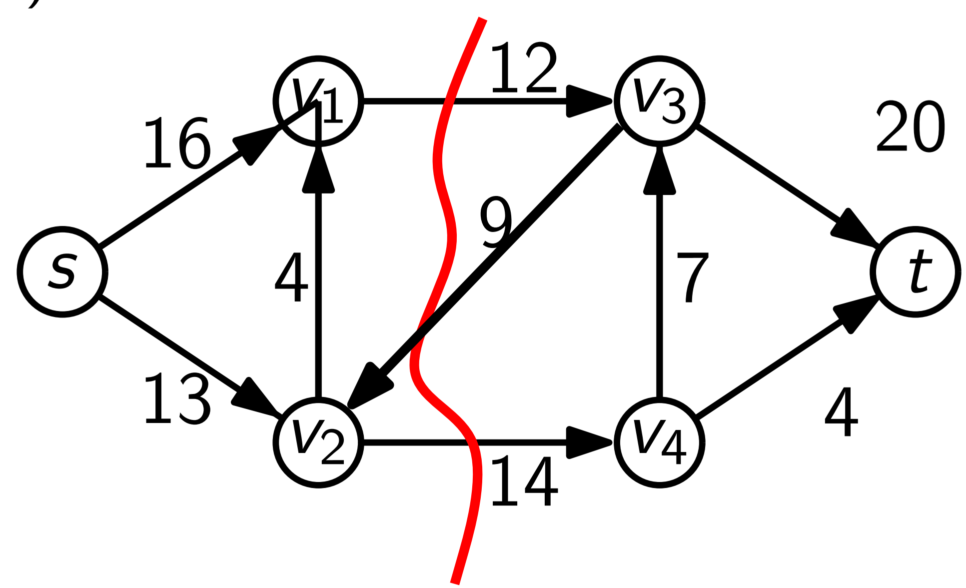
Max-Flow-Min-Cut Theorem
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Beweis.

Korollar Y:
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss und (S, T) ein s-t-Schnitt.
Dann ist $|f| \leq c(\delta^+(S)$.

zu zeigen: es gibt zulässigen Fluss f^* und Schnitt (S^*, T^*) mit $|f^*| = \delta^+(S^*)$



Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem - Beweis

Max-Flow-Min-Cut Theorem
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Beweis.
zu zeigen: es gibt zulässigen Fluss f^* und Schnitt (S^*, T^*) mit $|f^*| = c(\delta^+(S^*))$

Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem - Beweis

Max-Flow-Min-Cut Theorem
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Beweis.
zu zeigen: es gibt zulässigen Fluss f^* und Schnitt (S^*, T^*) mit $|f^*| = c(\delta^+(S^*))$
Sei f^* ein maximaler Fluss.

Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem - Beweis

Max-Flow-Min-Cut Theorem
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Beweis.
zu zeigen: es gibt zulässigen Fluss f^* und Schnitt (S^*, T^*) mit $|f^*| = c(\delta^+(S^*))$

Sei f^* ein maximaler Fluss.

Sei $S^* := \{v \in V : v \text{ ist in } G_{f^*} \text{ von } s \text{ erreichbar}\}$,

Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem - Beweis

Max-Flow-Min-Cut Theorem
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Beweis.
zu zeigen: es gibt zulässigen Fluss f^* und Schnitt (S^*, T^*) mit $|f^*| = c(\delta^+(S^*))$

Sei f^* ein maximaler Fluss.

Sei $S^* := \{v \in V : v \text{ ist in } G_{f^*} \text{ von } s \text{ erreichbar}\}$, (S^*, T^*) ist s-t-Schnitt.

Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem - Beweis

Max-Flow-Min-Cut Theorem
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Beweis.
zu zeigen: es gibt zulässigen Fluss f^* und Schnitt (S^*, T^*) mit $|f^*| = c(\delta^+(S^*))$

Sei f^* ein maximaler Fluss.

Sei $S^* := \{v \in V : v \text{ ist in } G_{f^*} \text{ von } s \text{ erreichbar}\}$, (S^*, T^*) ist s-t-Schnitt.

Betrachte $(u, v) \in \delta^-(S^*)$:

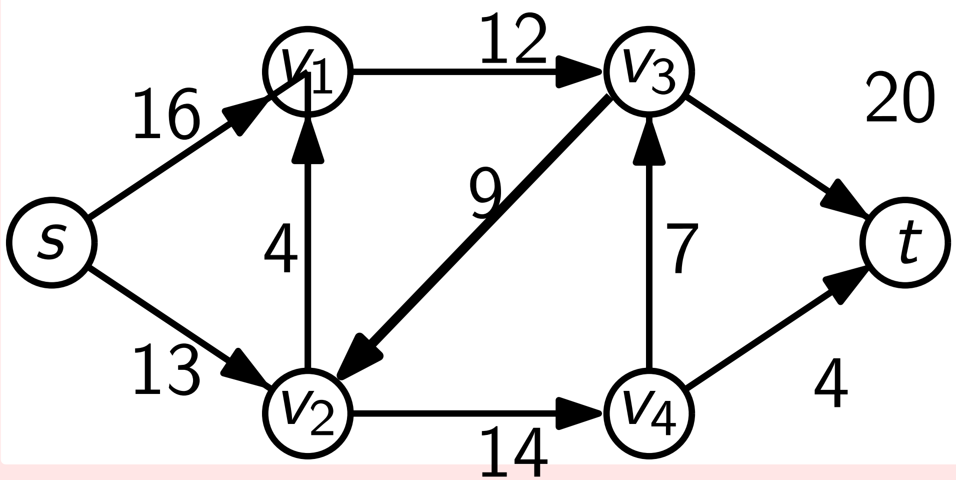
$$\begin{aligned} \delta^-(S) &= \textstyle\sum_{e \in \delta^+(S^*)} f^*(e) \\ &= \textstyle\sum_{e \in \delta^+(S)} f^*(e) - \underbrace{\displaystyle\sum_{e \in \delta^-(S)} f^*(e)}_{0} = f^*(\delta^+(S^*)) - f^{(}\delta^-(S^*)) \end{aligned}$$

Lemma X

Zusammenhang Flüsse und Schnitte 2

Maximaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss f, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$

Max-Flow-Min-Cut Theorem
Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:



$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

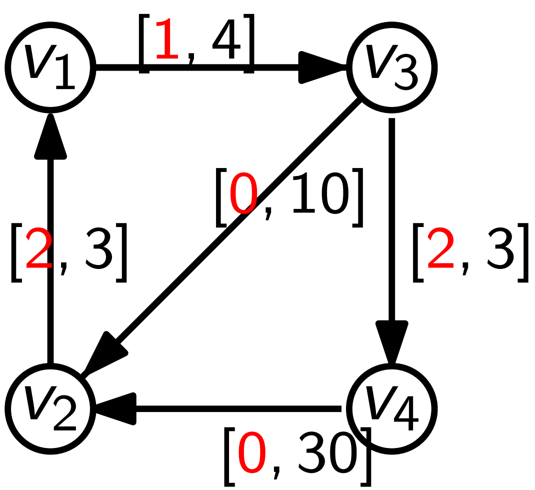
Minimaler Schnitt
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: s-t Schnitt mit minimaler Kapazität $c(\delta^+(S))$.

Schnellere Algorithmen für maximale Flüsse

Methode	*Laufzeit* $O(\cdot)$	*Autoren*
	Allgemeine gerichtete Graphen	
shortest resid. s-t path	VE^2	Dinic '70, Ed. & Karp '72
push relabel	V^2E	Goldberg '87
relabel to front	V^3	Goldberg & Tarjan '88
	$VE\log(V^2/E+2)$	— " —
blocking flow	$\min(V^{2/3}, E^{1/2}) \cdot E \cdot$	Goldberg & Rao '98
	$\cdot \log(V^2/E+2) \cdot \log C$,	wobei $C = \sum_{e \in E} c(e)$
new	VE	Orlin '13
	s-t-planare Graphen	
shortest path in dual	V	Hassin '81
		+ Henzinger et al. '97
	Planare Graphen	
leftmost resid. s-t path	$V\log V$	Borradaile & Klein '06
+ vertex capacities	$V\log V$	Kaplan & Nussbaum '09

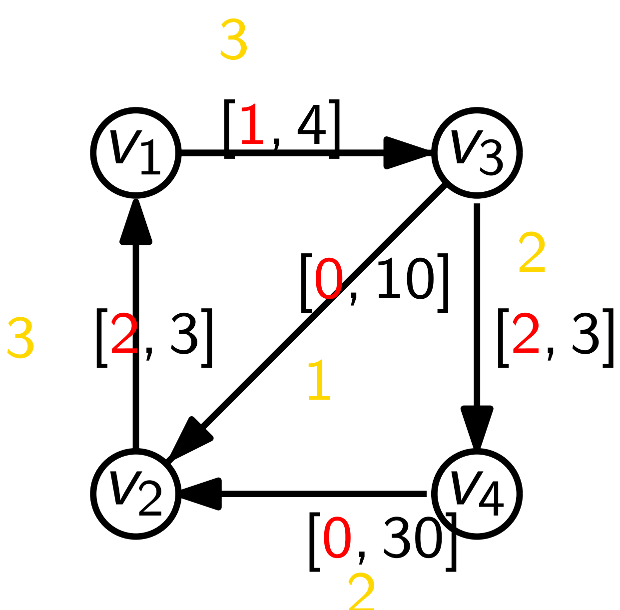
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \le f(e) \le c(e)$



Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

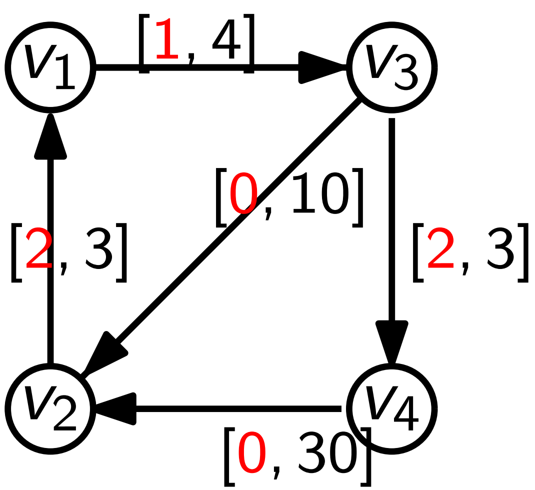
Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$



Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

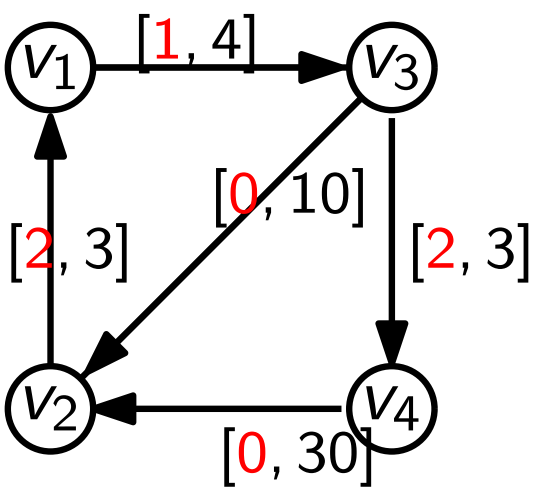
Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$:

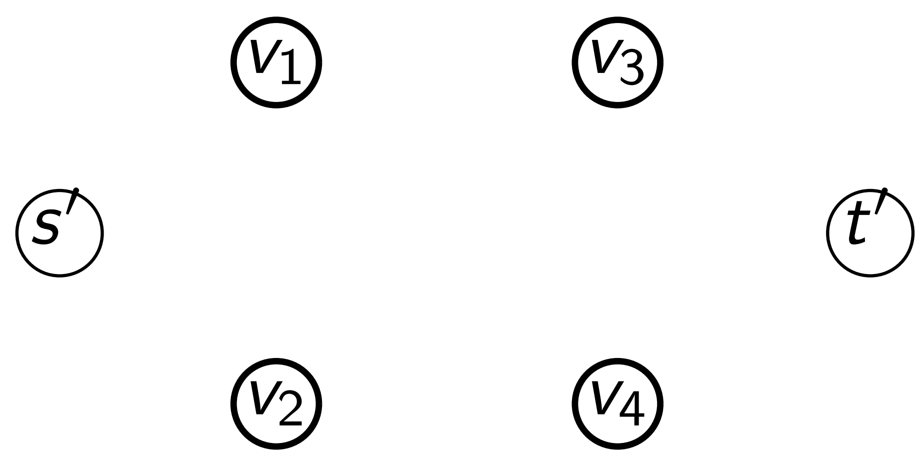


Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$: $V' = V \cup \{s', t'\}$,

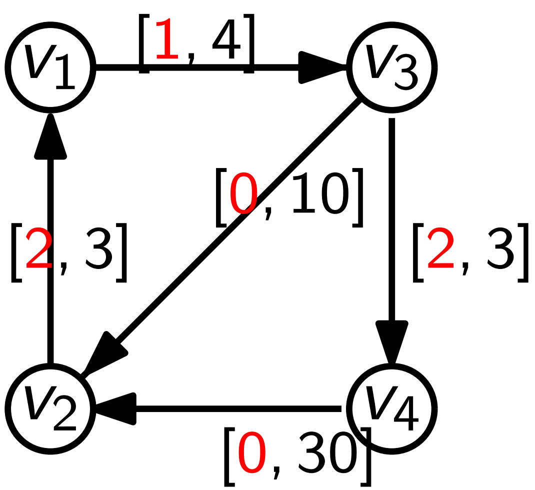


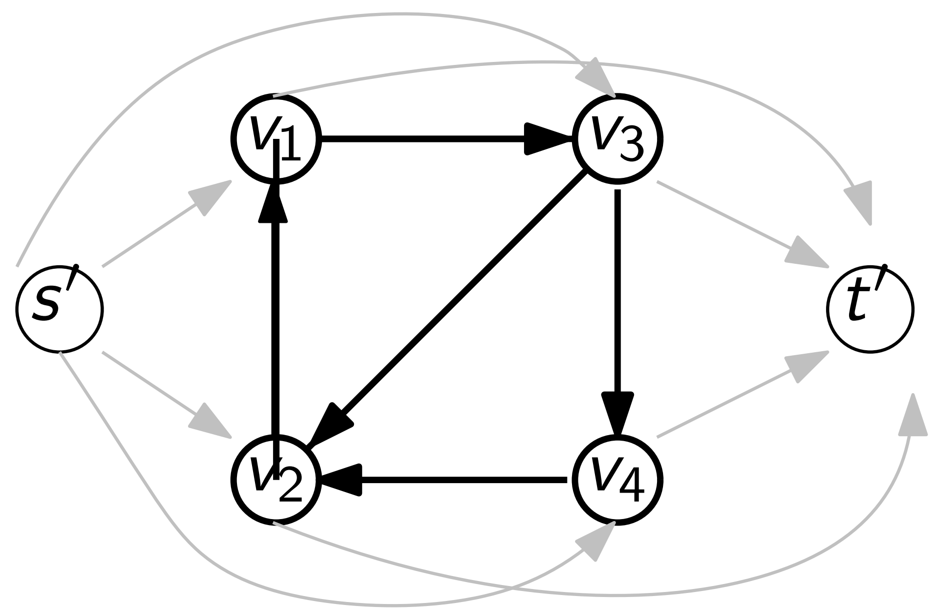


Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$: $V' = V \cup \{s', t'\}$,
$E' = E \cup \{(s', v) : v \in V\} \cup \{(v, t') : v \in V\}$





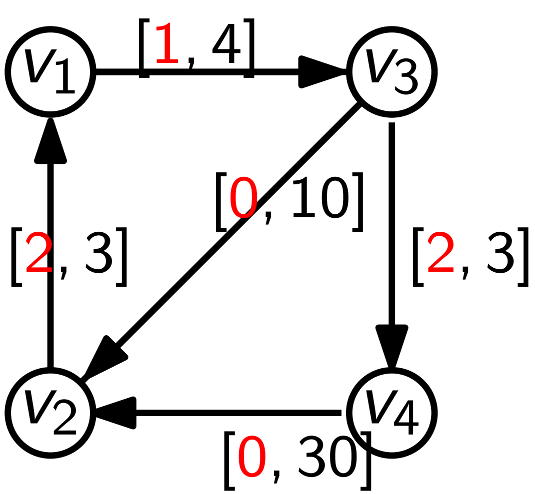
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

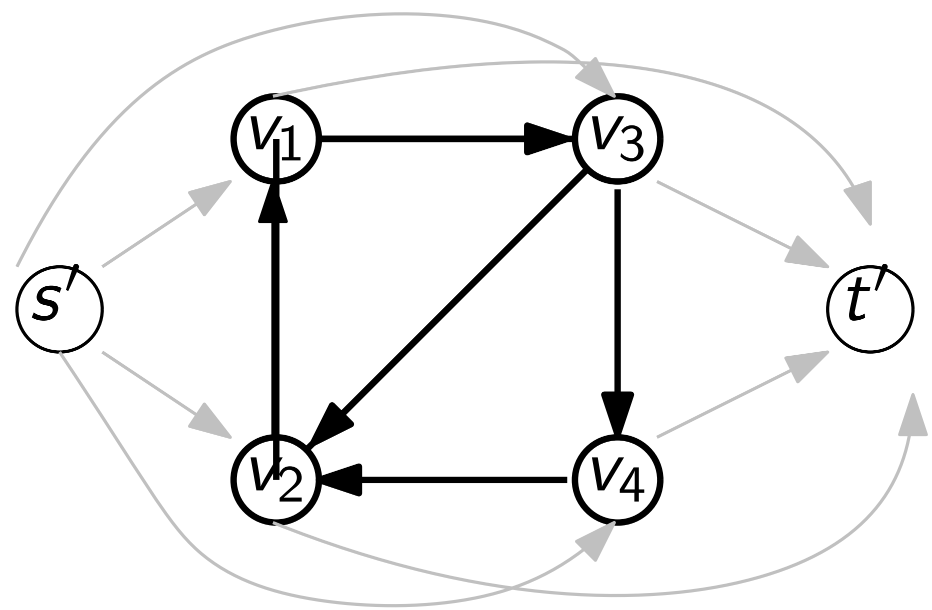
Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$: $V' = V \cup \{s', t'\}$,

$E' = E \cup \{(s', v) : v \in V\} \cup \{(v, t') : v \in V\}$

$l'(e) := 0 \; \forall e \in E'$

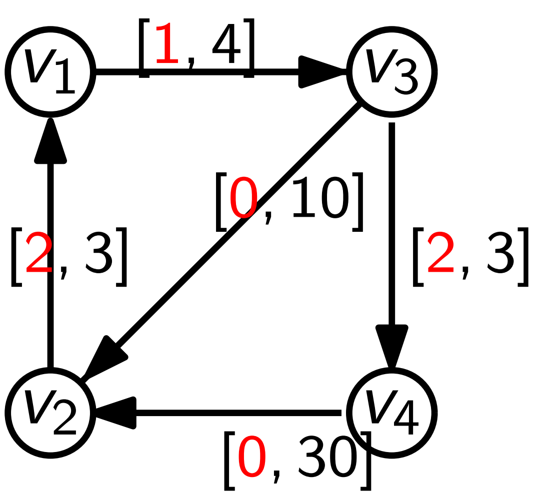


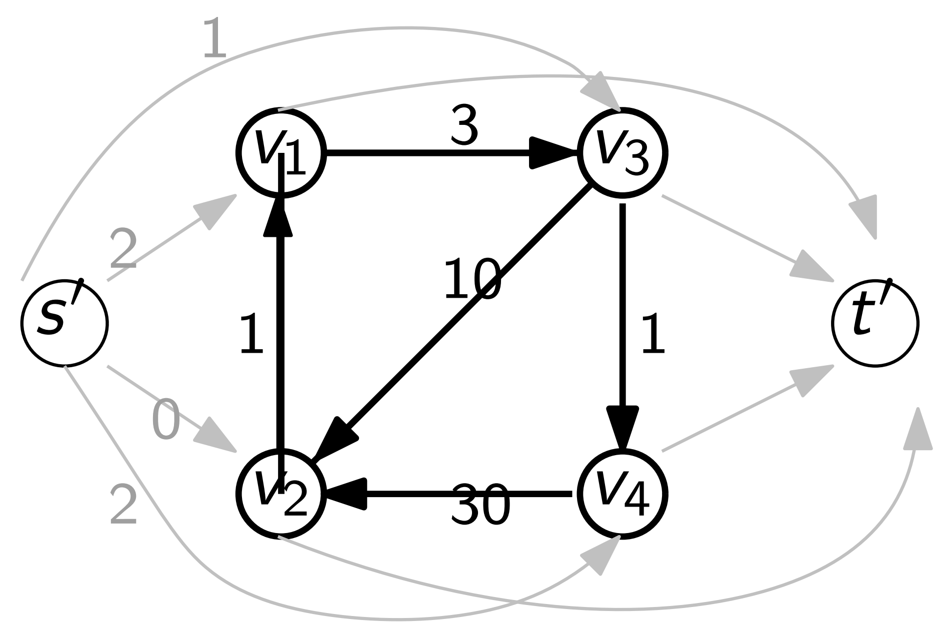


Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$: $V' = V \cup \{s', t'\}$,
$E' = E \cup \{(s', v) : v \in V\} \cup \{(v, t') : v \in V\}$
$l'(e) := 0 \ \forall e \in E' \quad c'(e) := c(e) - l(e) \ \forall e \in E$



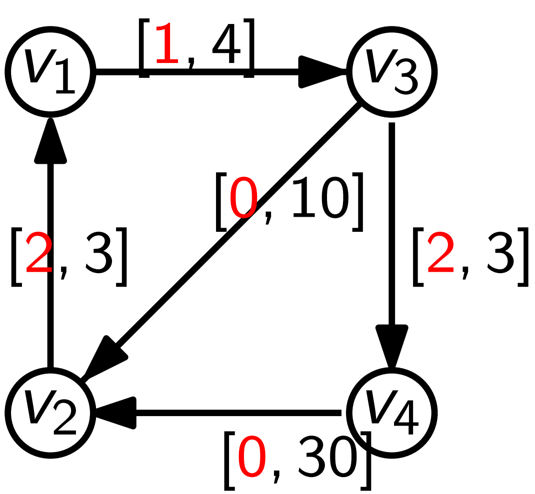


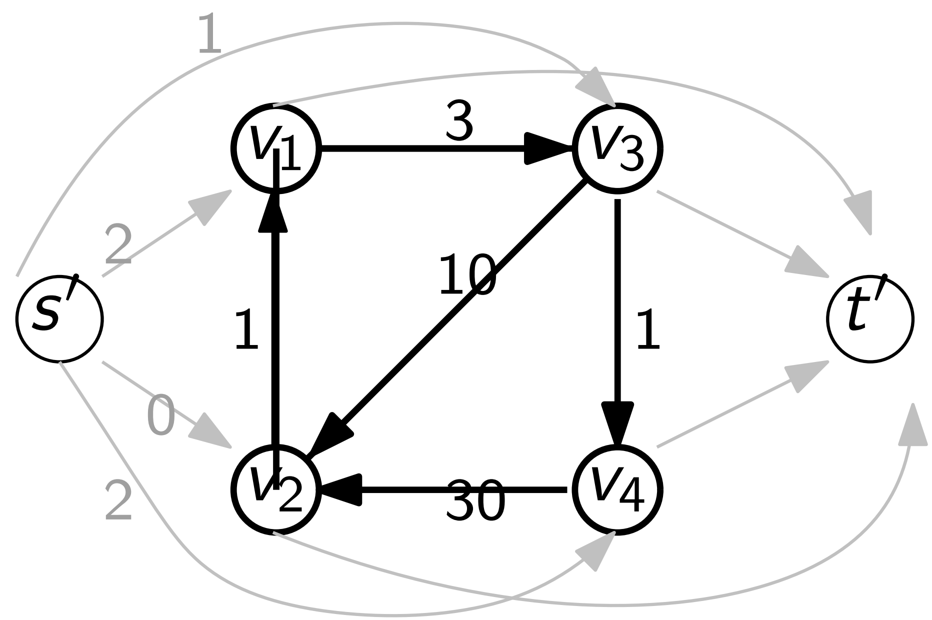
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$: $V' = V \cup \{s', t'\}$,
$E' = E \cup \{(s', v) : v \in V\} \cup \{(v, t') : v \in V\}$
$l'(e) := 0 \ \forall e \in E' \quad c'(e) := c(e) - l(e) \ \forall e \in E$

für alle $v \in V$: $c'((s', v)) = \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)$



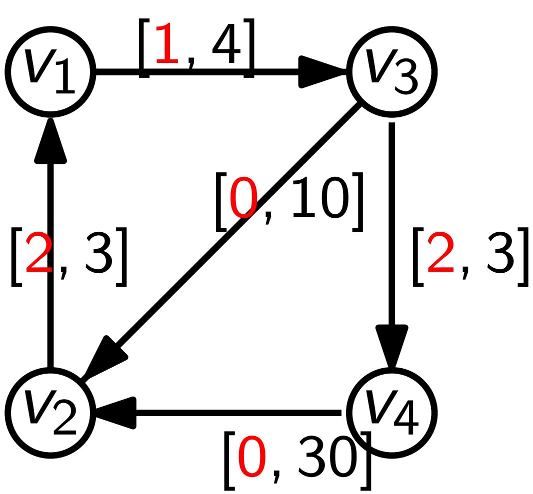


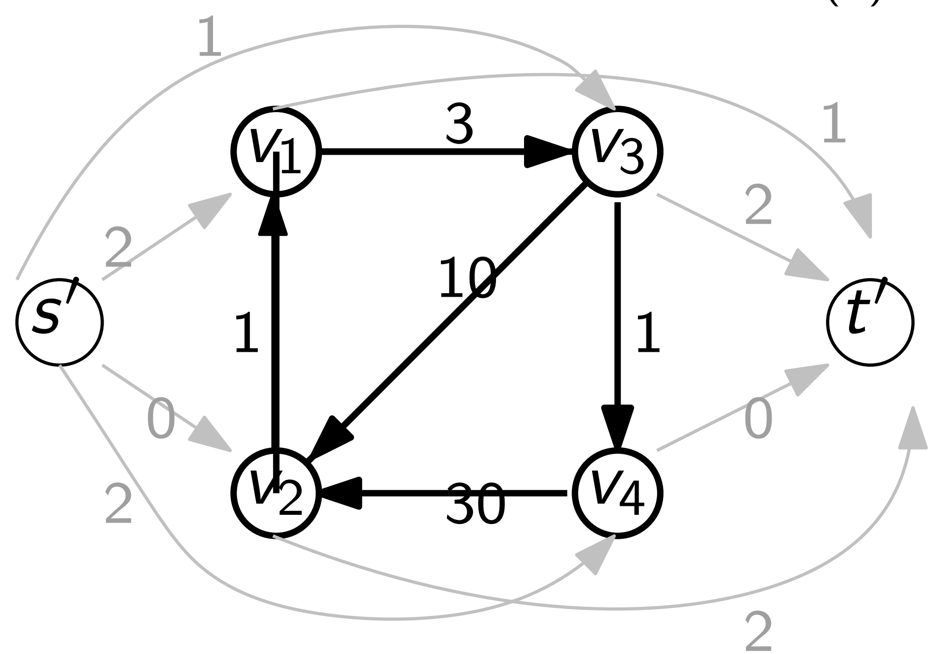
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$: $V' = V \cup \{s', t'\}$,
$E' = E \cup \{(s', v) : v \in V\} \cup \{(v, t') : v \in V\}$
$l'(e) := 0 \ \forall e \in E' \quad c'(e) := c(e) - l(e) \ \forall e \in E$

für alle $v \in V$: $c'((s', v)) = \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)$ und $c'((v, t') = \sum_{e \in \delta^+(v)} l(e)$



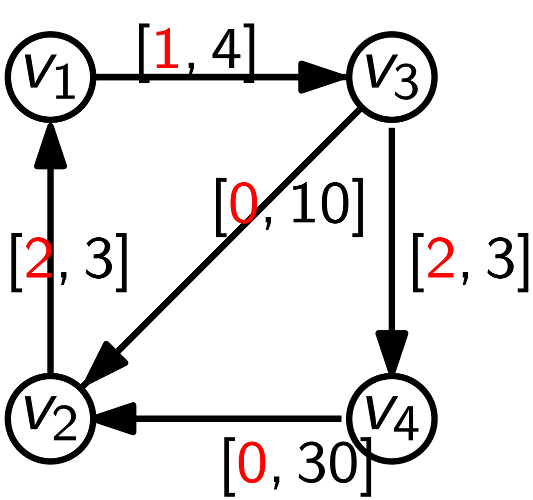


Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

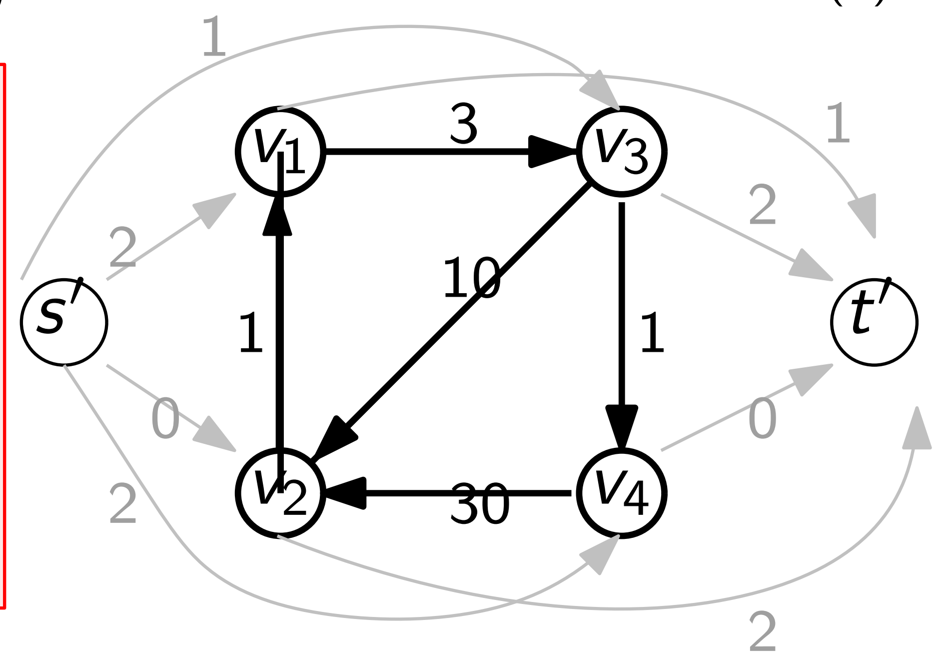
Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$: $V' = V \cup \{s', t'\}$,
$E' = E \cup \{(s', v) : v \in V\} \cup \{(v, t') : v \in V\}$
$l'(e) := 0 \; \forall e \in E' \quad c'(e) := c(e) - l(e) \; \forall e \in E$

für alle $v \in V$: $c'((s', v)) = \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)$ und $c'((v, t') = \sum_{e \in \delta^+(v)} l(e)$



Lemma
Es gibt eine zulässige Strömung in G
$\Leftrightarrow$
Der maximale s'-t'-Fluss in G' hat Wert $\sum_{e \in E} l(e)$.

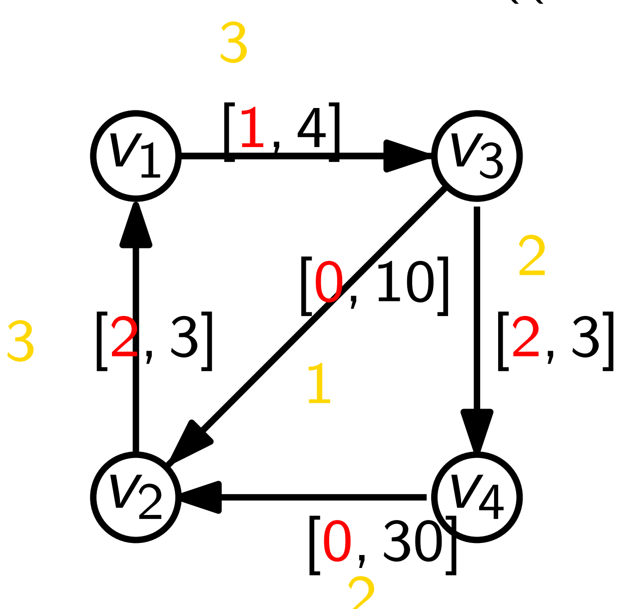


Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

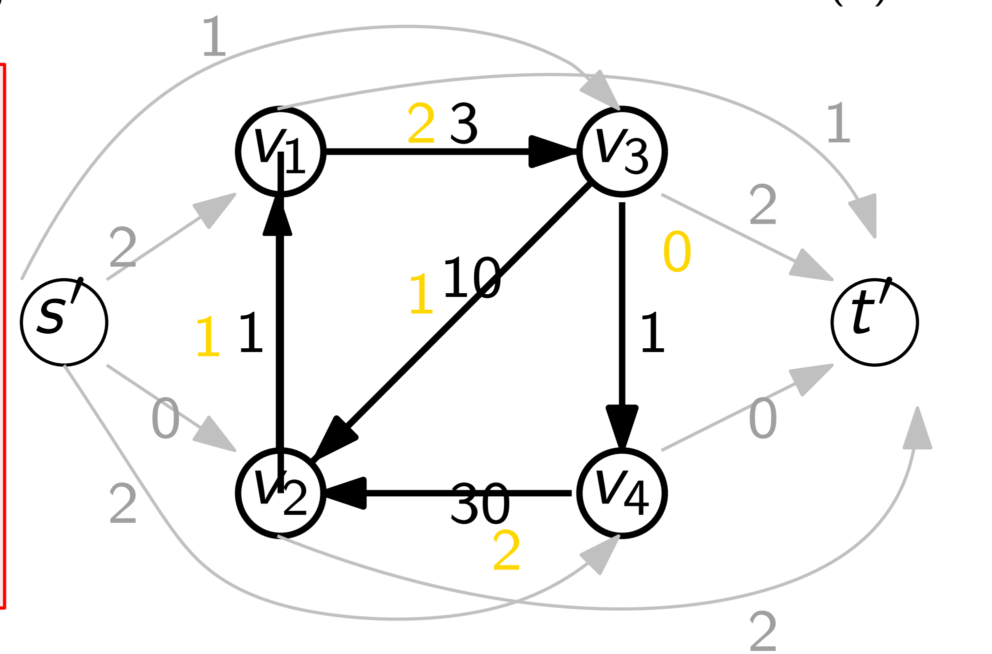
Strömungen
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässige **Strömung**
$f : E \to \mathbb{R} : \forall v \in V : \text{Nettozufl.}_f(v) = 0, \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

Konstruiere **Obergraph** $G' = (V', E')$: $V' = V \cup \{s', t'\}$,
$E' = E \cup \{(s', v) : v \in V\} \cup \{(v, t') : v \in V\}$
$l'(e) := 0 \ \forall e \in E' \quad c'(e) := c(e) - l(e) \ \forall e \in E$

für alle $v \in V$: $c'((s', v)) = \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)$ und $c'((v, t')) = \sum_{e \in \delta^+(v)} l(e)$

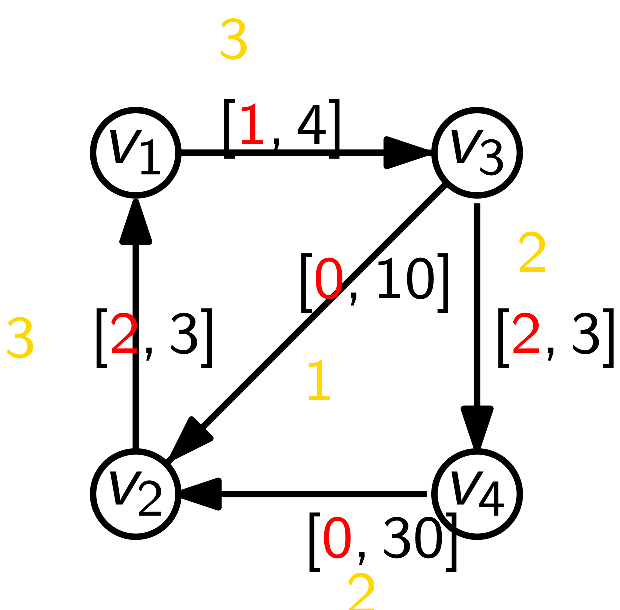


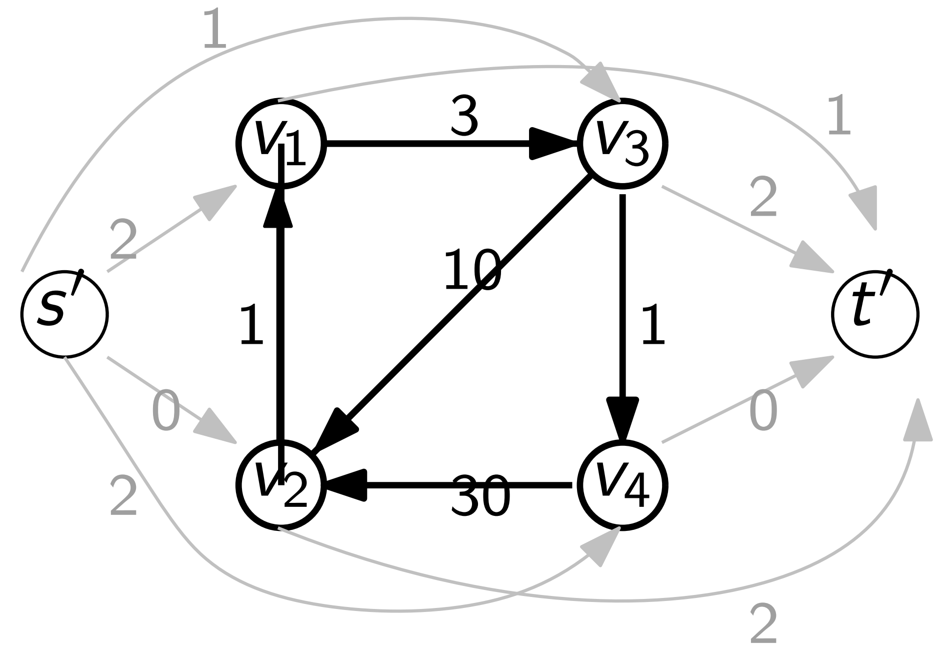
Lemma
Es gibt eine zulässige Strömung in G
$\Leftrightarrow$
Der maximale s'-t'-Fluss in G' hat Wert $\sum_{e \in E} l(e)$.



Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

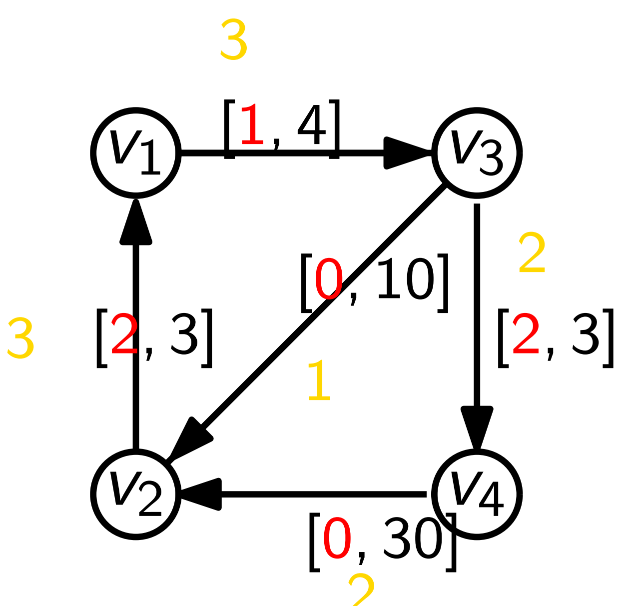


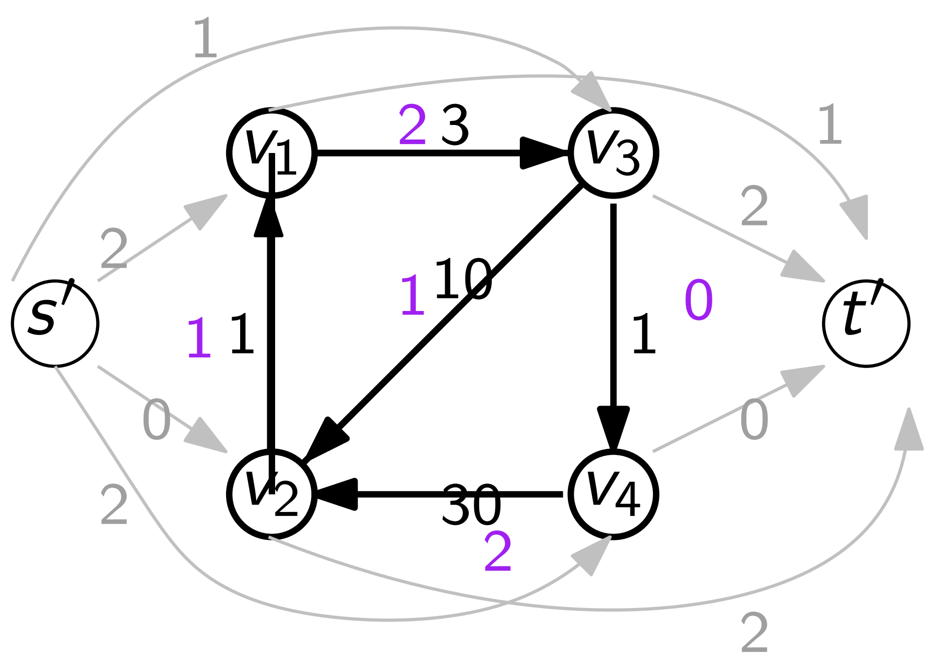


Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.



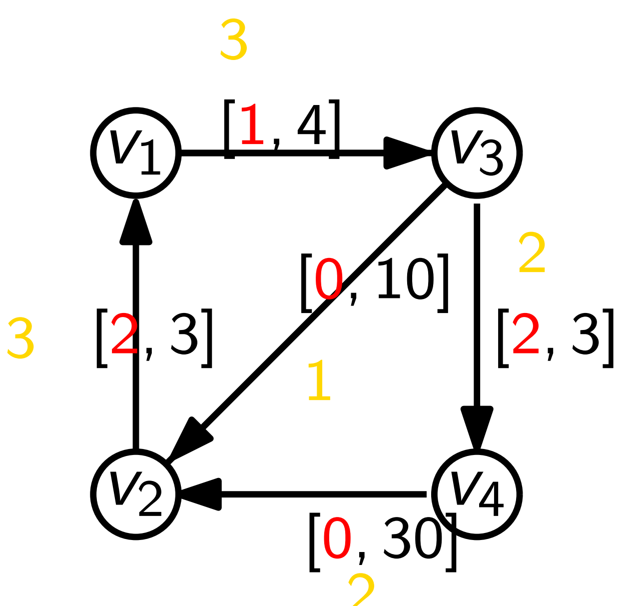


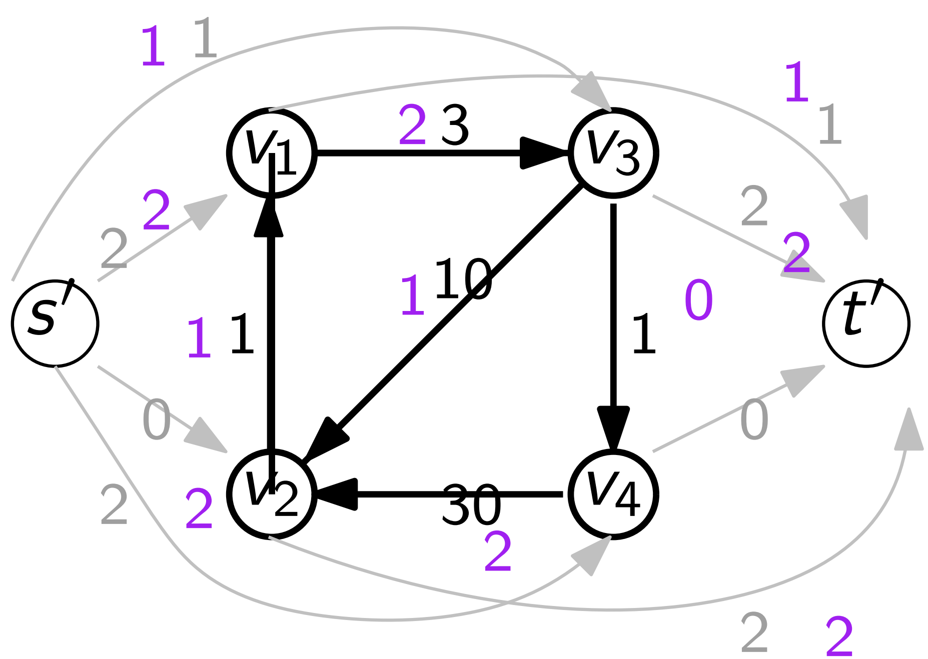
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.





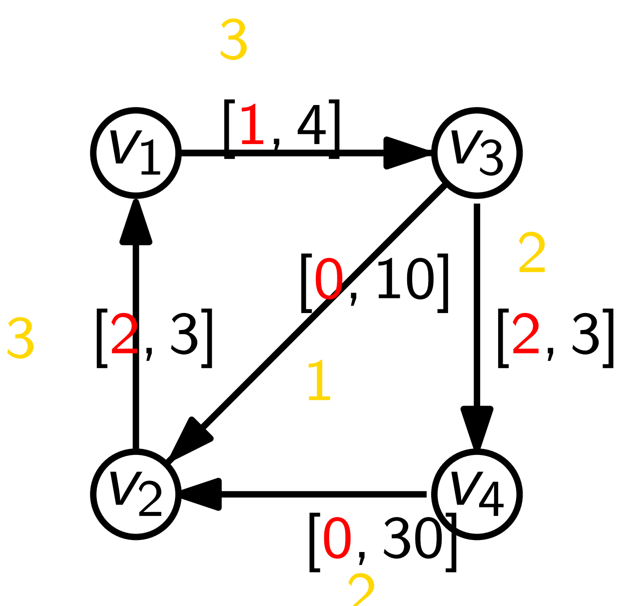
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

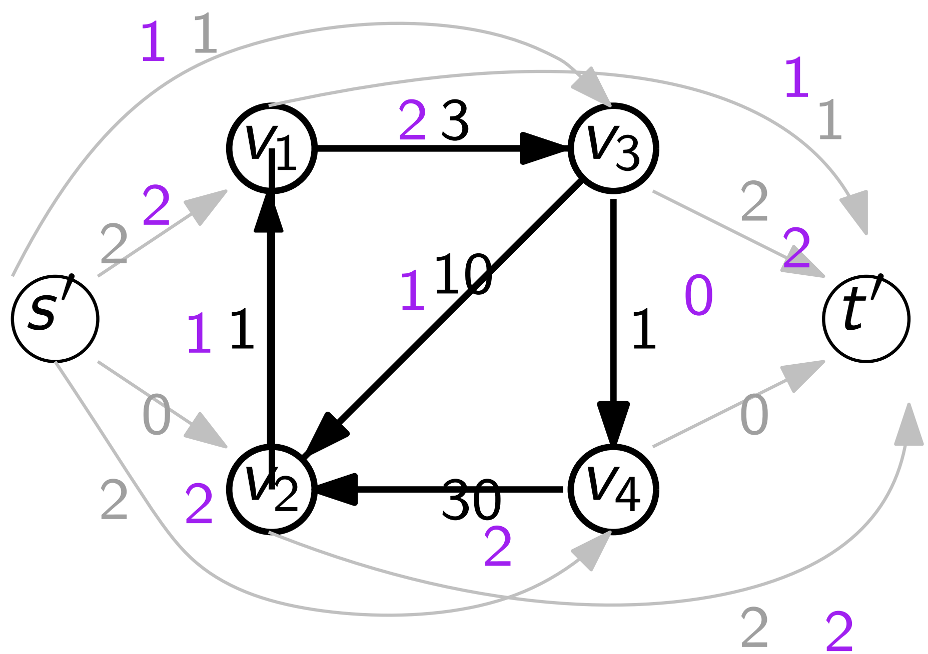
Sei β eine zulässige Strömung auf G.

Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

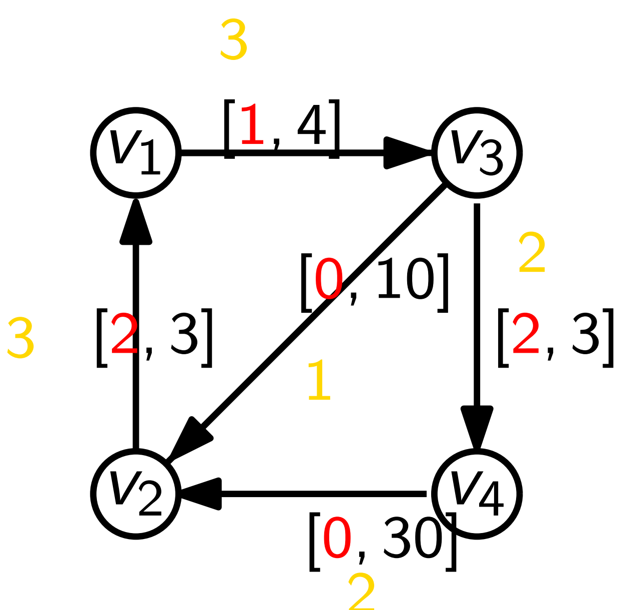
Sei β eine zulässige Strömung auf G.

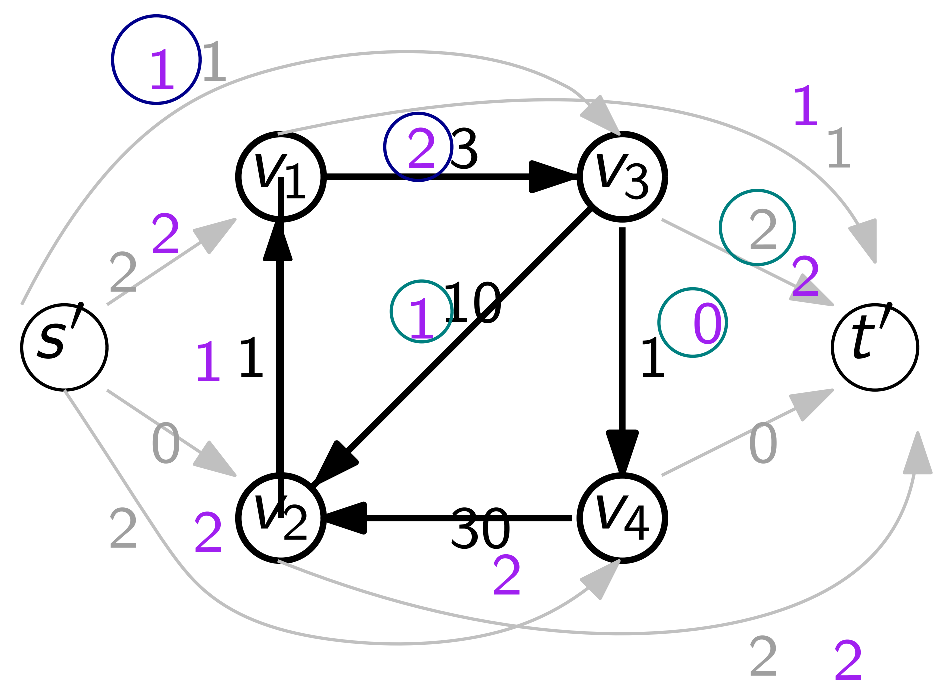
Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

Nettozufl.$_f(v) = \boxed{\sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e \in (\delta^+)'(v)} f(e)}$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

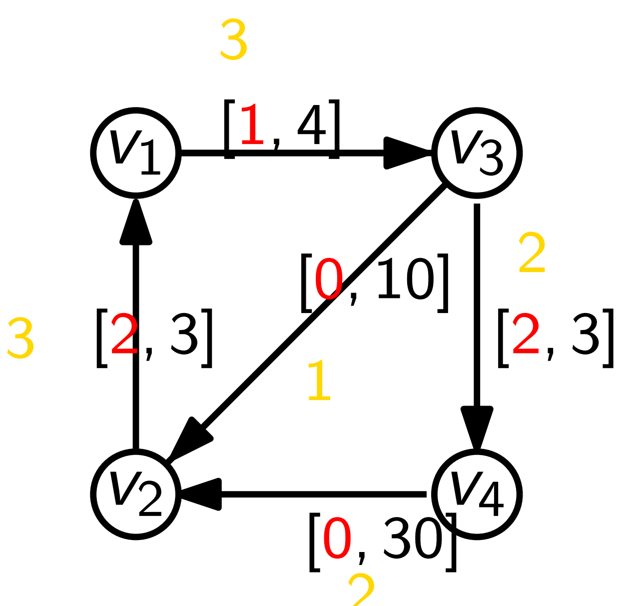
Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

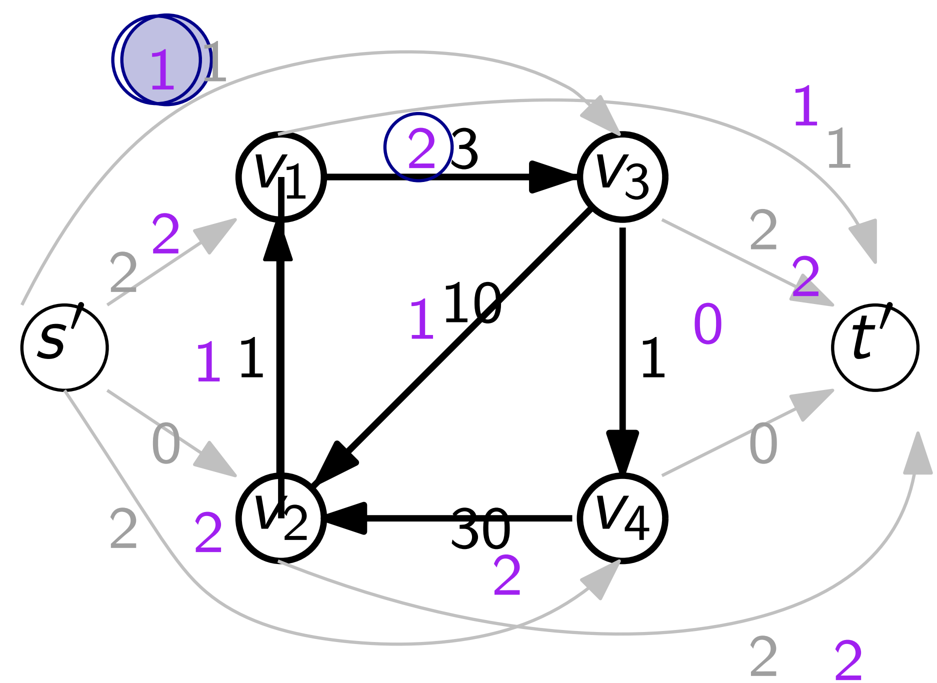
Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e\in(\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e)}$

$\boxed{\sum_{e\in(\delta^-)'(v)} f(e)} = \boxed{f((s',v))} + \boxed{\sum_{e\in\delta^-(v)} f(e)}$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

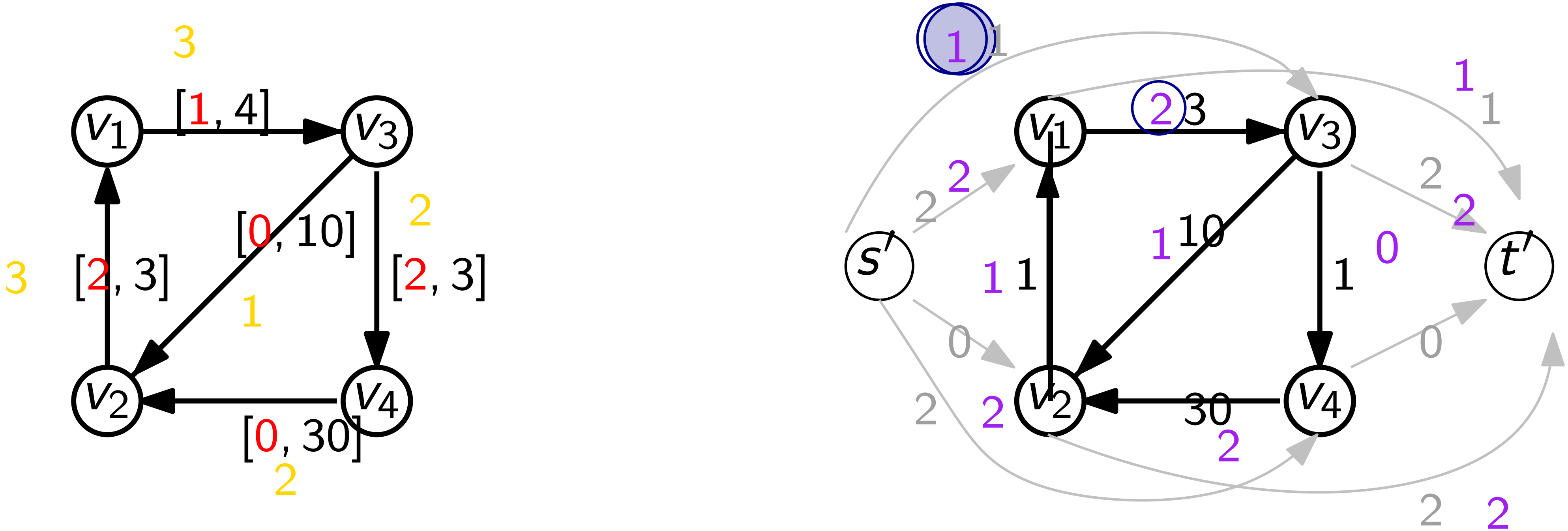
Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

$$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e \in (\delta^+)'(v)} f(e)}$$

$$\boxed{\sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e)} = \boxed{f((s', v))} + \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} f(e)}$$

$$= \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)} + \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} (\beta(e) - l(e))}$$



Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

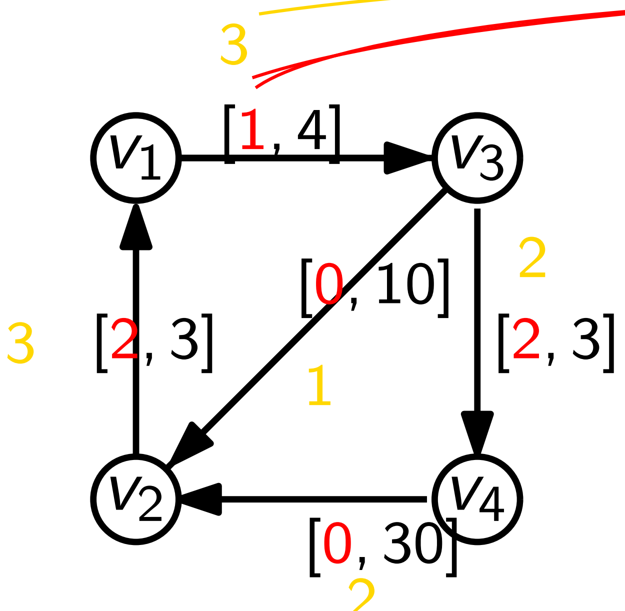
Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

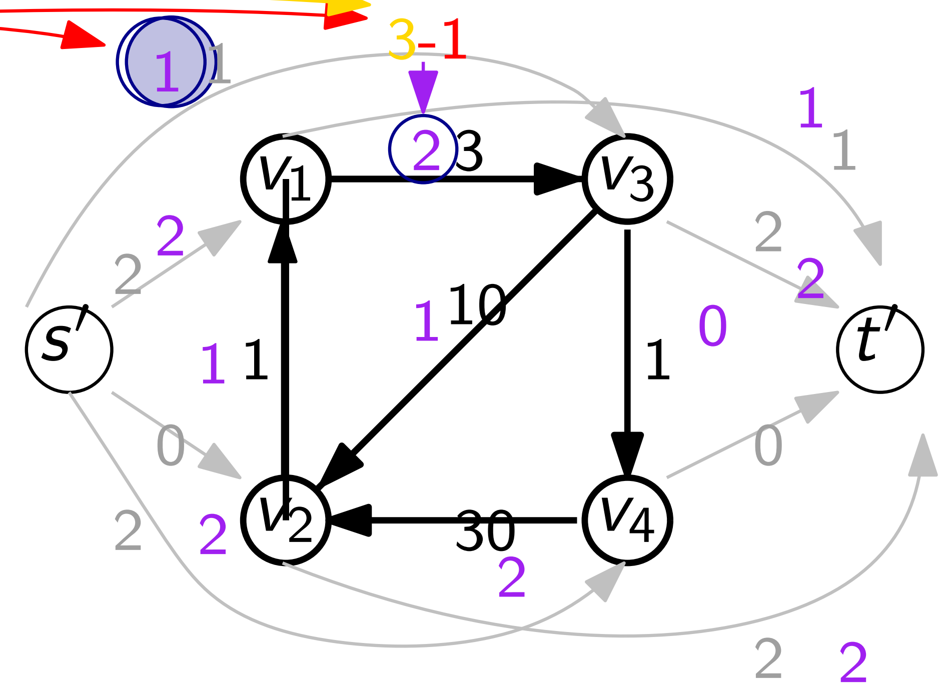
Ist das ein Fluss ?

$$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e \in (\delta^+)'(v)} f(e)}$$

$$\boxed{\sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e)} = \boxed{f((s', v))} + \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} f(e)}$$

$$= \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)} + \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} (\beta(e) - l(e))}$$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

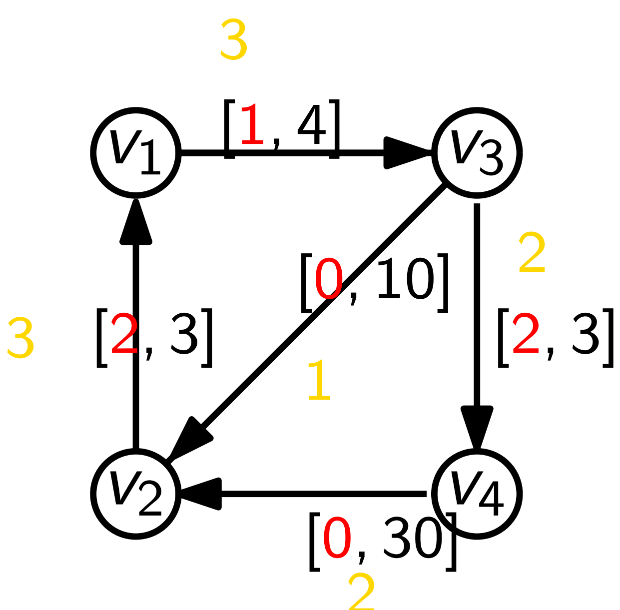
Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

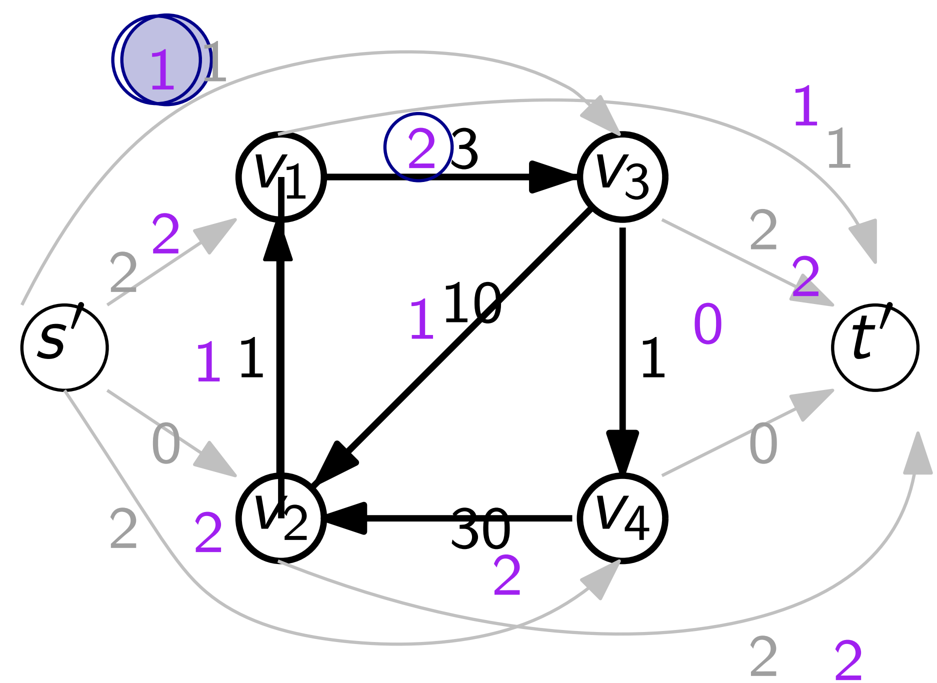
Ist das ein Fluss ?

$$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e\in(\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e)}$$

$$\boxed{\sum_{e\in(\delta^-)'(v)} f(e)} = \boxed{f((s',v))} + \boxed{\sum_{e\in\delta^-(v)} f(e)}$$

$$= \boxed{\sum_{e\in\delta^-(v)} l(e)} + \boxed{\sum_{e\in\delta^-(v)} (\beta(e) - l(e))} = \sum_{e\in\delta^-(v)} \beta(e)$$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

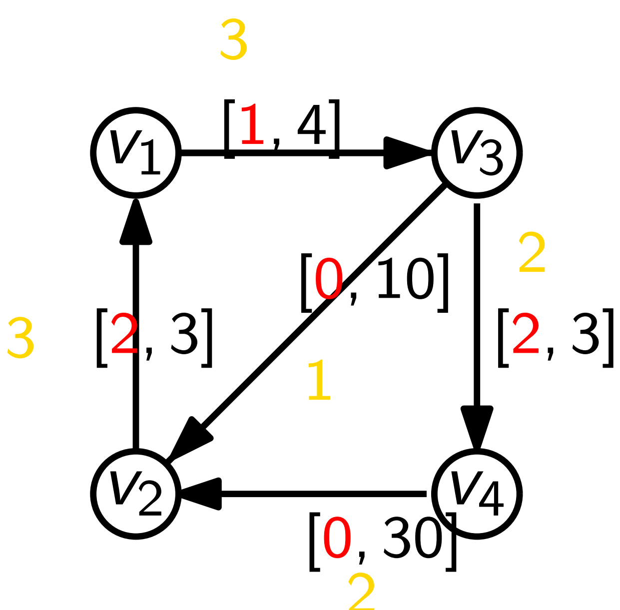
Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

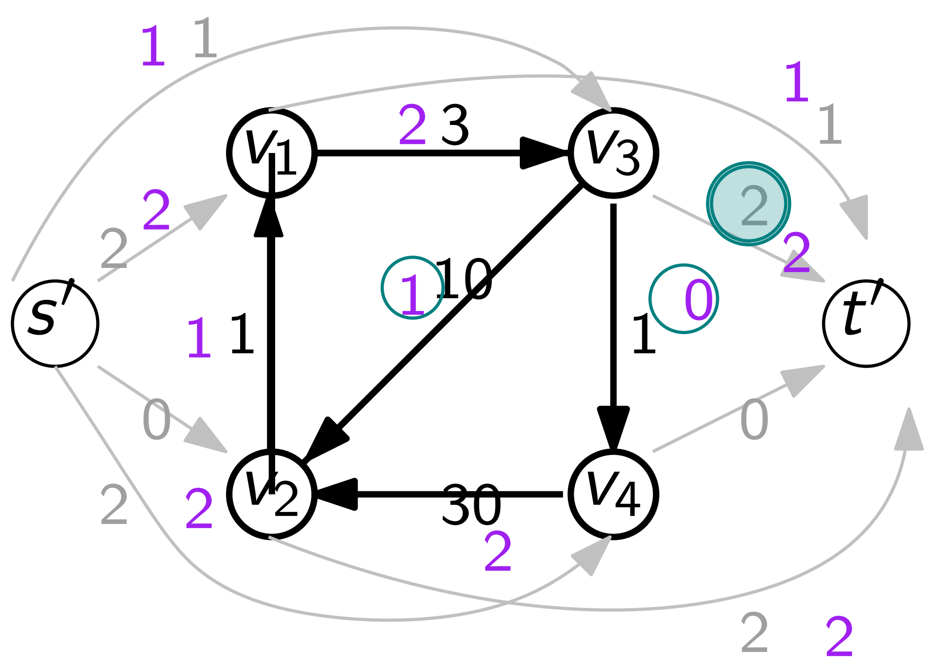
Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e\in(\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e)}$

$\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e) = \boxed{f(v,t')} + \boxed{\sum_{e\in\delta^+(v)} f(e)}$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

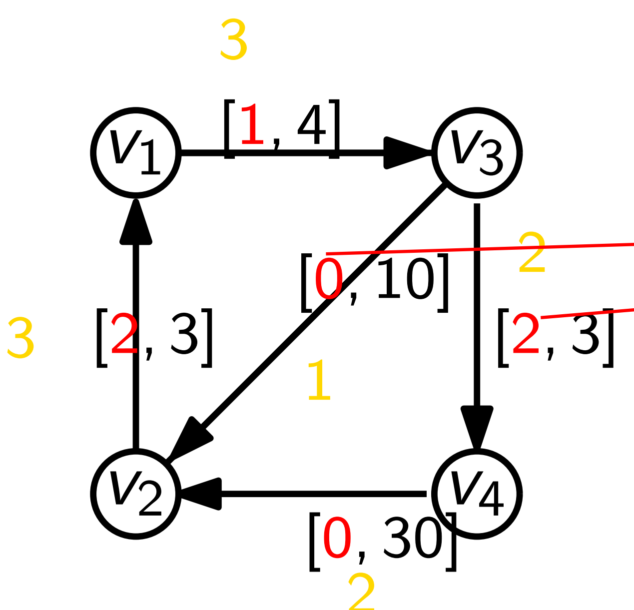
Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

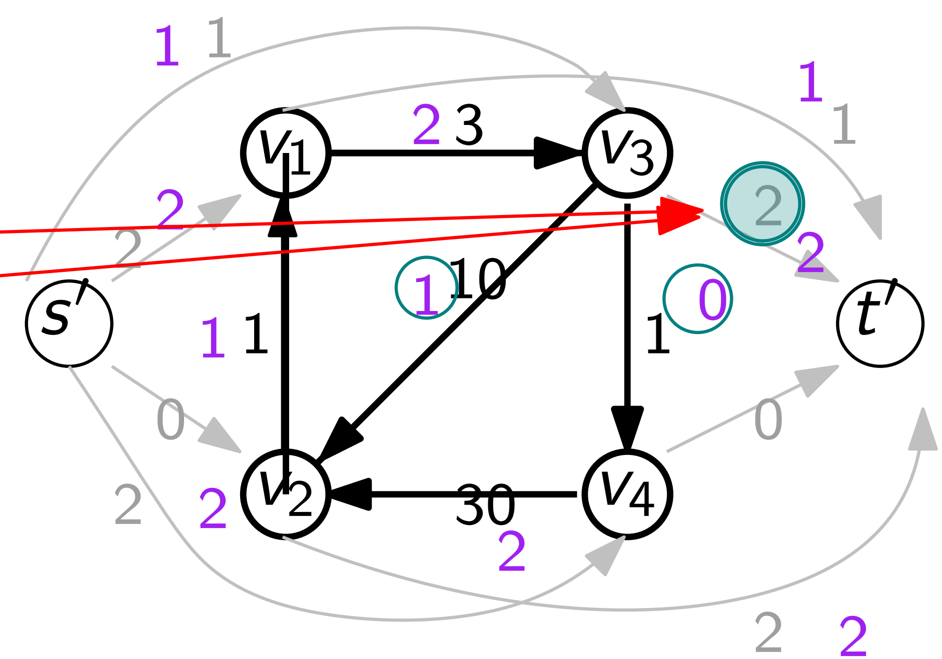
Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

$$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e\in(\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e)}$$

$$\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e) = \boxed{f(v,t')} + \boxed{\sum_{e\in\delta^+(v)} f(e)}$$
$$= \sum_{e\in\delta^+(v)} l(e) + \sum_{e\in\delta^+(e)} (\beta(e) - l(e))$$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

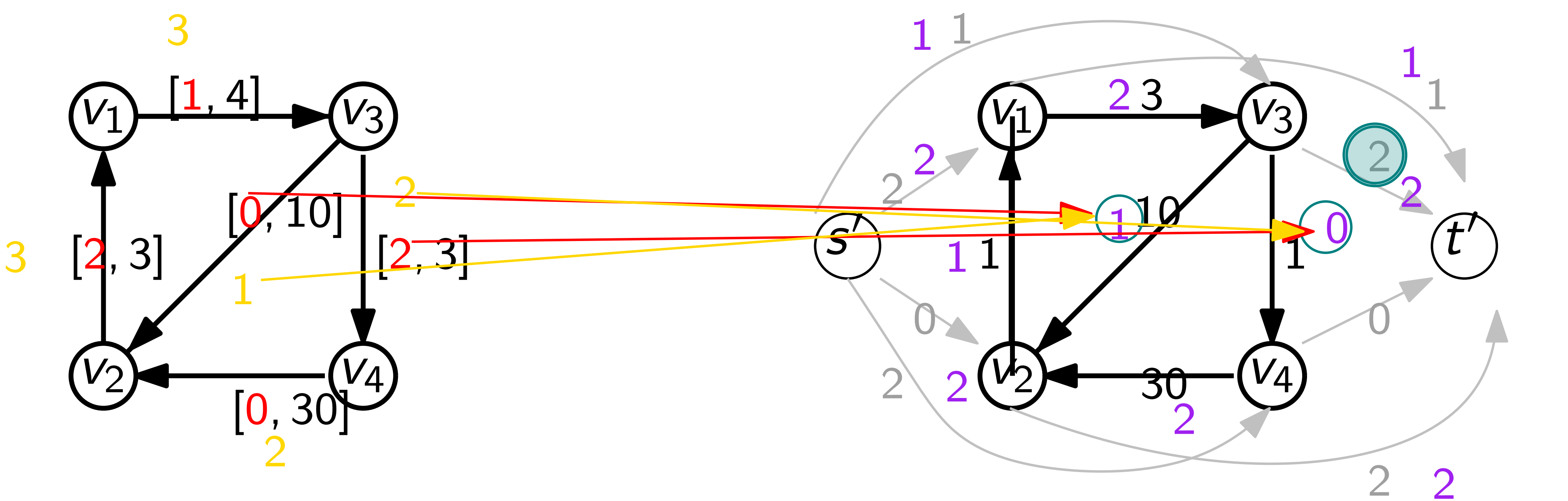
Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

$$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e \in (\delta^+)'(v)} f(e)}$$

$$\begin{aligned}\sum_{e \in (\delta^+)'(v)} f(e) &= \boxed{f(v,t')} + \boxed{\sum_{e \in \delta^+(v)} f(e)} \\ &= \sum_{e \in \delta^+(v)} l(e) + \sum_{e \in \delta^+(e)} (\beta(e) - l(e))\end{aligned}$$



Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

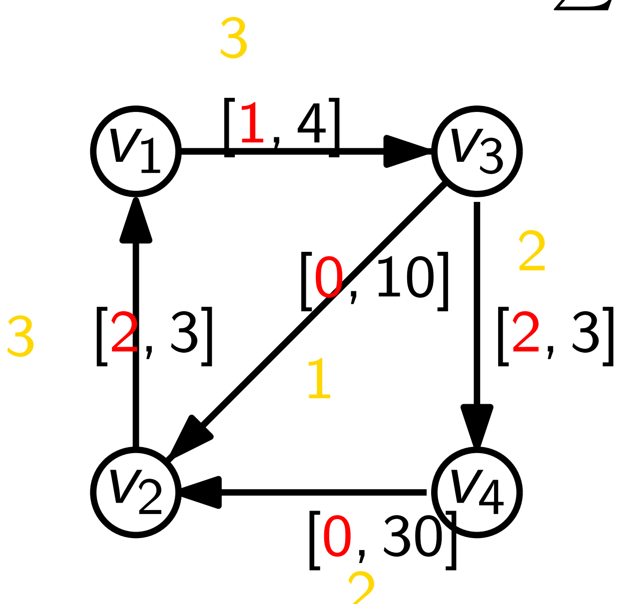
Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

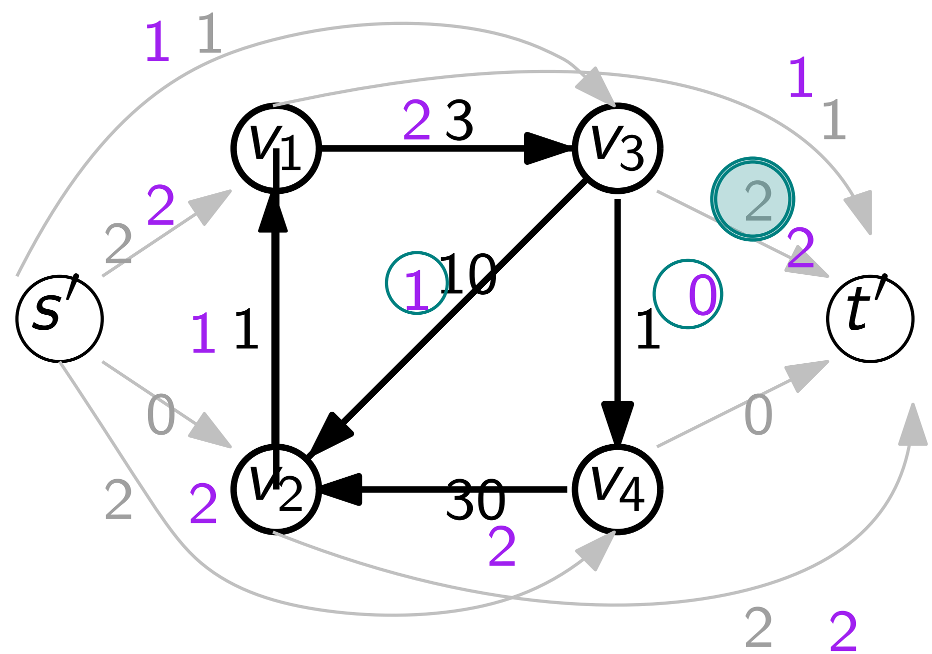
Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

$$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e\in(\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e)}$$

$$\begin{aligned}\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e) &= \boxed{f(v,t')} + \boxed{\sum_{e\in\delta^+(v)} f(e)}\\ &= \sum_{e\in\delta^+(v)} l(e) + \sum_{e\in\delta^+(e)} (\beta(e) - l(e))\\ &= \sum_{e\in\delta^+(v)} \beta(e)\end{aligned}$$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

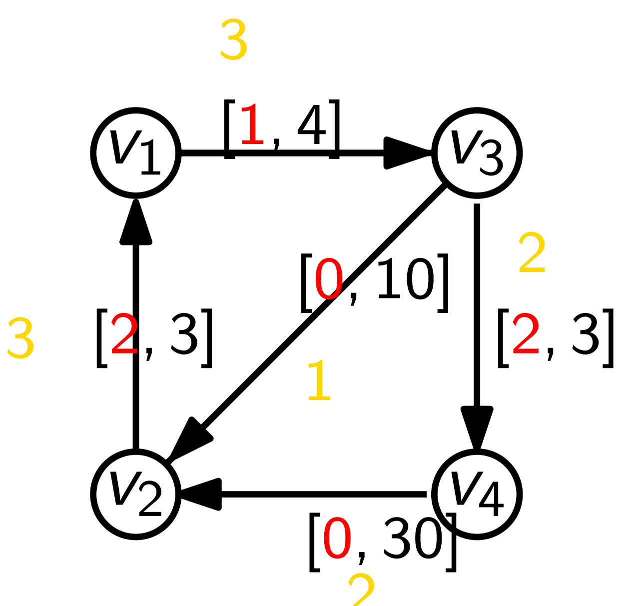
Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

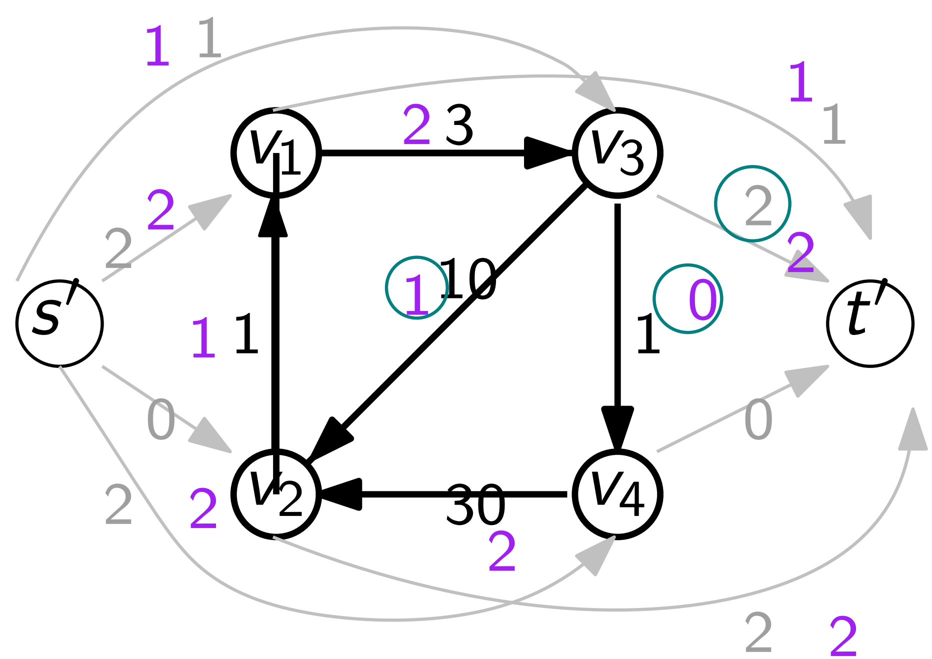
Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

Nettozufl.$_f(v) = \boxed{\sum_{e\in(\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e)}$

$= \sum_{e\in\delta^-(v)} \beta(v) - \sum_{e\in\delta^+(v)} \beta(v)$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

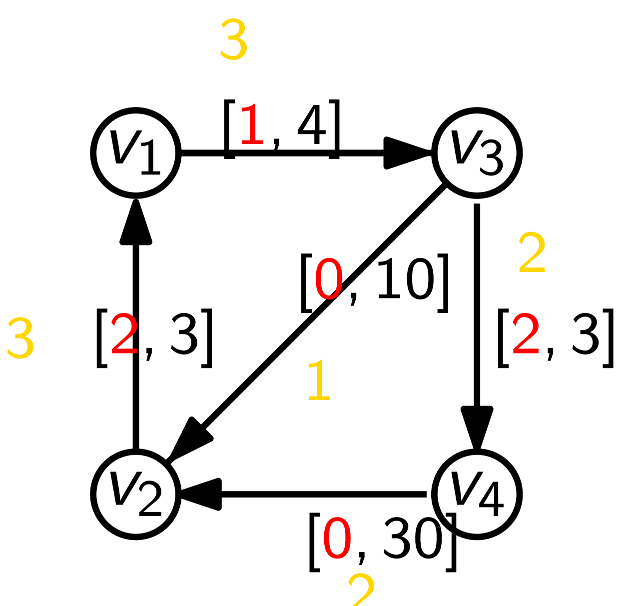
Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

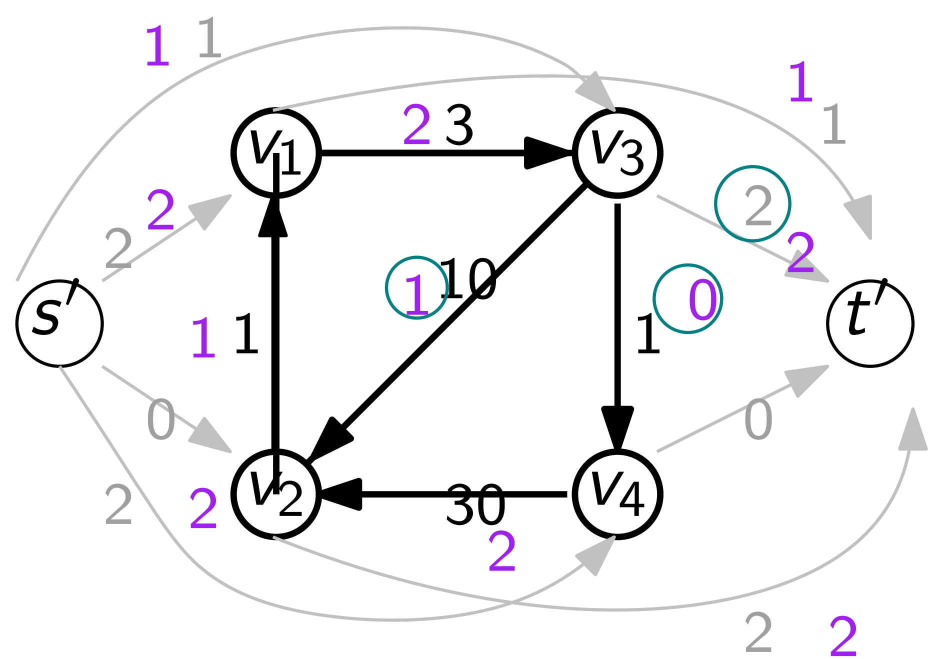
Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

Ist das ein Fluss ?

$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e\in(\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e)}$

$= \sum_{e\in\delta^-(v)} \beta(v) - \sum_{e\in\delta^+(v)} \beta(v) = 0$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei β eine zulässige Strömung auf G.

Setze $f(e) := \beta(e) - l(e)$ für alle $e \in E$.

Setze $f(e) = c'(e)$ für alle $e \in \delta^-(s')$ und $e \in \delta^+(t')$.

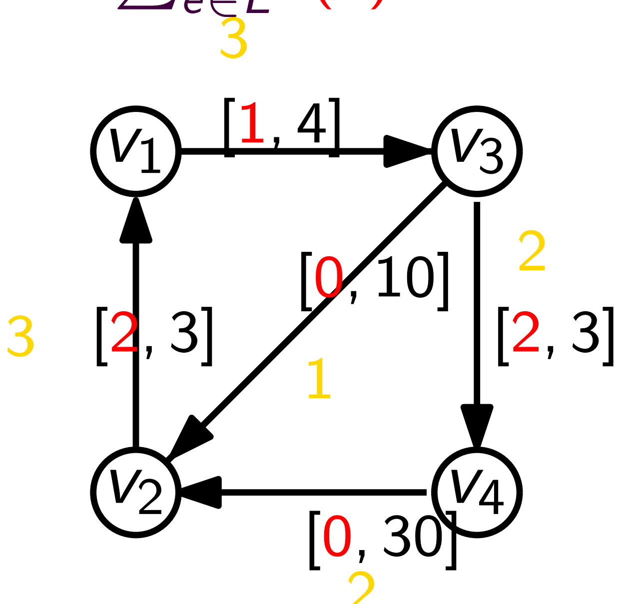
Ist das ein Fluss ?

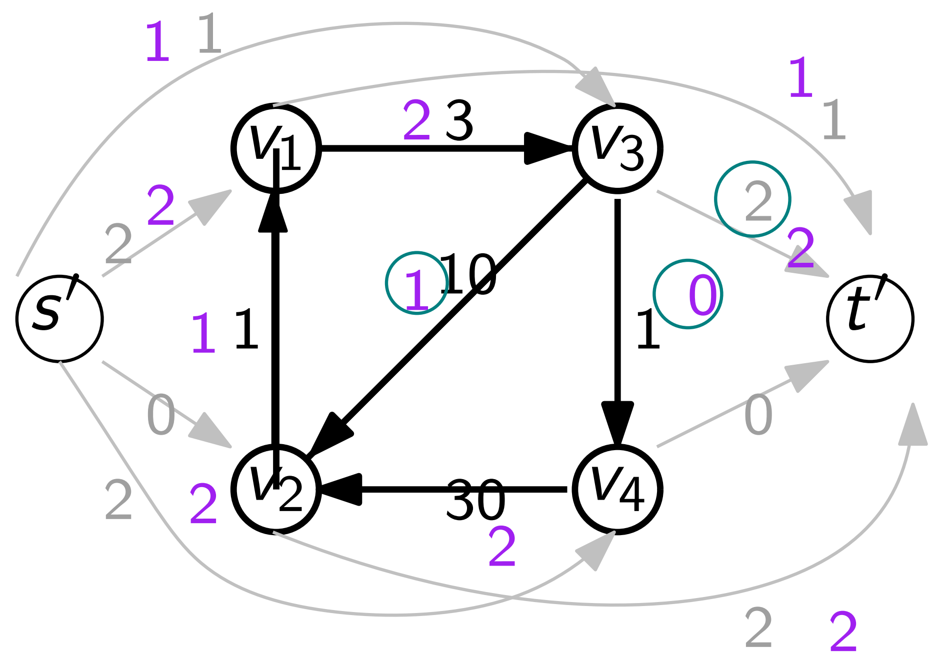
$\text{Nettozufl.}_f(v) = \boxed{\sum_{e\in(\delta^-)'(v)} f(e)} - \boxed{\sum_{e\in(\delta^+)'(v)} f(e)}$

$= \sum_{e\in\delta^-(v)} \beta(v) - \sum_{e\in\delta^+(v)} \beta(v) \ = 0$

Und $|f| = \sum_{(v,t')\in E'} f(e) = \sum_{(v,t')\in E'} c'(e) = \sum_{v\in V} \sum_{e\in\delta^+(v)} l(e)$

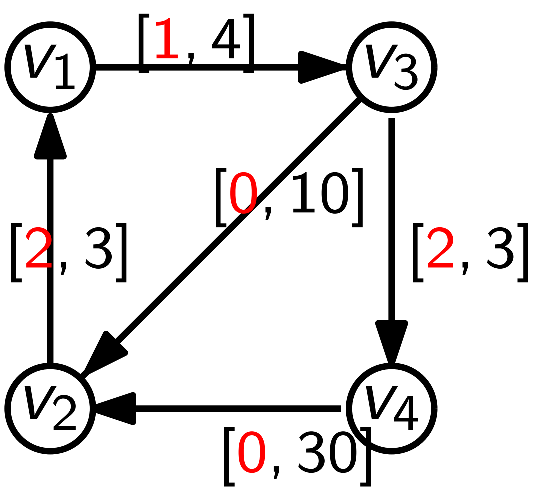
$= \sum_{e\in E} l(e)$

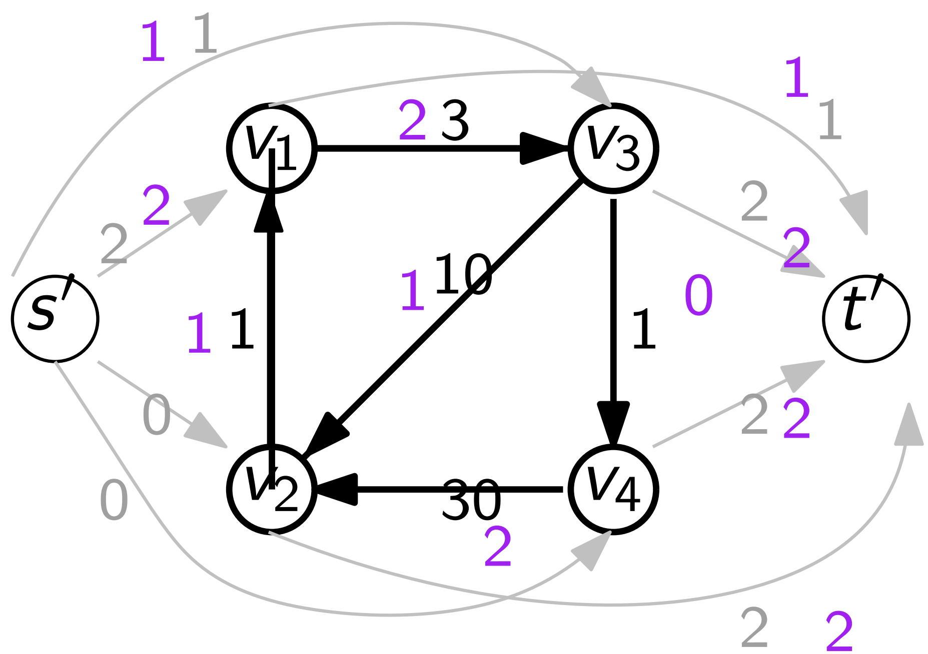




Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

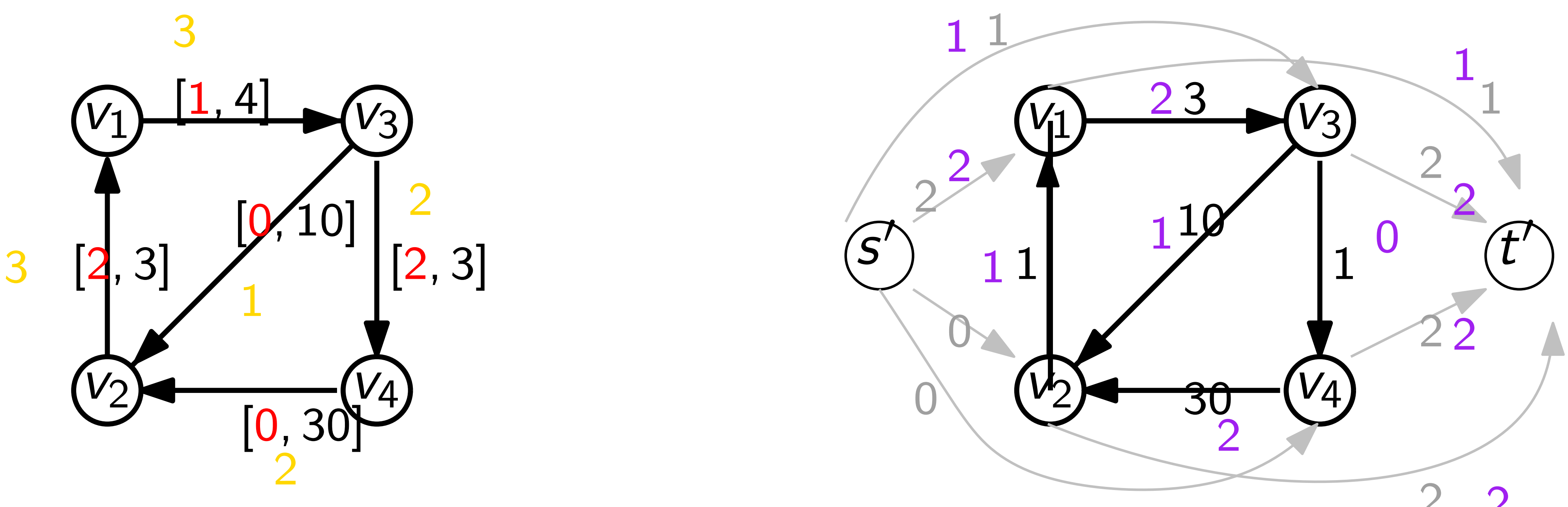
Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.
Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$



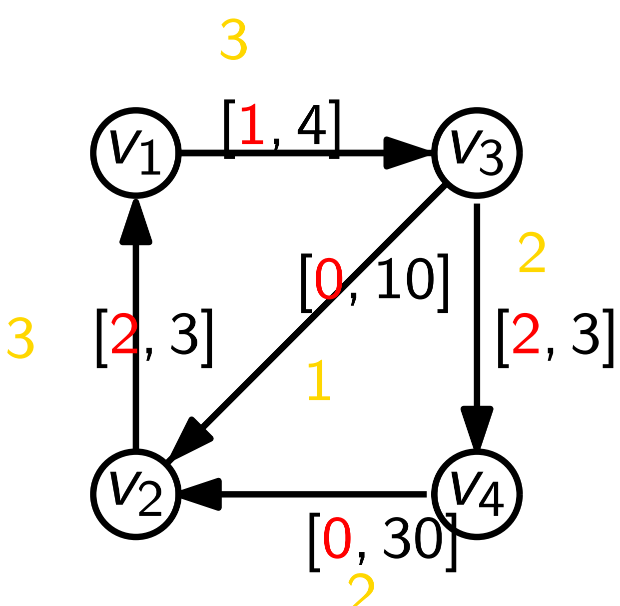
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

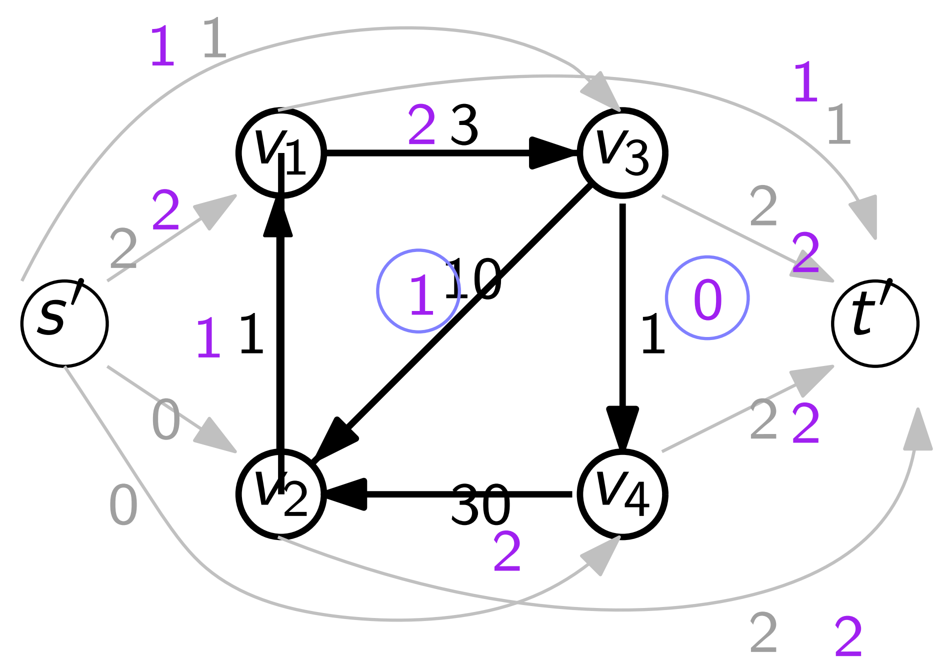
Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.

Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$

Ist das eine Strömung?

$$\text{Nettozufl.}_\beta(v) = \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} - \boxed{\sum_{e \in \delta^+(v)} \beta(e)}$$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

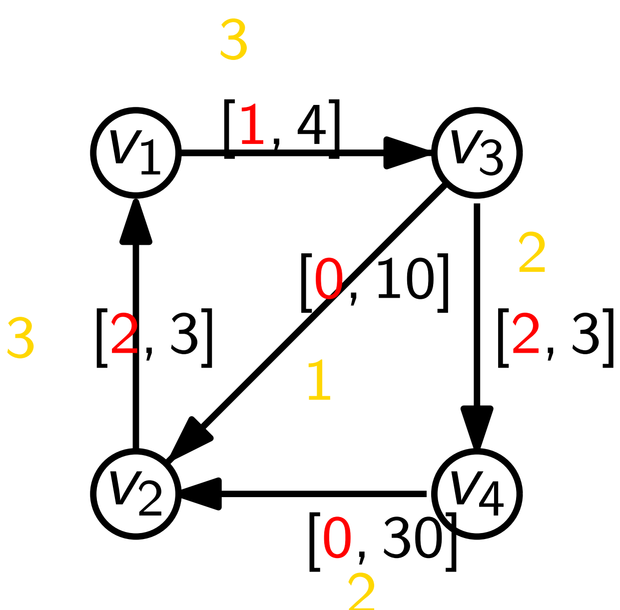
Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e\in(\delta^+)'(v)} l(e)$.

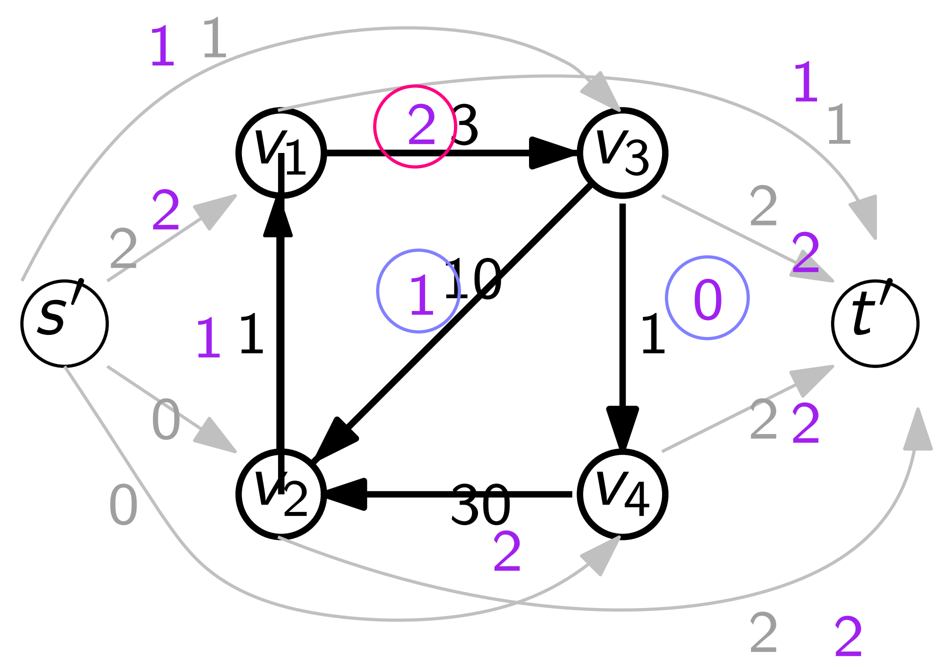
Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$

Ist das eine Strömung?

$$\text{Nettozufl.}_\beta(v) = \boxed{\sum_{e\in\delta^-(v)} \beta(e)} - \boxed{\sum_{e\in\delta^+(v)} \beta(e)}$$

$$\boxed{\sum_{e\in\delta^-(v)} \beta(e)} = \sum_{e\in\delta^-(v)} f(e) + l(e)$$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.

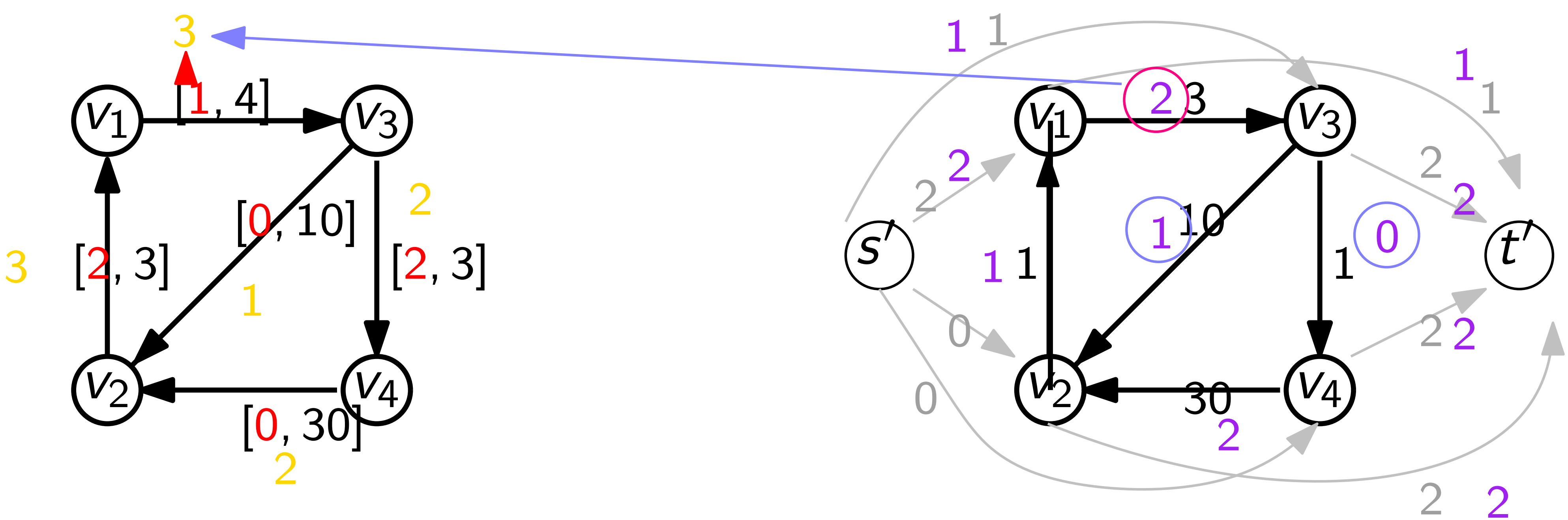
Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$

Ist das eine Strömung?

$$\text{Nettozufl.}_\beta(v) = \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} - \boxed{\sum_{e \in \delta^+(v)} \beta(e)}$$

$$\boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} = \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + l(e)$$

$$= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)$$



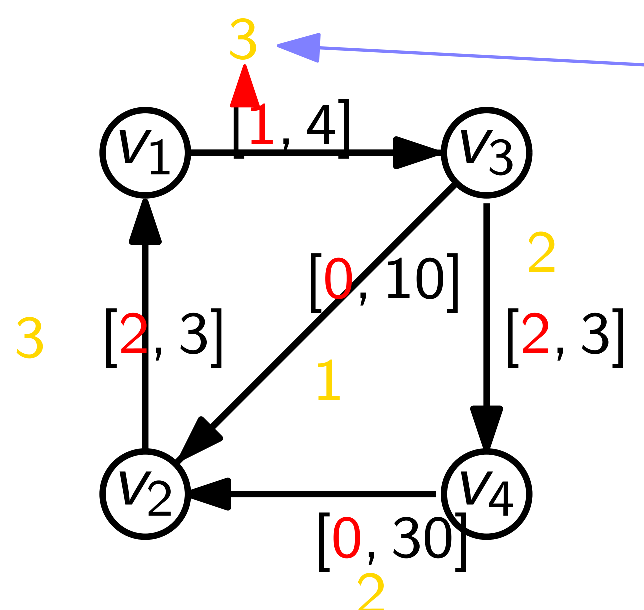
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

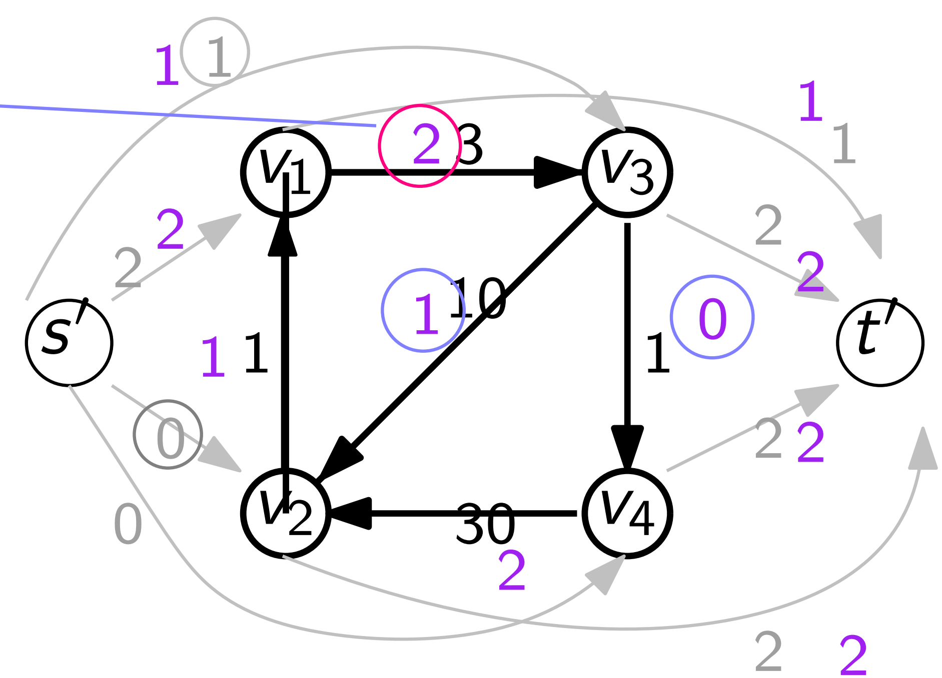
Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.
Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$

Ist das eine Strömung?

$$\text{Nettozufl.}_\beta(v) = \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} - \boxed{\sum_{e \in \delta^+(v)} \beta(e)}$$

$$\boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} = \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + l(e)$$
$$= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)$$
$$= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + c'((s,v))$$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

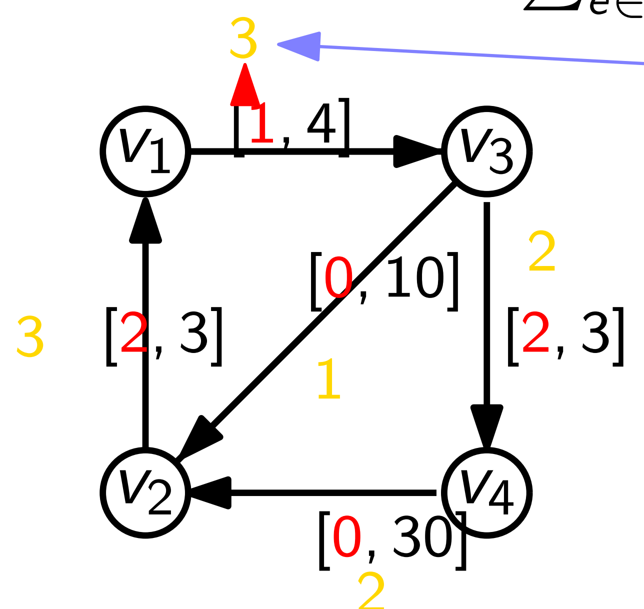
Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.

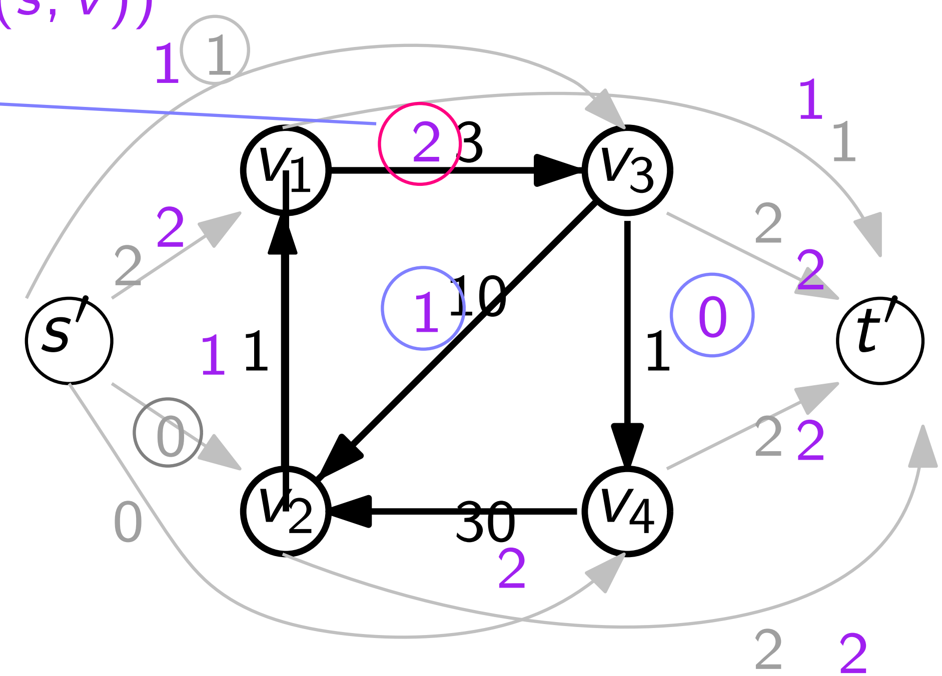
Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$

Ist das eine Strömung?

$$\text{Nettozufl.}_\beta(v) = \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} - \boxed{\sum_{e \in \delta^+(v)} \beta(e)}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} &= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + l(e)\\ &= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)\\ &= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + c'((s,v))\\ &= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + f((s,v))\end{aligned}$$





Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

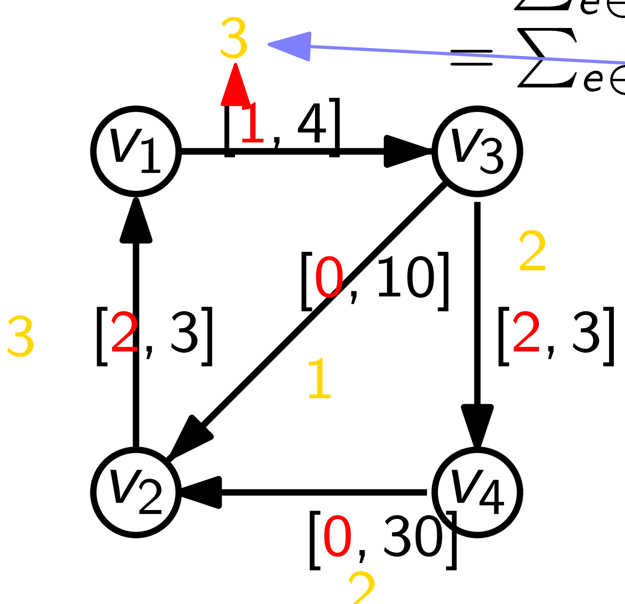
Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.

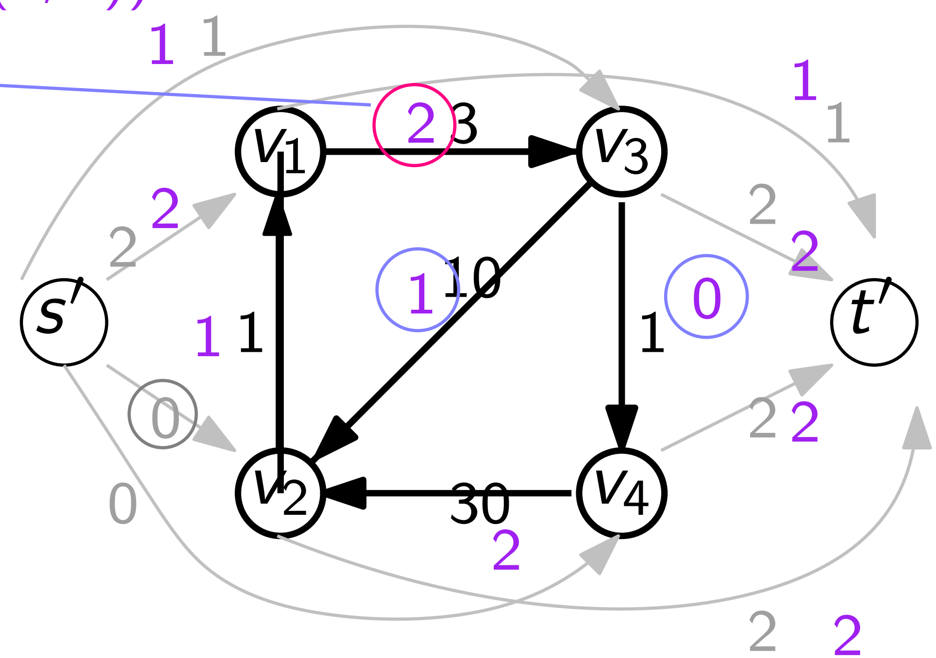
Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$

Ist das eine Strömung?

$$\text{Nettozufl.}_\beta(v) = \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} - \boxed{\sum_{e \in \delta^+(v)} \beta(e)}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} &= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + l(e) \\
&= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e) \\
&= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + c'((s,v)) \\
&= \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) + f((s,v)) \\
&= \sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e)
\end{aligned}$$





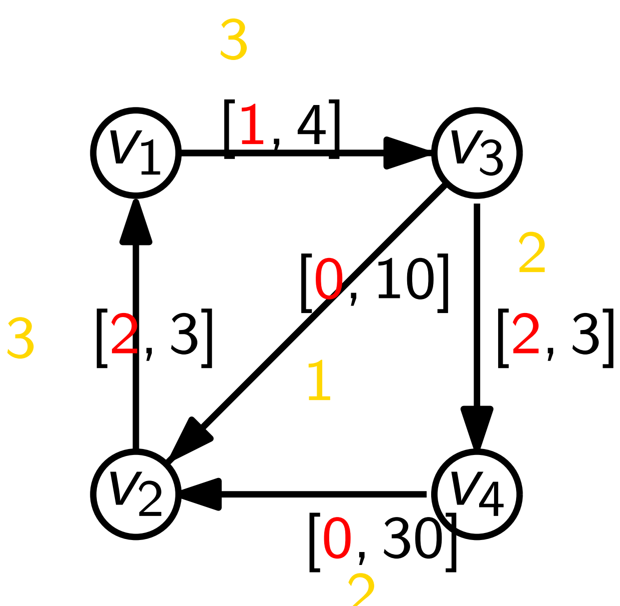
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

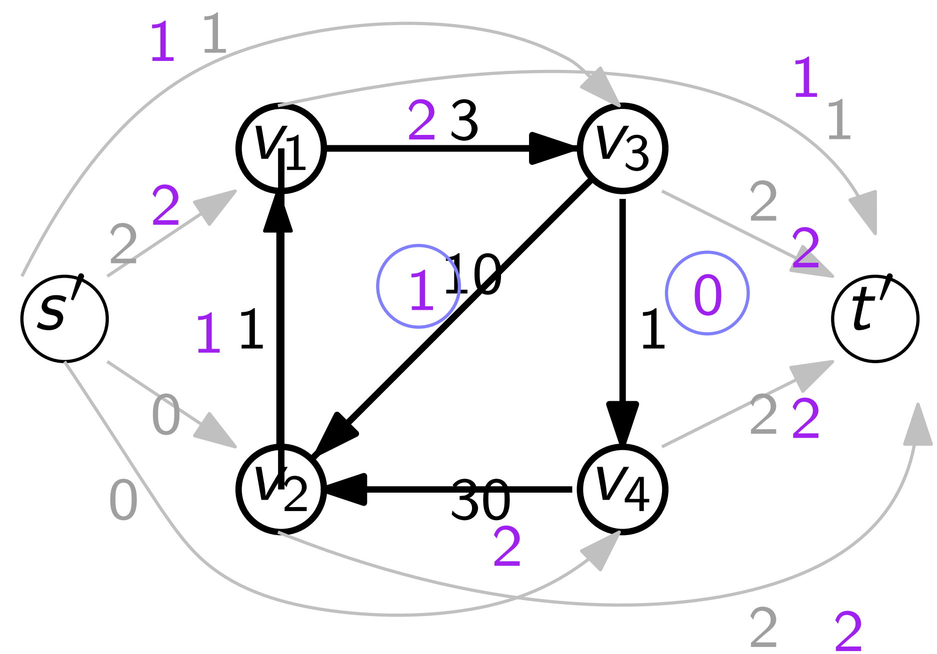
Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.

Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$

Ist das eine Strömung?

$$\text{Nettozufl.}_{\beta}(v) = \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} - \boxed{\sum_{e \in \delta^+(v)} \beta(e)}$$
$$= \sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e) - \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} f(e)$$





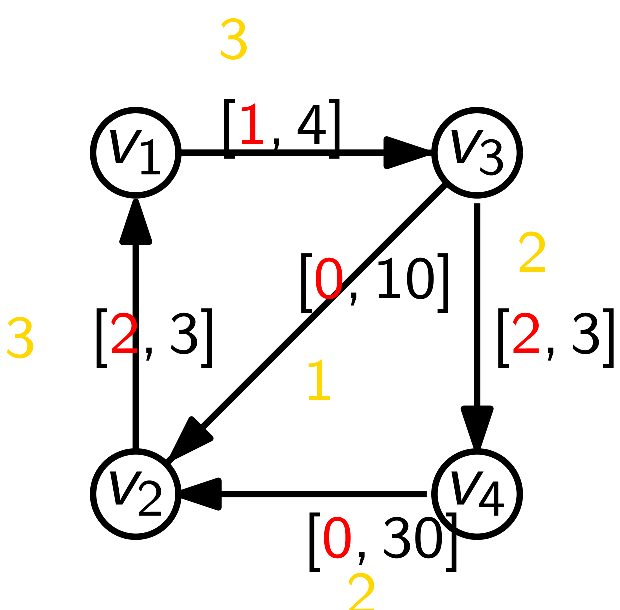
Verallgemeinerung: untere Schranken auf den Kanten

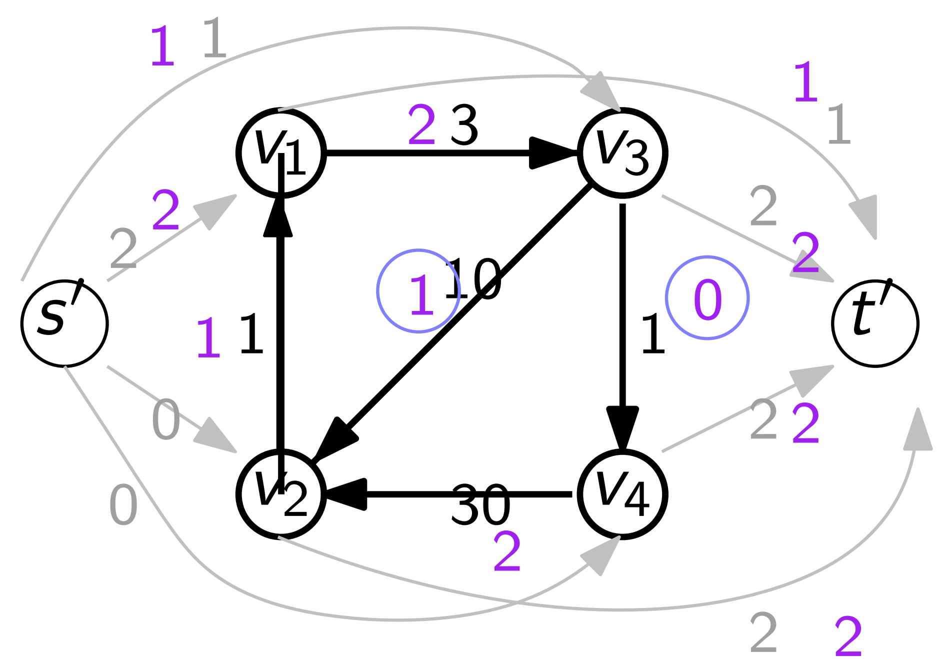
Sei f ein zulässiger Fluss auf G' mit $|f| = \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} l(e)$.

Setze $\beta(e) := f(e) + l(e)$

Ist das eine Strömung?

$$\text{Nettozufl.}_\beta(v) = \boxed{\sum_{e \in \delta^-(v)} \beta(e)} - \boxed{\sum_{e \in \delta^+(v)} \beta(e)}$$
$$= \sum_{e \in (\delta^-)'(v)} f(e) - \sum_{e \in (\delta^+)'(v)} f(e)$$
$$= 0$$





Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b=10

b=5

b=20

Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b=10

b=-13

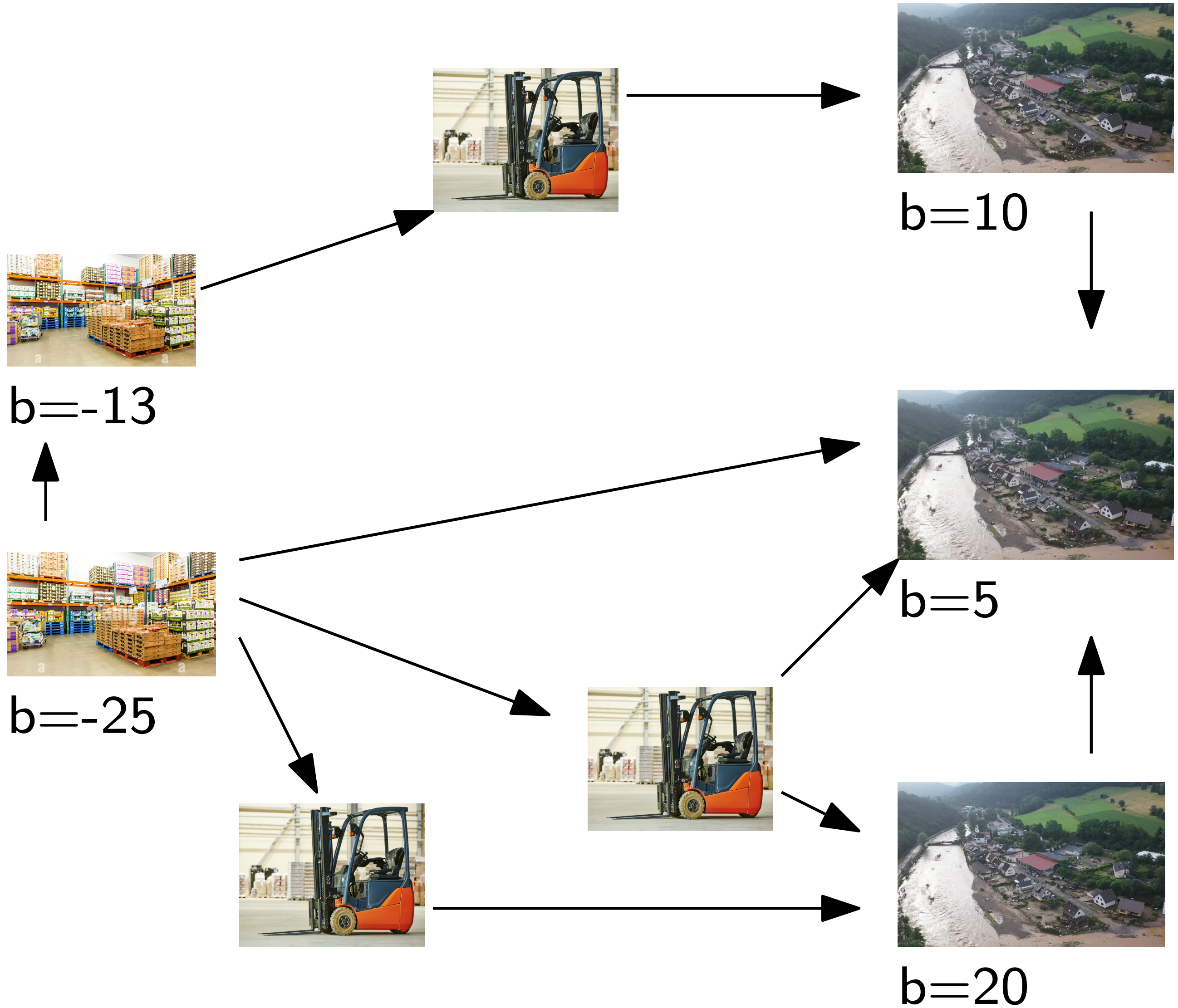
b=5

b=-25

b=20

Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

Knoten haben **Bedarf** $b(v)$
oder **Überschuss** $-b(v)$



Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b=10

b=-13

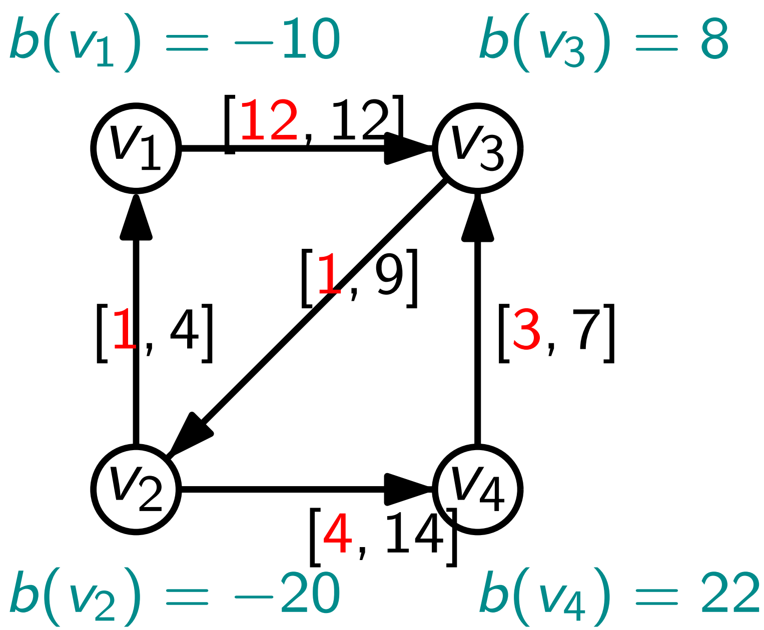
b=5

b=-25

b=20

Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

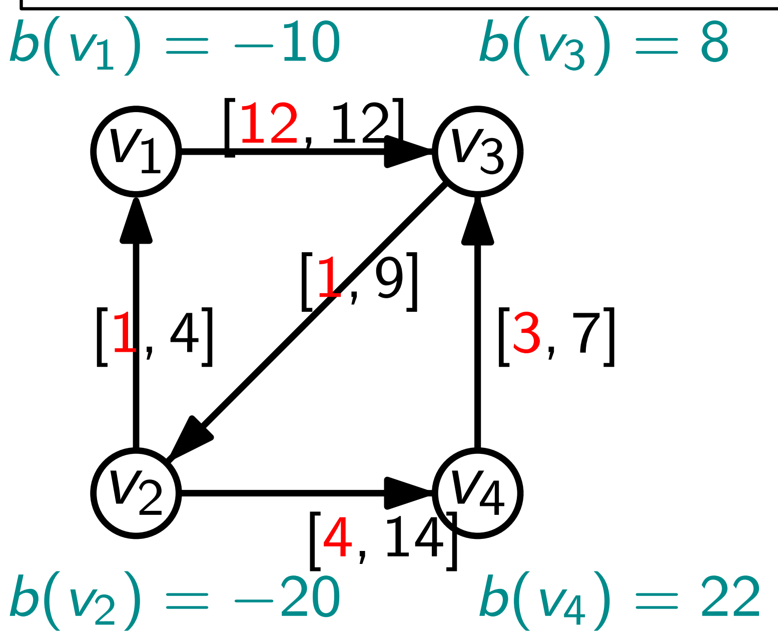
b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$,
$\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$



Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$,
unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$,
$\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

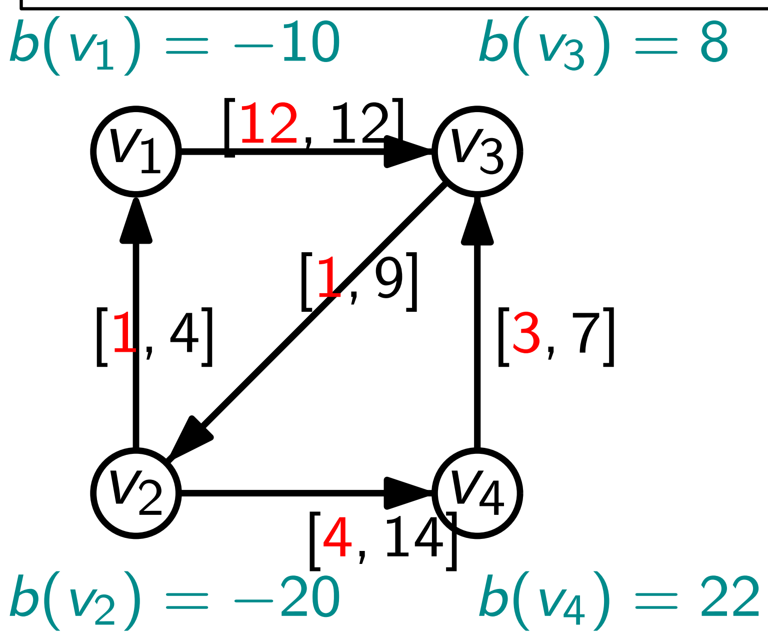
Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$:

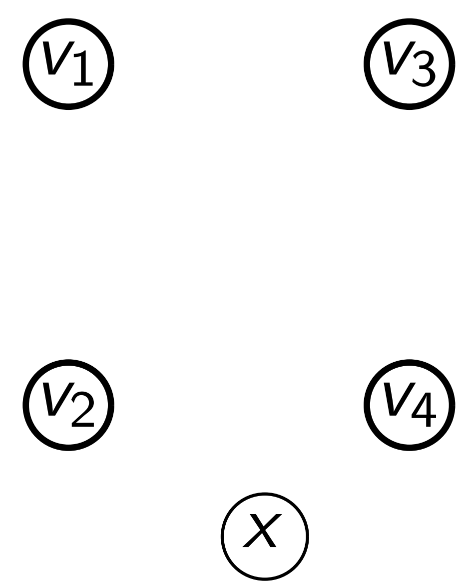


Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$,
$\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\hat{V} := V \cup \{x\}$,

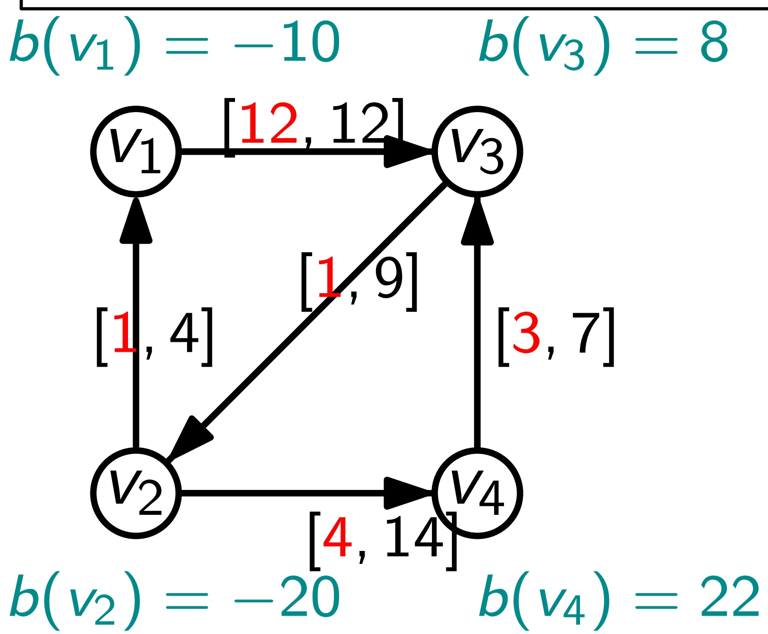


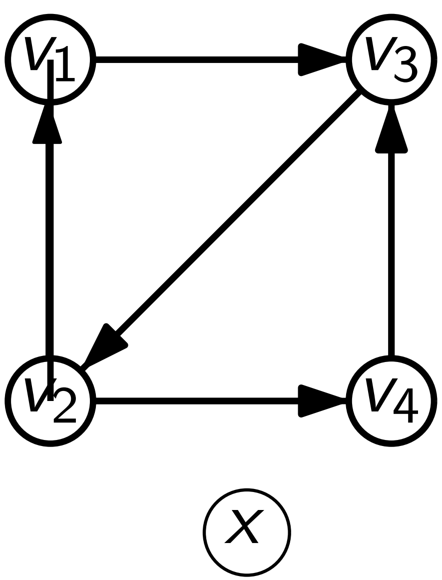


Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$,
unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$,
$\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\hat{V} := V \cup \{x\}$,
$\hat{E} := E$

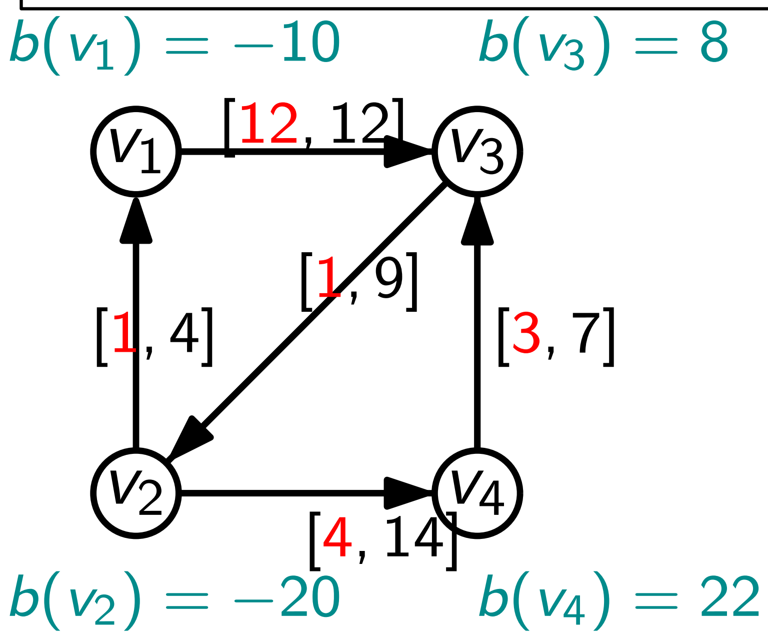


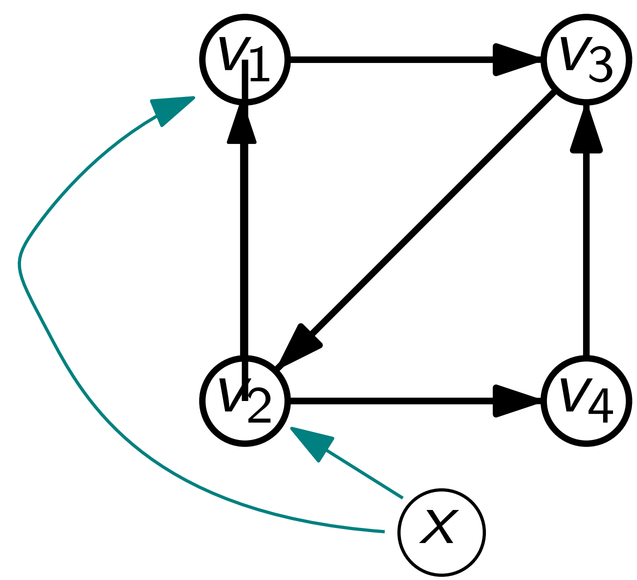


Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$, $\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\hat{V} := V \cup \{x\}$,
$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\}$

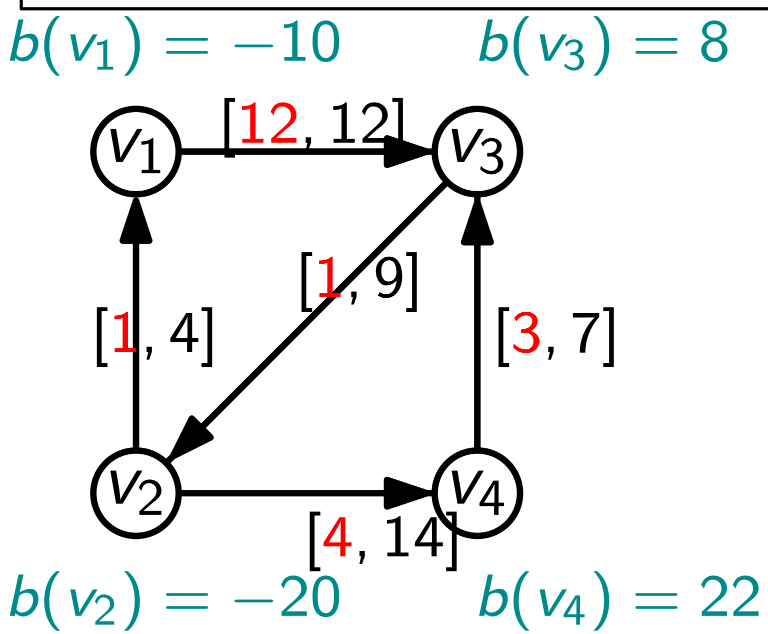


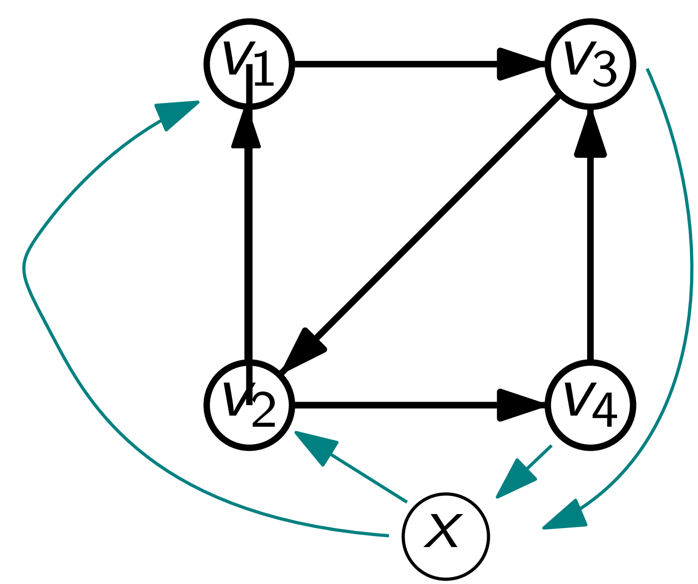


Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$,
$\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\hat{V} := V \cup \{x\}$,
$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\} \cup \{(u, x) : u \in V : b(u) > 0\}$

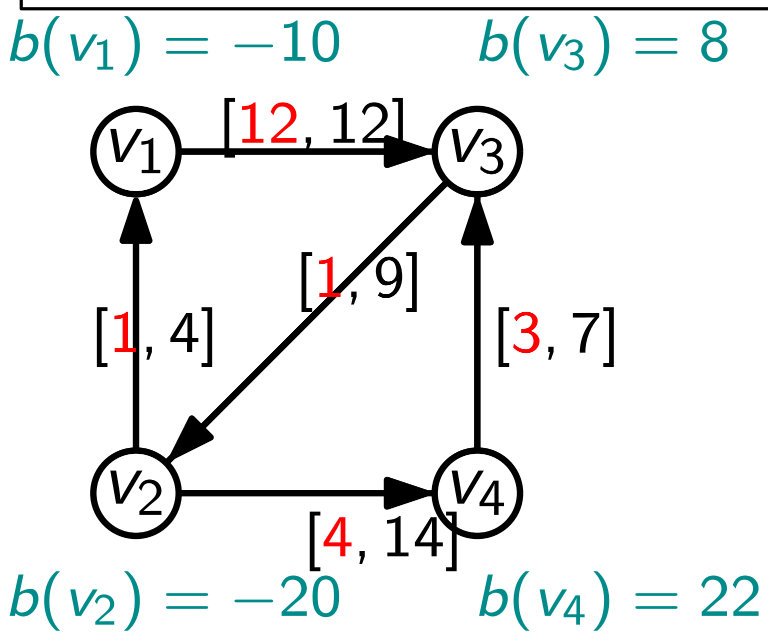


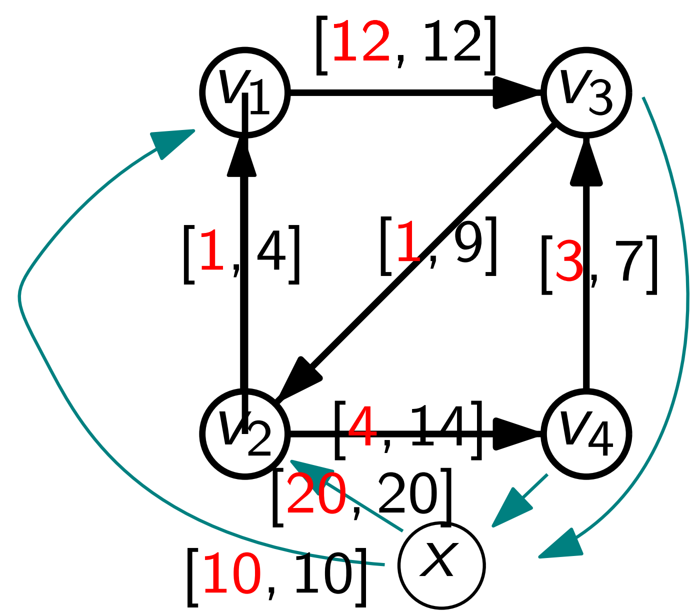


Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$, $\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\quad \hat{V} := V \cup \{x\}$,
$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\} \cup \{(u, x) : u \in V : b(u) > 0\}$
$\hat{l}(e) := l(e), \hat{c} = c(e) \; \forall e \in E'$
$l(x, v) := c(x, v) := -b(v)$

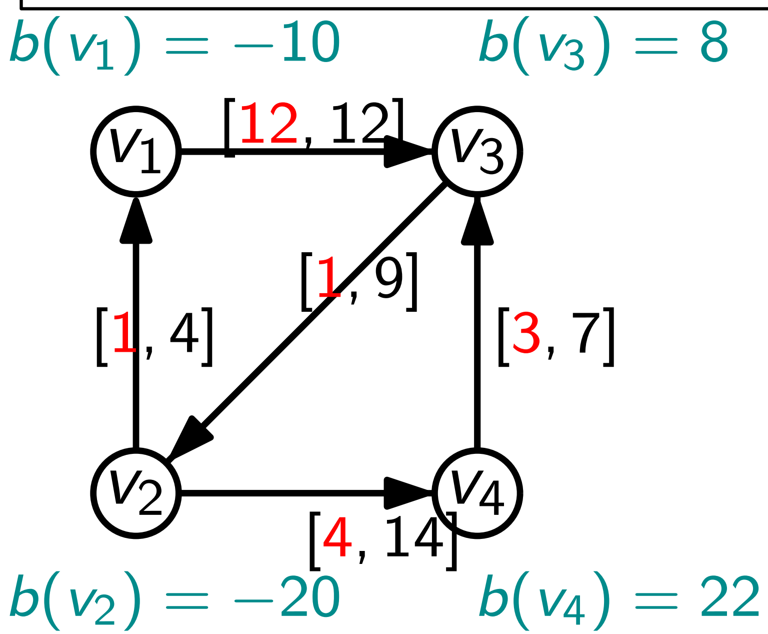


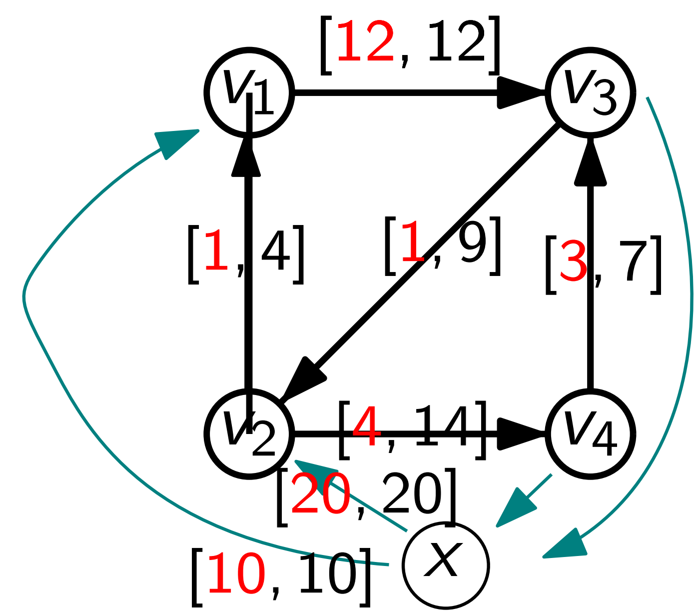


Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$,
unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$,
$\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\quad \hat{V} := V \cup \{x\}$,
$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\} \cup \{(u, x) : u \in V : b(u) > 0\}$
$\hat{l}(e) := l(e), \hat{c} = c(e) \ \forall e \in E'$
$l(x, v) := c(x, v) := -b(v)$

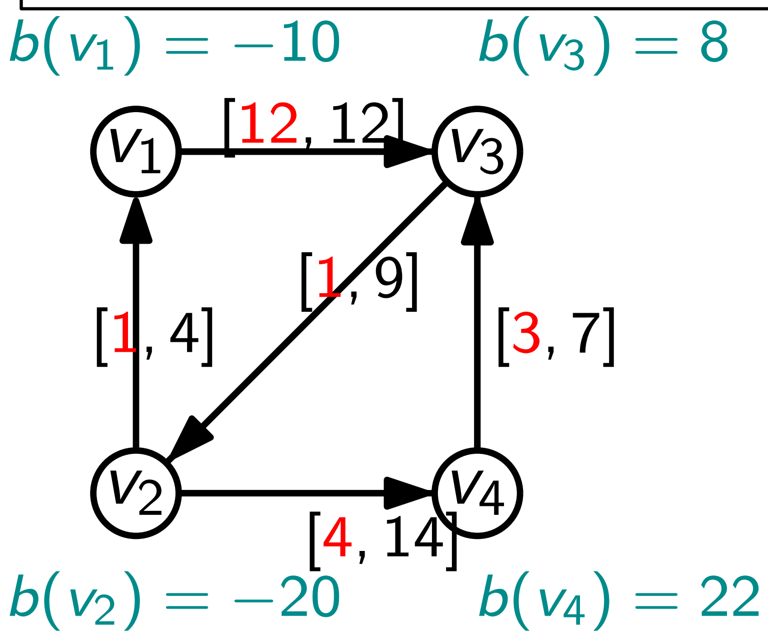


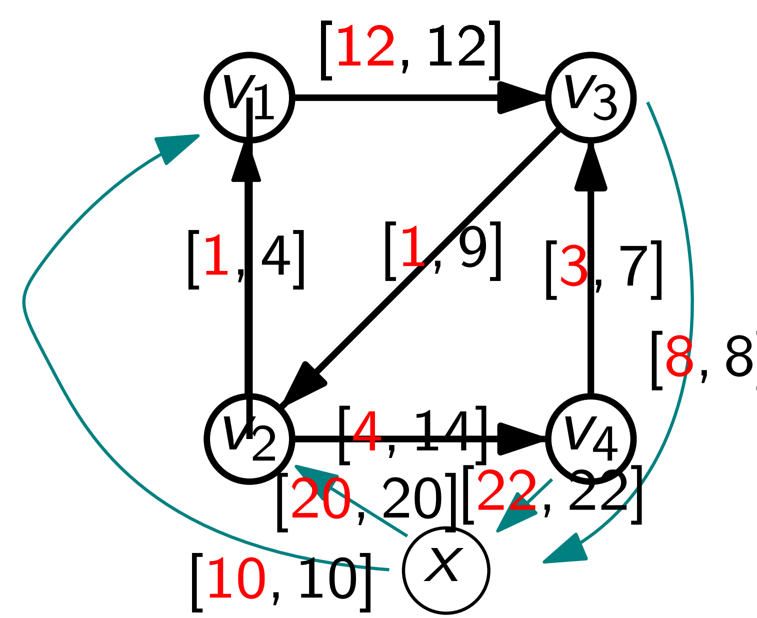


Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$,
unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$,
$\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\hat{V} := V \cup \{x\}$,
$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\} \cup \{(u, x) : u \in V : b(u) > 0\}$
$\hat{l}(e) := l(e), \hat{c} = c(e)\ \forall e \in E'$
$l(x, v) := c(x, v) := -b(v)\ \ l((u, v)) := c((u, v)) = b(u)$

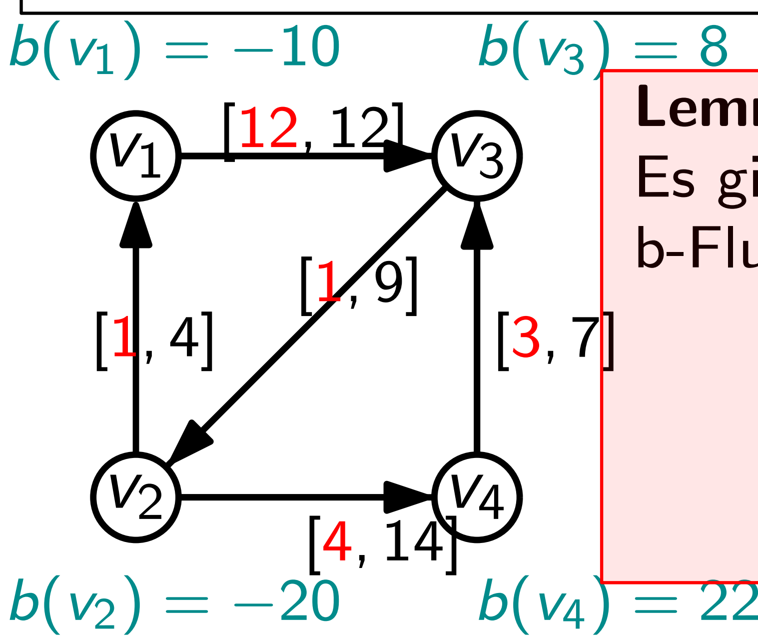




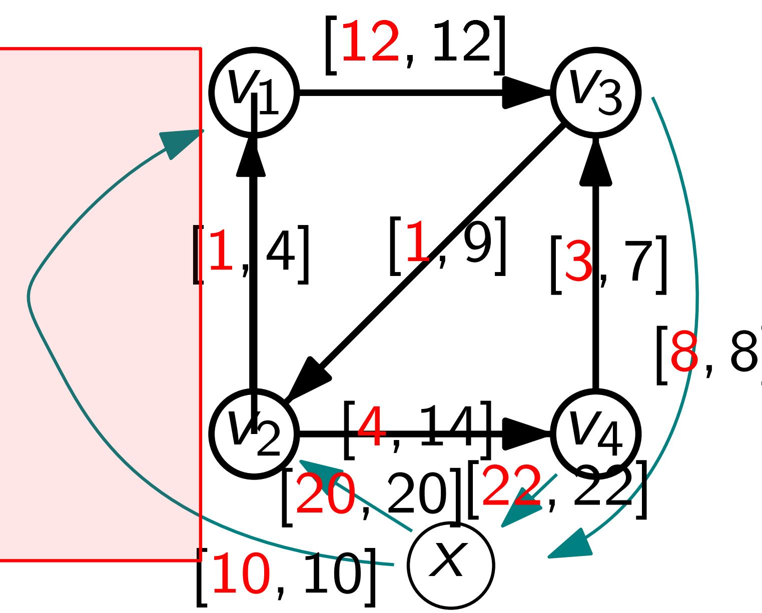
Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$, $\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\hat{V} := V \cup \{x\}$,
$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\} \cup \{(u, x) : u \in V : b(u) > 0\}$
$\hat{l}(e) := l(e), \hat{c} = c(e) \; \forall e \in E'$
$l(x, v) := c(x, v) := -b(v) \;\; l((u, v)) := c((u, v)) = b(u)$



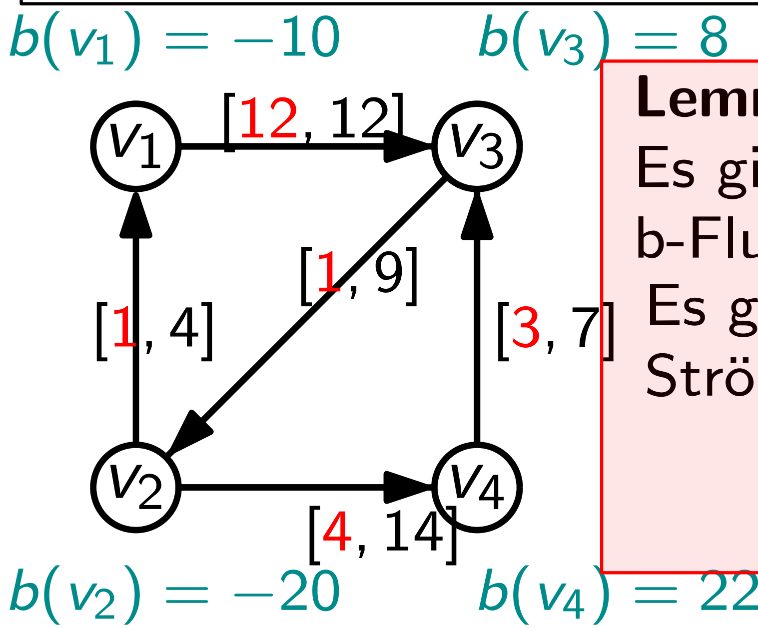
Lemma:
Es gibt einen zulässigen b-Fluss in $G \Leftrightarrow$



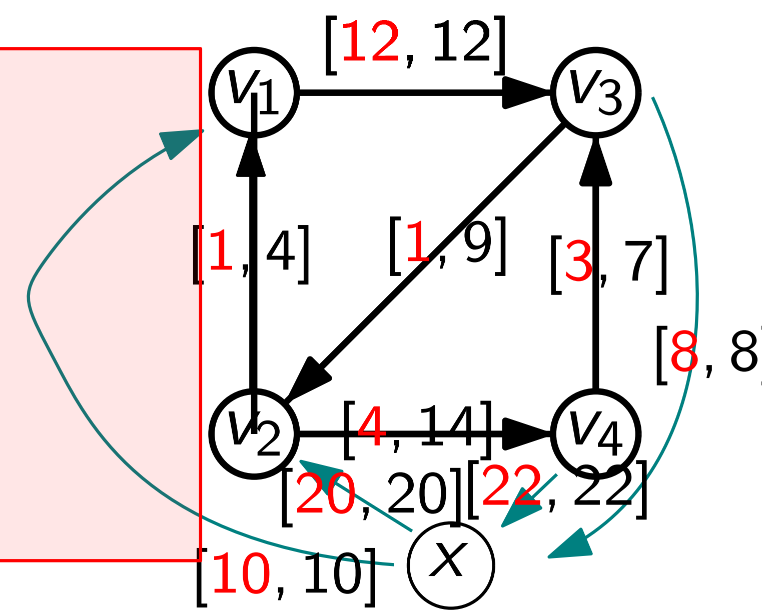
Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$,
$\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\hat{V} := V \cup \{x\}$,
$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\} \cup \{(u, x) : u \in V : b(u) > 0\}$
$\hat{l}(e) := l(e), \hat{c} = c(e)\ \forall e \in E'$
$l(x, v) := c(x, v) := -b(v)\ \ l((u, v)) := c((u, v)) = b(u)$



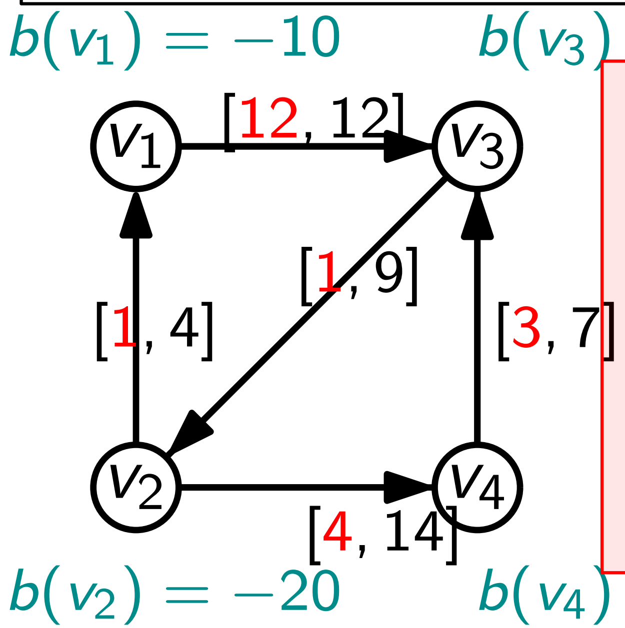
Lemma:
Es gibt einen zulässigen b-Fluss in G $\Leftrightarrow$
Es gibt eine zulässige Strömung in $\hat{G}$ $\Leftrightarrow$



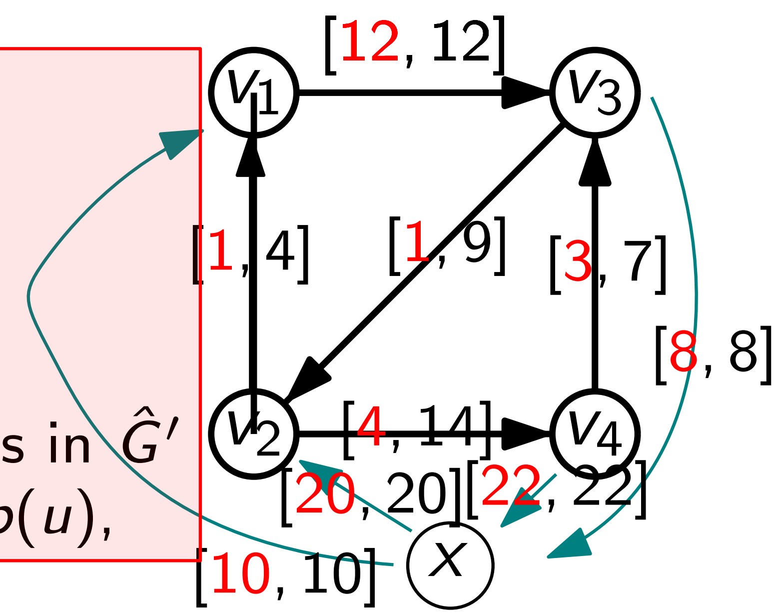
Verallgemeinerung: Bedarf und Überschuss

b-Flüsse
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Bedarfen $b(v)$ für $v \in V$, unteren & obere Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$
Gesucht: zulässiger **b-Fluss** $f : E \to \mathbb{R} : \forall e \in E : l(e) \leq f(e) \leq c(e)$,
$\forall v \in V : b(v) = \text{Nettozufl.}_f(v)$

Konstruiere **Obergraph** $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$: $\hat{V} := V \cup \{x\}$,
$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\} \cup \{(u, x) : u \in V : b(u) > 0\}$
$\hat{l}(e) := l(e), \hat{c} = c(e) \; \forall e \in E'$
$l(x, v) := c(x, v) := -b(v) \;\; l((u, v)) := c((u, v)) = b(u)$

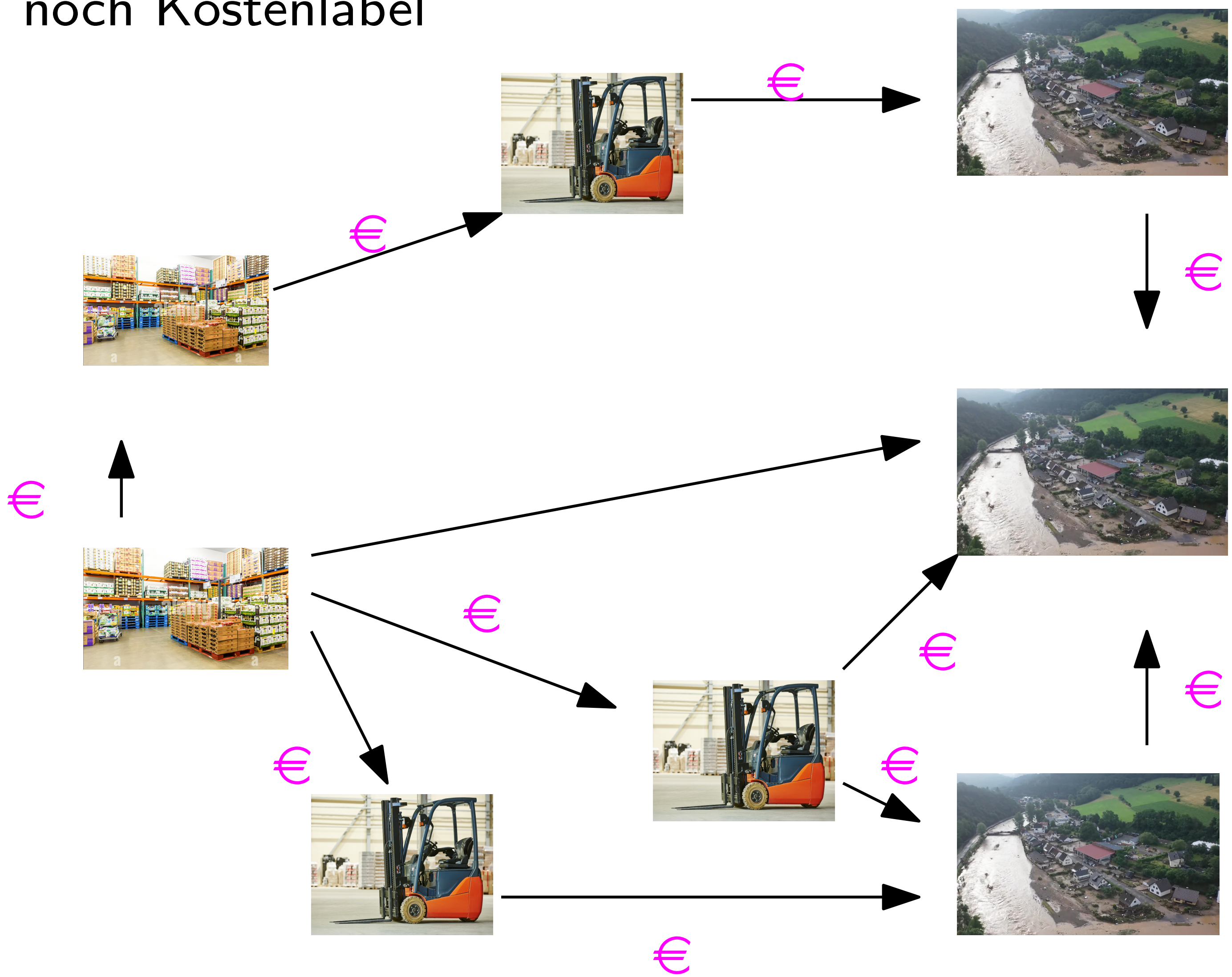


Lemma:
Es gibt einen zulässigen b-Fluss in G $\Leftrightarrow$
Es gibt eine zulässige Strömung in $\hat{G}$ $\Leftrightarrow$
Der maximale s'-t'-Fluss in $\hat{G}'$ hat Wert $\sum_{u \in V : b(u) > 0} b(u)$,



Verallgemeinerung: Kostenminimale Flüsse

Knoten haben **Bedarf** $b(v)$ oder **Überschuss** $-b(v)$
Neben (unteren und) oberen Kapazitätsschranken haben Kanten jetzt auch noch Kostenlabel

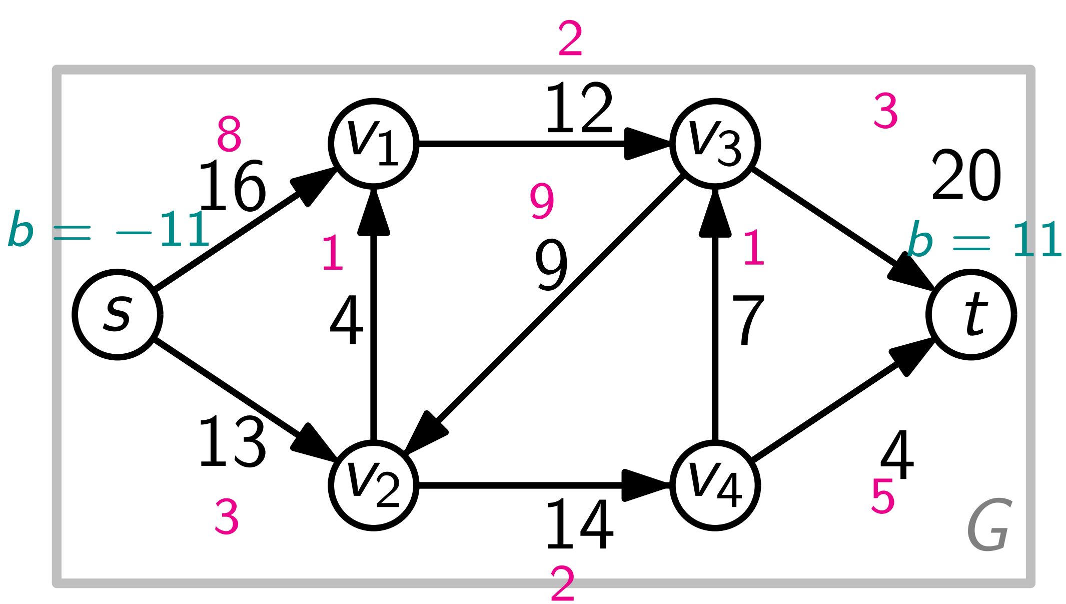


Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

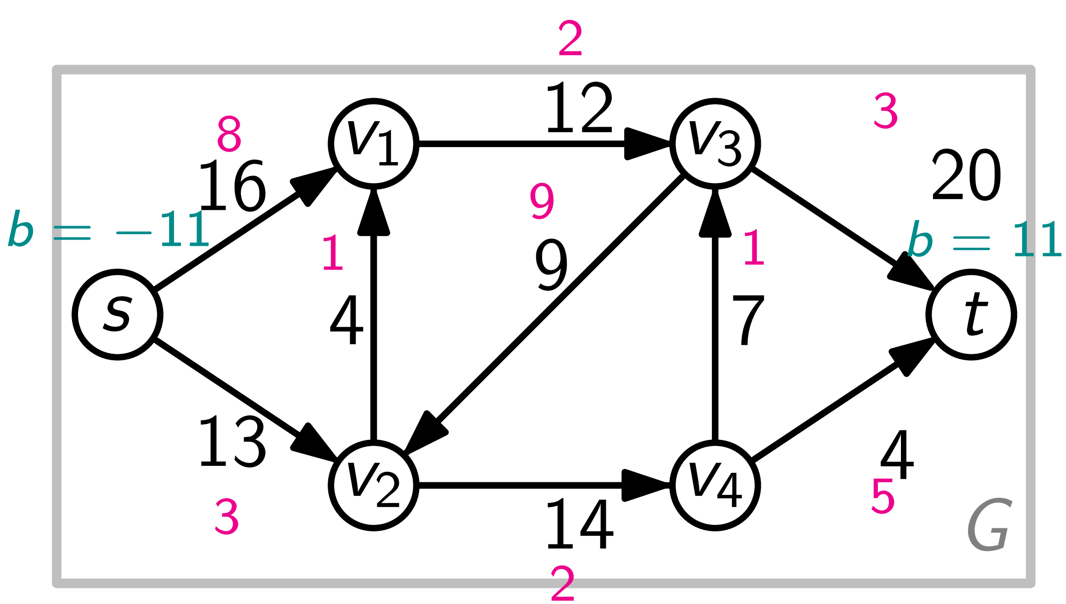
Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.



Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

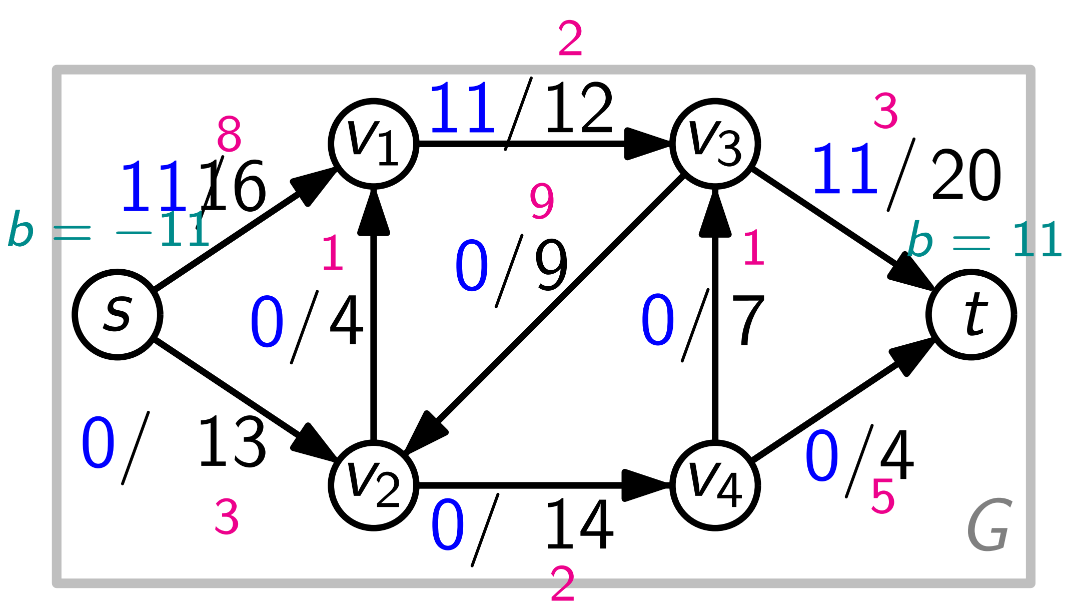
Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u, v)) = k((u, v))$ für $(u, v) \in E$
-$k_f((u, v)) = -k((v, u))$ für $(v, u) \in E$



Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

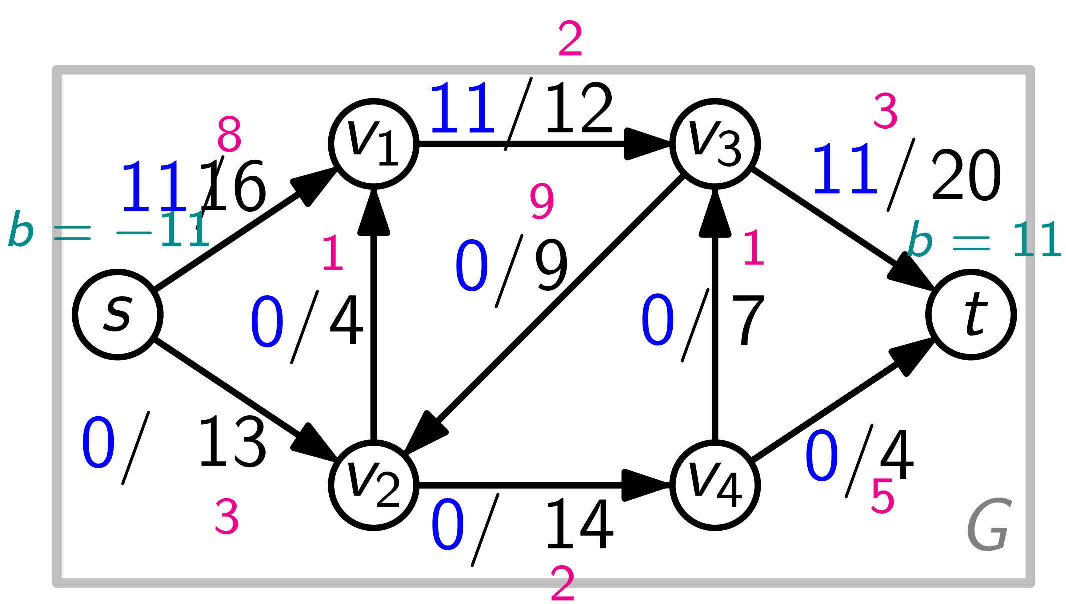
Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u, v)) = k((u, v))$ für $(u, v) \in E$
-$k_f((u, v)) = -k((v, u))$ für $(v, u) \in E$

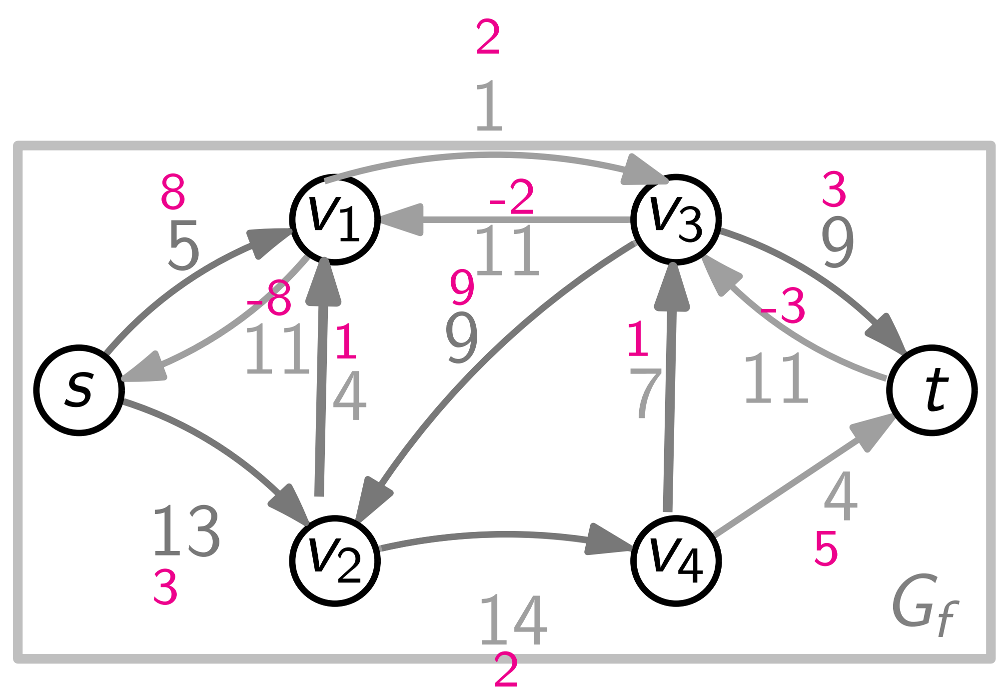


Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u,v)) = k((u,v))$ für $(u,v) \in E$
-$k_f((u,v)) = -k((v,u))$ für $(v,u) \in E$



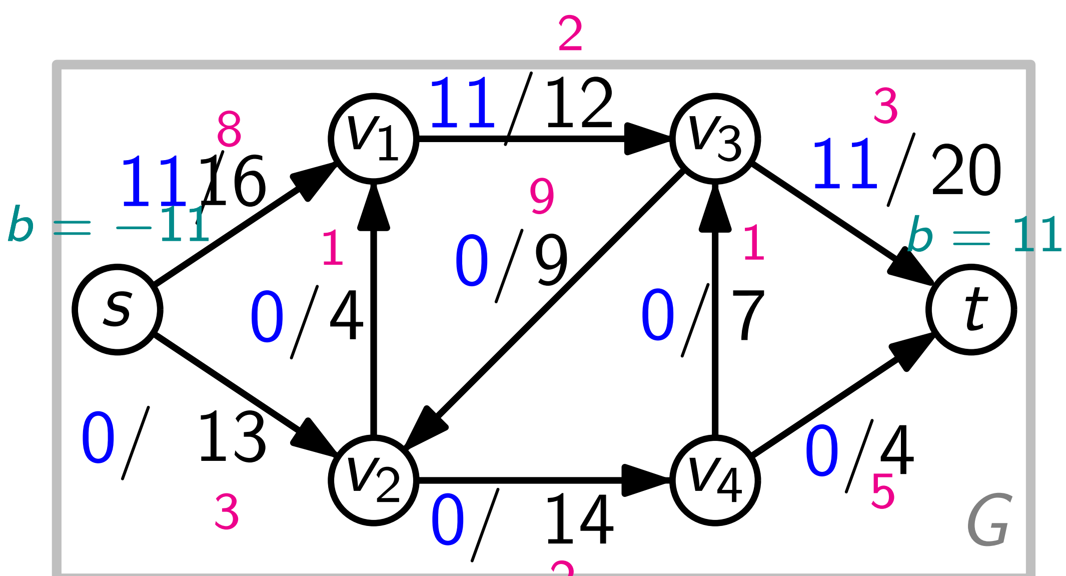


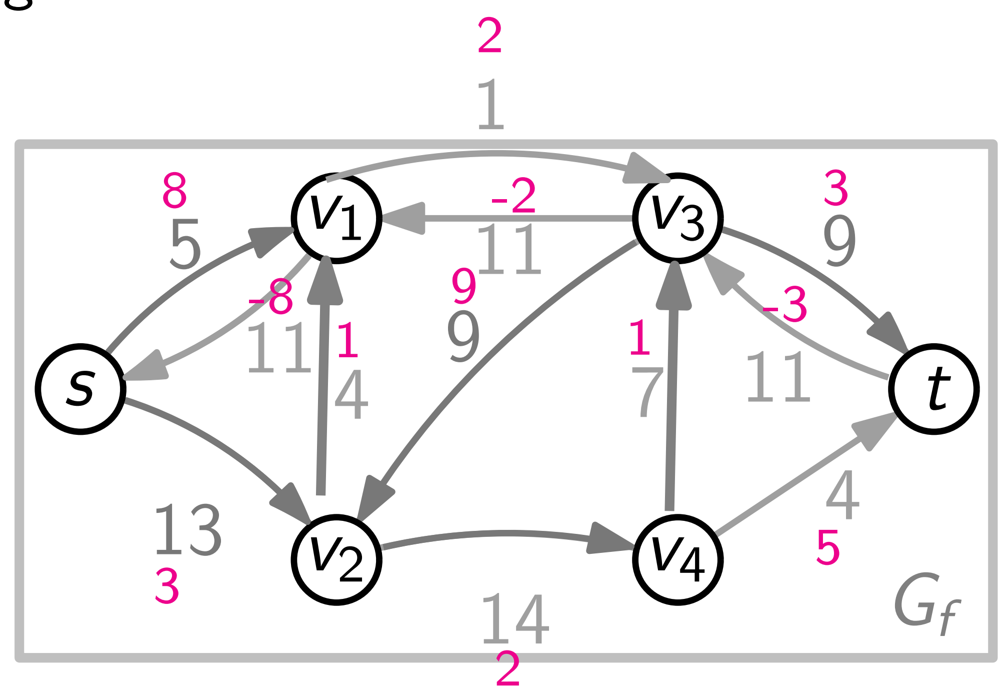
Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u, v)) = k((u, v))$ für $(u, v) \in E$
-$k_f((u, v)) = -k((v, u))$ für $(v, u) \in E$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss



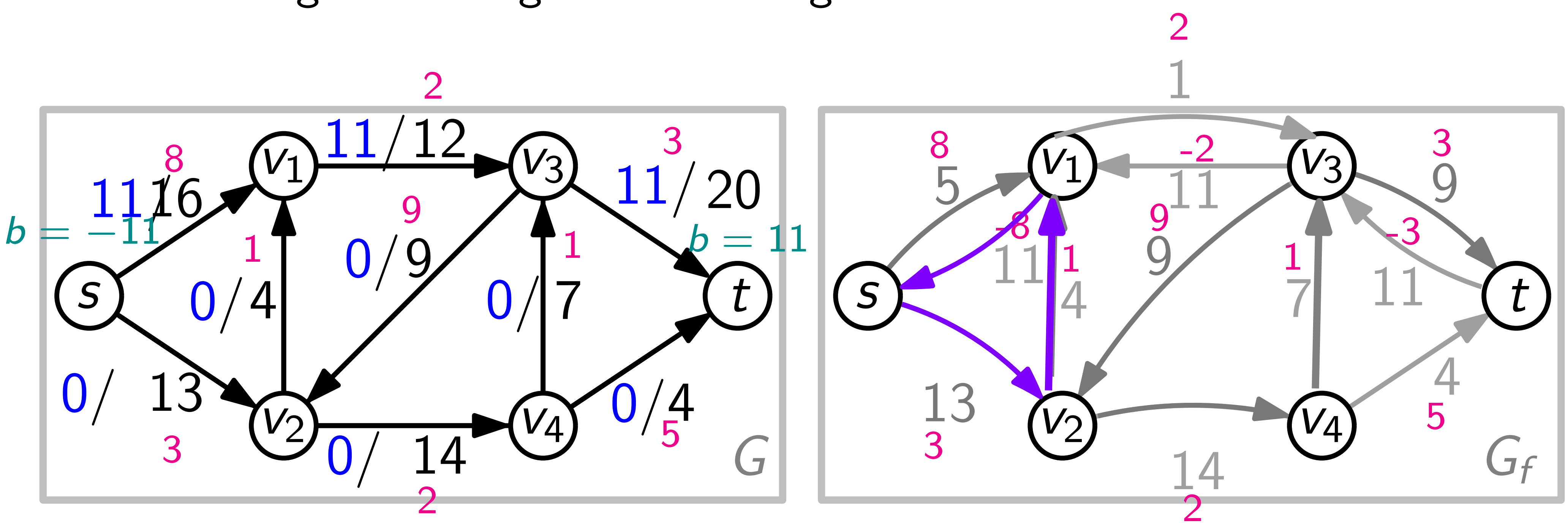


Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u,v)) = k((u,v))$ für $(u,v) \in E$
-$k_f((u,v)) = -k((v,u))$ für $(v,u) \in E$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss

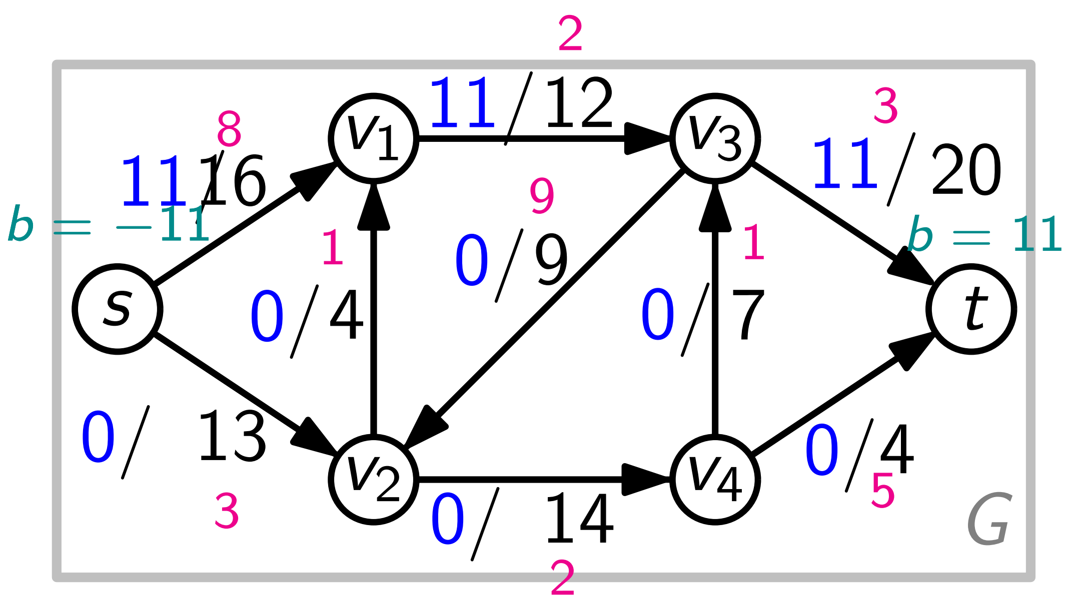


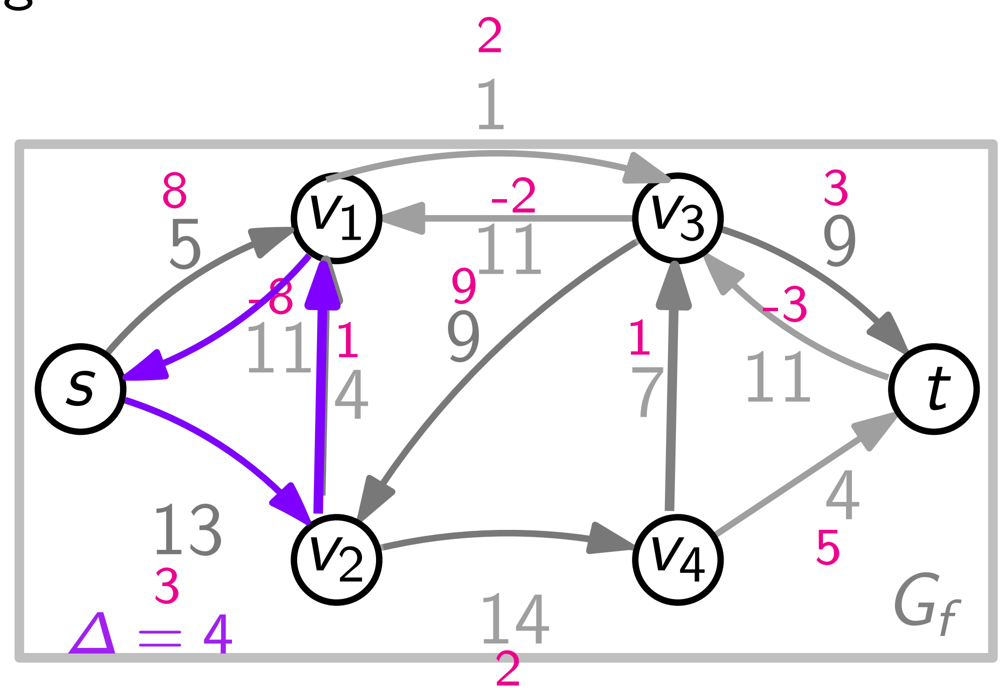
Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u,v)) = k((u,v))$ für $(u,v) \in E$
-$k_f((u,v)) = -k((v,u))$ für $(v,u) \in E$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss



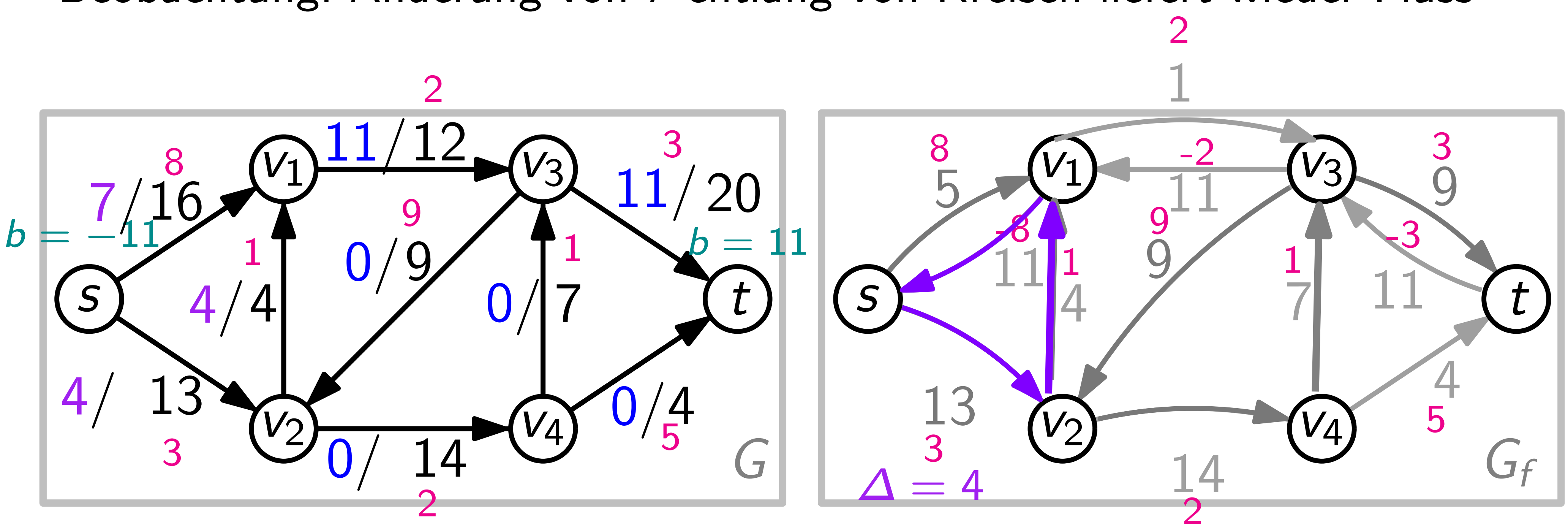


Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u,v)) = k((u,v))$ für $(u,v) \in E$
-$k_f((u,v)) = -k((v,u))$ für $(v,u) \in E$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss

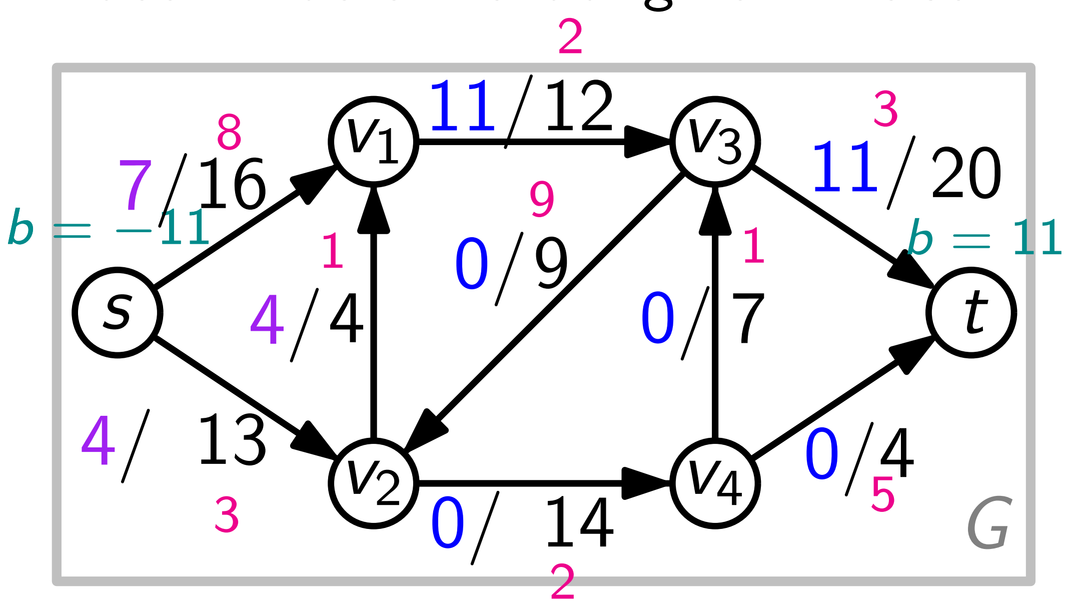


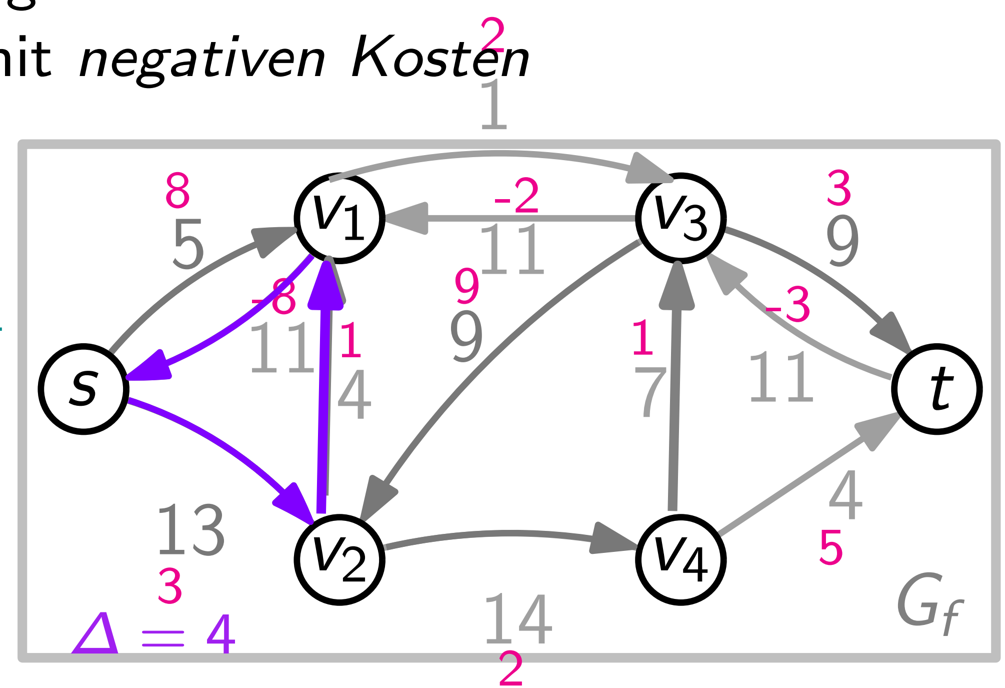
Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e)$, $c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u, v)) = k((u, v))$ für $(u, v) \in E$
-$k_f((u, v)) = -k((v, u))$ für $(v, u) \in E$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss
Idee: Ändere f entlang von Kreisen mit *negativen Kosten*



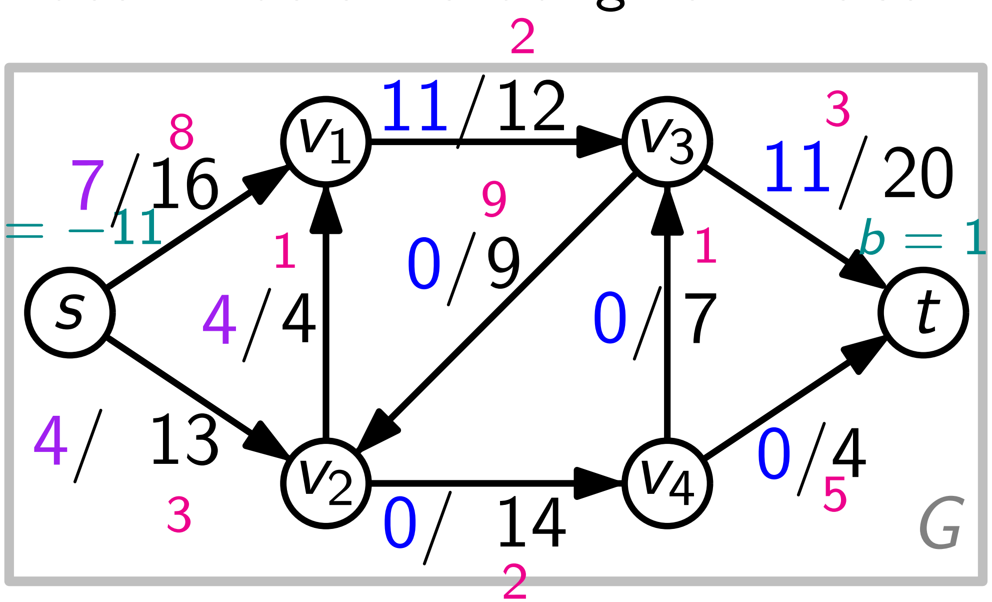


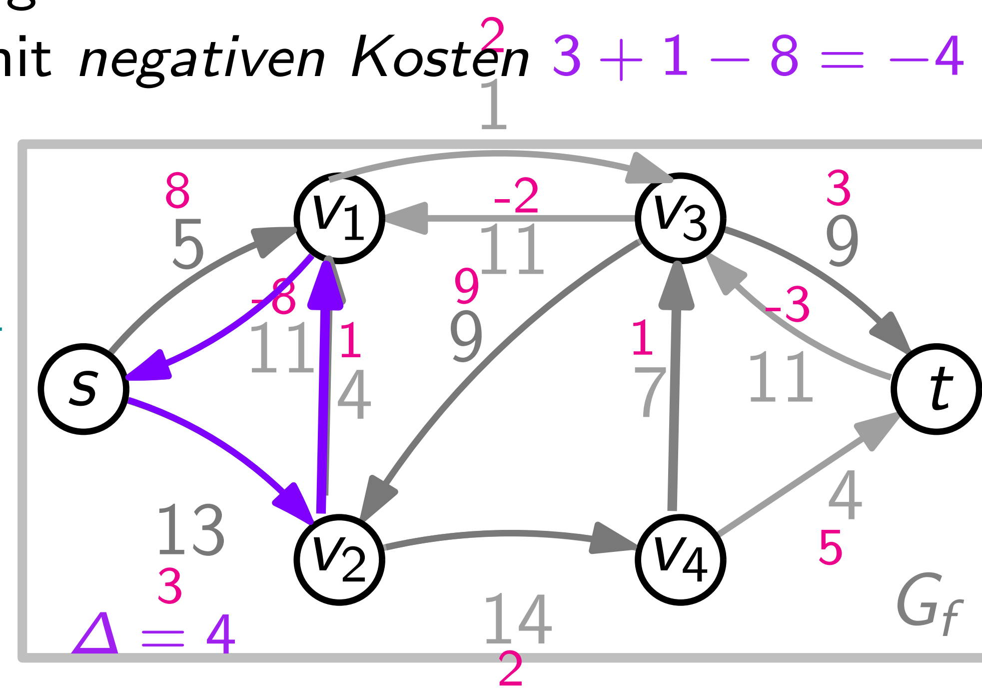
Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u, v)) = k((u, v))$ für $(u, v) \in E$
-$k_f((u, v)) = -k((v, u))$ für $(v, u) \in E$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss
Idee: Ändere f entlang von Kreisen mit *negativen Kosten* $3 + 1 - 8 = -4$



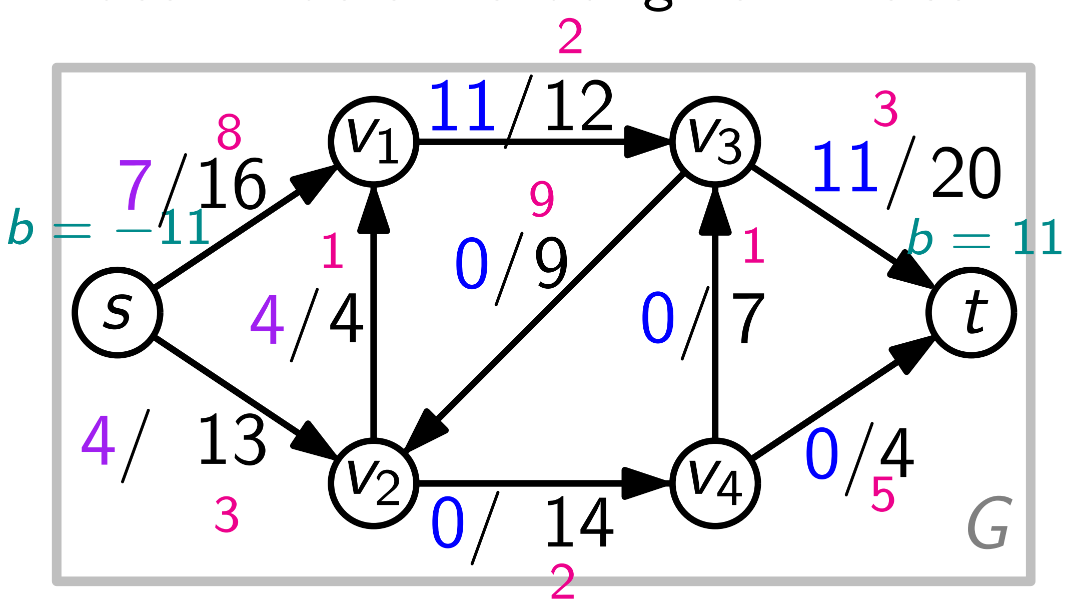


Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u,v)) = k((u,v))$ für $(u,v) \in E$
-$k_f((u,v)) = -k((v,u))$ für $(v,u) \in E$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss
Idee: Ändere f entlang von Kreisen mit *negativen Kosten*

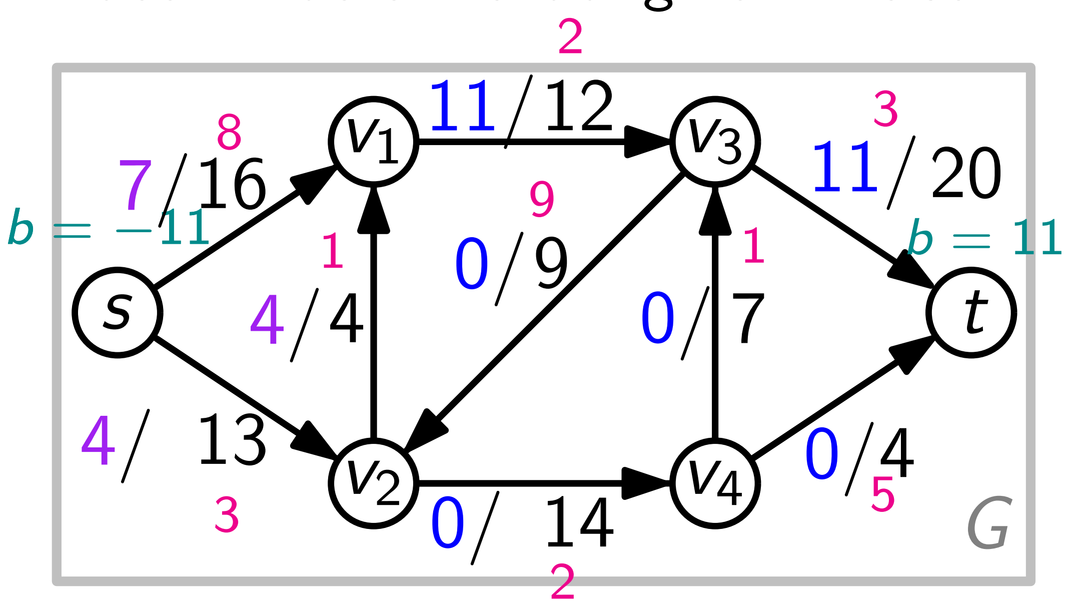


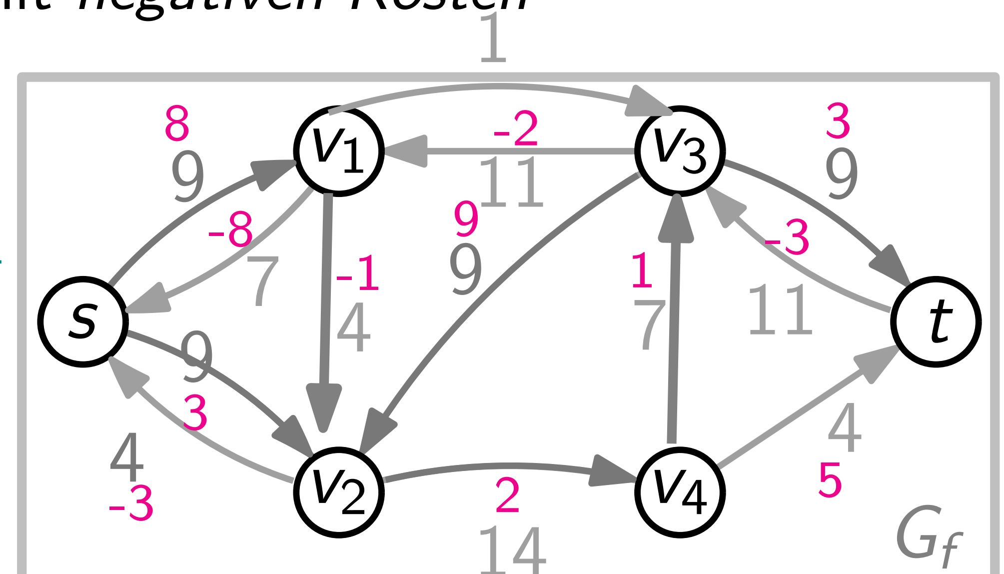
Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
-$k_f((u, v)) = k((u, v))$ für $(u, v) \in E$
-$k_f((u, v)) = -k((v, u))$ für $(v, u) \in E$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss
Idee: Ändere f entlang von Kreisen mit *negativen Kosten*





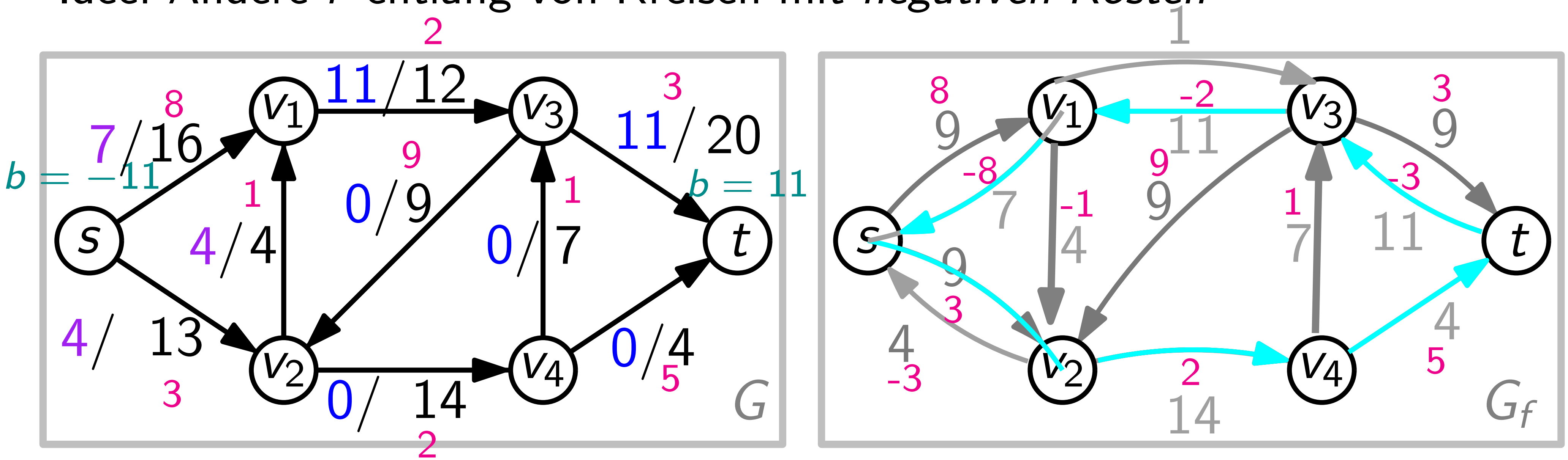
Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
- $k_f((u, v)) = k((u, v))$ für $(u, v) \in E$
- $k_f((u, v)) = -k((v, u))$ für $(v, u) \in E$

$3 + 2 + 5 - 3 - 2 - 8 = -3$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss
Idee: Ändere f entlang von Kreisen mit *negativen Kosten*



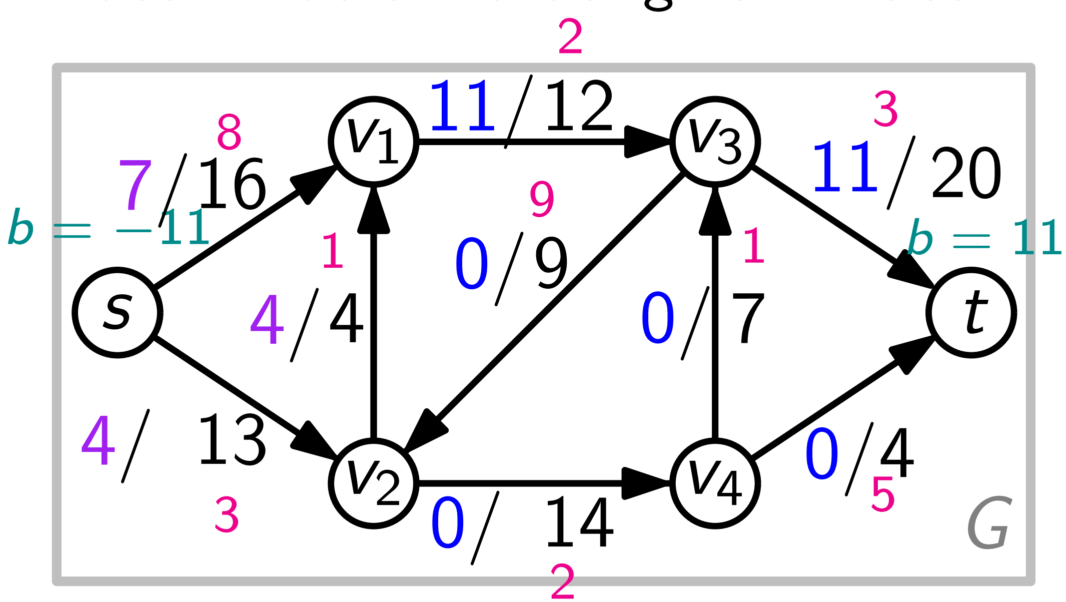
Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

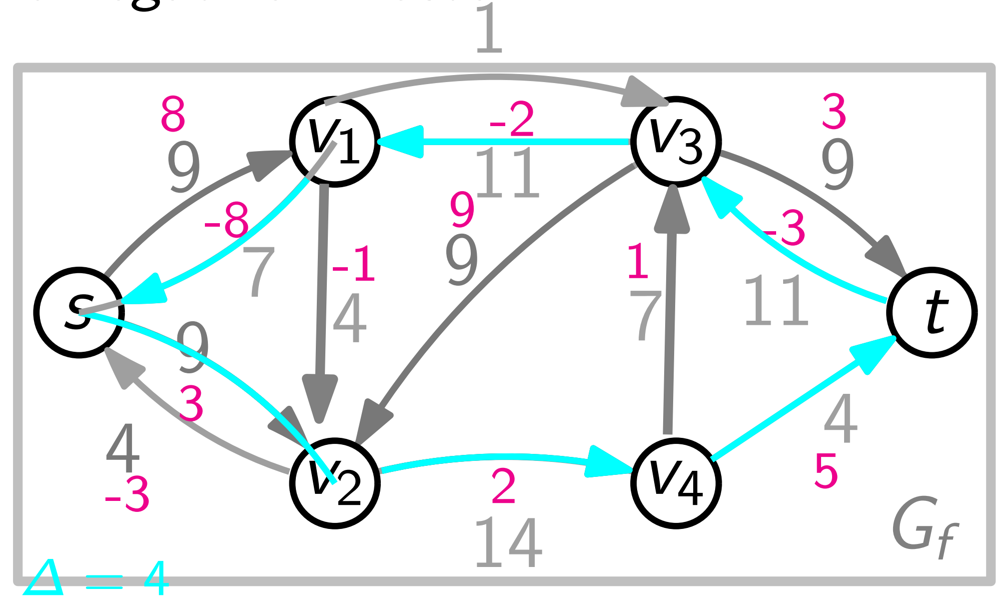
Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
- $k_f((u,v)) = k((u,v))$ für $(u,v) \in E$
- $k_f((u,v)) = -k((v,u))$ für $(v,u) \in E$

$3 + 2 + 5 - 3 - 2 - 8 = -3$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss
Idee: Ändere f entlang von Kreisen mit *negativen Kosten*





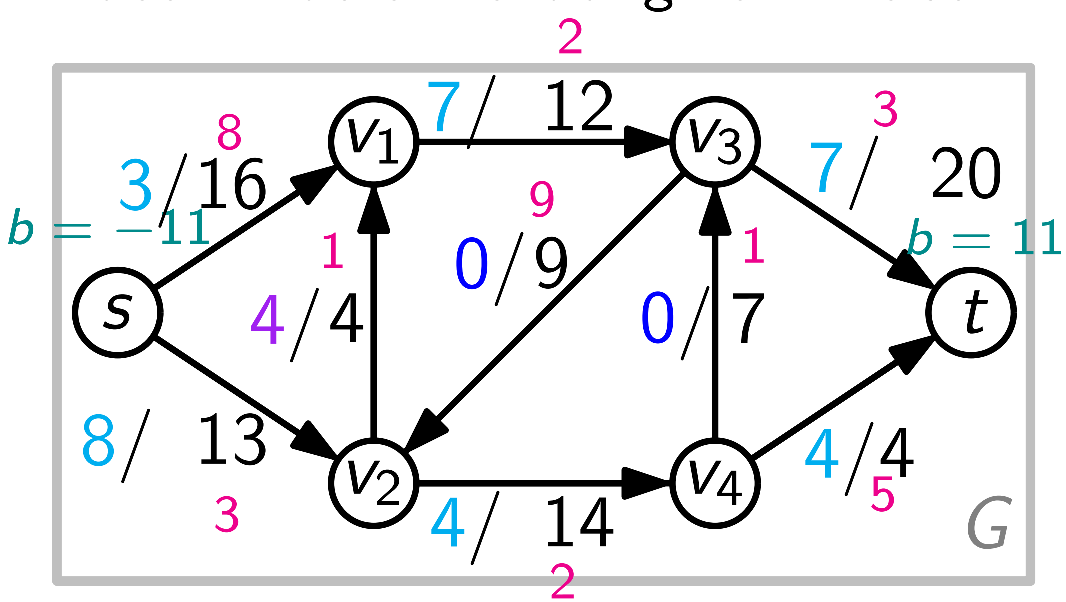
Verallgemeinerung: kostenminimale Flüsse

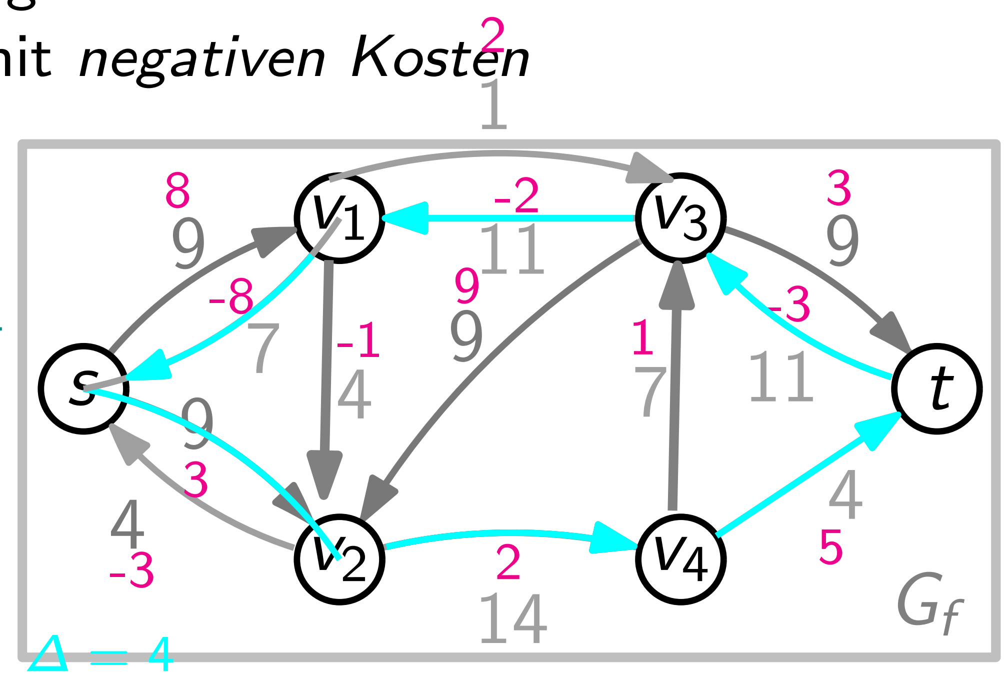
Kostenmininmaler Fluss
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger b-Fluss f, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Für gegebenen Fluss f: Erstelle Residualgraph G_f mit Kosten
- $k_f((u,v)) = k((u,v))$ für $(u,v) \in E$
- $k_f((u,v)) = -k((v,u))$ für $(v,u) \in E$

$3+2+5-3-2-8=-3$

Beobachtung: Änderung von f entlang von Kreisen liefert wieder Fluss
Idee: Ändere f entlang von Kreisen mit *negativen Kosten*





Algorithmus von Klein

Require: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$. Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$
Ensure: Zulässiger b-Fluss mit minimalen Kosten
  Berechne einen zulässigen b-Fluss f
  while Residualnetzwerk G_f enthält einen negativen Kreis $C = (V_C, E_C)$ **do**
    Setze $\Delta := \min_{e \in E_C} c_f(e)$
    for $(u, v) \in C$ **do**
      if $(u, v) \in E$ **then**
        $f(u, v) = f(u, v) + \Delta$
      else
        $f(u, v) = f(u, v) - \Delta$
      end if
    end for
  end while
  return f

Terminiert bei ganzzahligen Kapazitäten, Kosten und Bedarfen mit kostenminimalem b-Fluss