# Graphen und diskrete Optimierung

im Bachelorstudiengang 'Informatik und Nachhaltigkeit'

## Wdh: Flüsse

Marie Schmidt

19.07.2023

# Verschiedenes

Heute keine Sprechstunde um 14:00 Uhr.

Raumwechsel Übung am Freitag (8:15): M4 00.012

Mündliche Prüfungen nächste Woche im M4 00.001
Bitte pünktlich (oder zur Sicherheit 5 Minuten eher) da sein und draußen, oder auf dem Flur (Treppenaufgang) warten. Wir holen Sie herein.
Prüfung nur möglich, wenn im WueStudy angemeldet.
Nächste Chance Anfang Oktober.

**Ausweisdokument und Studierendenausweis mitbringen!**

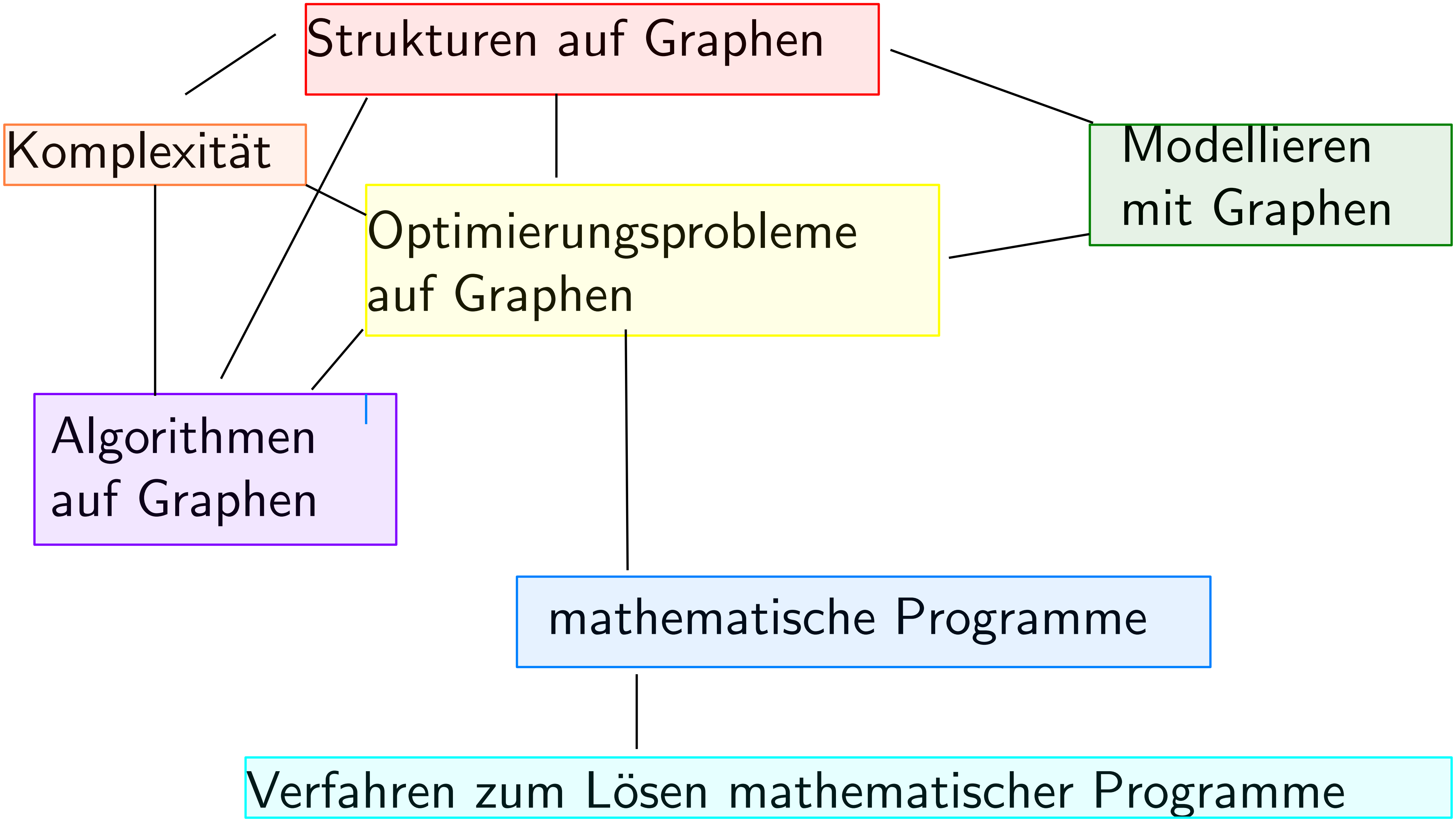
# Programm für heute

- kurze Info zum Prüfungsablauf
- Wdh Flüsse (inklusive ein paar Tipps zu Fragen und Antworten)
- weitere Fragen?

# Ablauf mündliche Prüfung

- im M4 00.001, bitte pünktlich sein und draußen oder im Treppenaufgang warten, wir holen Sie herein
- Ausweisdokument und Studierendenausweis mitbringen
- Handy aus oder lautlos
- Stifte und Papier sind vorhanden
- Zum Einstieg dürfen Sie ein Thema wählen (es bietet sich an, dieses Thema besonders gut vorbereitet zu haben!)
- Prüfung dauert etwa 20 Minuten
- Kendra ist als Beisitzerin anwesend und führt Protokoll
- nach Ablauf der Prüfung werden Sie aus dem Raum geschickt und wir beraten uns kurz über Ihre Note, dann dürfen Sie wieder reinkommen und erhalten die Note
- die erhaltene Note ist die **Prüfungsnote** (noch ohne eventuellen Bonus von den Übungszetteln)

# Worüber werde ich fragen?

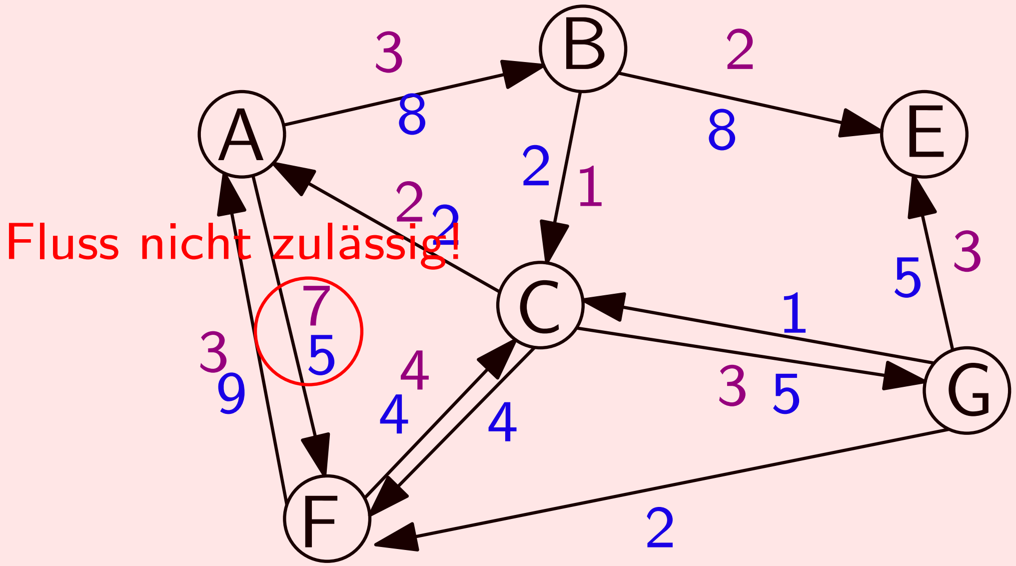



**Von allem etwas!**

# Was ist ein Fluss?

formale Definition?

Gegeben: Ein Netzwerk $G = (V, E)$ mit gerichteten Kanten.




Lilane Zahlen: $A$-$E$-Fluss

$|f| = 5.$

Blaue Zahlen: Kantenkapazitäten.

Ein $s$-$t$-Fluss ist eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ so dass für alle Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ gilt $\text{Nettozufluss}_f(v) = 0$.

Der **Wert** dieses Flusses ist $|f| := \text{Nettozufluss}_f(t)$.

In Flussproblemen sind oft zusätzlich noch **Kantenkapazitäten** gegeben.

Ein Fluss $f(e)$ heißt **zulässig**, wenn für alle $e \in E$ $f(e) \leq k_e$.

Außer $s$-$t$-Flüssen gibt es noch:

- **Strömung** $f : E \to \mathbb{R}$ mit $\text{Nettozufluss}_f(v) = 0 \forall v \in V$ (meistens sind im Kontext von Strömungen noch *untere Schranken* $l(e)$ an den Flusswert auf jeder Kante $e \in E$ gegeben.
- Haben wir außerdem noch *Bedarfe* und *Überschüsse* (modelliert als '*negative Bedarfe*') $b_v$ auf den Knoten $v$, dann nennen wir eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ mit $\text{Nettozufluss}_f(v) = b_v$ **Bedarfsfluss**.

# Was kann man mit Flüssen modellieren?

# Was sind 'klassische' Flussprobleme?

**Optimierungsprobleme:**

**Maximaler Fluss**
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$ und Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Gesucht: zulässiger Fluss $f$, mit maximalem Wert $|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$
**Kostenmininmaler Fluss**
Gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit oberen und unteren Kantenkapazitäten $l(e), c(e)$ für $e \in E$ Kantenkosten $k(e)$ für $e \in E$, Bedarfe $b(v)$ für $v \in V$.
Gesucht: zulässiger $b$-Fluss $f$, mit minimalen Kosten $\sum_{e \in E} k(e) \cdot f(e)$.

Es gibt natürlich auch '**Entscheidungsprobleme** mit Flüssen', z.B.

- Gibt es einen zulässigen $s$-$t$-Fluss (mit Flusswert $\geq W$)?
- Gibt es eine zulässige Strömung?
- Gibt es einen zulässigen Bedarfsfluss mit Kosten $\leq C$?

Was ist die Komplexität dieser Probleme?

# Algorithmus für das Problem 'maximaler Fluss'?

- Ford-Fulkerson
- Edmonds-Karp

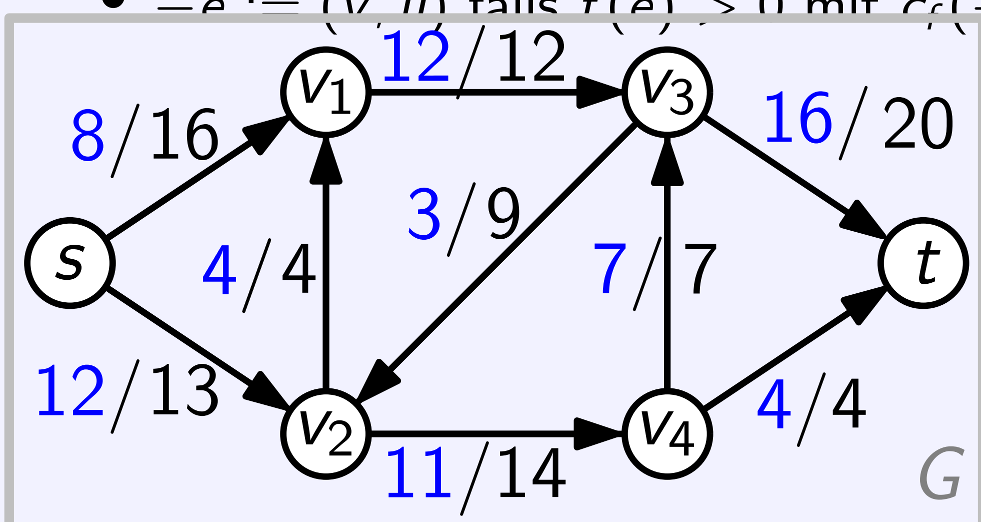
## Grundidee dieser Algorithmen?

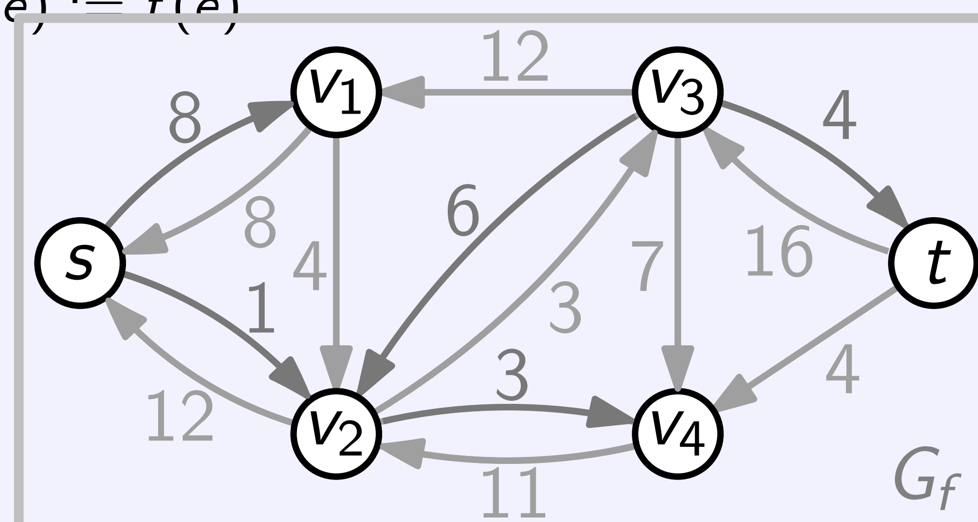
*Erhöhe in jedem Schritt des Algorithmus' den Fluss von s nach t durch Finden eines flußvergrößernden Wegs im Residualgraph.*

### Definition Residualgraph?

$G = (V, E)$ Graph mit Kap. $c(e)$ für $e \in E$, $s, t \in V$, und $f$ $s$-$t$-Fluss auf $G$.
Der **Residualgraph** $G_f = (V, E_f)$ enthält
für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := (u, v)$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := (v, u)$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$



# Algorithmus für das Problem 'maximaler Fluss'?

- Ford-Fulkerson
- Edmonds-Karp

## Grundidee dieser Algorithmen?

*Erhöhe in jedem Schritt des Algorithmus' den Fluss von s nach t durch Finden eines flußvergrößernden Wegs im Residualgraph.*

**Satz vom flußvergrößerndem Weg:** Ein zulässiger $s$-$t$-Fluss $f$ in $G$ ist maximal $\Leftrightarrow$ es gibt keinen flussvergrößernden Weg in $G_f$.

## Laufzeit?

Ford-Fulkerson: $O(|f^*||E|)$

Ist das polynomiell? Pseudo-polynomiell? Oder langsamer?

Edmonds-Karp: Wie Ford-Fulkerson, aber: Wähle nicht *irgendeinen* flussvergrößernden Weg, sondern einen mit minimaler Kantenanzahl.

$O(|V||E|^2)$ - also polynomiell

# 'Maximaler Fluss' als LP

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{e \in \delta^-(t)} f(e) & \\
\text{so dass} \quad & \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) = 0 & \forall v \in V \setminus \{s, t\} \\
& f(e) \le c_e & \forall e \in E \\
& f(e) \ge 0 & \forall e \in E
\end{aligned}
$$

Nebenbedingungsmatrix ist TU.
Deswegen gibt es für ganzzahlige Kapazitäten ganzzahlige Flüsse, die optimal sind (**Satz vom ganzzahligen Fluss**)

# Wie hängen maximale Flüsse und minimale Schnitte zusammen?

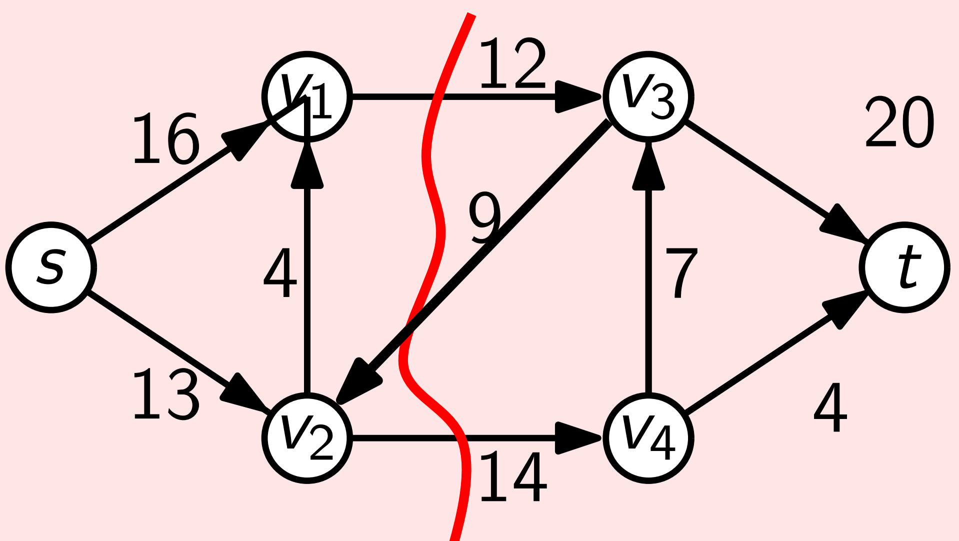
**Max-Flow-Min-Cut Theorem**
Sei $f$ ein zulässiger $s$-$t$-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

## Was ist ein Schnitt?

Ein $s$-$t$-**Schnitt** ist eine Zerlegung $(S, T)$ der Knotenmenge $V = S \dot\cup T$ mit $s \in S$, $t \in T$.

Die **Kapazität** von $S$ ist $\delta^+(S) := \sum_{(u,v):u \in S, v \in T} c_{(u,v)}$.



# Wie hängen maximale Flüsse und minimale Schnitte zusammen?

**Max-Flow-Min-Cut Theorem**
Sei $f$ ein zulässiger $s$-$t$-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Wie beweist man das?

1. Einfach zu sehen: Für jeden $s$-$t$-Fluss $f$ und jeden $s$-$t$-Schnitt $S$ gilt: $|f| \leq c(\delta^+(S))$.

2. Sei $f^*$ ein maximaler Fluss. Dann kann ich einen Schnitt $S^*$ mit Größe $\delta^+(S^*) = |f^*|$ angeben.
Nämlich $S^* := \{$alle Knoten, die von $s$ in $G_{f^*}$ erreichbar sind$\}$

$$\delta^-(S^*) = \sum_{e \in \delta^+(S^*)} f^*(e) = \sum_{e \in \delta^-(V \setminus S^*)} f^*(e) = \sum_{e \in \delta^-(t)} f^*(t) = |f^*|$$

# Wie hängen maximale Flüsse und minimale Schnitte zusammen?

**Max-Flow-Min-Cut Theorem**
Sei $f$ ein zulässiger $s$-$t$-Fluss in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kapazitäten $c(e) > 0$ für alle $e \in E$.
Dann gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t- \text{ Fluss in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt in } G} c(\delta^+(S))$$

Wie beweist man das?

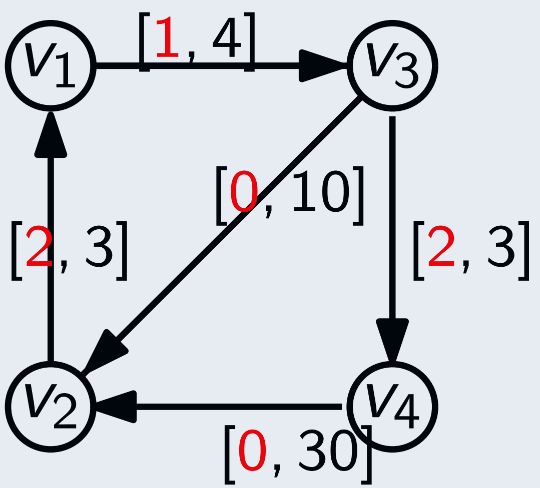
Alternativ:
Die beiden Probleme lassen sich als zueinander duale LPs formulieren.

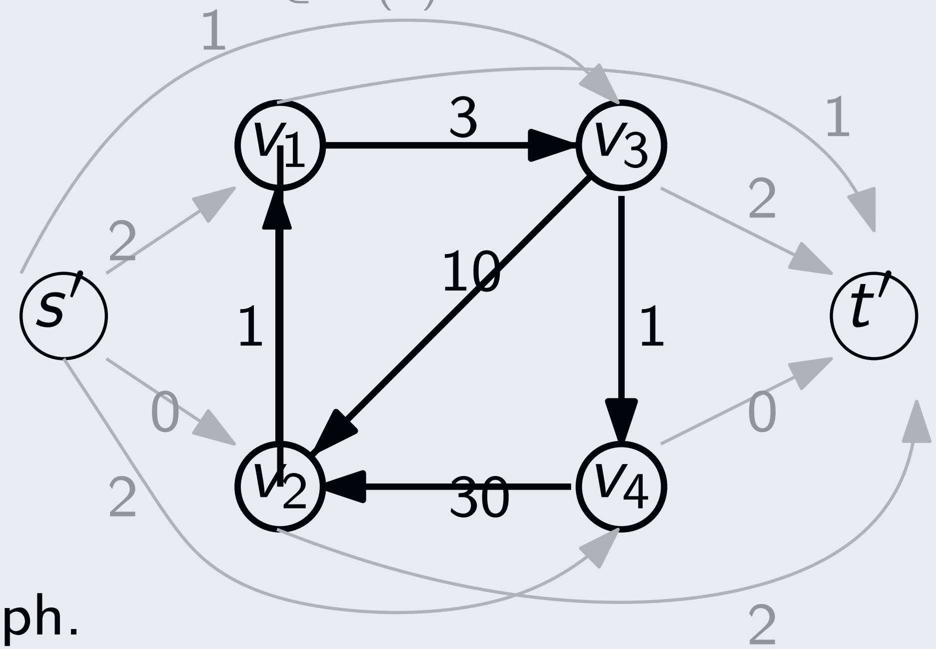
Aussage folgt dann aus Satz über starke Dualität.

# Wie finden wir zulässige Strömungen, wenn untere Kantenkapazitäten gegeben sind?

**Obergraph** $G' = (V', E')$: zusätzlich Quelle und Senke, dafür keine unteren Schranken auf Kanten

$V' = V \cup \{s', t'\}$,
$E' = E \cup \{(s', v) : v \in V\} \cup \{(v, t') : v \in V\}$
$l'(e) := 0 \ \forall e \in E'$
$c'(e) := c(e) - l(e) \ \forall e \in E$
$c'((s', v)) = \sum_{e \in \delta^-(v)} l(e)$ und $c'((v, t')) = \sum_{e \in \delta^+(v)} l(e) \ \forall v \in V$




Finde maximalen Fluss $f^*$ im Obergraph.
Hat dieser Wert $|f^*| =$ entspricht er zulässiger Strömung im Urpsrungsgraph.

# Wie finden wir zulässige Bedarfsflüsse?

Obergraph, in dem eine zulässige Strömung gefunden werden muss:

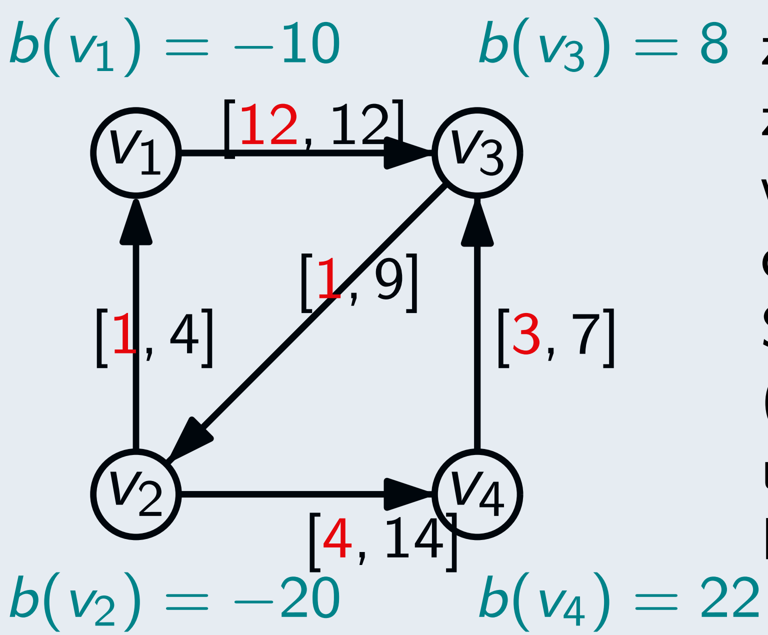
Zusätzlichen Knoten $x$, der mit allen Bedarfs- und Überflussknoten verbunden wird, ersetzt Bedarfe,
Kanten werden auf Bedarf-/Überflusswerte gesetzt

$\hat{V} := V \cup \{x\}$,

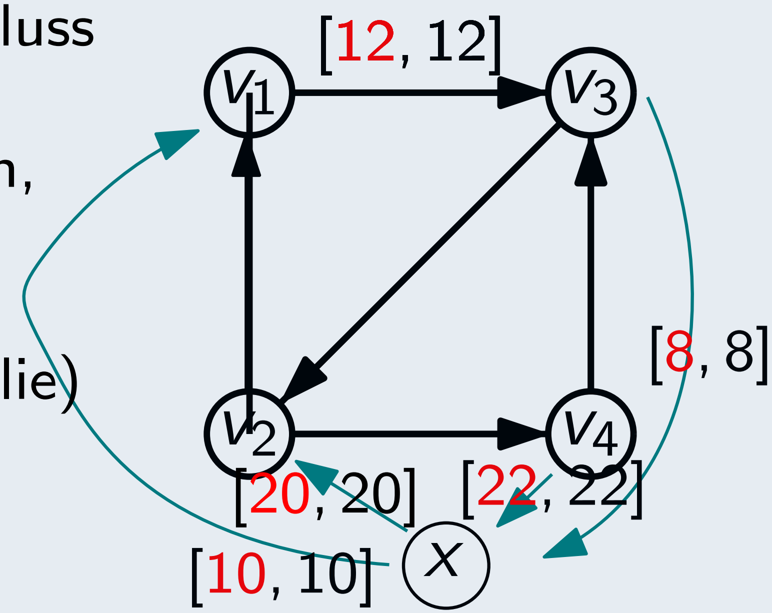
$\hat{E} := E \cup \{(x, v) : v \in V : b(v) < 0\} \cup \{(u, x) : u \in V : b(u) > 0\}$

$l(x, v) := c(x, v) := -b(v)\ \forall v \in V$ mit $b(v) < 0$

$l((u, x)) := c((u, x)) := b(u)\ \forall u \in V$ mit $b(u) > 0$




Um hier algorithmisch zulässigen Bedarfsfluss zu finden, erstelle weiteren Obergraph, der die unteren Schranken ersetzt (siehe vorherige Folie) und wende Edmonds-Karp an.



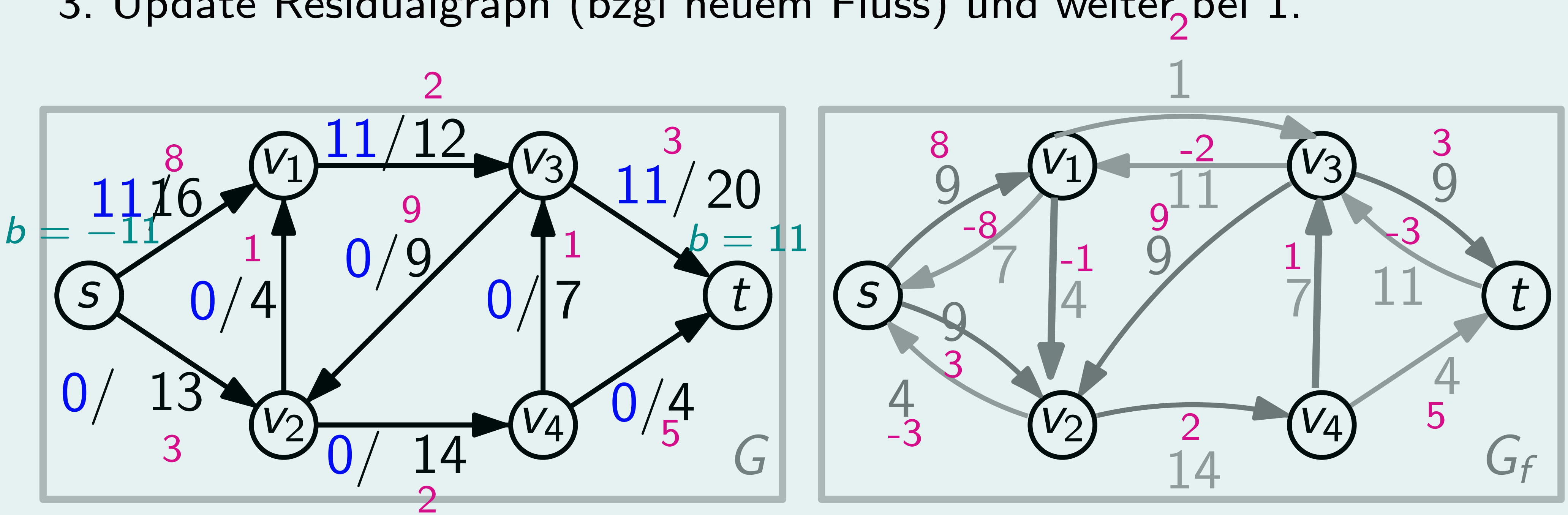
# Wie finden wir kostenminimale Flüsse?

Ausgangssituation: Graph mit Bedarfen, (unteren und) oberen Kapazitätsschranken, Kantenkosten

Finde zulässigen Bedarfsfluss (siehe vorherige Folie)

1. Erstelle Residualgraph mit negativen Kosten für rückwärts gerichtete Kanten.
2. Finde Kreise mit negativen Kosten und erhöhe Fluss (so viel wie möglich, ohne Schranken zu verletzen) entlang dieser Kreise.

3. Update Residualgraph (bzgl neuem Fluss) und weiter bei 1.



# Kostenminimaler Fluss' als LP

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{e \in E} c(e) f(e) & \\
\text{so dass} \quad & \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) = b(e) & \forall v \in V \setminus \{s, t\} \\
& f(e) \leq c_e & \forall e \in E \\
& f(e) \geq l_e & \forall e \in E \\
& f(e) \geq 0 & \forall e \in E
\end{aligned}
$$

Nebenbedingungsmatrix ist TU.
Deswegen gibt es für ganzzahlige Kapazitäten ganzzahlige Flüsse, die optimal sind (**Satz vom ganzzahligen Fluss**)