Graphen und diskrete Optimierung

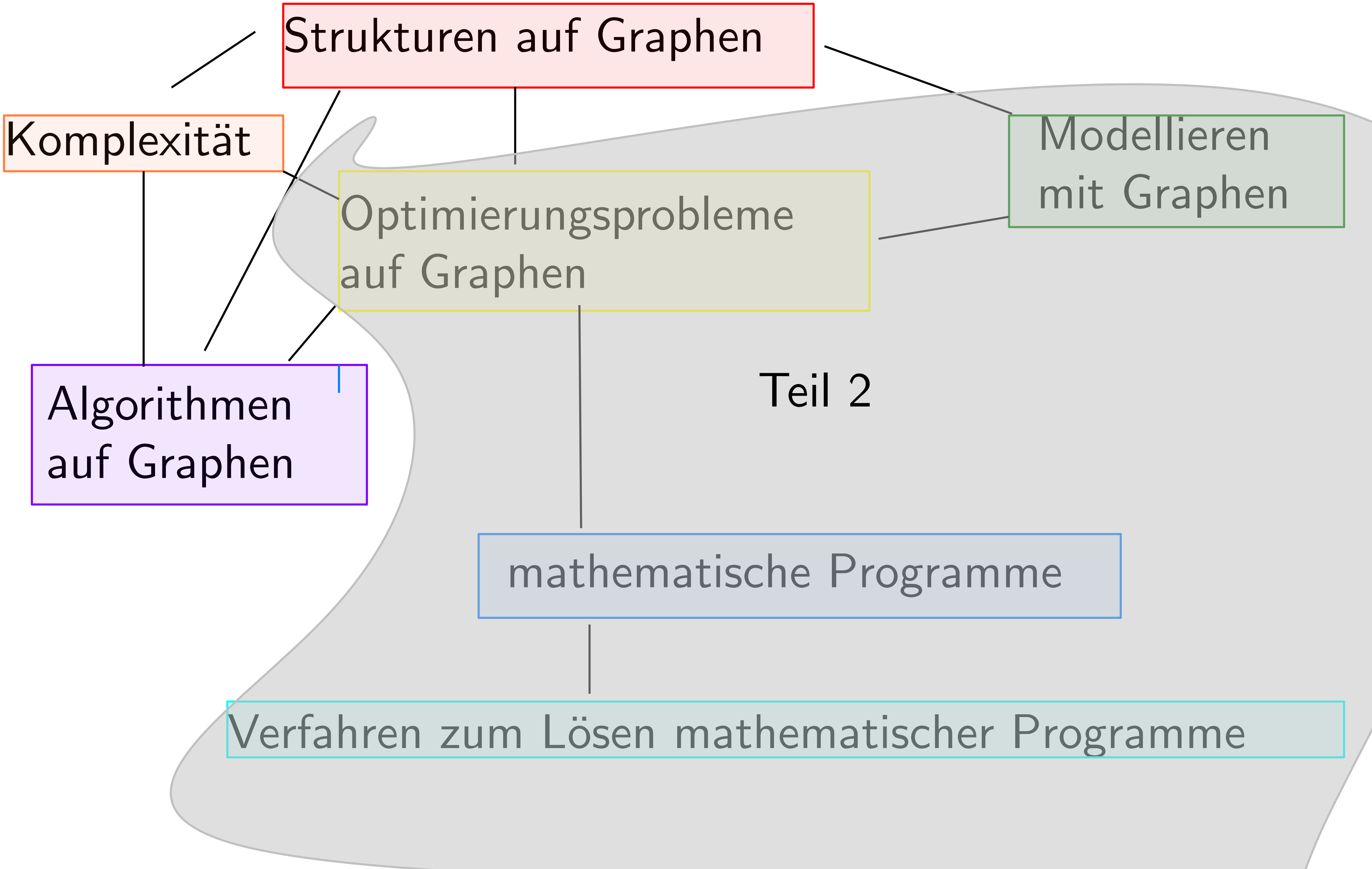
im Bachelorstudiengang 'Informatik und Nachhaltigkeit'

Ganzzahlige lineare Programmierung 2: Formulierungen und Schnittebenen

Marie Schmidt

12.07.2023

Worum soll er hier gehen?



Vorlesungsübersicht

- Einführung: Modellieren auf Graphen ✓
- Teil 1: Graphen und Algorithmen auf Graphen ✓
- Teil 2: Mathematische Programmierung
  - Einführung in die lineare und ganzzahlig lineare Programmierung ✓
  - lineare Programmierung ✓
  - ganzzahlige Programmierung
    * Komplexität der ganzzahligen Programmierung
    * Das Branch-and-Bound-Verfahren
    * etwas Polyedertheorie: Formulierungen, konvexe Hülle, TU Matrizen
    * Schnitte und Schnittebenenverfahren

19.7.: kein neuer Stoff, Zeit für Ihre Fragen oder (auf Wunsch) Wiederholung von einzelnen Inhalten

Vorlesungsübersicht

- Einführung: Modellieren auf Graphen ✓
- Teil 1: Graphen und Algorithmen auf Graphen ✓
- Teil 2: Mathematische Programmierung
  - Einführung in die lineare und ganzzahlig lineare Programmierung ✓
  - lineare Programmierung ✓
  - ganzzahlige Programmierung
    - Komplexität der ganzzahligen Programmierung
    - Das Branch-and-Bound-Verfahren
    - etwas Polyedertheorie: Formulierungen, konvexe Hülle, TU Matrizen
    - Schnitte und Schnittebenenverfahren

19.7.: kein neuer Stoff, Zeit für Ihre Fragen oder (auf Wunsch) Wiederholung von einzelnen Inhalten

Gibt es dafür schon Vorschläge?

Ganzzahlige Programme

Wir nennen ein mathematisches Programm **ganzzahlig linear**, wenn

- die Zielfunktion **(affin) linear** in den Variablen ist
- der zulässige Bereich ein **Polyeder geschnitten mit** $\mathbb{Z}^n$ ist, d.h. wir haben lineare Nebenbedingungen (Gleichungen und oder Ungleichungen) und eine Ganzzahligkeitsbedingungen ($x \in \mathbb{Z}^n$)

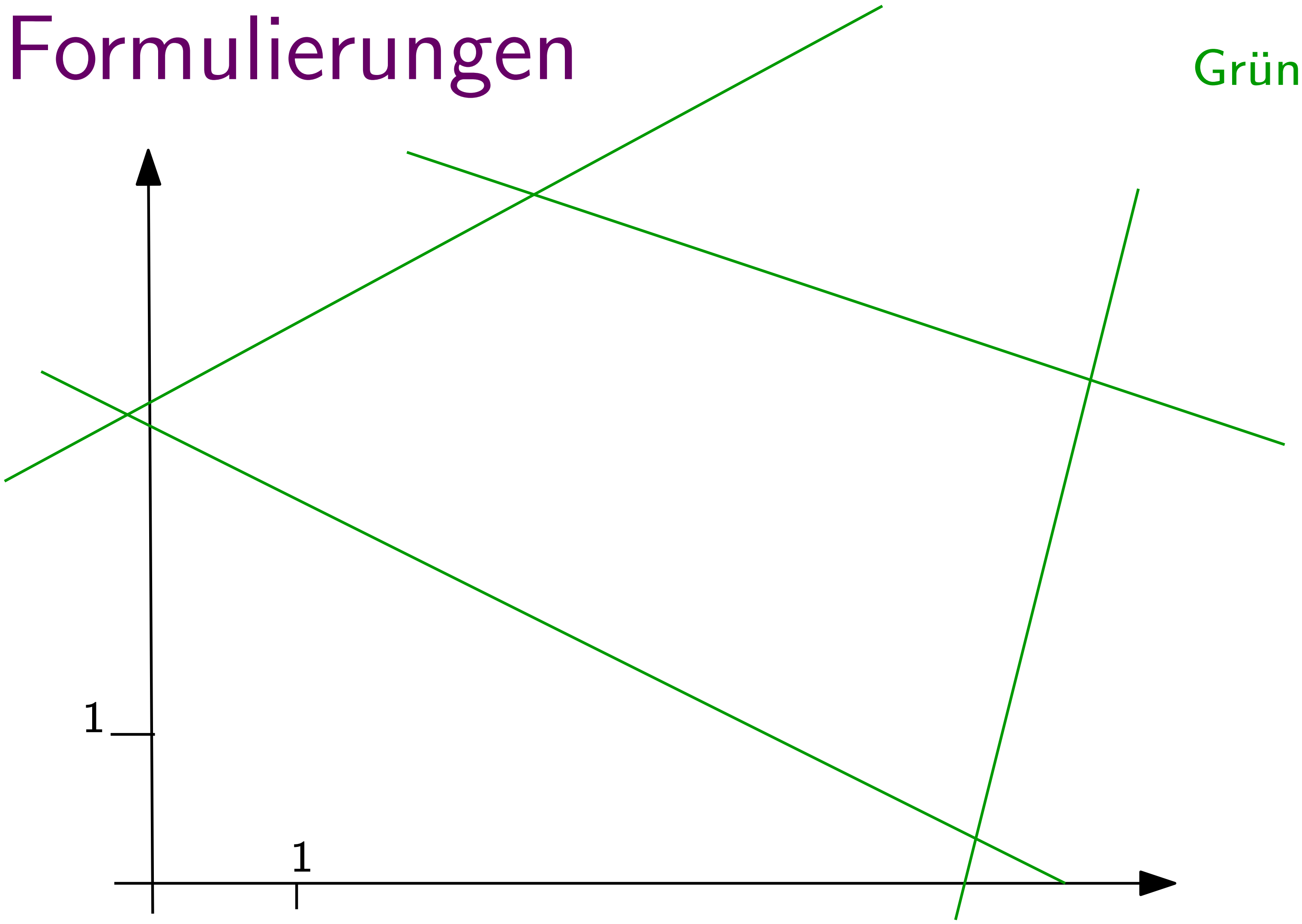
Das ganzzahlig lineare Programm schreiben wir dann normalerweise so auf:

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 + 5x_2 & \\
\text{so dass}\ & x_1 + 2x_2 & \leq 170 \\
& x_1 + x_2 & \leq 150 \\
& 3x_2 & \leq 180 \\
& x_1, x_2 & \geq 0 \\
& x_1, x_2 & \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Englisch: ganzzahliges lineares Programm = integer linear program (**ILP**)

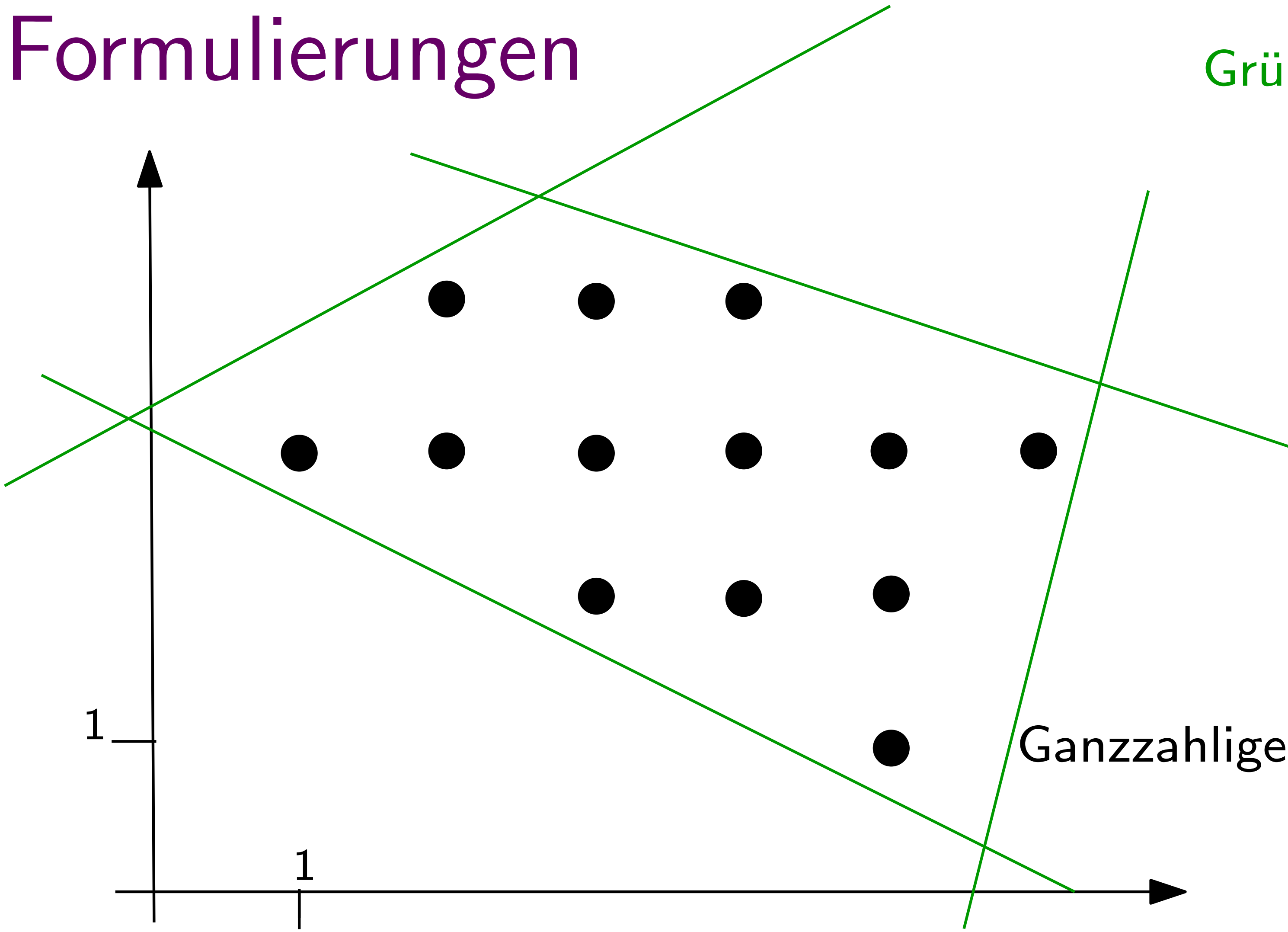
Formulierungen

Grünes Polyeder P_1



Formulierungen

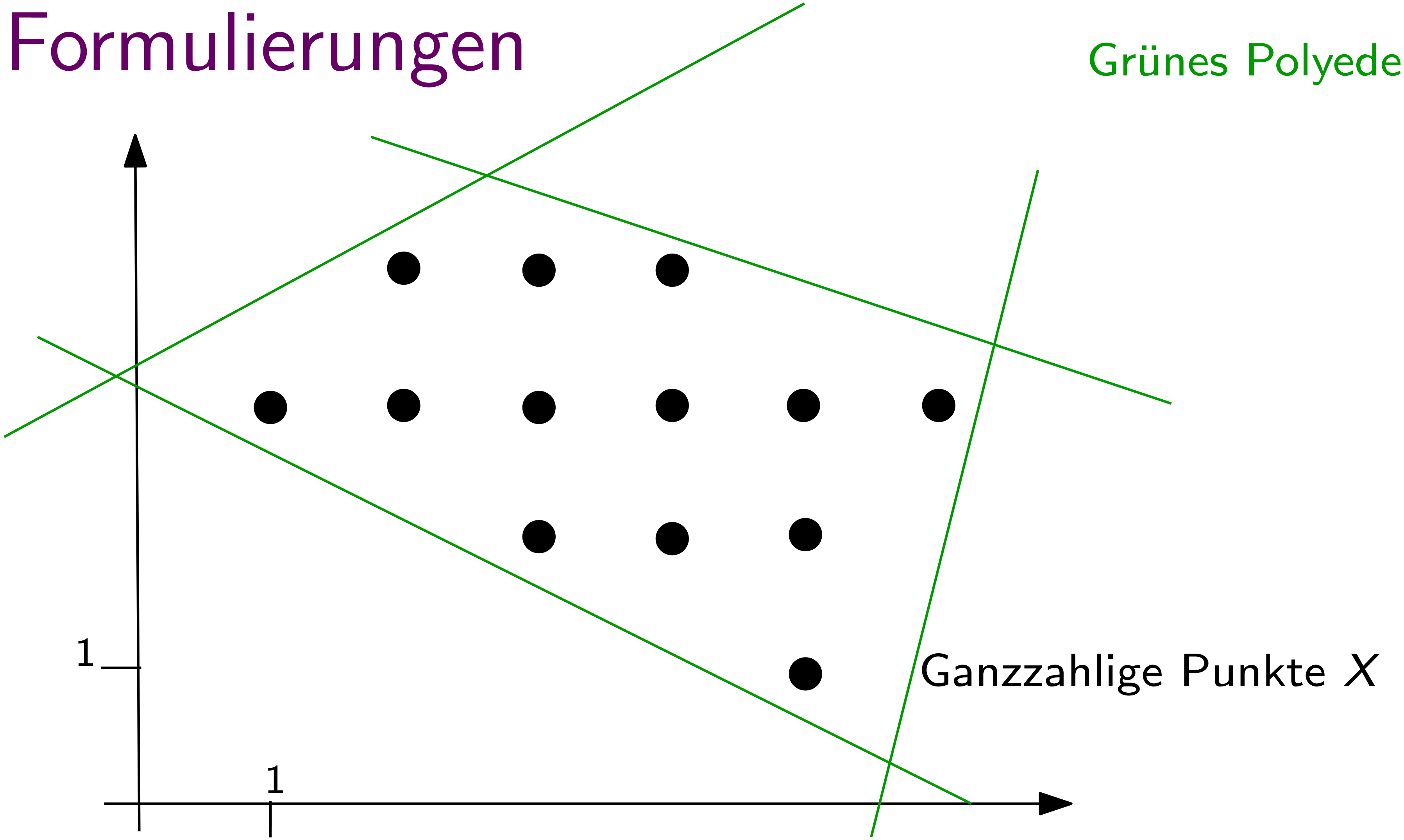
Grünes Polyeder P_1



Ganzzahlige Punkte X

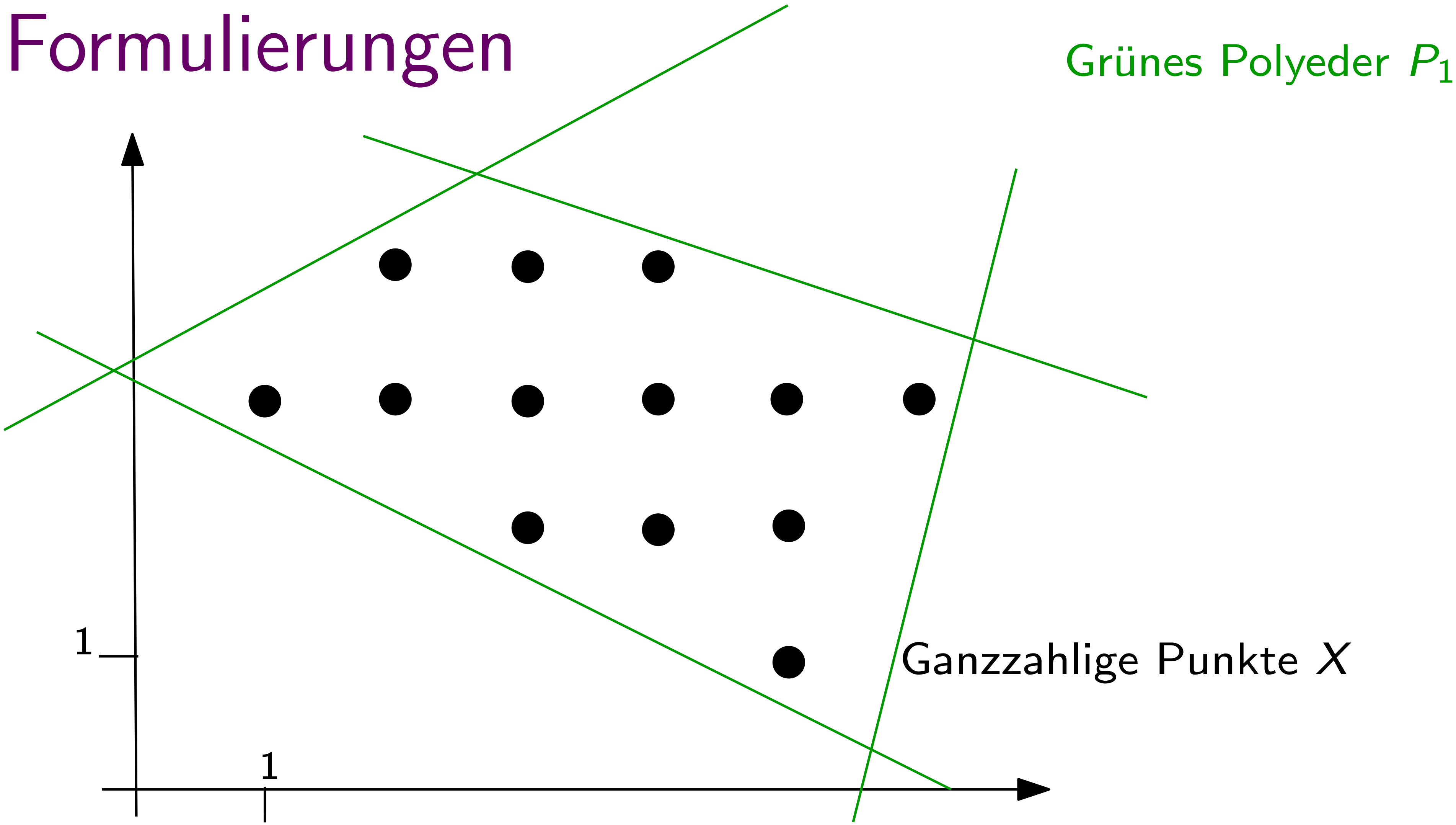
Formulierungen

Grünes Polyeder P_1



Wir sagen, dass Polyeder P eine **Formulierung** für Lösungsmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ (eines ILP) ist, wenn $X = P \cap \mathbb{Z}^n$

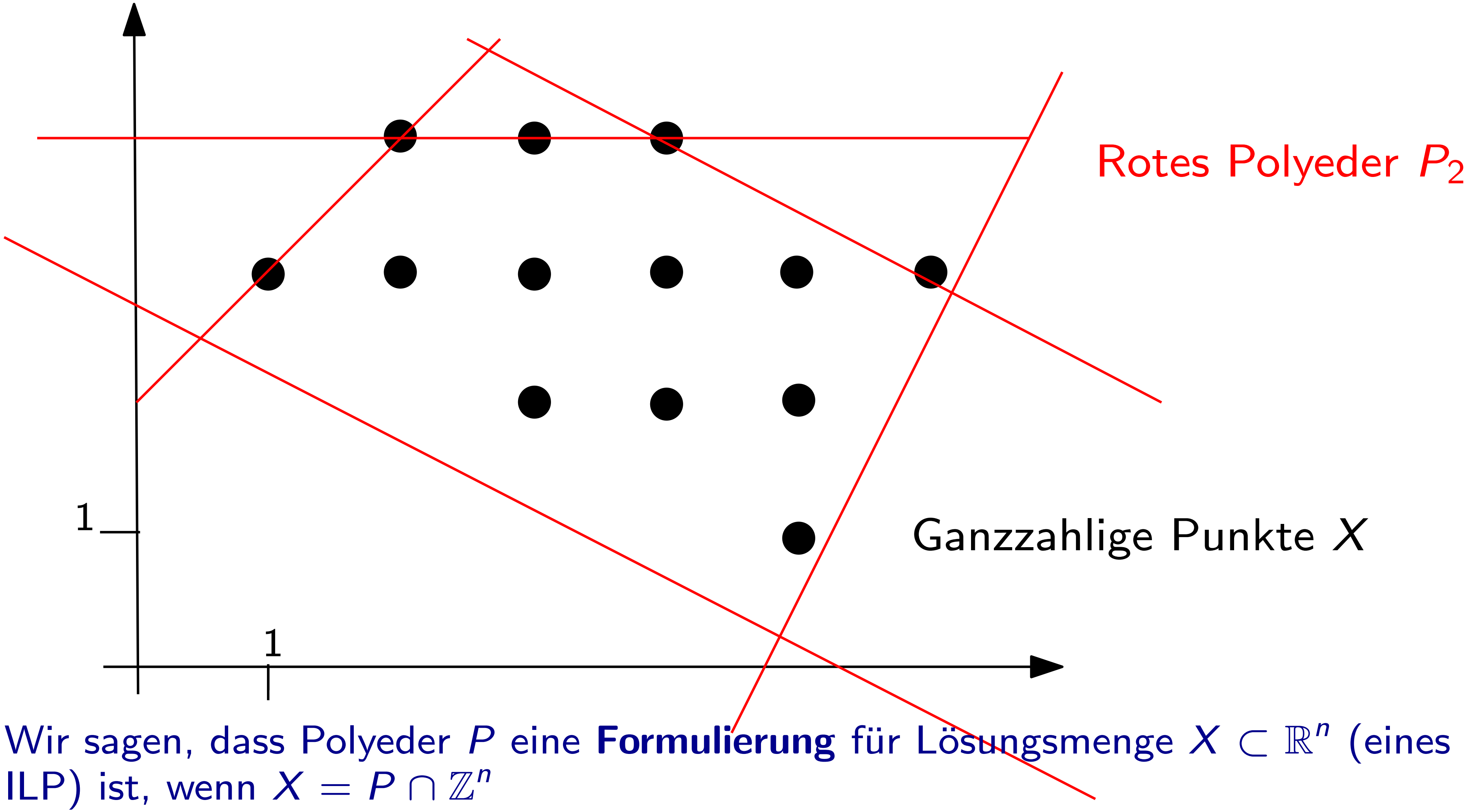
Formulierungen



Wir sagen, dass Polyeder P eine **Formulierung** für Lösungsmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ (eines ILP) ist, wenn $X = P \cap \mathbb{Z}^n$

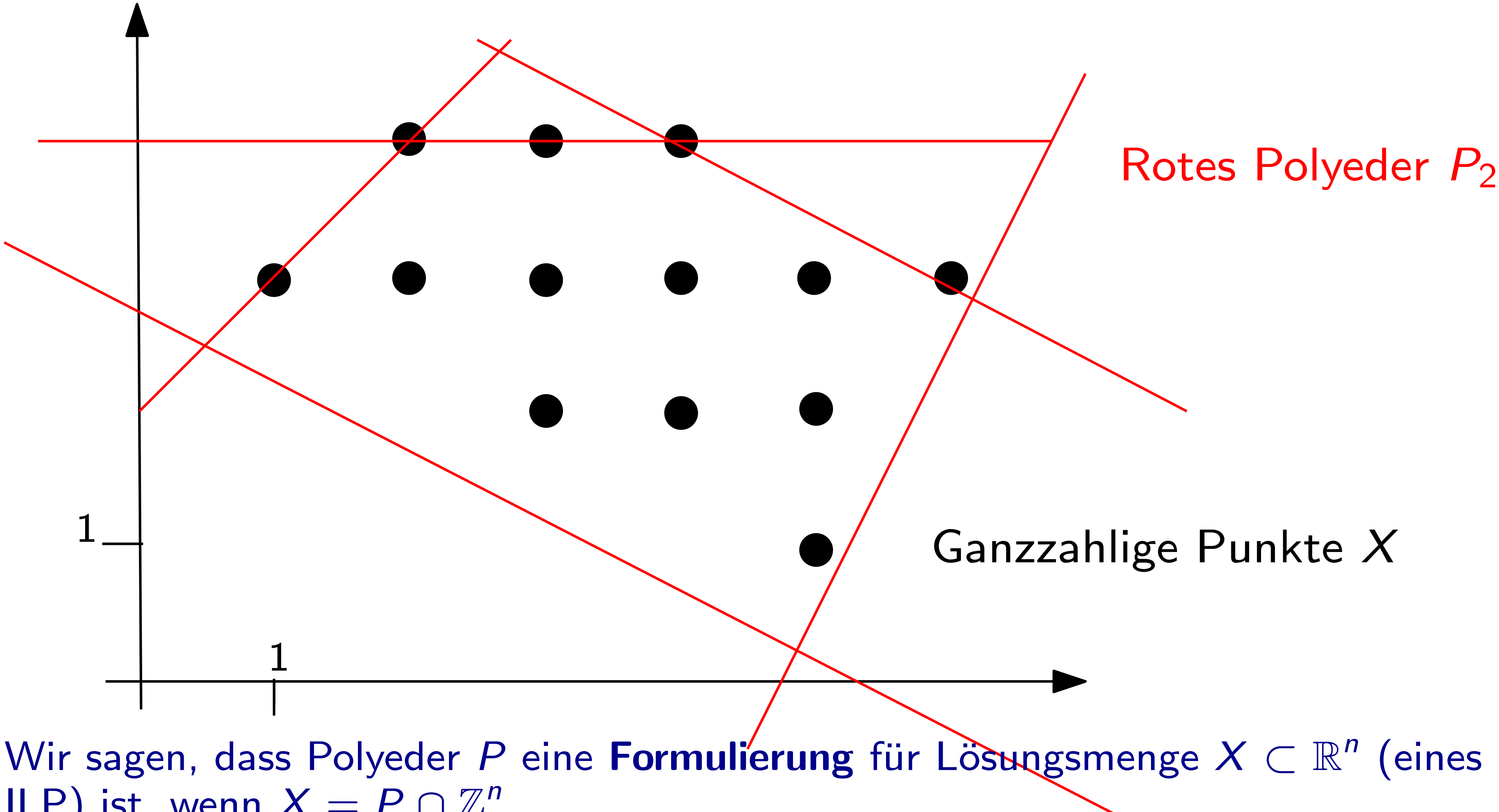
Das grüne Polyeder P_1 ist eine Formulierung für die durch die schwarzen Punkte gegebene Lösungsmenge X.

Formulierungen



Wir sagen, dass Polyeder P eine **Formulierung** für Lösungsmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ (eines ILP) ist, wenn $X = P \cap \mathbb{Z}^n$

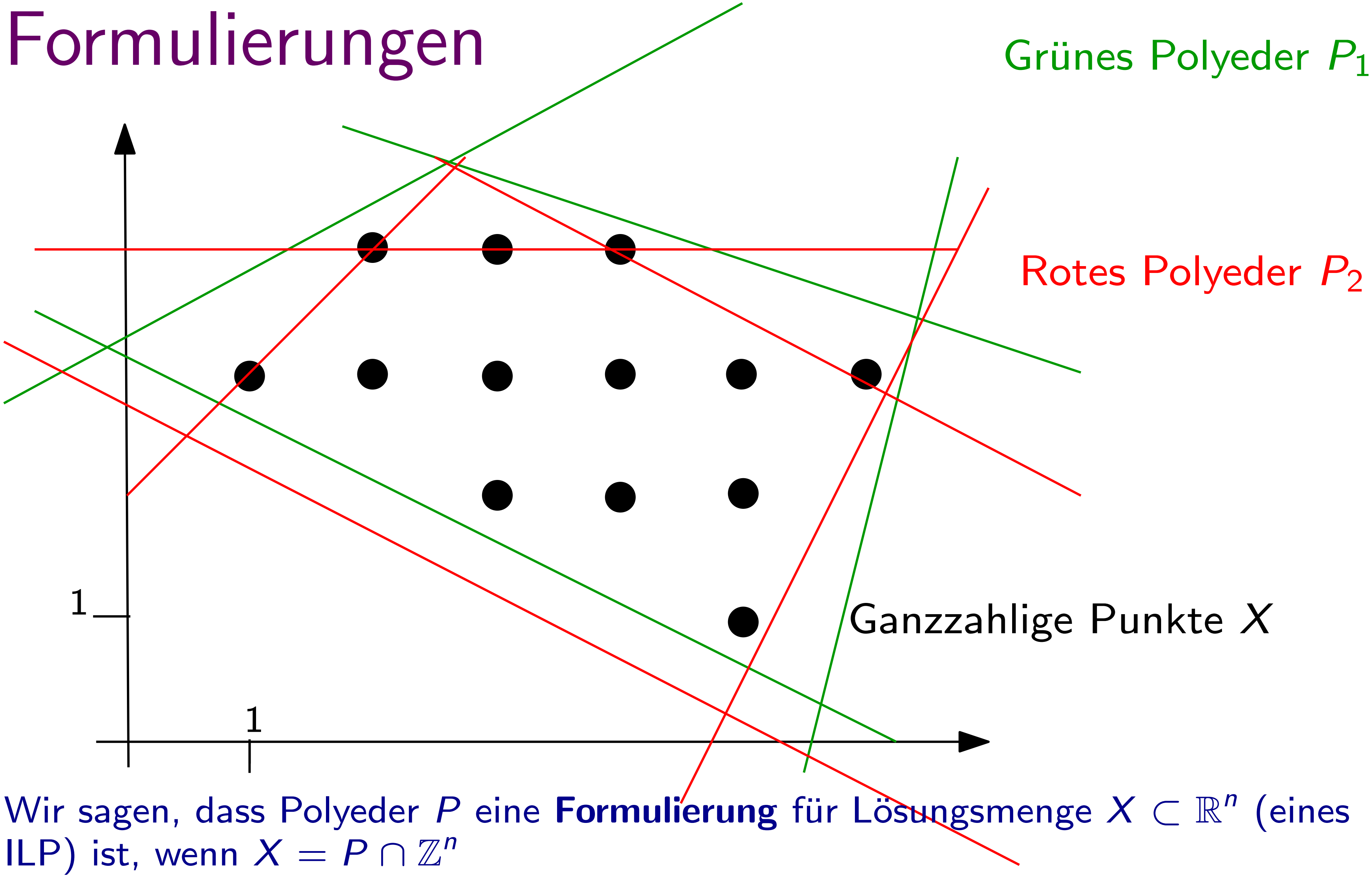
Formulierungen



Wir sagen, dass Polyeder P eine **Formulierung** für Lösungsmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ (eines ILP) ist, wenn $X = P \cap \mathbb{Z}^n$

P_2 ist auch eine Formulierung für die durch die Punkte gegebene Lösungsmenge X.

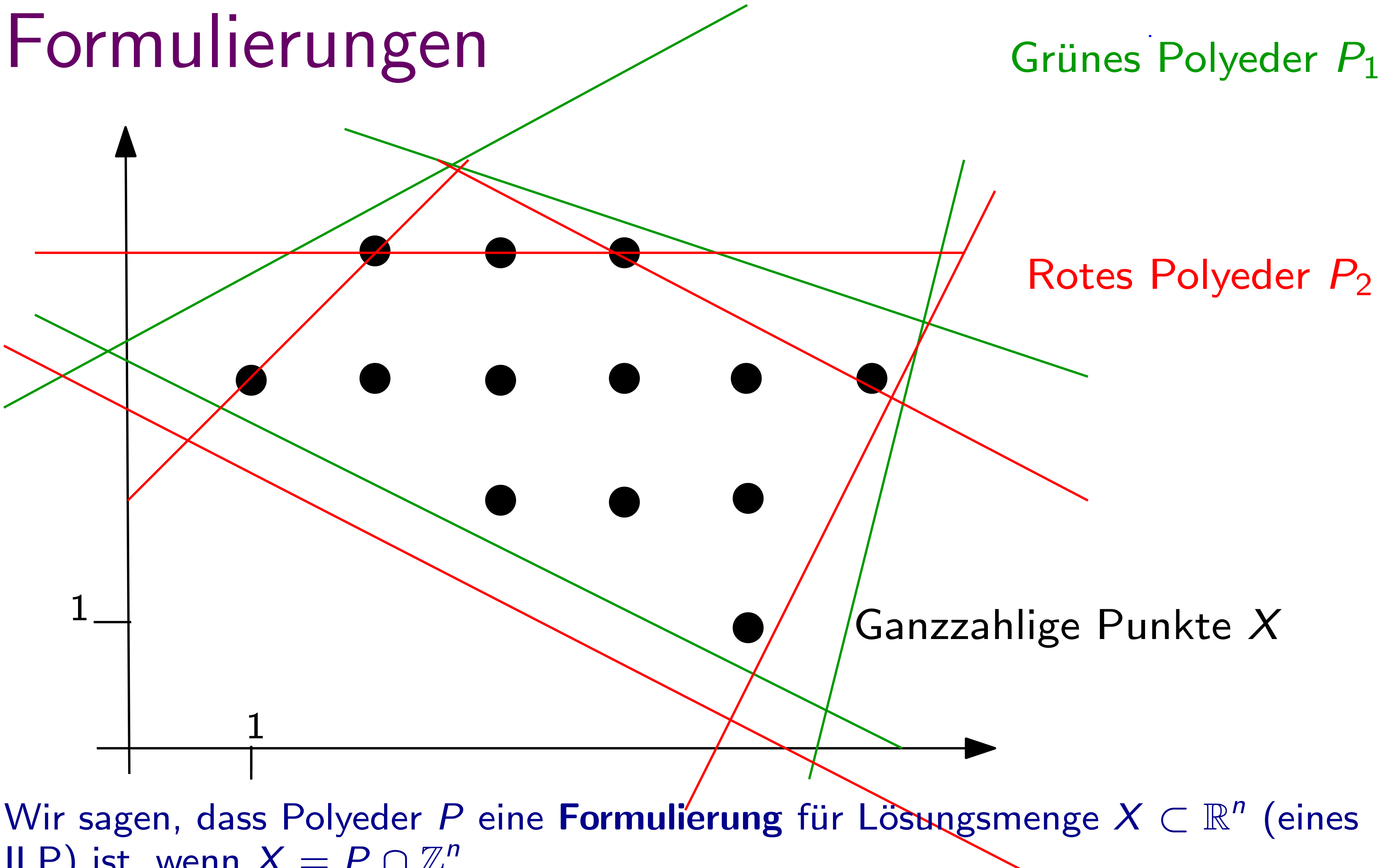
Formulierungen



Wir sagen, dass Polyeder P eine **Formulierung** für Lösungsmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ (eines ILP) ist, wenn $X = P \cap \mathbb{Z}^n$

Ist eine der Formulierungen *besser*?

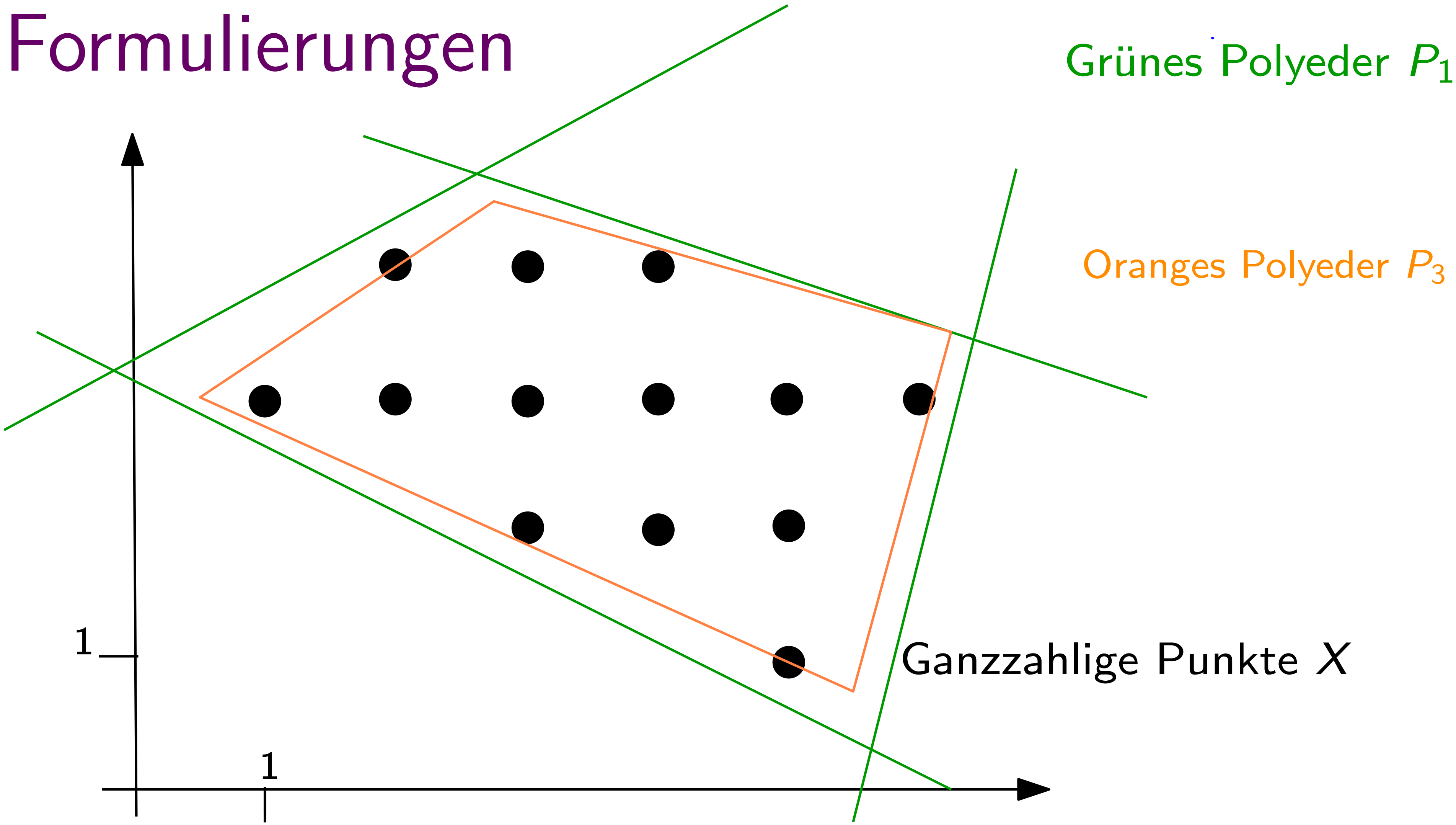
Formulierungen



Wir sagen, dass Polyeder P eine **Formulierung** für Lösungsmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ (eines ILP) ist, wenn $X = P \cap \mathbb{Z}^n$
Formulierung P ist **besser** (oder: **stärker**) als Formulierung P', wenn $P \subsetneq P'$.

Ist eine der Formulierungen *besser*?

Formulierungen

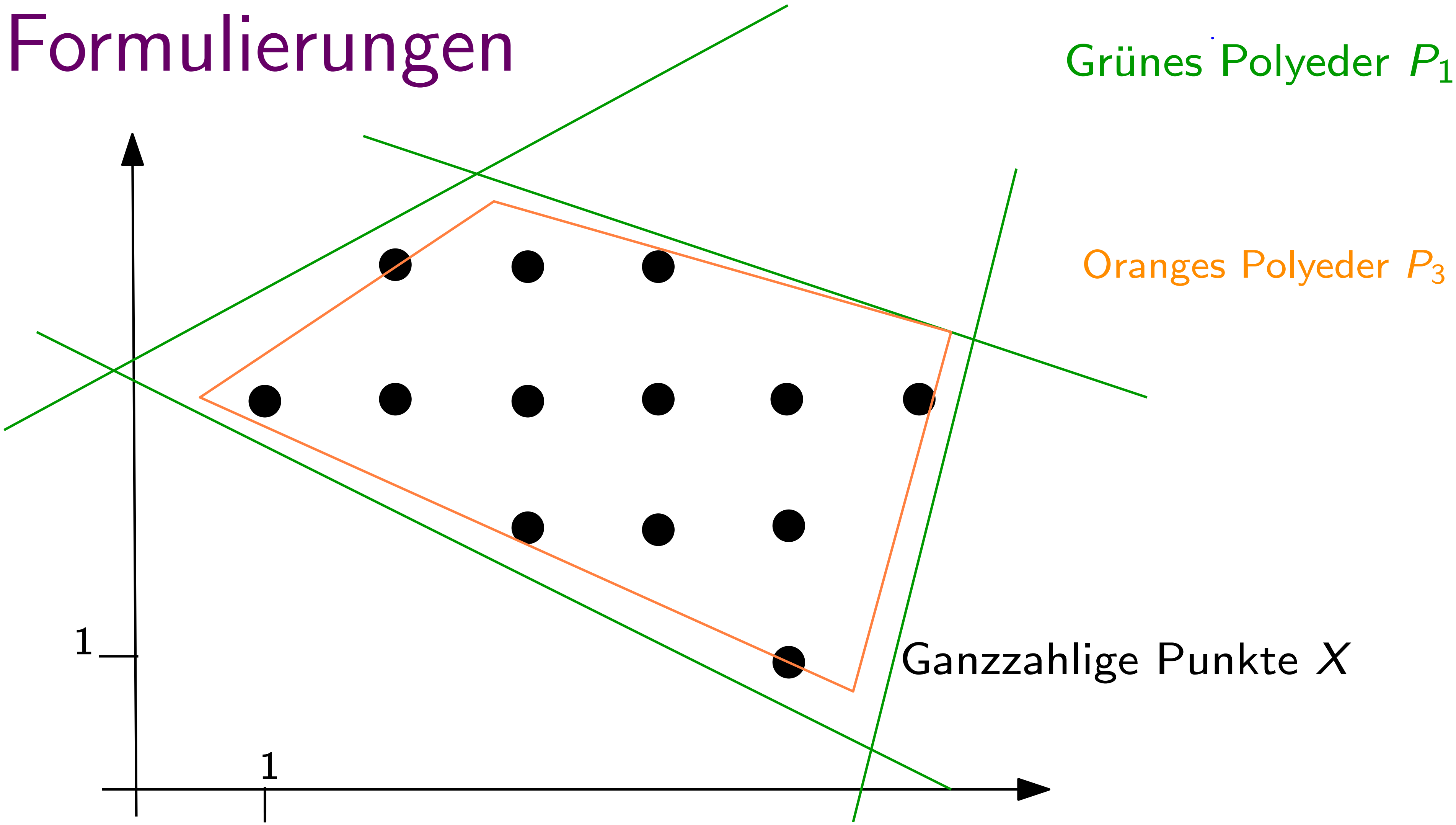


Wir sagen, dass Polyeder P eine **Formulierung** für Lösungsmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ (eines ILP) ist, wenn $X = P \cap \mathbb{Z}^n$

Formulierung P ist **besser** (oder: **stärker**) als Formulierung P', wenn $P \subsetneq P'$.

Die Formulierung basierend auf P_3 ist besser als die basierend auf P_1.

Formulierungen



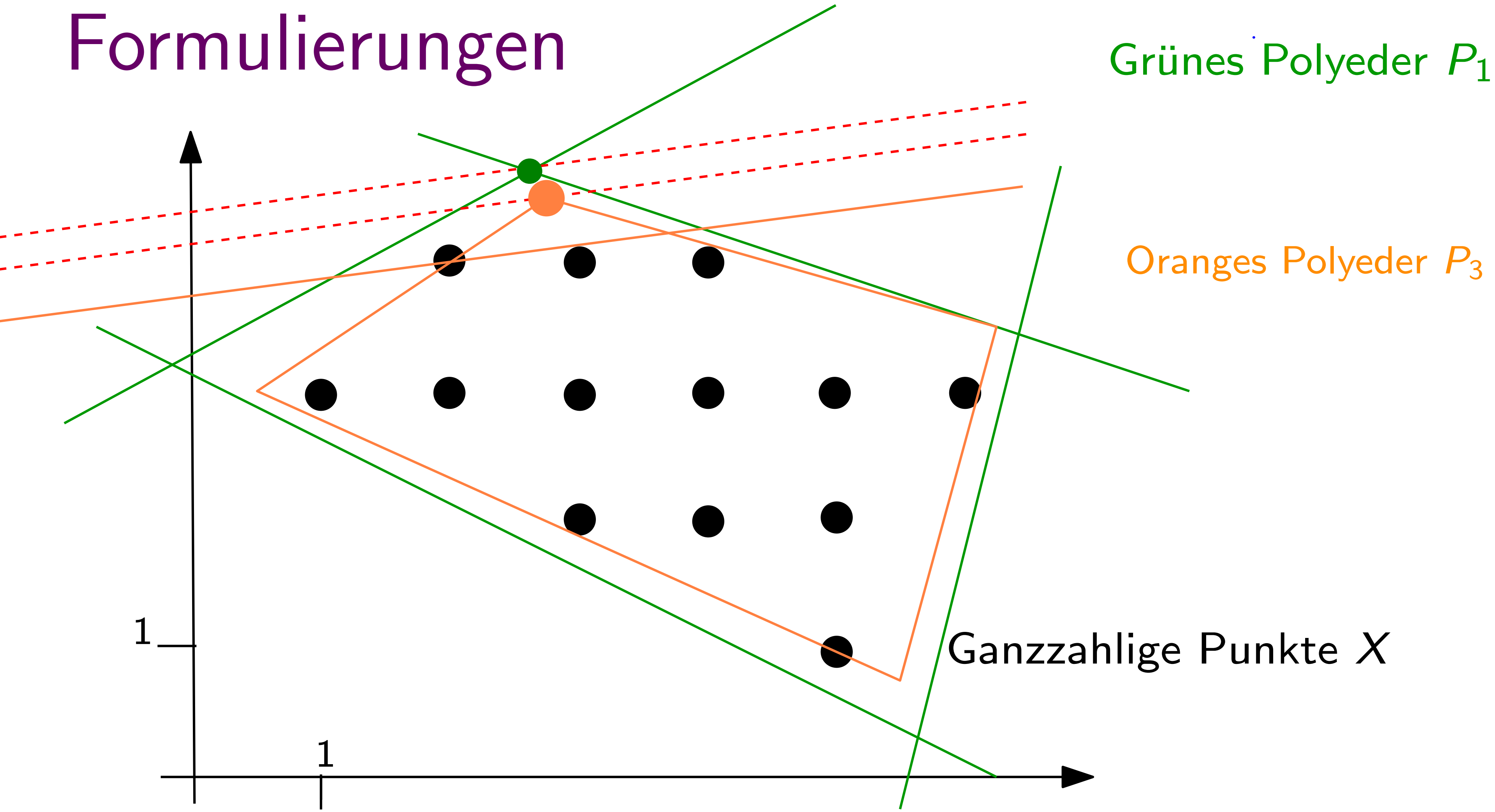
Wir sagen, dass Polyeder P eine **Formulierung** für Lösungsmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ (eines ILP) ist, wenn $X = P \cap \mathbb{Z}^n$

Formulierung P ist **besser** (oder: **stärker**) als Formulierung P', wenn $P \subsetneq P'$.

Die Formulierung basierend auf P_3 ist besser als die basierend auf P_1.

Warum bezeichnen wir diese Formulierung als *besser*?

Formulierungen



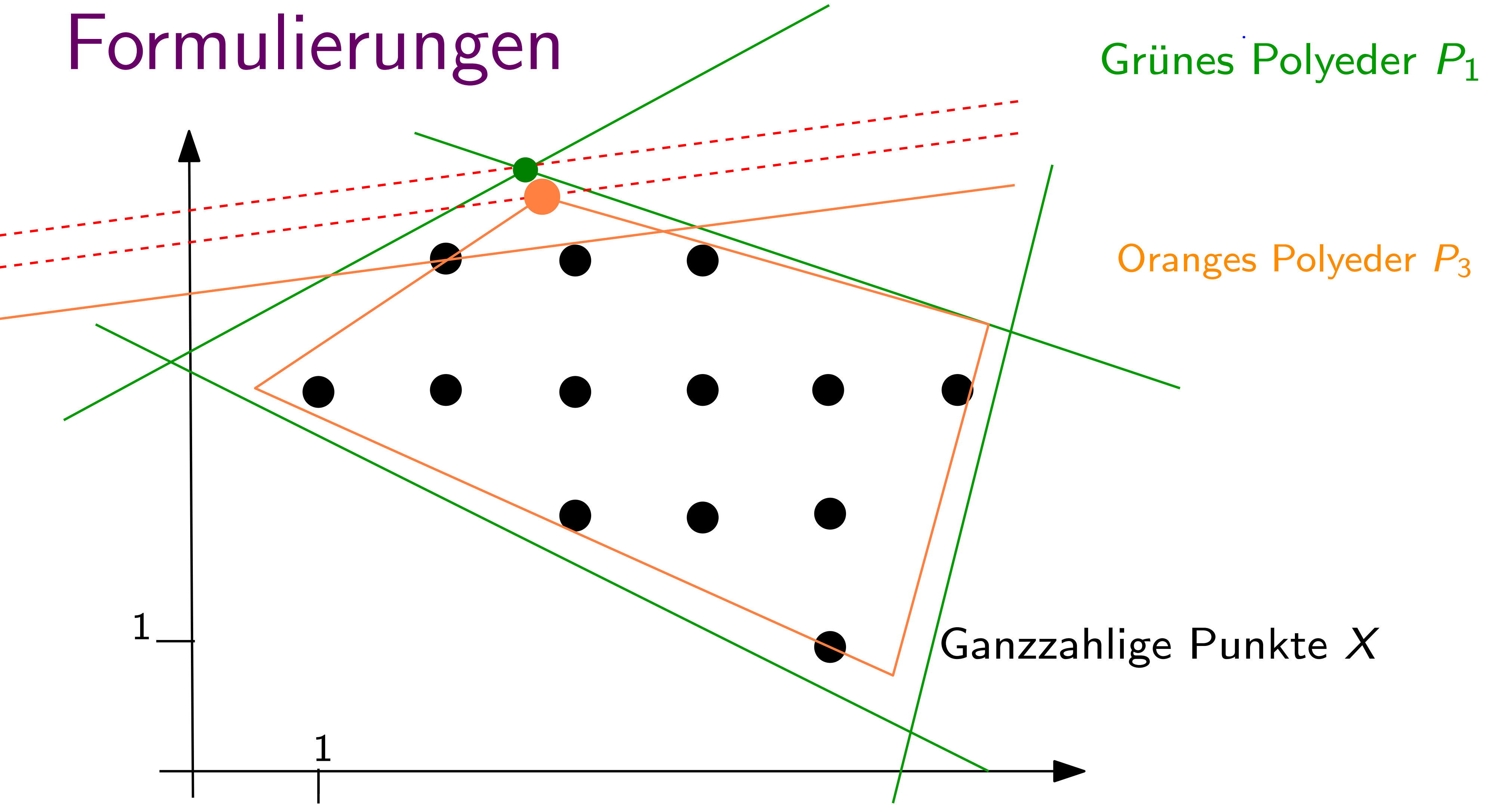
Wir sagen, dass Polyeder P eine **Formulierung** für Lösungsmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ (eines ILP) ist, wenn $X = P \cap \mathbb{Z}^n$

Formulierung P ist **besser** (oder: **stärker**) als Formulierung P', wenn $P \subsetneq P'$.

Die Formulierung basierend auf P_3 ist besser als die basierend auf P_1.

Warum bezeichnen wir diese Formulierung als *besser*?

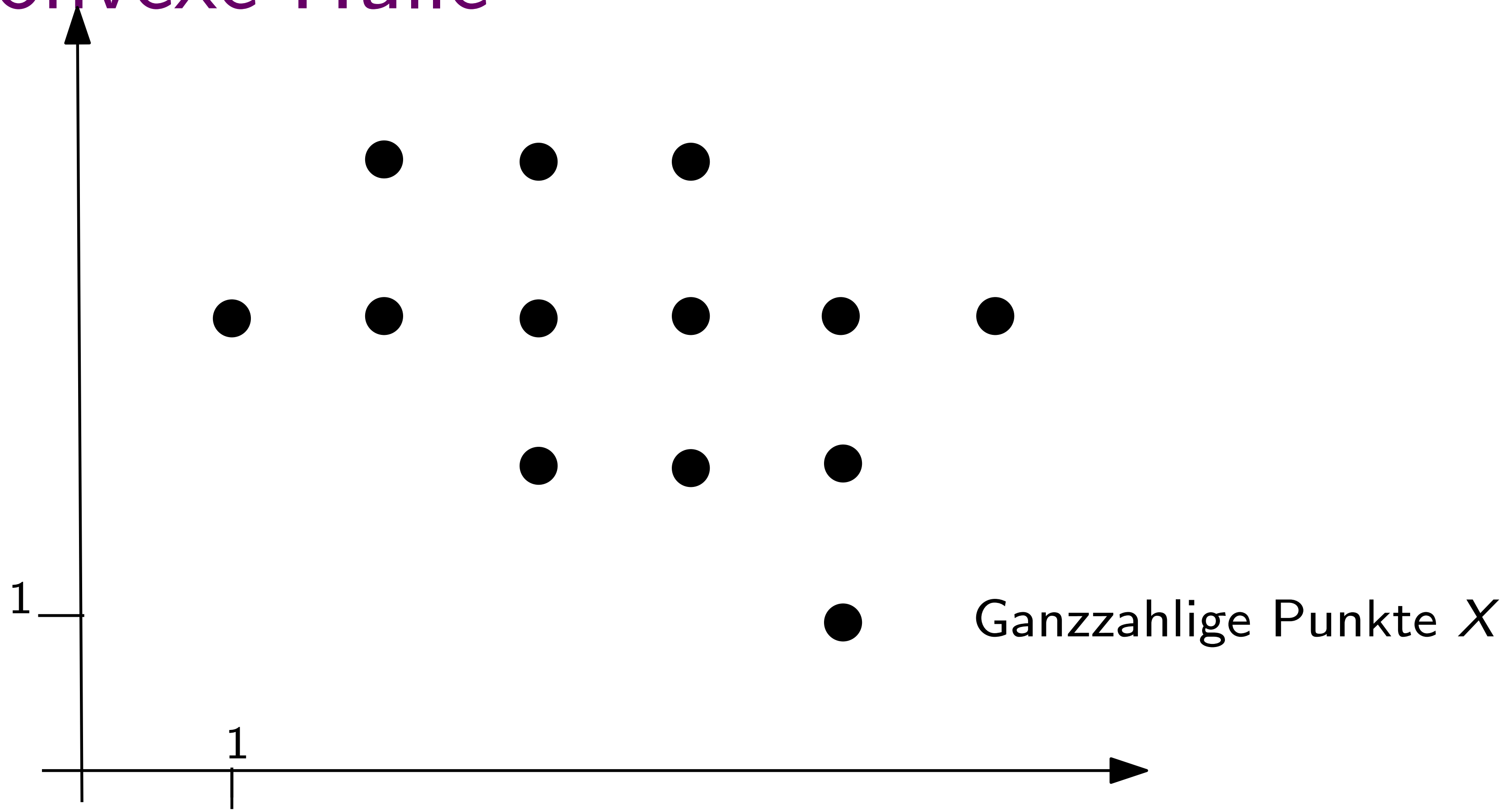
Formulierungen



Wir sagen, dass Polyeder P eine **Formulierung** für Lösungsmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ (eines ILP) ist, wenn $X = P \cap \mathbb{Z}^n$
Formulierung P ist **besser** (oder: **stärker**) als Formulierung P', wenn $P \subsetneq P'$.

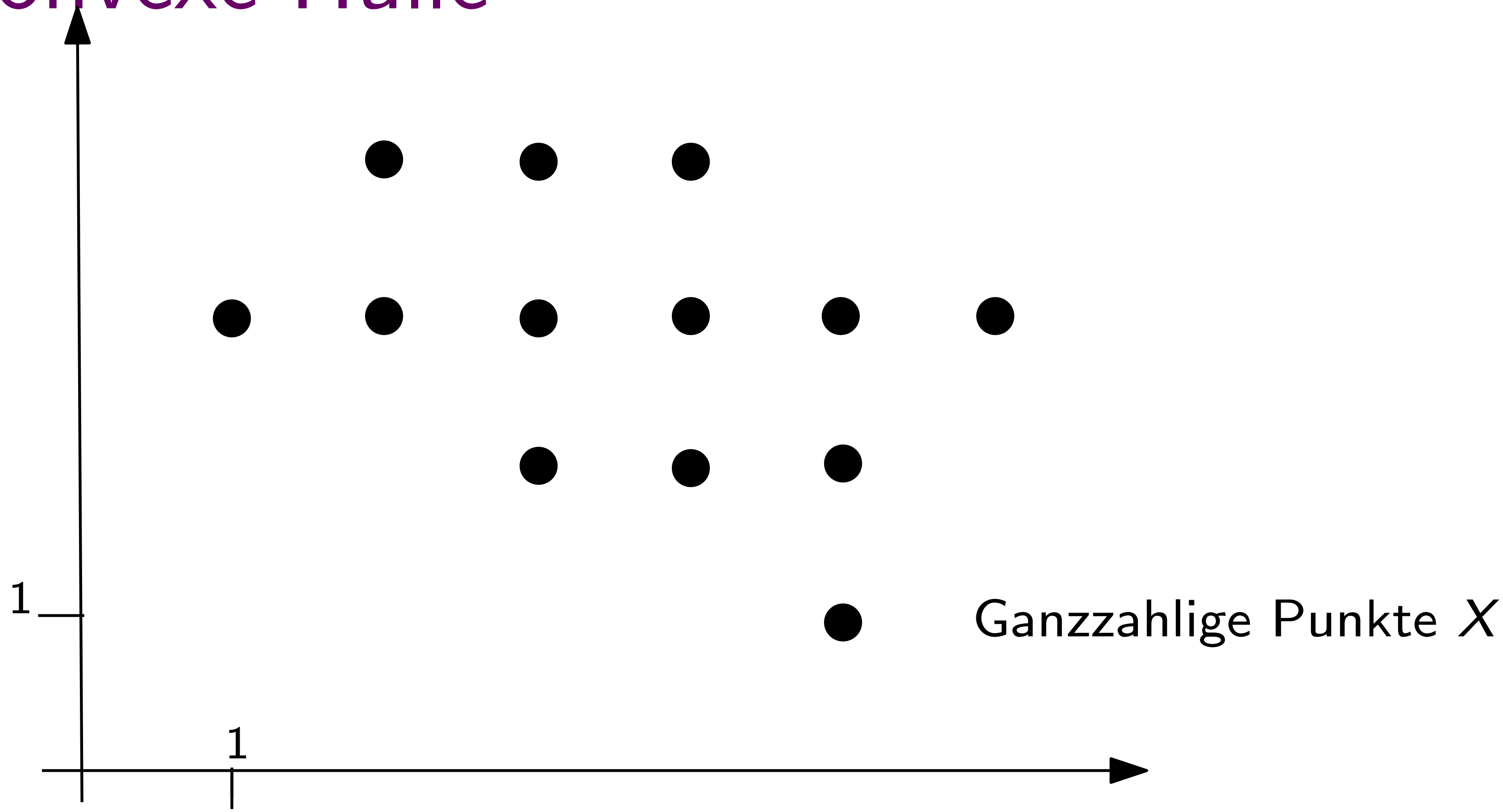
Ist eine Formulierung F besser als eine Formulierung F', dann ist der optimale Zielfunktionswert der LP-Relaxation von F dichter (besser gesagt: mindestens genauso dicht) am Zielfunktionswert der Optimallösung des ursprünglichen Problems als der optimale Zielfunktionswert der LP-Relaxation von F'.

Konvexe Hülle



Seien $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathbb{R}^n$. Dann nennen wir $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \in [0,1]$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ eine **Konvexkombination** von $x_1, \ldots, x_n$.

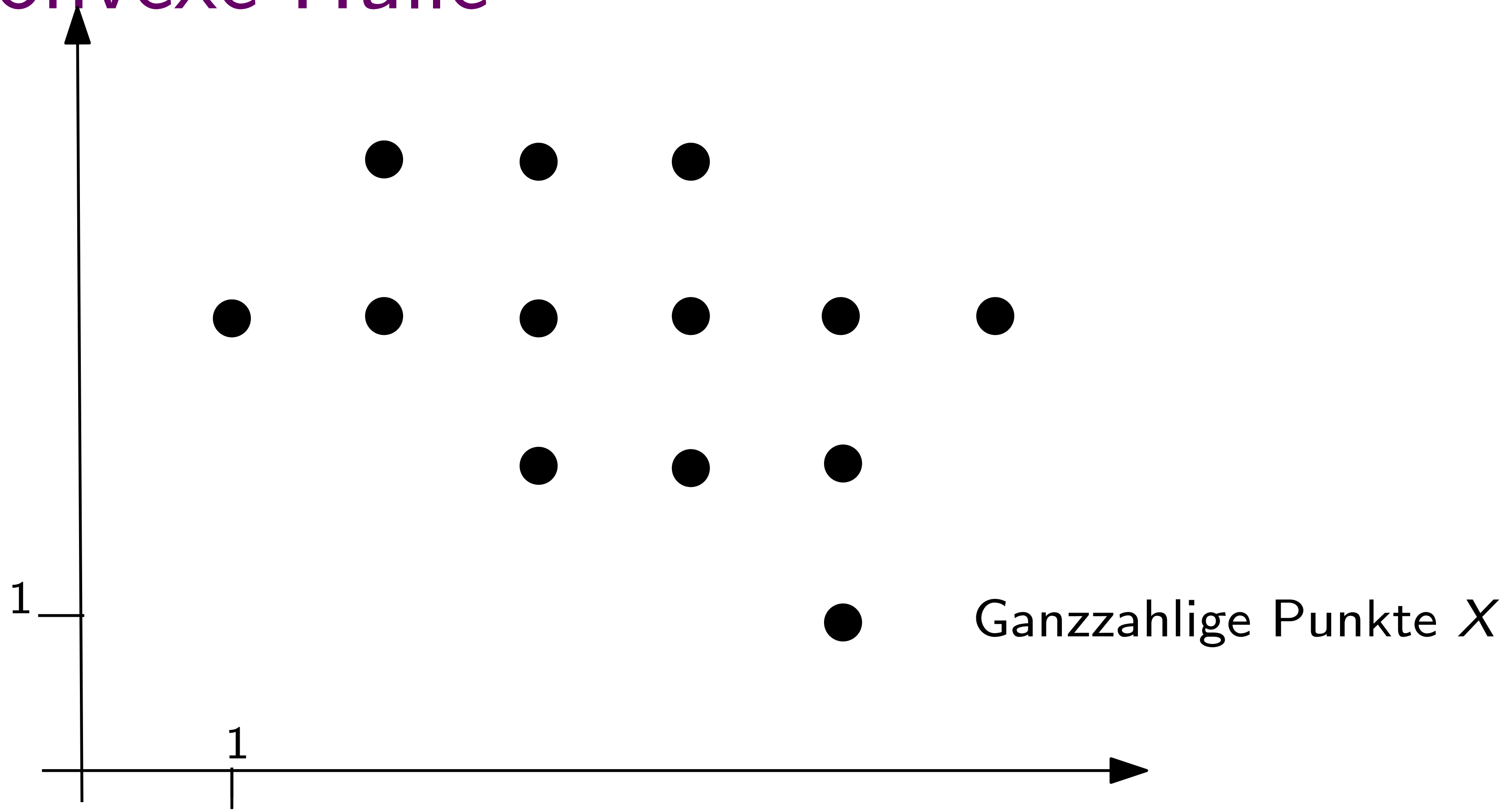
Konvexe Hülle



Seien $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathbb{R}^n$. Dann nennen wir $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \in [0, 1]$ und $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ eine **Konvexkombination** von $x_1, \ldots, x_n$.

Die Menge $conv(\{x_1, \ldots, x_n\}) := \{x : x \text{ ist Konvexkombination von } x_1, \ldots, x_n\}$ heißt **konvexe Hülle** von X.

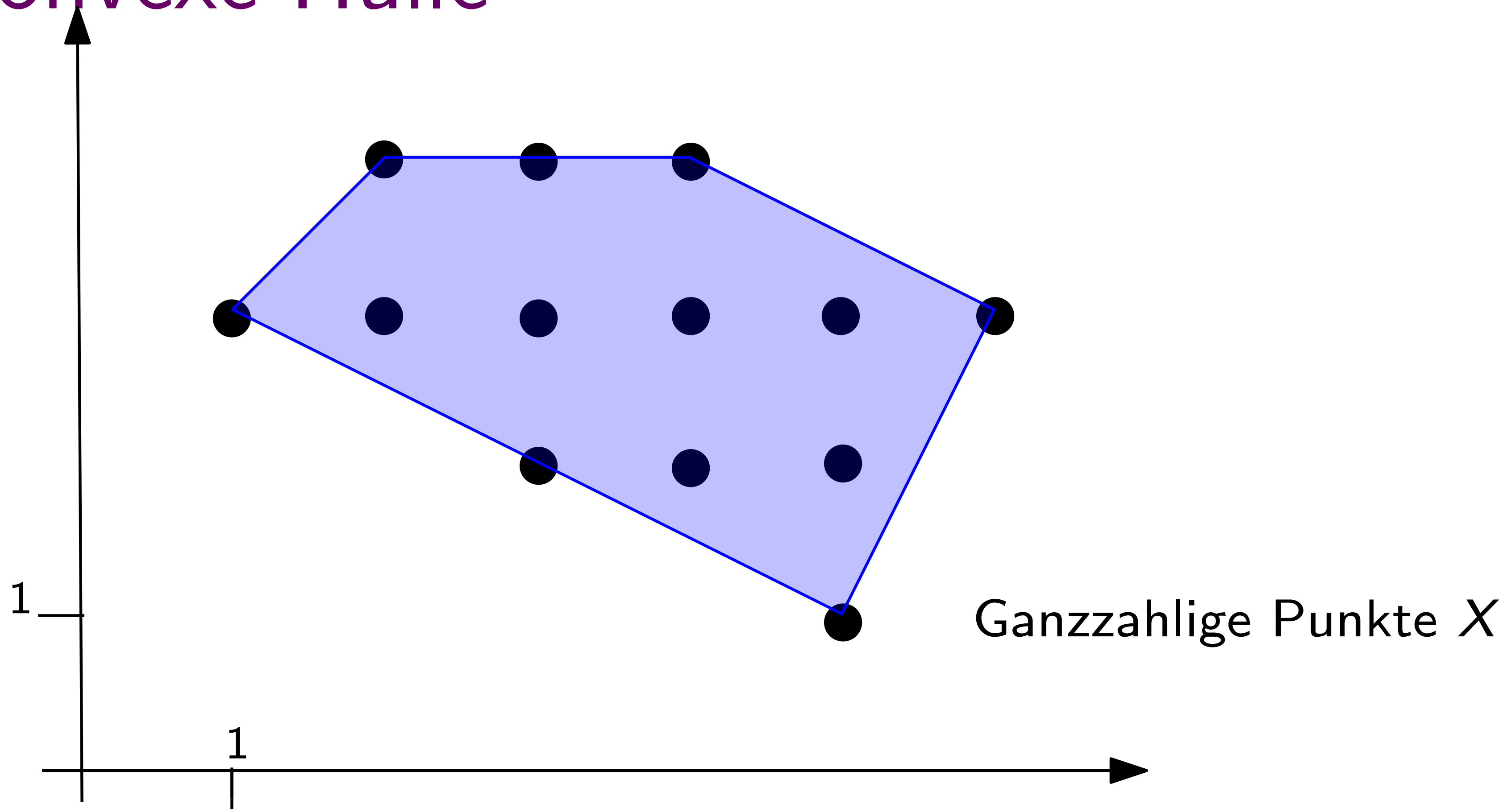
Konvexe Hülle



Seien $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathbb{R}^n$. Dann nennen wir $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \in [0, 1]$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ eine **Konvexkombination** von $x_1, \ldots, x_n$.
Die Menge $conv(\{x_1, \ldots, x_n\}) := \{x : x \text{ ist Konvexkombination von } x_1, \ldots, x_n\}$ heißt **konvexe Hülle** von X.

Wie sieht die konvexe Hülle der Punkte X aus dem Bild oben aus?

Konvexe Hülle

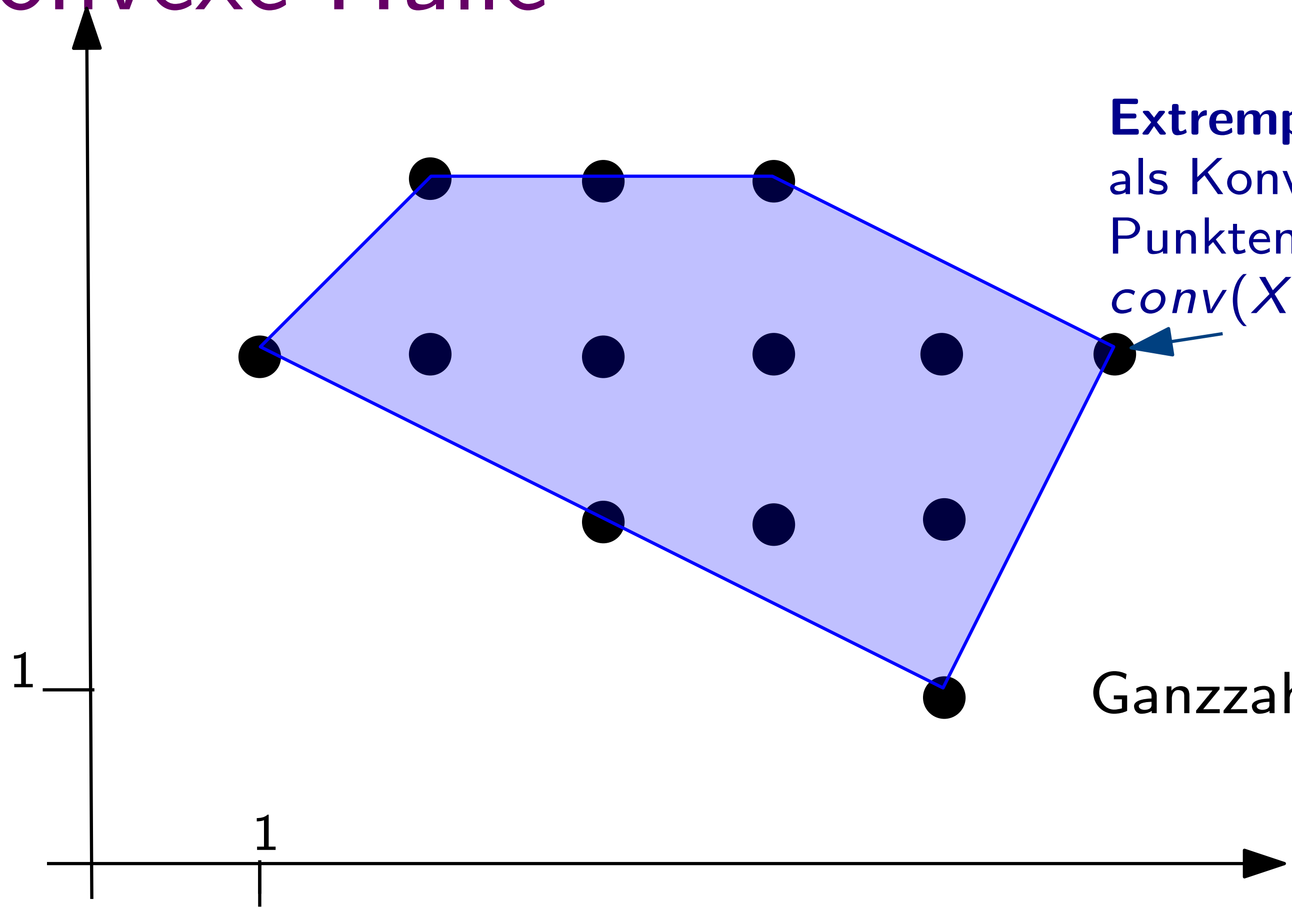


Seien $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathbb{R}^n$. Dann nennen wir $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \in [0,1]$ und $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ eine **Konvexkombination** von $x_1, \ldots, x_n$.

Die Menge $conv(\{x_1, \ldots, x_n\}) := \{x : x \text{ ist Konvexkombination von } x_1, \ldots, x_n\}$ heißt **konvexe Hülle** von X.

Wie sieht die konvexe Hülle der Punkte X aus dem Bild oben aus?

Konvexe Hülle

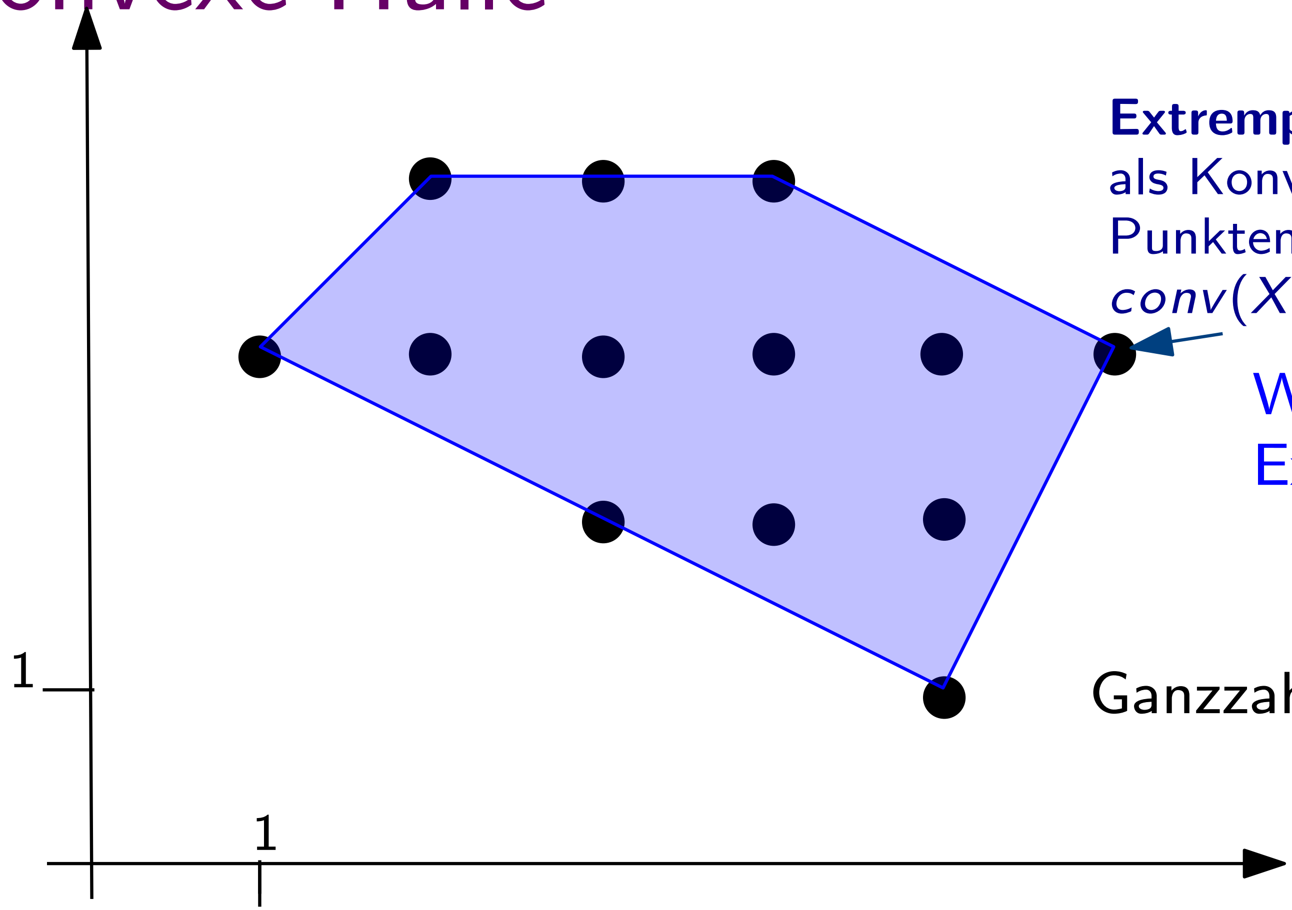


Extrempunkt x: lässt sich nicht als Konvexkombination aus Punkten aus $X \setminus \{x\}$ (oder $conv(X) \setminus \{x\}$) darstellen.

Seien $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathbb{R}^n$. Dann nennen wir $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \in [0,1]$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ eine **Konvexkombination** von $x_1, \ldots, x_n$.

Die Menge $conv(\{x_1, \ldots, x_n\}) := \{x : x \text{ ist Konvexkombination von } x_1, \ldots, x_n\}$ heißt **konvexe Hülle** von X.

Konvexe Hülle



Extrempunkt x: lässt sich nicht als Konvexkombination aus Punkten aus $X \setminus \{x\}$ (oder $conv(X) \setminus \{x\}$) darstellen.

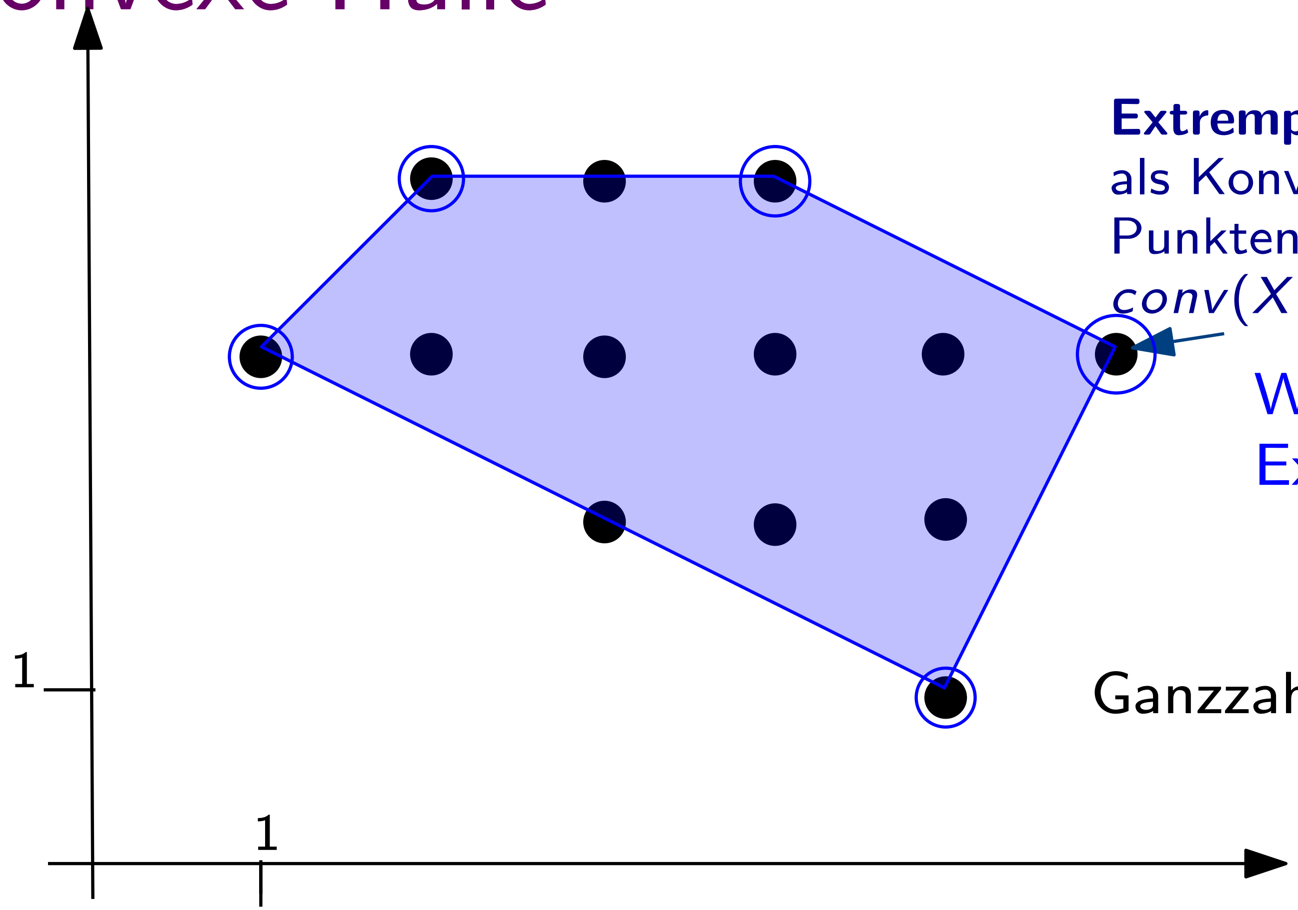
Welche Punkte sind noch Extrempunkte?

Ganzzahlige Punkte X

Seien $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathbb{R}^n$. Dann nennen wir $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \in [0, 1]$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ eine **Konvexkombination** von $x_1, \ldots, x_n$.

Die Menge $conv(\{x_1, \ldots, x_n\}) := \{x : x$ ist Konvexkombination von $x_1, \ldots, x_n\}$ heißt **konvexe Hülle** von X.

Konvexe Hülle



Extrempunkt x: lässt sich nicht als Konvexkombination aus Punkten aus $X \setminus \{x\}$ (oder $conv(X) \setminus \{x\}$) darstellen.

Welche Punkte sind noch Extrempunkte?

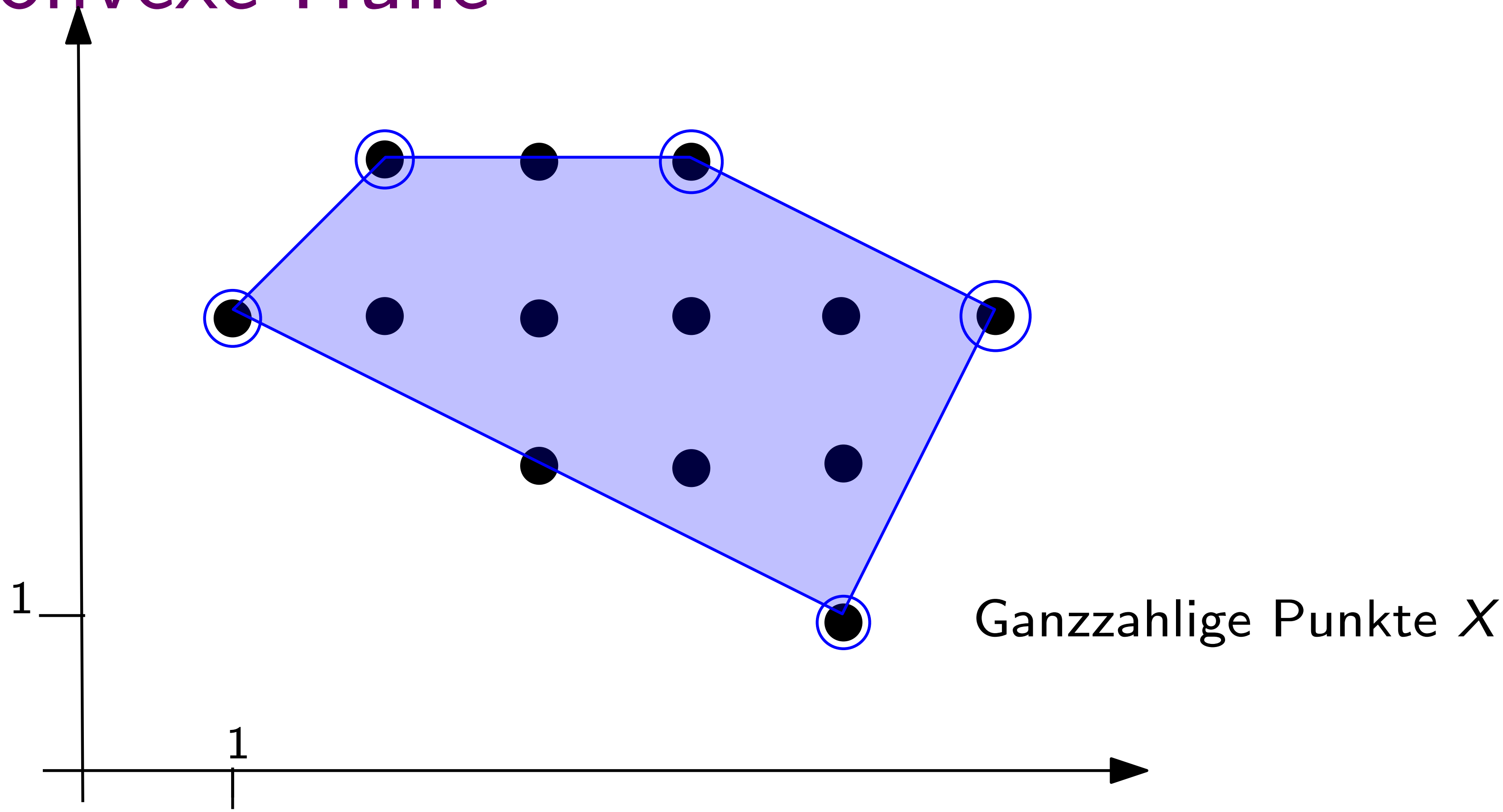
Ganzzahlige Punkte X

Seien $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathbb{R}^n$. Dann nennen wir $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \in [0, 1]$ und $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ eine **Konvexkombination** von $x_1, \ldots, x_n$.

Die Menge $conv(\{x_1, \ldots, x_n\}) := \{x : x \text{ ist Konvexkombination von } x_1, \ldots, x_n\}$ heißt **konvexe Hülle** von X.

Die konvexe Hülle der zulässigen Punkte X, $conv(X)$ ist die **bestmögliche**/**stärkste** Formulierung für X.

Konvexe Hülle

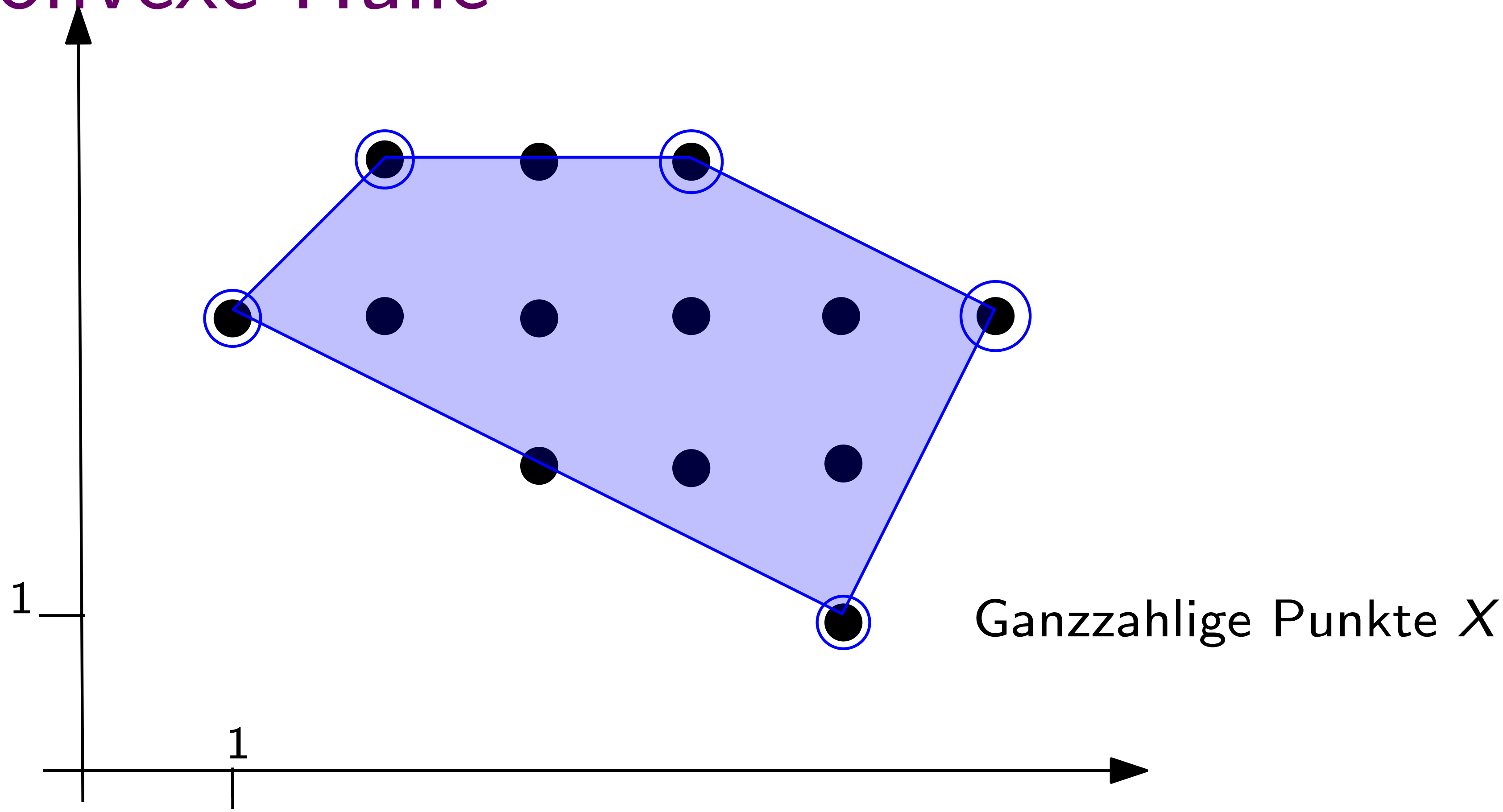


Seien $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathbb{R}^n$. Dann nennen wir $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \in [0, 1]$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ eine **Konvexkombination** von $x_1, \ldots, x_n$.

Die Menge $conv(\{x_1, \ldots, x_n\}) := \{x : x$ ist Konvexkombination von $x_1, \ldots, x_n\}$ heißt **konvexe Hülle** von X.

Die konvexe Hülle der zulässigen Punkte X, $conv(X)$ ist die **bestmögliche**/**stärkste** Formulierung für X.

Konvexe Hülle



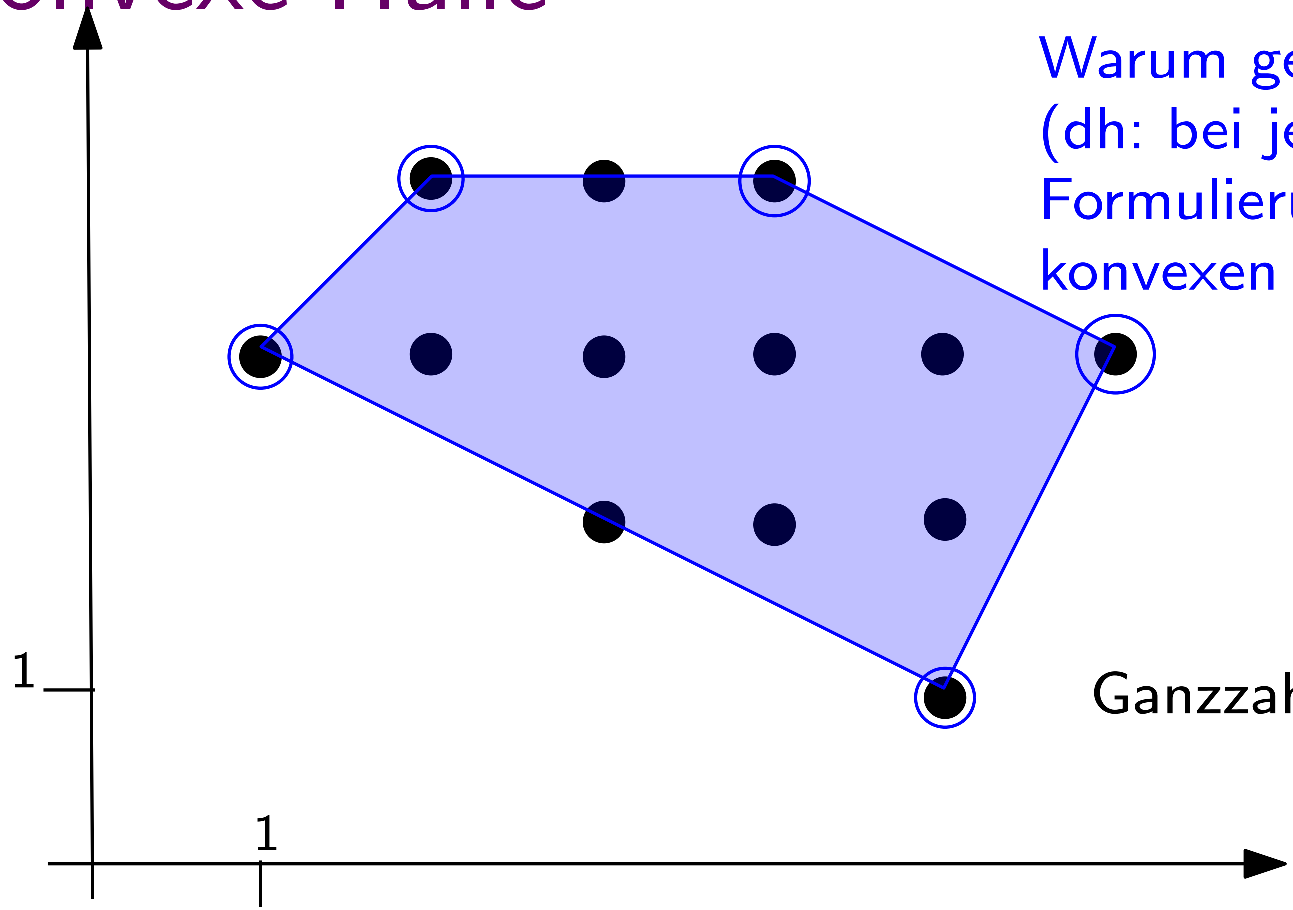
Seien $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathbb{R}^n$. Dann nennen wir $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \in [0,1]$ und $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ eine **Konvexkombination** von $x_1, \ldots, x_n$.

Die Menge $conv(\{x_1, \ldots, x_n\}) := \{x : x \text{ ist Konvexkombination von } x_1, \ldots, x_n\}$ heißt **konvexe Hülle** von X.

Die konvexe Hülle der zulässigen Punkte X, $conv(X)$ ist die **bestmögliche**/**stärkste** Formulierung für X.

Für diese Formulierung sind Optimallösungen von ILP und seiner LP-Relaxation identisch. Basislösungen des ILP sind ganzzahlig.

Konvexe Hülle



Warum geben wir nicht *immer* (dh: bei jedem ILP) die Formulierung basierend auf der konvexen Hülle an?

Ganzzahlige Punkte X

Seien $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathbb{R}^n$. Dann nennen wir $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \in [0,1]$ und $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ eine **Konvexkombination** von $x_1, \ldots, x_n$.

Die Menge $conv(\{x_1, \ldots, x_n\}) := \{x : x \text{ ist Konvexkombination von } x_1, \ldots, x_n\}$ heißt **konvexe Hülle** von X.

Die konvexe Hülle der zulässigen Punkte X, $conv(X)$ ist die **bestmögliche**/**stärkste** Formulierung für X.

Für diese Formulierung sind Optimallösungen von ILP und seiner LP-Relaxation identisch. Basislösungen des ILP sind ganzzahlig.

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. A ist total unimodular
2. $-A$ ist total unimodular
3. A^T ist total unimodular
4. $(A \quad I_m)$ ist total unimodular
5. A ist total unimodular
6. $\begin{pmatrix} A \\ I_m \end{pmatrix}$ ist total unimodular
7. $\begin{pmatrix} AA \end{pmatrix}$ ist total unimodular

Beweis: Aufgabe 3, Übungsblatt 11

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Warum ist das relevant?
Was hat das mit Polyederformulierungen zu tun?

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Erinnerung: die Inverse einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$ kann man mit der Cramerschen Regel berechnen als

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{r1} & \tilde{a}_{r2} & \dots & \tilde{a}_{rr} \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$\tilde{a}_{ij} := \det A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1r} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rj-1} & a_{rj+1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}.$$

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Erinnerung: die Inverse einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$ kann man mit der Cramerschen Regel berechnen als

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{r1} & \tilde{a}_{r2} & \dots & \tilde{a}_{rr} \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$\tilde{a}_{ij} := \det A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1r} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rj-1} & a_{rj+1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}.$$

Konsequenz für total unimodulare Matrizen:
Die *Inversen* von quadratischen Untermatrizen von total unimodularen Matrizen haben nur Einträge $\{-1, 0, 1\}$.

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Die *Inversen* von quadratischen Untermatrizen von total unimodularen Matrizen haben nur Einträge $\{-1, 0, 1\}$.

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Die *Inversen* von quadratischen Untermatrizen von total unimodularen Matrizen haben nur Einträge $\{-1, 0, 1\}$.

Ganzzahliggkeitssatz von Hoffmann und Kruskal
Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Dann gilt:
A total unimodular und b ganzzahlig
$\Leftrightarrow$ das Polyeder $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ hat nur ganzzahlige Eckpunkte

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Die *Inversen* von quadratischen Untermatrizen von total unimodularen Matrizen haben nur Einträge $\{-1, 0, 1\}$.

Ganzzahliggkeitssatz von Hoffmann und Kruskal
Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Dann gilt:
A total unimodular und b ganzzahlig
$\Leftrightarrow$ das Polyeder $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ hat nur ganzzahlige Eckpunkte

Beweis:

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \le r \le \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Die *Inversen* von quadratischen Untermatrizen von total unimodularen Matrizen haben nur Einträge $\{-1, 0, 1\}$.

Ganzzahliggkeitssatz von Hoffmann und Kruskal
Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Dann gilt:
A total unimodular und b ganzzahlig
$\Leftrightarrow$ das Polyeder $\{x : Ax \le b, x \ge 0\}$ hat nur ganzzahlige Eckpunkte

Beweis:
Jeder Polyedereckpunkt entspricht einer zulässigen Basis B der Matrix

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Die *Inversen* von quadratischen Untermatrizen von total unimodularen Matrizen haben nur Einträge $\{-1, 0, 1\}$.

Ganzzahliggkeitssatz von Hoffmann und Kruskal
Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Dann gilt:
A total unimodular und b ganzzahlig
$\Leftrightarrow$ das Polyeder $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ hat nur ganzzahlige Eckpunkte

Beweis:
Jeder Polyedereckpunkt entspricht einer zulässigen Basis B der Matrix und lässt sich berechnen als $x_B = A_B^{-1} b$.

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Die *Inversen* von quadratischen Untermatrizen von total unimodularen Matrizen haben nur Einträge $\{-1, 0, 1\}$.

Ganzzahliggkeitssatz von Hoffmann und Kruskal
Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Dann gilt:
A total unimodular und b ganzzahlig
$\Leftrightarrow$ das Polyeder $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ hat nur ganzzahlige Eckpunkte

Beweis:
Jeder Polyedereckpunkt entspricht einer zulässigen Basis B der Matrix und lässt sich berechnen als $x_B = A_B^{-1} b$.
Nach der Cramerschen Regel hat die Inverse A_B^{-1} auch nur Einträge aus $\{-1, 0, 1\}$,

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Die *Inversen* von quadratischen Untermatrizen von total unimodularen Matrizen haben nur Einträge $\{-1, 0, 1\}$.

Ganzzahliggkeitssatz von Hoffmann und Kruskal
Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Dann gilt:
A total unimodular und b ganzzahlig
$\Leftrightarrow$ das Polyeder $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ hat nur ganzzahlige Eckpunkte

Beweis:
Jeder Polyedereckpunkt entspricht einer zulässigen Basis B der Matrix und lässt sich berechnen als $x_B = A_B^{-1} b$.
Nach der Cramerschen Regel hat die Inverse A_B^{-1} auch nur Einträge aus $\{-1, 0, 1\}$,

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Die *Inversen* von quadratischen Untermatrizen von total unimodularen Matrizen haben nur Einträge $\{-1, 0, 1\}$.

Ganzzahliggkeitssatz von Hoffmann und Kruskal
Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Dann gilt:
A total unimodular und b ganzzahlig
$\Leftrightarrow$ das Polyeder $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ hat nur ganzzahlige Eckpunkte

Beweis:
Jeder Polyedereckpunkt entspricht einer zulässigen Basis B der Matrix und lässt sich berechnen als $x_B = A_B^{-1} b$.
Nach der Cramerschen Regel hat die Inverse A_B^{-1} auch nur Einträge aus $\{-1, 0, 1\}$, somit ist $A_B^{-1} b$ ganzzahlig, wenn b ganzzahlig.

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Die *Inversen* von quadratischen Untermatrizen von total unimodularen Matrizen haben nur Einträge $\{-1, 0, 1\}$.

Ganzzahliggkeitssatz von Hoffmann und Kruskal
Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Dann gilt:
A total unimodular und b ganzzahlig
$\Leftrightarrow$ das Polyeder $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ hat nur ganzzahlige Eckpunkte

Beweis:
Jeder Polyedereckpunkt entspricht einer zulässigen Basis B der Matrix und lässt sich berechnen als $x_B = A_B^{-1} b$.

Nach der Cramerschen Regel hat die Inverse A_B^{-1} auch nur Einträge aus $\{-1, 0, 1\}$, somit ist $A_B^{-1} b$ ganzzahlig, wenn b ganzzahlig.

Konsequenz: Ist A TU und b ganzzahlig, dann ist die Lösung der LP Relaxation direkt ganzzahlig.

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Die *Inversen* von quadratischen Untermatrizen von total unimodularen Matrizen haben nur Einträge $\{-1, 0, 1\}$.

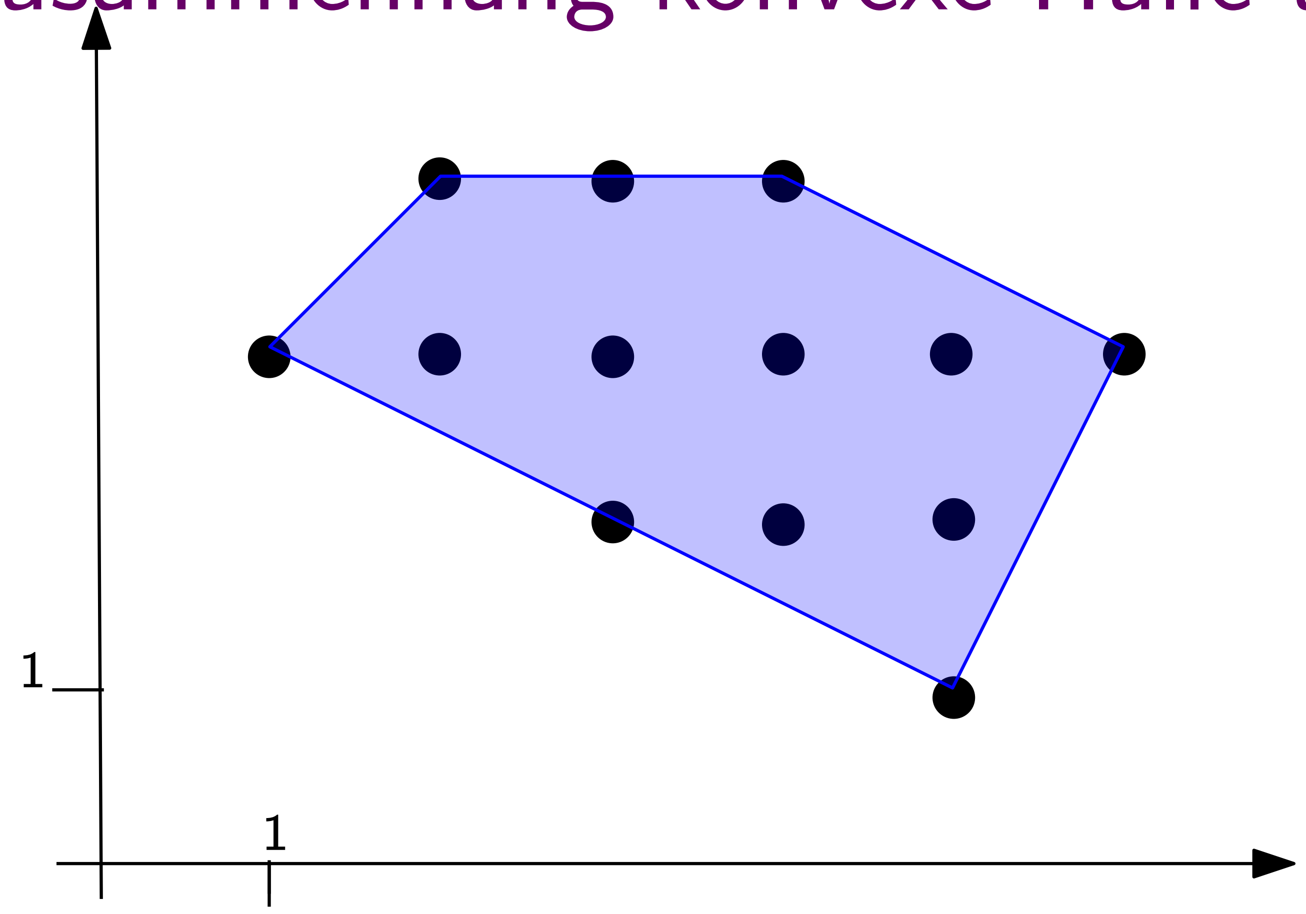
Ganzzahliggkeitssatz von Hoffmann und Kruskal
Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Dann gilt:
A total unimodular und b ganzzahlig
$\Leftrightarrow$ das Polyeder $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ hat nur ganzzahlige Eckpunkte

Beweis:
Jeder Polyedereckpunkt entspricht einer zulässigen Basis B der Matrix und lässt sich berechnen als $x_B = A_B^{-1} b$.
Nach der Cramerschen Regel hat die Inverse A_B^{-1} auch nur Einträge aus $\{-1, 0, 1\}$, somit ist $A_B^{-1} b$ ganzzahlig, wenn b ganzzahlig.

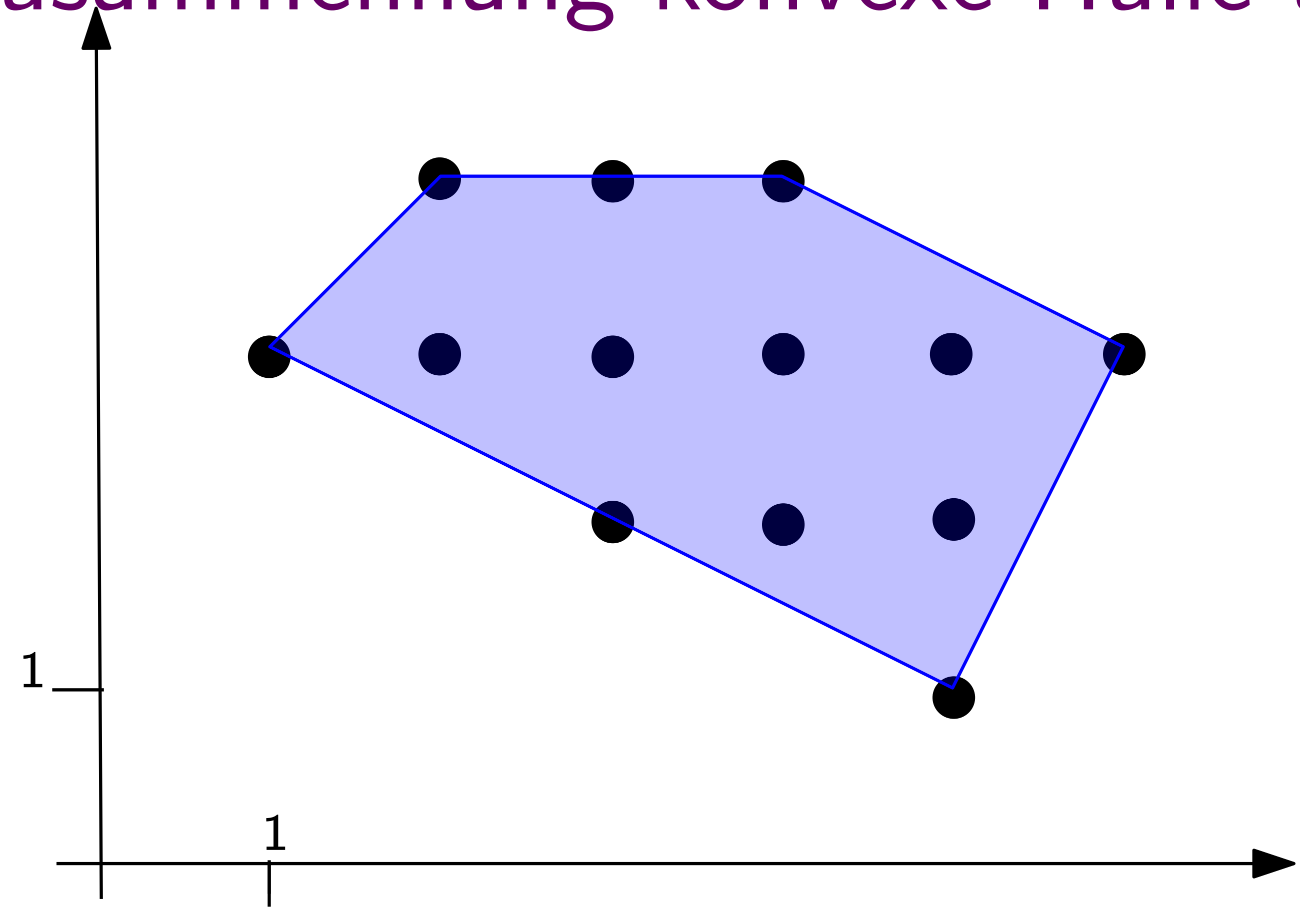
Konsequenz: Ist A TU und b ganzzahlig, dann ist die Lösung der LP Relaxation direkt ganzzahlig.

Was, wenn die rechte Seite b nicht ganzzahlig ist?

Zusammenhang konvexe Hülle und TU Matrize

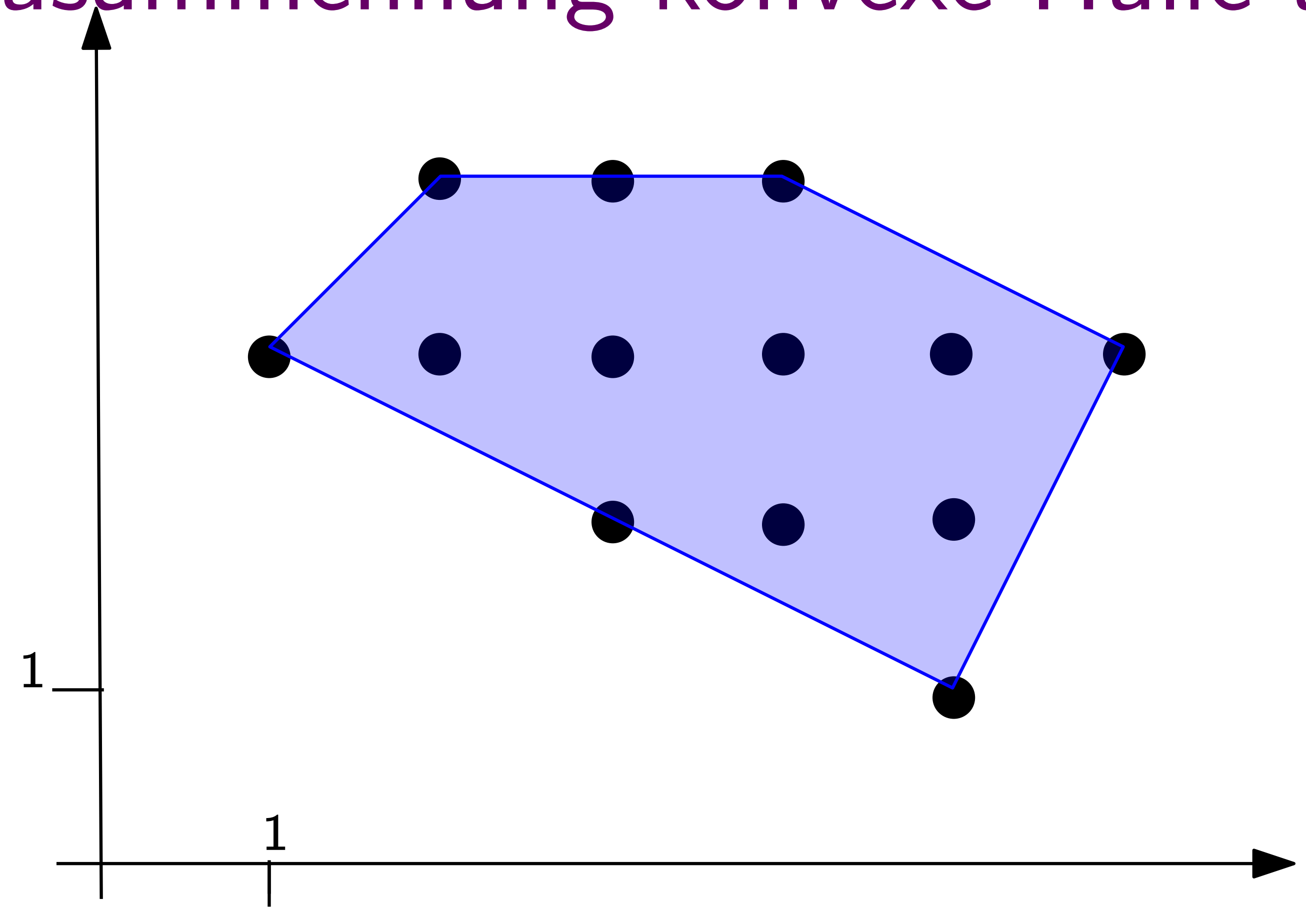


Zusammenhang konvexe Hülle und TU Matrize



Wenn wir eine ILP-Formulierung für ein Problem haben, die auf einer TU-Matrix basiert, dann beschreibt diese die konvexe Hülle der zulässigen Punkte des ILP.

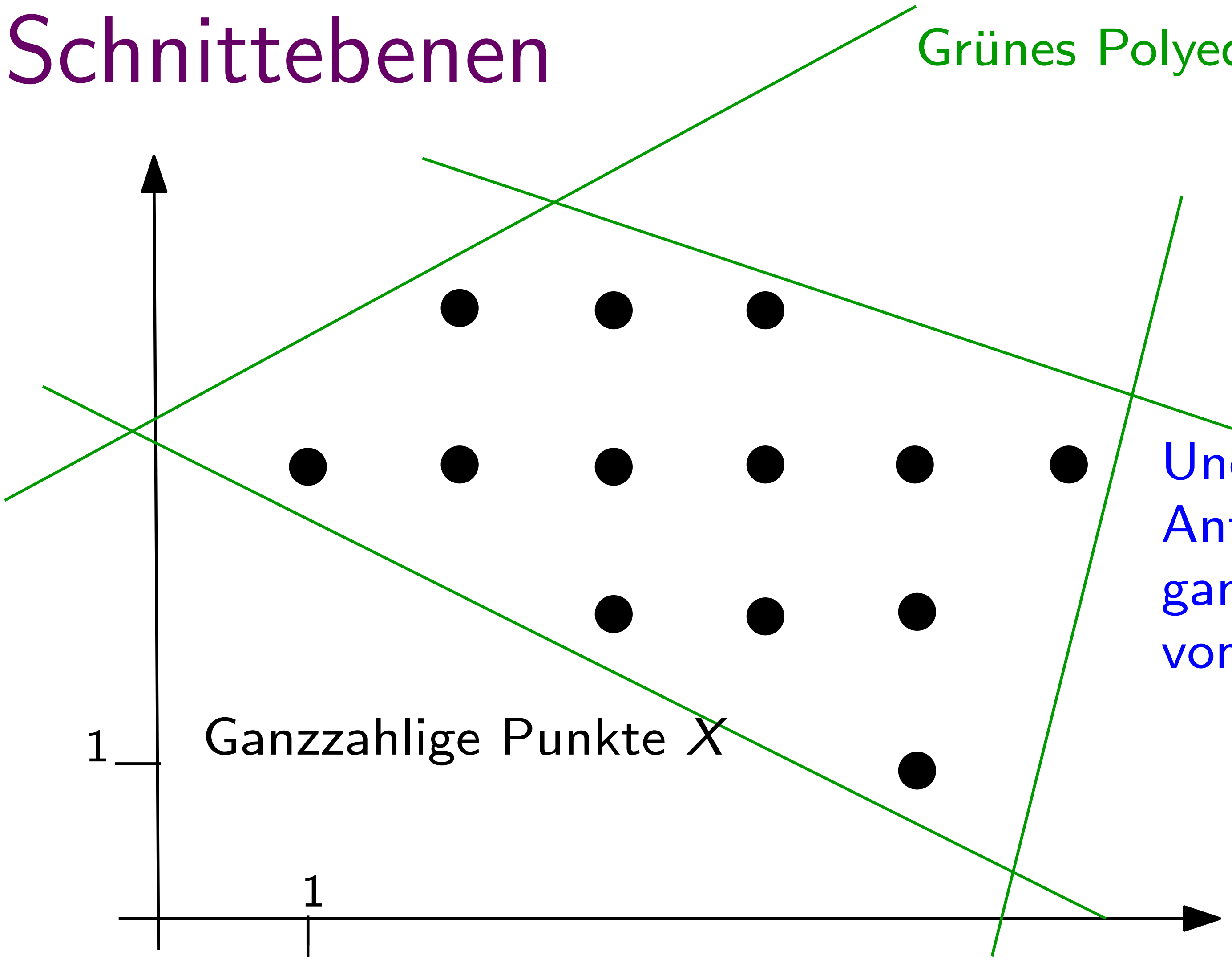
Zusammenhang konvexe Hülle und TU Matrize



Wenn wir eine ILP-Formulierung für ein Problem haben, die auf einer TU-Matrix basiert, dann beschreibt diese die konvexe Hülle der zulässigen Punkte des ILP.

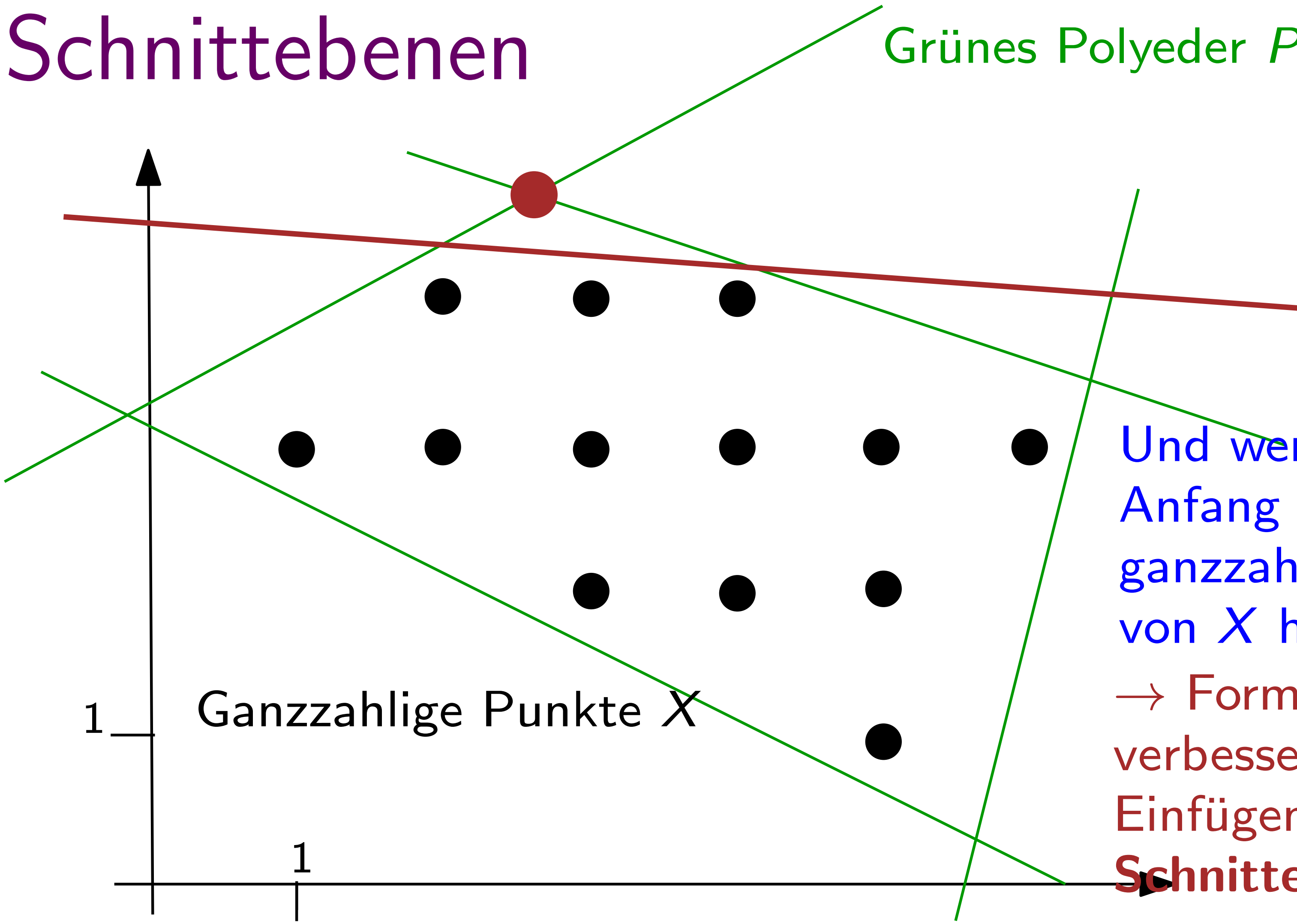
Aber: längst nicht jede konvexe Hülle von ganzzahligen Punkten lässt sich mit Hilfe von TU Matrizen darstellen!

Schnittebenen



Und wenn wir *nicht* (von Anfang an) eine ganzzahlige Formulierung von X haben?

Schnittebenen



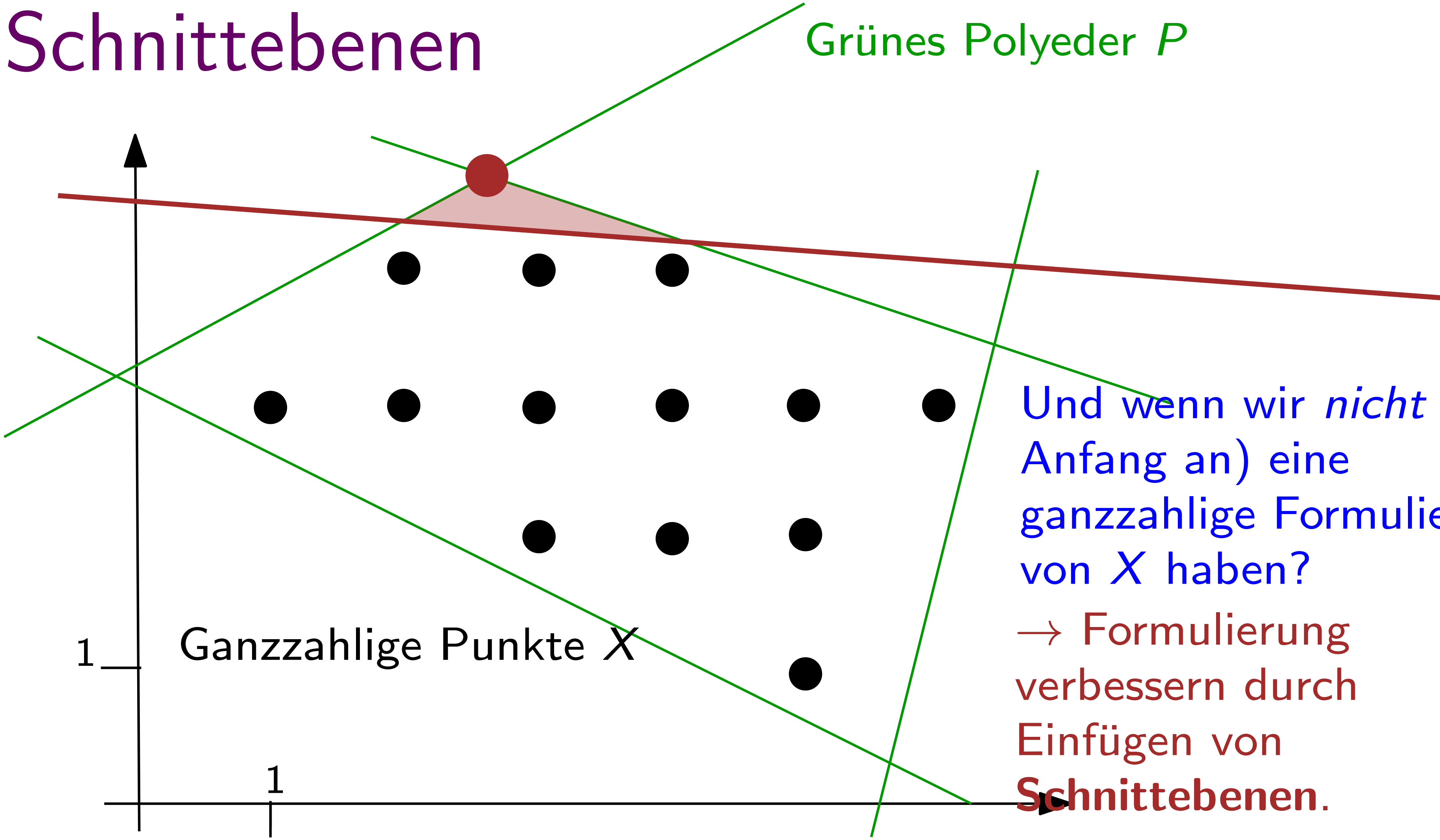
Und wenn wir *nicht* (von Anfang an) eine ganzzahlige Formulierung von X haben?

$\rightarrow$ Formulierung verbessern durch Einfügen von **Schnittebenen**.

Die gesuchten **Schnittebenen** sind gegeben durch Vektor d und Zahl δ mit der Eigenschaft, dass

- $d^t x \leq \delta$ für alle $x \in X$
- $\exists y \in P$ so dass $d^t y > \delta$

Schnittebenen



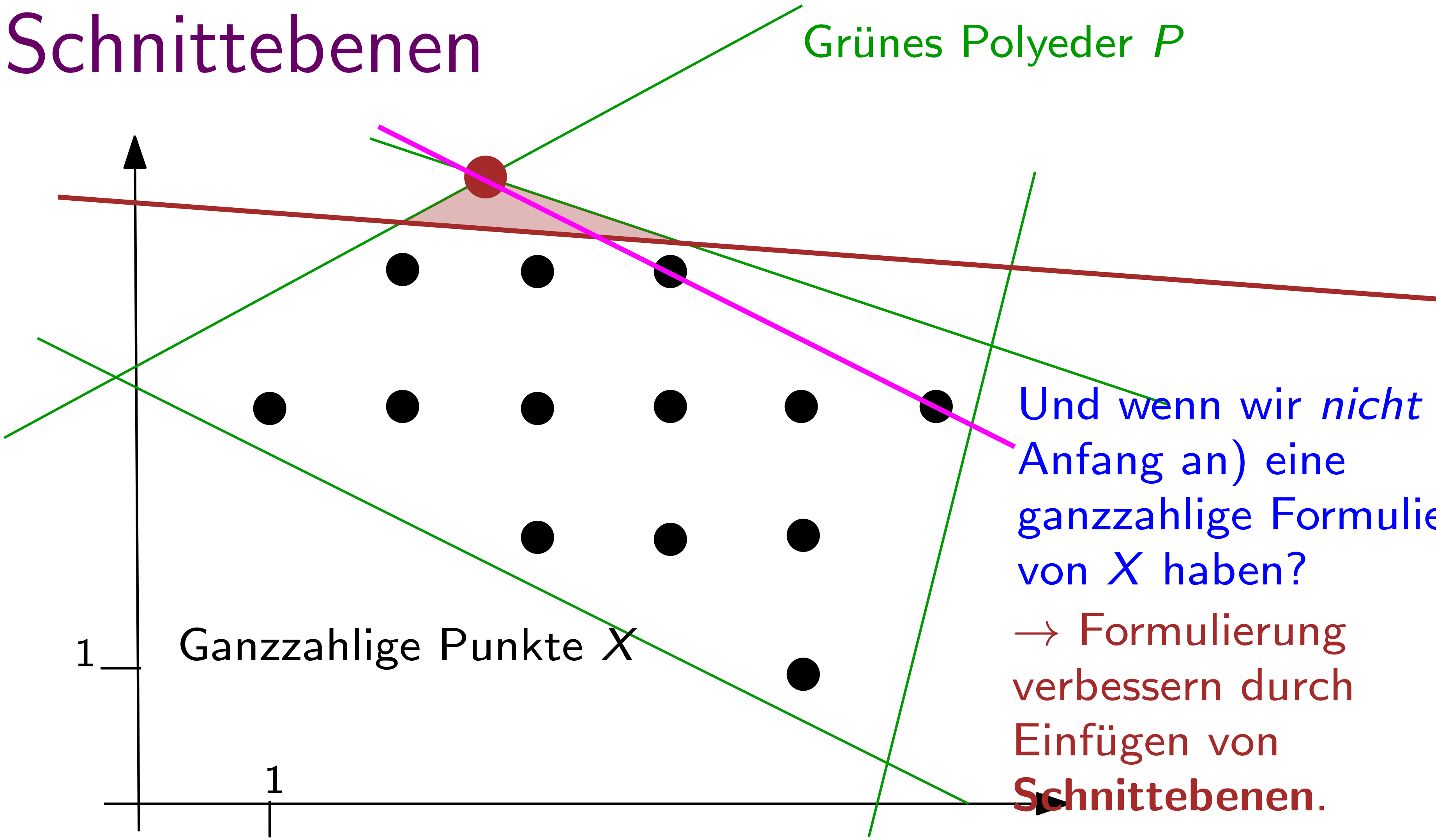
Und wenn wir *nicht* (von Anfang an) eine ganzzahlige Formulierung von X haben?

$\rightarrow$ Formulierung verbessern durch Einfügen von **Schnittebenen**.

Die gesuchten **Schnittebenen** sind gegeben durch Vektor d und Zahl δ mit der Eigenschaft, dass

- $d^t x \leq \delta$ für alle $x \in X$
- $\exists y \in P$ so dass $d^t y > \delta$

Schnittebenen



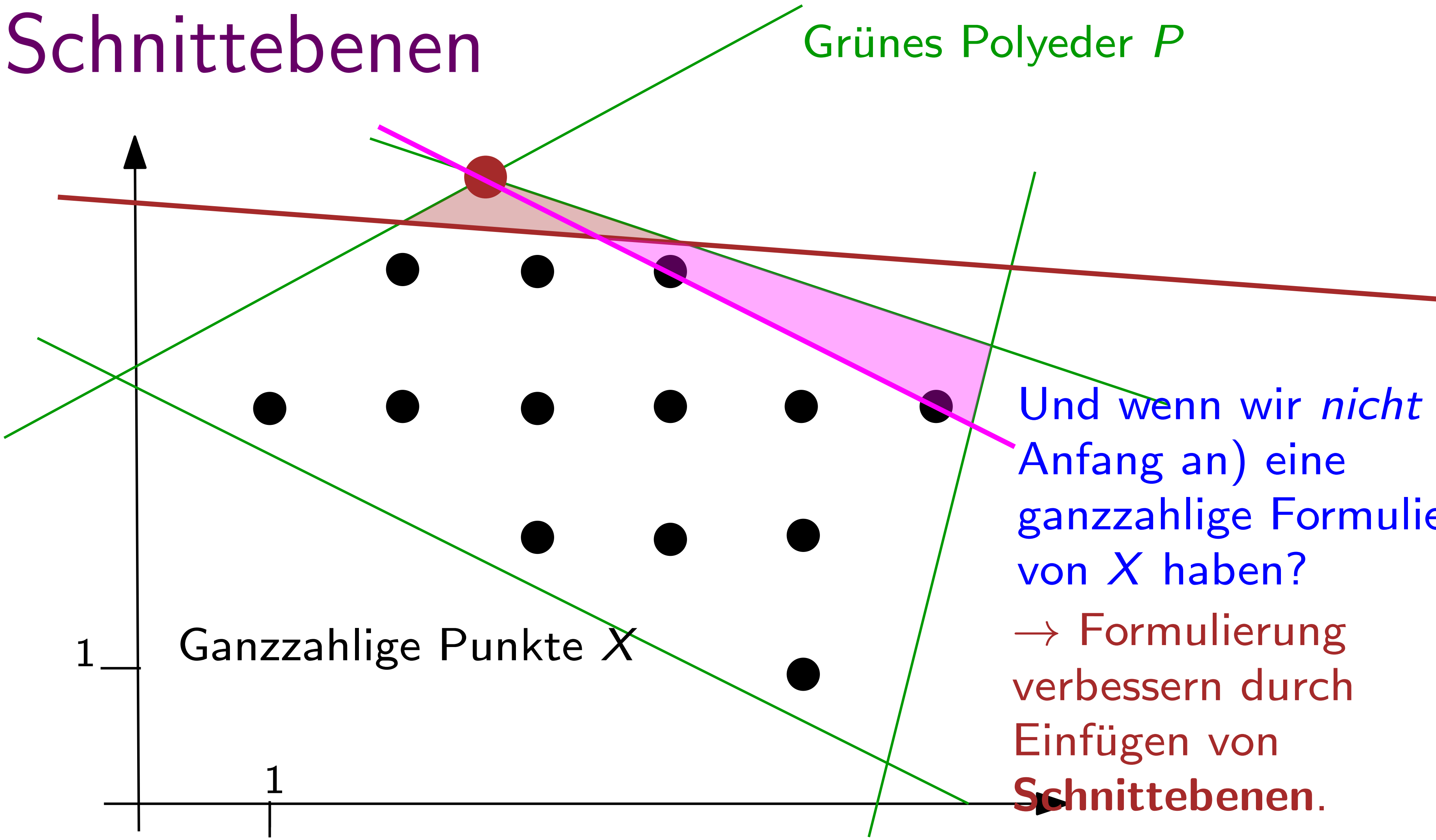
Und wenn wir *nicht* (von Anfang an) eine ganzzahlige Formulierung von X haben?

$\rightarrow$ Formulierung verbessern durch Einfügen von **Schnittebenen**.

Die gesuchten **Schnittebenen** sind gegeben durch Vektor d und Zahl δ mit der Eigenschaft, dass

- $d^t x \leq \delta$ für alle $x \in X$
- $\exists y \in P$ so dass $d^t y > \delta$

Schnittebenen



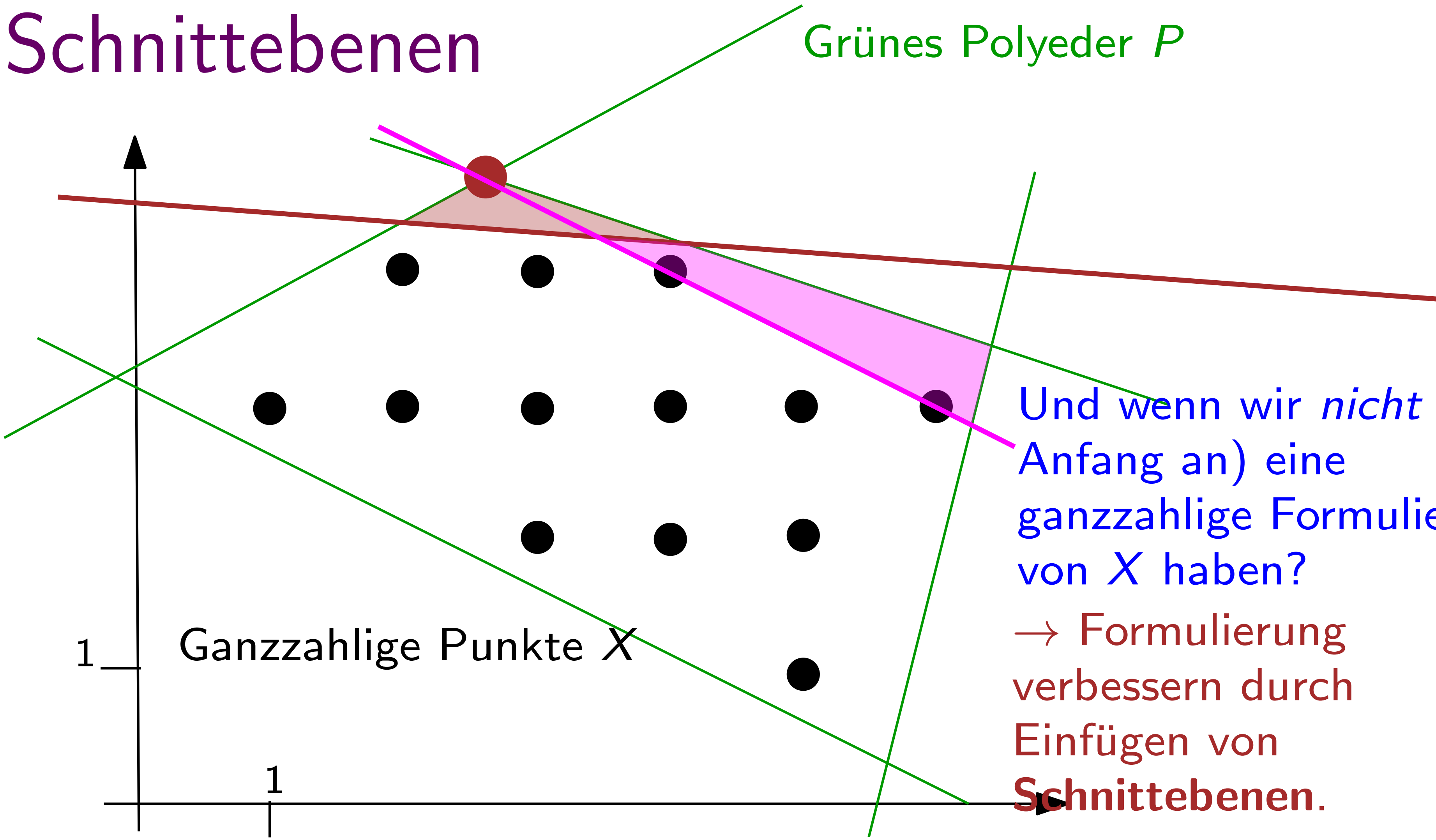
Und wenn wir *nicht* (von Anfang an) eine ganzzahlige Formulierung von X haben?

$\rightarrow$ Formulierung verbessern durch Einfügen von **Schnittebenen**.

Die gesuchten **Schnittebenen** sind gegeben durch Vektor d und Zahl δ mit der Eigenschaft, dass

- $d^t x \leq \delta$ für alle $x \in X$
- $\exists y \in P$ so dass $d^t y > \delta$

Schnittebenen



Und wenn wir *nicht* (von Anfang an) eine ganzzahlige Formulierung von X haben?

$\rightarrow$ Formulierung verbessern durch Einfügen von **Schnittebenen**.

Die gesuchten **Schnittebenen** sind gegeben durch Vektor d und Zahl δ mit der Eigenschaft, dass

- $d^t x \leq \delta$ für alle $x \in X$
- $\exists y \in P$ so dass $d^t y > \delta$

Wir sagen dazu auch **'Schnitt bezüglich Vektor d'**.

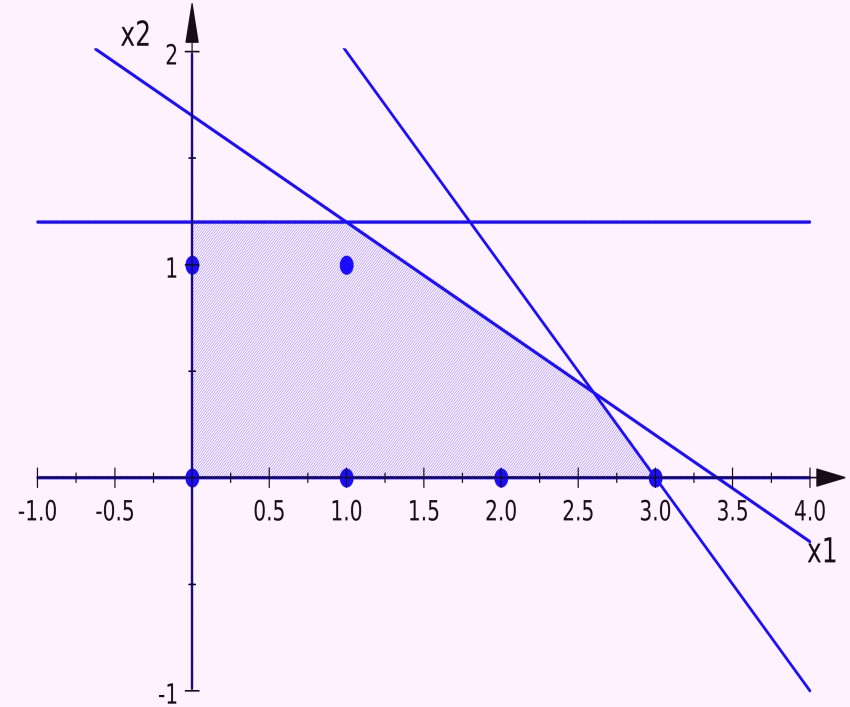
Ganzzahligkeitsschnitte

Beispiel:

Ganzzahligkeitsschnitte

Beispiel:

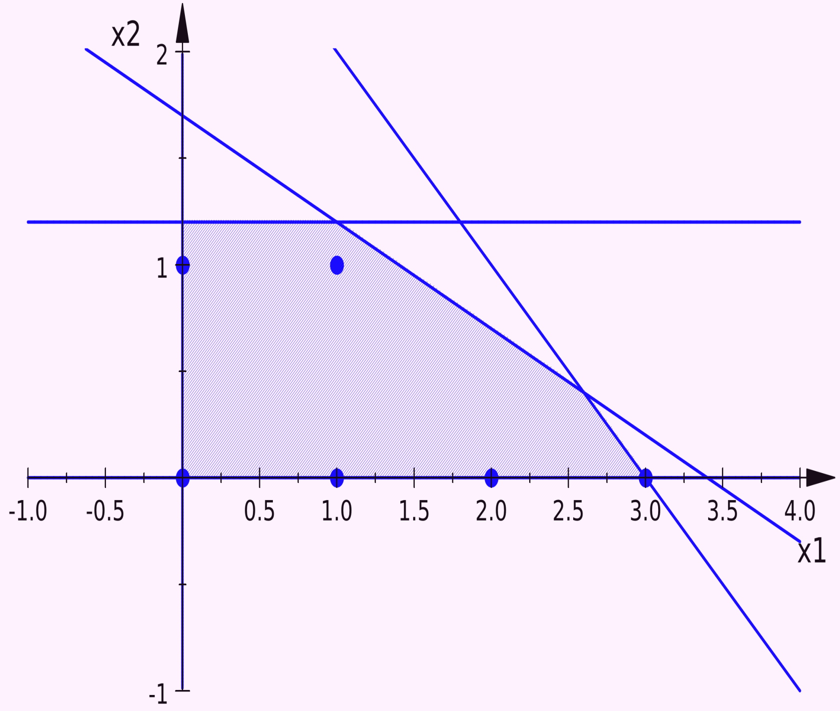
$$
\begin{array}{lll}
\max & 3 \cdot 50 \cdot x_1 \quad + 5 \cdot 50 \cdot x_2 & \\
\text{so dass} & x_1 + 2x_2 & \leq 170/50 = 3.4 \\
& x_1 + x_2 & \leq 150/50 = 3 \\
& 3x_2 & \leq 180/50 = \\
& x_1, x_2 & \geq 0 \\
& x_1, x_2 & \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$



Ganzzahligkeitsschnitte

Beispiel:

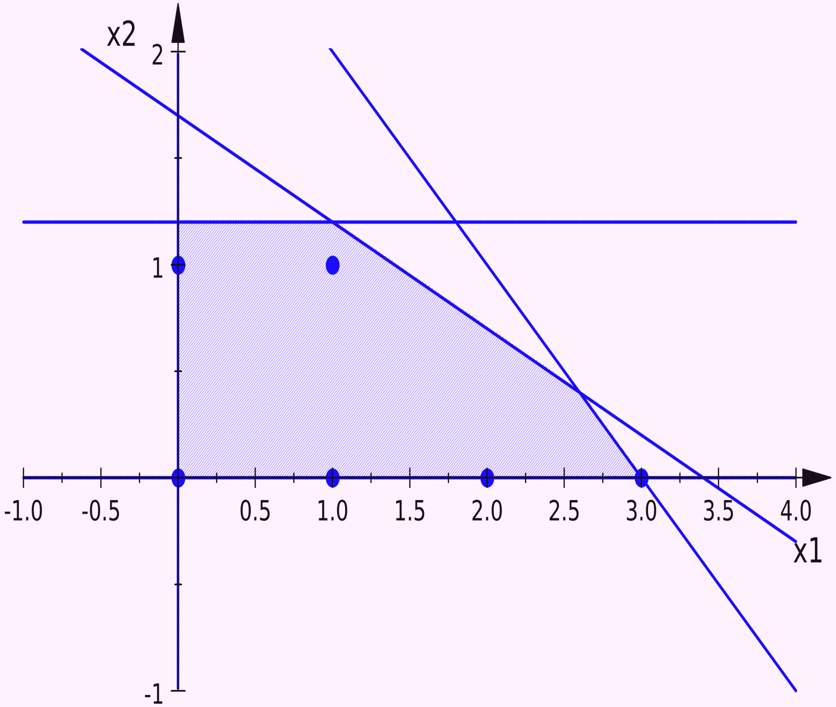
$$
\begin{array}{lll}
\max & 3 \cdot 50 \cdot x_1 \quad +5 \cdot 50 \cdot x_2 & \\
\text{so dass} & x_1 + 2x_2 & \leq 170/50 = 3.4 \\
& x_1 + x_2 & \leq 150/50 = 3 \\
& 3x_2 & \leq 180/50 = 3.6 \\
& x_1, x_2 & \geq 0 \\
& x_1, x_2 & \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$



Ganzzahligkeitsschnitte

Beispiel:

$$
\begin{array}{lll}
\max & 3\cdot 50\cdot x_1 & +5\cdot 50\cdot x_2 \\
\text{so dass} & x_1+2x_2 & \le 170/50 = 3.4 \\
 & x_1+x_2 & \le 150/50 = 3 \\
 & 3x_2 & \le 180/50 = 3.6 \\
 & x_1, x_2 & \ge 0 \\
 & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$



Schnitte:

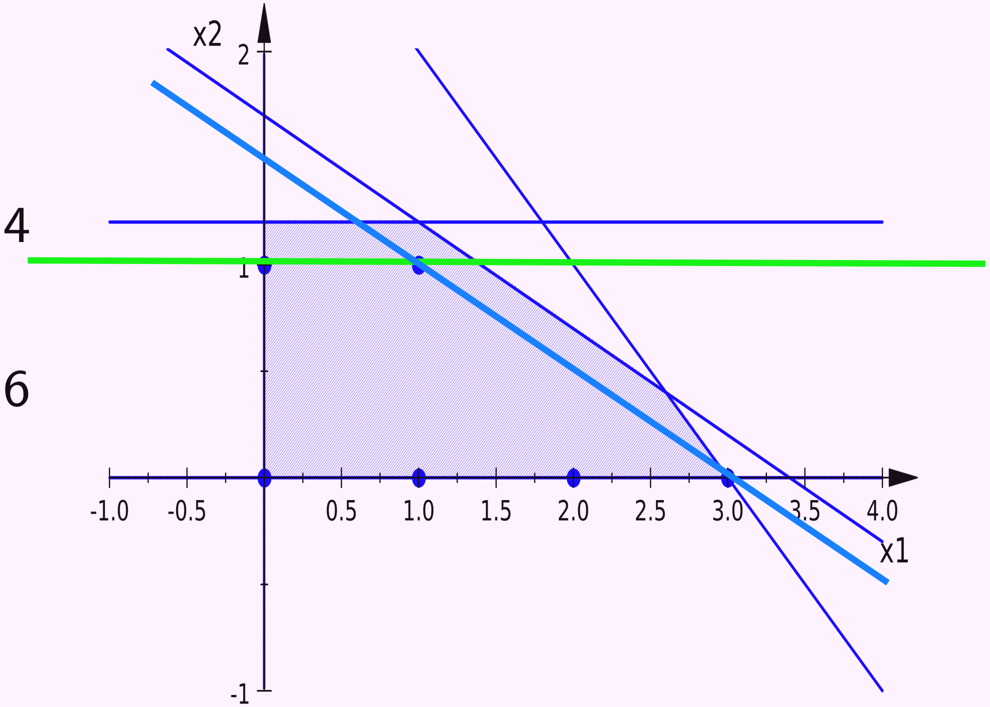
$x_1 + 2x_2 \le 3$

$3x_2 \le 3$

Ganzzahligkeitsschnitte

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} \max & 3 \cdot 50 \cdot x_1 & +5 \cdot 50 \cdot x_2 \\ \text{so dass} & x_1 + 2x_2 & \leq 170/50 = 3.4 \\ & x_1 + x_2 & \leq 150/50 = 3 \\ & 3x_2 & \leq 180/50 = 3.6 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \\ & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z} \end{array}$$



Schnitte:

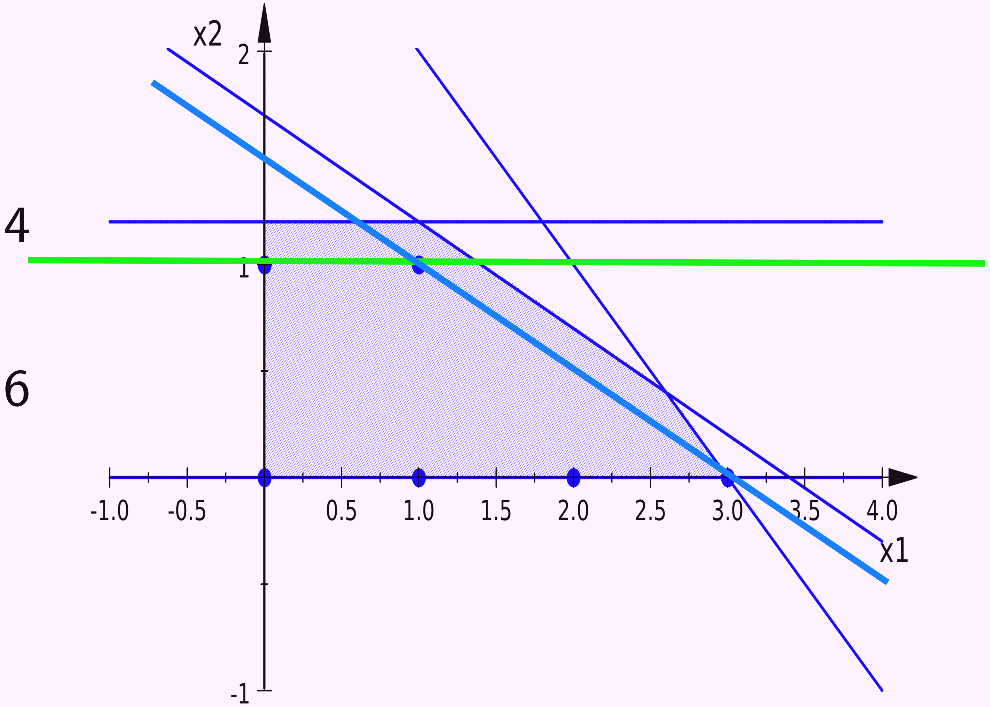
$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$3x_2 \leq 3$

Ganzzahligkeitsschnitte

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} \max & 3 \cdot 50 \cdot x_1 & +5 \cdot 50 \cdot x_2 \\ \text{so dass} & x_1 + 2x_2 & \leq 170/50 = 3.4 \\ & x_1 + x_2 & \leq 150/50 = 3 \\ & 3x_2 & \leq 180/50 = 3.6 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \\ & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z} \end{array}$$



Schnitte:

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

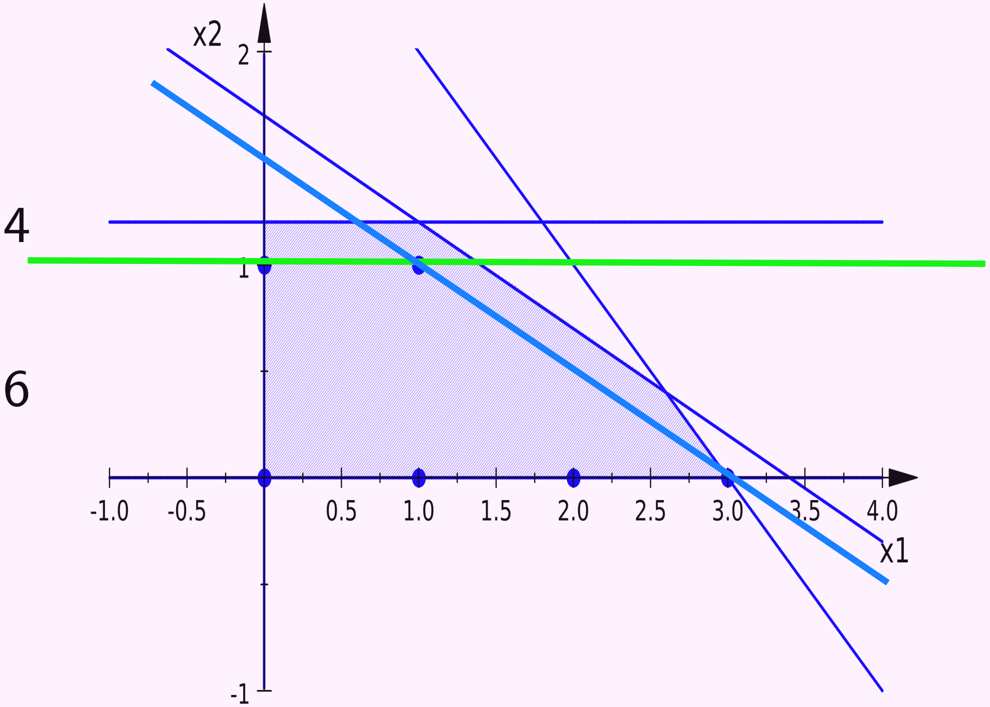
$3x_2 \leq 3$

In diesem Beispiel ausreichend um konvexe Hülle zu finden!

Ganzzahligkeitsschnitte

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} \max & 3 \cdot 50 \cdot x_1 & +5 \cdot 50 \cdot x_2 \\ \text{so dass} & x_1 + 2x_2 & \leq 170/50 = 3.4 \\ & x_1 + x_2 & \leq 150/50 = 3 \\ & 3x_2 & \leq 180/50 = 3.6 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \\ & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z} \end{array}$$



Schnitte:

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$3x_2 \leq 3$

In diesem Beispiel ausreichend um konvexe Hülle zu finden!

$a_{1i}x_i + a_{2i}x_2 + \ldots + a_{ni}x_i \leq b_i$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_{ij} wird zu $a_{1i}x_i + a_{2i}x_2 + \ldots + a_{ni}x_i \leq \lfloor b_i \rfloor$

'Abschneiden' der Lösung der LP-Relaxation

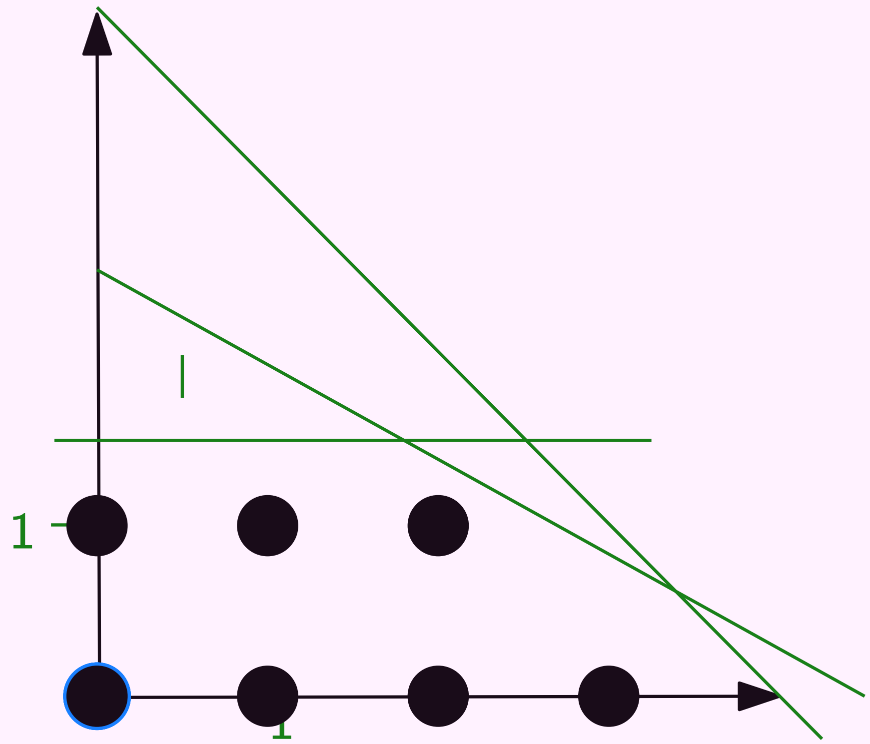
Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 3x_1 + 4x_2 \\
\text{so dass} \quad & x_2 \leq 1.5 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& 5/9x_1 + x_2 \leq 5/2 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

'Abschneiden' der Lösung der LP-Relaxation

Beispiel:

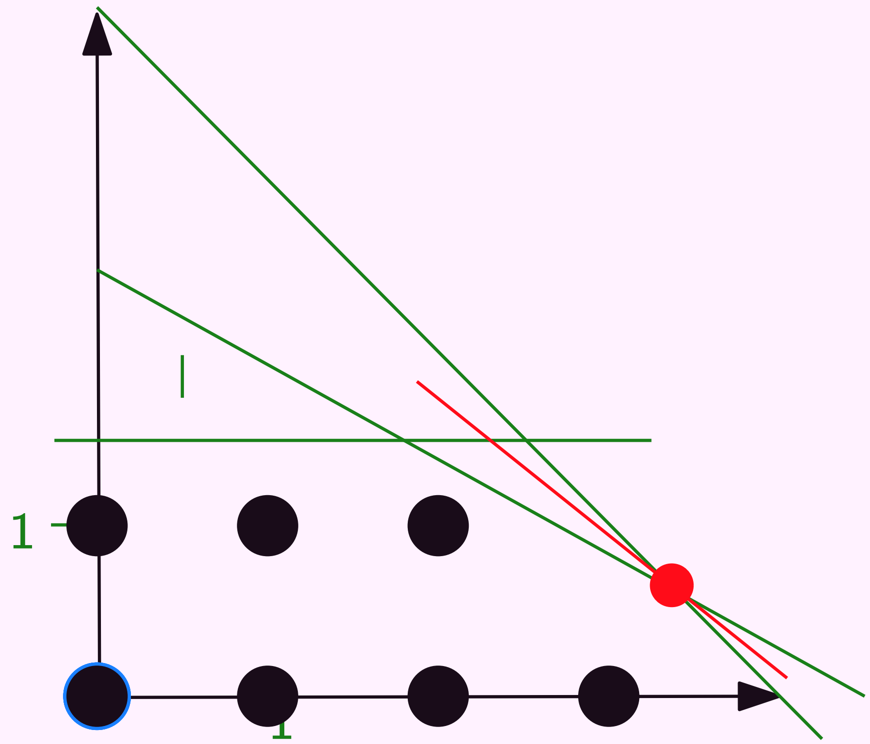
$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{so dass} \quad & x_2 \leq 1.5 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 5/9x_1 + x_2 \leq 5/2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



'Abschneiden' der Lösung der LP-Relaxation

Beispiel:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{so dass} \quad & x_2 \leq 1.5 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 5/9 x_1 + x_2 \leq 5/2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

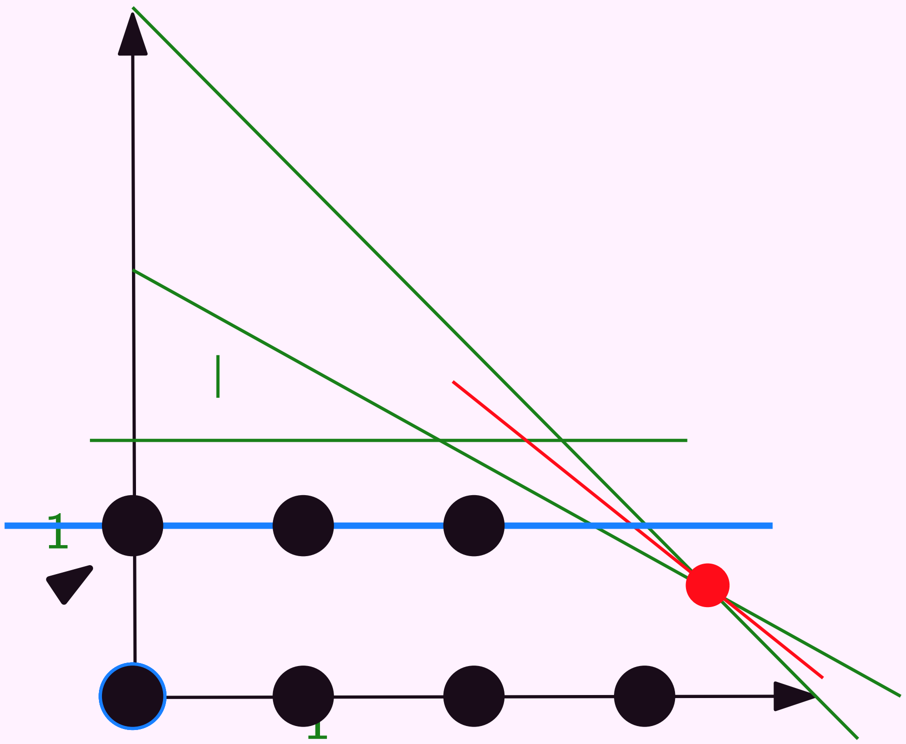


'Abschneiden' der Lösung der LP-Relaxation

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 + 4x_2 \\
\text{so dass}\ & x_2 \le 1.5 \\
& x_1 + x_2 \le 4 \\
& 5/9 x_1 + x_2 \le 5/2 \\
& x_1, x_2 \ge 0 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

$x_2 \le 1$: Kein hilfreicher Schnitt (Lsg LP-Relaxation unverändert)



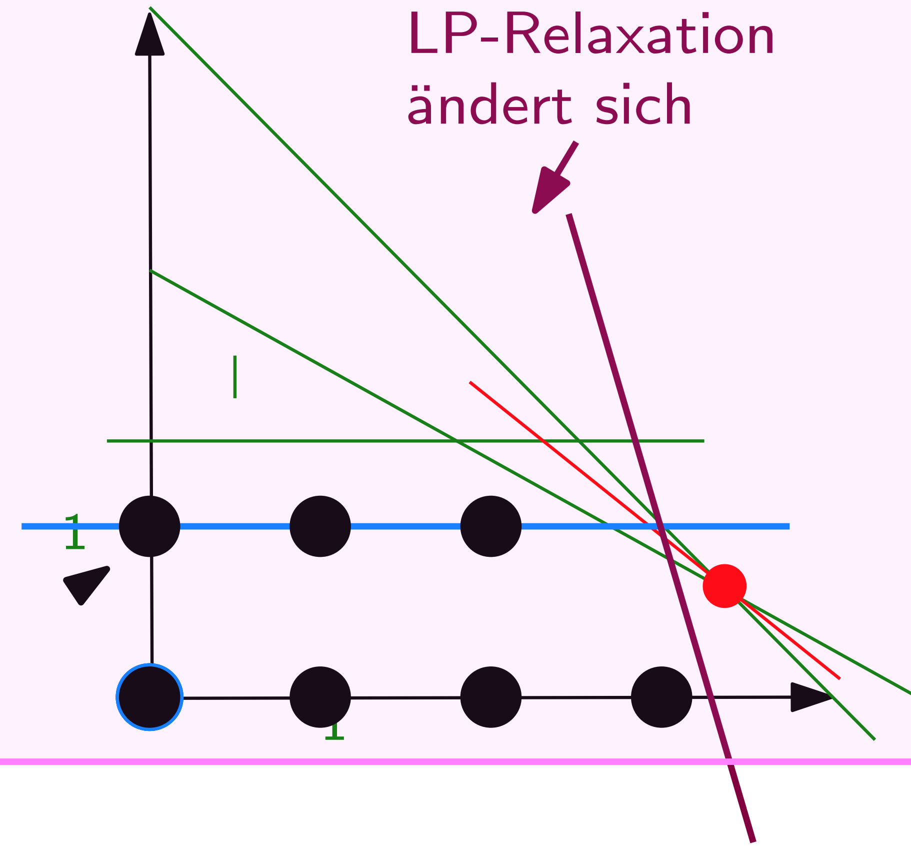
'Abschneiden' der Lösung der LP-Relaxation

Beispiel:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{so dass} \quad & x_2 \leq 1.5 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 5/9x_1 + x_2 \leq 5/2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$x_2 \leq 1$: Kein hilfreicher Schnitt (Lsg LP-Relaxation unverändert)

'hilfreicher' Schnitt: Lösung LP-Relaxation ändert sich

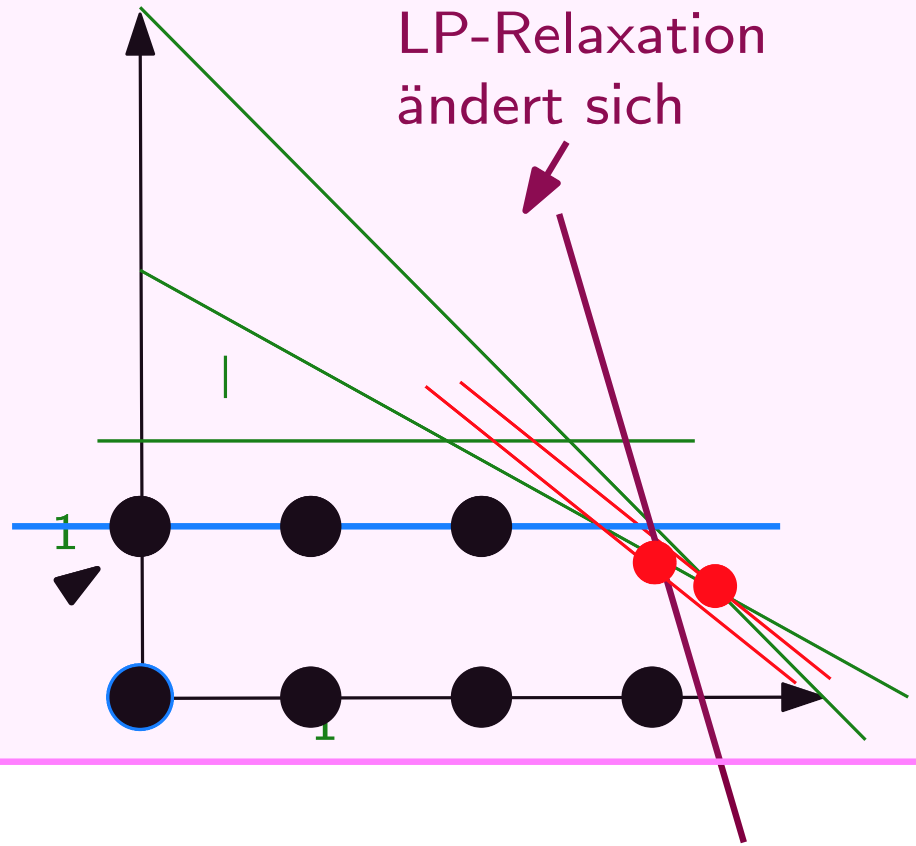


'Abschneiden' der Lösung der LP-Relaxation

Beispiel:

$$\begin{aligned} \max\quad & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{so dass}\quad & x_2 \le 1.5 \\ & x_1 + x_2 \le 4 \\ & 5/9x_1 + x_2 \le 5/2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$x_2 \le 1$: Kein hilfreicher Schnitt (Lsg LP-Relaxation unverändert)



'hilfreicher' Schnitt: Lösung LP-Relaxation ändert sich

Gomory-Chvátal-Schnitte

Schneiden Lösung der LP-Relaxation ab

Gomory-Chvátal-Schnitte

Schneiden Lösung der LP-Relaxation ab

Wie betrachten ein ILP $\max\{c^t x : x \in X, x \in \mathbb{Z}^n\}$ mit $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$.

Sei x^* optimale Basislösung der LP-Relaxation zur Basis B und x_i^* nicht ganzzahlig. Seien $\bar{b} := A_B^{-1} b$ und $\bar{A}_N := A_B^{-1} A_N$ die zu der Basisdarstellung gehörenden Nebenbedingsvektor und Nebenbedingungsmatrix. Dann gilt dass:

1. $\boxed{\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)}$ for all $x \in X$
2. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j^* < (b_i - \lfloor b_i \rfloor)$

Einen so erzeugten Schnitt nennen wir **Gomory-Chvátal-Schnitt**.

Gomory-Chvátal-Schnitte

Schneiden Lösung der LP-Relaxation ab

Wie betrachten ein ILP $\max\{c^t x : x \in X, x \in \mathbb{Z}^n\}$ mit $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$.

Sei x^* optimale Basislösung der LP-Relaxation zur Basis B und x_i^* nicht ganzzahlig. Seien $\bar{b} := A_B^{-1} b$ und $\bar{A}_N := A_B^{-1} A_N$ die zu der Basisdarstellung gehörenden Nebenbedingsvektor und Nebenbedingungsmatrix. Dann gilt dass:

1. $\boxed{\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)}$ for all $x \in X$
2. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j^* < (b_i - \lfloor b_i \rfloor)$

Einen so erzeugten Schnitt nennen wir **Gomory-Chvátal-Schnitt**.

Beweis:

Gomory-Chvátal-Schnitte

Schneiden Lösung der LP-Relaxation ab

Wie betrachten ein ILP $\max\{c^t x : x \in X, x \in \mathbb{Z}^n\}$ mit $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$.

Sei x^* optimale Basislösung der LP-Relaxation zur Basis B und x_i^* nicht ganzzahlig. Seien $\bar{b} := A_B^{-1} b$ und $\bar{A}_N := A_B^{-1} A_N$ die zu der Basisdarstellung gehörenden Nebenbedingsvektor und Nebenbedingungsmatrix. Dann gilt dass:

1. $\boxed{\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)}$ for all $x \in X$
2. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j^* < (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$

Einen so erzeugten Schnitt nennen wir **Gomory-Chvátal-Schnitt**.

Beweis:

Zu 2.):
$x_j^* = 0 \forall j \in N \Rightarrow \sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j^* = 0$.

Andererseits: $\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor = x_i^* - \lfloor x_i^* \rfloor > 0$, da $x_i^* \geq 0$ und $x_i^* \notin \mathbb{Z}$

Gomory-Chvátal-Schnitte

Schneiden Lösung der LP-Relaxation ab

Wie betrachten ein ILP $\max\{c^t x : x \in X, x \in \mathbb{Z}^n\}$ mit $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$.

Sei x^* optimale Basislösung der LP-Relaxation zur Basis B und x_i^* nicht ganzzahlig. Seien $\bar{b} := A_B^{-1} b$ und $\bar{A}_N := A_B^{-1} A_N$ die zu der Basisdarstellung gehörenden Nebenbedingsvektor und Nebenbedingungsmatrix. Dann gilt dass:

1. $\boxed{\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)}$ for all $x \in X$
2. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j^* < (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$

Einen so erzeugten Schnitt nennen wir **Gomory-Chvátal-Schnitt**.

Beweis:

zu 1.): Betrachte Nebenbedingung $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ (die wir durch Umschreiben von X in zur Basisdarstellung B erhalten).

Insbesondere muss natürlich auch jedes ganzzahlige $x \in X$ das erfüllen, dh für alle Lösungen in $x \in X \cap \mathbb{Z}^n$ ist $\bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ ganzzahlig.

Gomory-Chvátal-Schnitte

Schneiden Lösung der LP-Relaxation ab

Wie betrachten ein ILP $\max\{c^t x : x \in X, x \in \mathbb{Z}^n\}$ mit $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$.

Sei x^* optimale Basislösung der LP-Relaxation zur Basis B und x_i^* nicht ganzzahlig. Seien $\bar{b} := A_B^{-1} b$ und $\bar{A}_N := A_B^{-1} A_N$ die zu der Basisdarstellung gehörenden Nebenbedingsvektor und Nebenbedingungsmatrix. Dann gilt dass:

1. $\boxed{\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)}$ for all $x \in X$
2. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j^* < (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$

Einen so erzeugten Schnitt nennen wir **Gomory-Chvátal-Schnitt**.

Beweis:

zu 1.): Betrachte Nebenbedingung $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ (die wir durch Umschreiben von X in zur Basisdarstellung B erhalten).
Insbesondere muss natürlich auch jedes ganzzahlige $x \in X$ das erfüllen, dh für alle Lösungen in $x \in X \cap \mathbb{Z}^n$ ist $\bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ ganzzahlig.

Gomory-Chvátal-Schnitte

Schneiden Lösung der LP-Relaxation ab

Wie betrachten ein ILP $\max\{c^t x : x \in X, x \in \mathbb{Z}^n\}$ mit $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$.

Sei x^* optimale Basislösung der LP-Relaxation zur Basis B und x_i^* nicht ganzzahlig. Seien $\bar{b} := A_B^{-1} b$ und $\bar{A}_N := A_B^{-1} A_N$ die zu der Basisdarstellung gehörenden Nebenbedingsvektor und Nebenbedingungsmatrix. Dann gilt dass:

1. $\boxed{\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)}$ for all $x \in X$
2. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j^* < (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$

Einen so erzeugten Schnitt nennen wir **Gomory-Chvátal-Schnitt**.

Beweis:

zu 1.): Betrachte Nebenbedingung $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ (die wir durch Umschreiben von X in zur Basisdarstellung B erhalten).

Insbesondere muss natürlich auch jedes ganzzahlige $x \in X$ das erfüllen, dh für alle Lösungen in $x \in X \cap \mathbb{Z}^n$ ist $\bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ ganzzahlig.

$\Rightarrow \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j - \lfloor \bar{b}_i \rfloor - \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j = (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor) - \sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j$ ganzzahlig

Gomory-Chvátal-Schnitte
Schneiden Lösung der LP-Relaxation ab

Wie betrachten ein ILP $\max\{c^t x : x \in X, x \in \mathbb{Z}^n\}$ mit $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$.

Sei x^* optimale Basislösung der LP-Relaxation zur Basis B und x_i^* nicht ganzzahlig.
Seien $\bar{b} := A_B^{-1} b$ und $\bar{A}_N := A_B^{-1} A_N$ die zu der Basisdarstellung gehörenden Nebenbedingsvektor und Nebenbedingungsmatrix. Dann gilt dass:

1. $\boxed{\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)}$ for all $x \in X$
2. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j^* < (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$

Einen so erzeugten Schnitt nennen wir **Gomory-Chvátal-Schnitt**.

Beweis:

zu 1.): Betrachte Nebenbedingung $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ (die wir durch Umschreiben von X in zur Basisdarstellung B erhalten).
Insbesondere muss natürlich auch jedes ganzzahlige $x \in X$ das erfüllen, dh für alle Lösungen in $x \in X \cap \mathbb{Z}^n$ ist $\bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ ganzzahlig.
$\Rightarrow \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j - \lfloor \bar{b}_i \rfloor - \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j = (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor) - \sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j$ ganzzahlig

Gomory-Chvátal-Schnitte

Schneiden Lösung der LP-Relaxation ab

Wie betrachten ein ILP $\max\{c^t x : x \in X, x \in \mathbb{Z}^n\}$ mit $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$.

Sei x^* optimale Basislösung der LP-Relaxation zur Basis B und x_i^* nicht ganzzahlig. Seien $\bar{b} := A_B^{-1} b$ und $\bar{A}_N := A_B^{-1} A_N$ die zu der Basisdarstellung gehörenden Nebenbedingsvektor und Nebenbedingungsmatrix. Dann gilt dass:

1. $\boxed{\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)}$ for all $x \in X$
2. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j^* < (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$

Einen so erzeugten Schnitt nennen wir **Gomory-Chvátal-Schnitt**.

Beweis:

zu 1.): Betrachte Nebenbedingung $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ (die wir durch Umschreiben von X in zur Basisdarstellung B erhalten).

Insbesondere muss natürlich auch jedes ganzzahlige $x \in X$ das erfüllen, dh für alle Lösungen in $x \in X \cap \mathbb{Z}^n$ ist $\bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ ganzzahlig.

$\Rightarrow \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j - \lfloor \bar{b}_i \rfloor - \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j = (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor) - \sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j$ ganzzahlig

Außerdem gilt $(\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor) \in (0, 1)$ und $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq 0$

Gomory-Chvátal-Schnitte

Schneiden Lösung der LP-Relaxation ab

Wie betrachten ein ILP $\max\{c^t x : x \in X, x \in \mathbb{Z}^n\}$ mit $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$.

Sei x^* optimale Basislösung der LP-Relaxation zur Basis B und x_i^* nicht ganzzahlig. Seien $\bar{b} := A_B^{-1} b$ und $\bar{A}_N := A_B^{-1} A_N$ die zu der Basisdarstellung gehörenden Nebenbedingsvektor und Nebenbedingungsmatrix. Dann gilt dass:

1. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$ for all $x \in X$
2. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j^* < (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$

Einen so erzeugten Schnitt nennen wir **Gomory-Chvátal-Schnitt**.

Beweis:

zu 1.): Betrachte Nebenbedingung $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ (die wir durch Umschreiben von X in zur Basisdarstellung B erhalten).

Insbesondere muss natürlich auch jedes ganzzahlige $x \in X$ das erfüllen, dh für alle Lösungen in $x \in X \cap \mathbb{Z}^n$ ist $\bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ ganzzahlig.

$\Rightarrow \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j - \lfloor \bar{b}_i \rfloor - \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j = (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor) - \sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j$ ganzzahlig

Außerdem gilt $(\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor) \in (0, 1)$ und $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq 0$

Also gilt: $(\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor) - \sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \leq 0$

Gomory-Chvátal-Schnitte

Schneiden Lösung der LP-Relaxation ab

Wie betrachten ein ILP $\max\{c^t x : x \in X, x \in \mathbb{Z}^n\}$ mit $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$.

Sei x^* optimale Basislösung der LP-Relaxation zur Basis B und x_i^* nicht ganzzahlig. Seien $\bar{b} := A_B^{-1} b$ und $\bar{A}_N := A_B^{-1} A_N$ die zu der Basisdarstellung gehörenden Nebenbedingsvektor und Nebenbedingungsmatrix. Dann gilt dass:

1. $\boxed{\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)}$ for all $x \in X$
2. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j^* < (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$

Einen so erzeugten Schnitt nennen wir **Gomory-Chvátal-Schnitt**.

Beweis:

zu 1.): Betrachte Nebenbedingung $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ (die wir durch Umschreiben von X in zur Basisdarstellung B erhalten).

Insbesondere muss natürlich auch jedes ganzzahlige $x \in X$ das erfüllen, dh für alle Lösungen in $x \in X \cap \mathbb{Z}^n$ ist $\bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ ganzzahlig.

$\Rightarrow \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j - \lfloor \bar{b}_i \rfloor - \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j = (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor) - \sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j$ ganzzahlig

Außerdem gilt $(\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor) \in (0,1)$ und $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq 0$

Also gilt: $(\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor) - \sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \leq 0$

$\Leftrightarrow \sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$

Gomory-Chvátal-Schnitte

Schneiden Lösung der LP-Relaxation ab

Wie betrachten ein ILP $\max\{c^t x : x \in X, x \in \mathbb{Z}^n\}$ mit $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$.

Sei x^* optimale Basislösung der LP-Relaxation zur Basis B und x_i^* nicht ganzzahlig. Seien $\bar{b} := A_B^{-1} b$ und $\bar{A}_N := A_B^{-1} A_N$ die zu der Basisdarstellung gehörenden Nebenbedingsvektor und Nebenbedingungsmatrix. Dann gilt dass:

1. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$ for all $x \in X$
2. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j^* < (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$

Einen so erzeugten Schnitt nennen wir **Gomory-Chvátal-Schnitt**.

Beweis:

zu 1.): Betrachte Nebenbedingung $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ (die wir durch Umschreiben von X in zur Basisdarstellung B erhalten).

Insbesondere muss natürlich auch jedes ganzzahlige $x \in X$ das erfüllen, dh für alle Lösungen in $x \in X \cap \mathbb{Z}^n$ ist $\bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ ganzzahlig.

$\Rightarrow \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j - \lfloor \bar{b}_i \rfloor - \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j = (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor) - \sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j$ ganzzahlig

Außerdem gilt $(\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor) \in (0, 1)$ und $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq 0$

Also gilt: $(\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor) - \sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \leq 0$

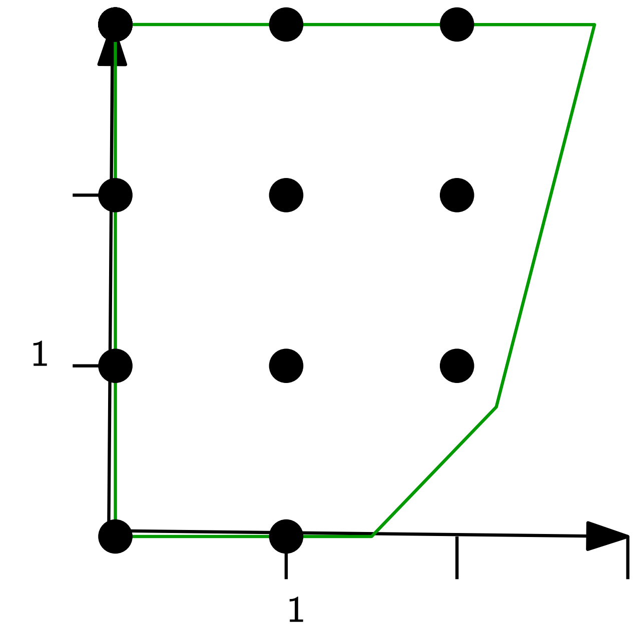
$\Leftrightarrow \sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

Require: ganzzahliges lineares Programm ILP
Ensure: Optimallösung für ILP
  Setze $P := ILP$
  Setze stop $= 0$
  while stop $= 0$ **do**
    Löse die LP-Relaxation von P, sei x' die gefundene Optimallösung
    if x' ganzzahlig **then**
      Setze $x^* := x'$, stop$=1$
    end if
    Wähle fraktionale Basisvariable aus x' und erstelle zugehörigen Gomory-Chvátal-Cut C.
    Füge C zu P hinzu.
  end while

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

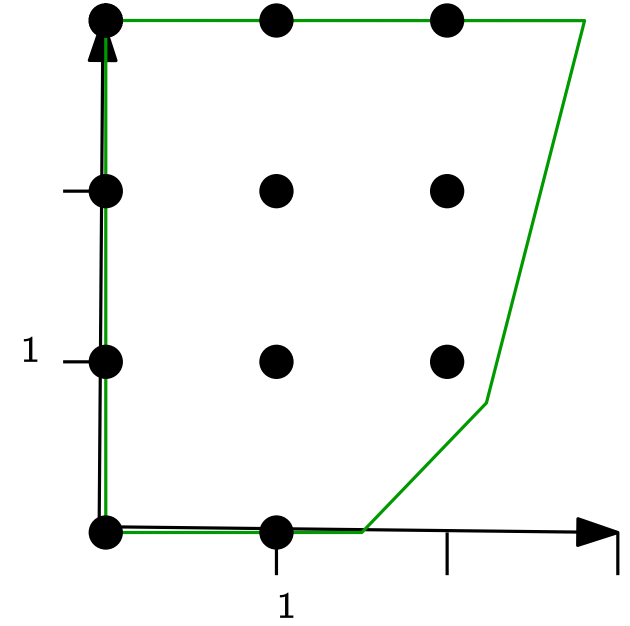
$$\begin{aligned} \max\quad & 4x_1 - x_2 \\ \text{so dass}\quad & 7x_1 - 2x_2 \leq 14 \\ & x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	14
0	1	0	1	0	3
2	-2	0	0	1	3

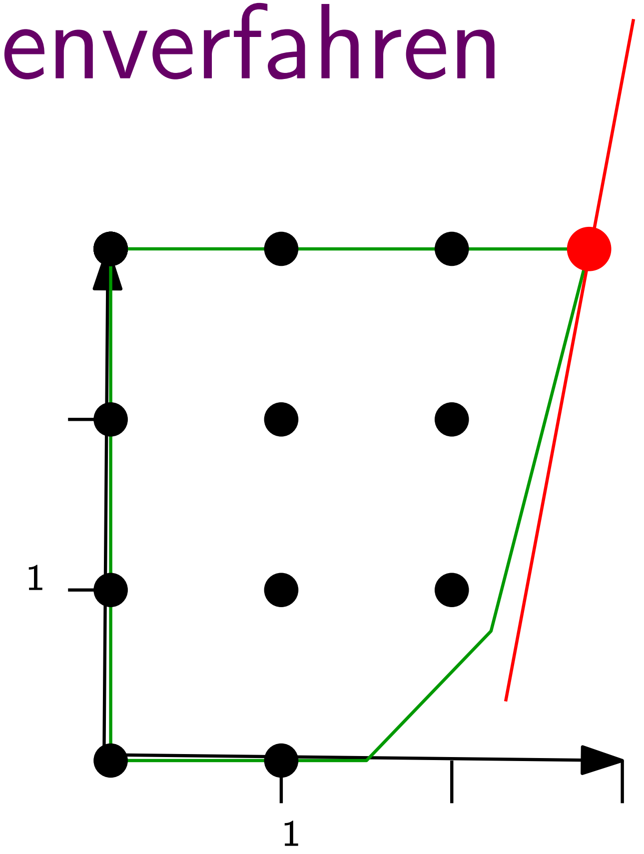
Erstelle Simplextableau



Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

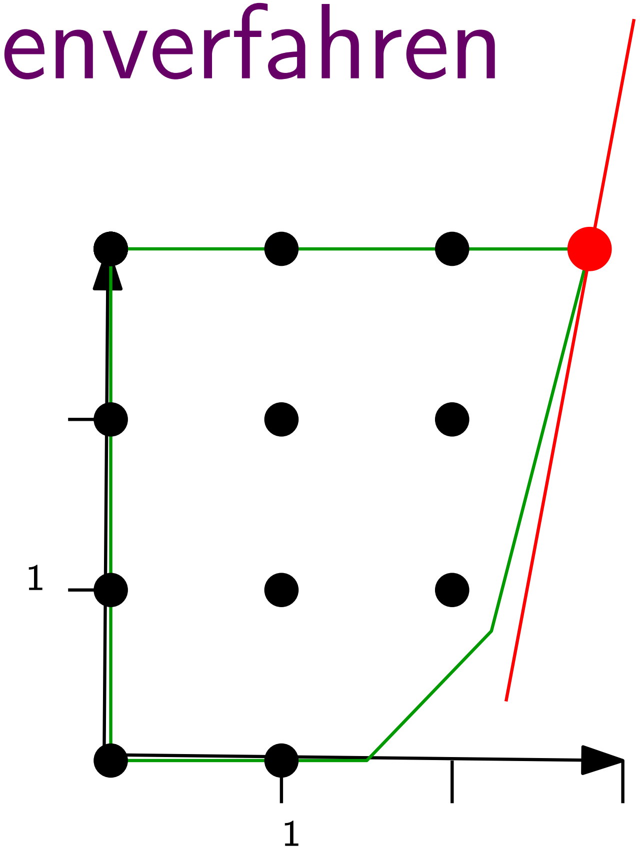
4	-1	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	14
0	1	0	1	0	3
2	-2	0	0	1	3

Löse LP-Relaxation



Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	14
0	1	0	1	0	3
2	-2	0	0	1	3



Löse LP-Relaxation

0	0	-4/7	-1/7	0	-59/7
1	0	1/7	2/7	0	20/7
0	1	0	1	0	3
0	0	-2/7	10/7	1	23/7

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

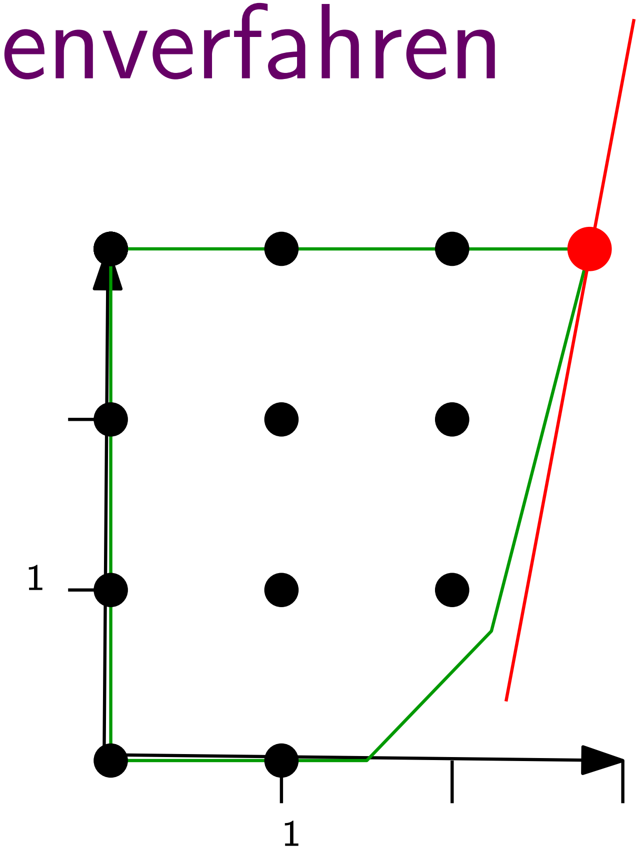
4	-1	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	14
0	1	0	1	0	3
2	-2	0	0	1	3

Löse LP-Relaxation

0	0	-4/7	-1/7	0	-59/7
1	0	1/7	2/7	0	20/7
0	1	0	1	0	3
0	0	-2/7	10/7	1	23/7

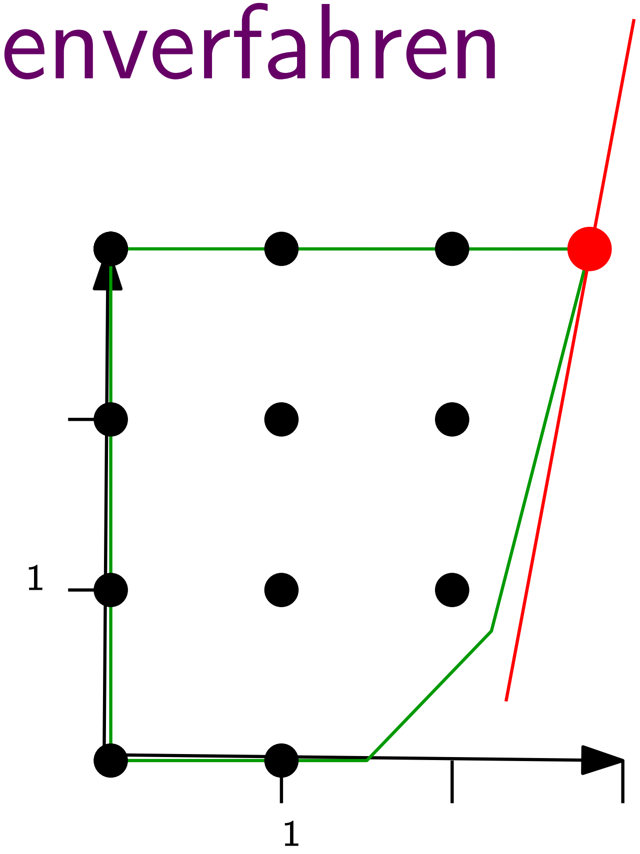
Optimallösung LP-Relaxation:

$x_1 = \frac{20}{7}, x_2 = 3, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = \frac{23}{7}$



Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	14
0	1	0	1	0	3
2	-2	0	0	1	3



Löse LP-Relaxation

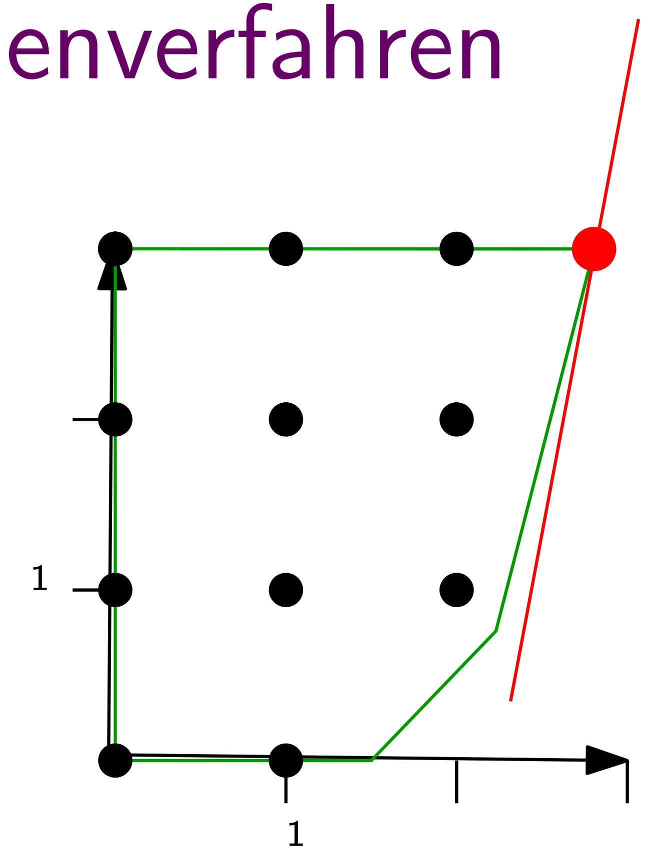
0	0	-4/7	-1/7	0	-59/7
1	0	1/7	2/7	0	20/7
0	1	0	1	0	3
0	0	-2/7	10/7	1	23/7

Optimallösung LP-Relaxation:
$x_1 = \frac{20}{7}, x_2 = 3, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = \frac{23}{7}$

Betrachten Gleichung: $x_1 + \frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 = \frac{20}{7}$

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	14
0	1	0	1	0	3
2	-2	0	0	1	3



Löse LP-Relaxation

0	0	-4/7	-1/7	0	-59/7
1	0	1/7	2/7	0	20/7
0	1	0	1	0	3
0	0	-2/7	10/7	1	23/7

Optimallösung LP-Relaxation:
$x_1 = \frac{20}{7}, x_2 = 3, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = \frac{23}{7}$

Betrachten Gleichung: $x_1 + \frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 = \frac{20}{7}$

$\rightarrow$ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 \geq \frac{6}{7}$

Gomory-Chvátal-Schnitt

4	-1	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	14
0	1	0	1	0	3
2	-2	0	0	1	3

Löse LP-Relaxation

0	0	-4/7	-1/7	0	-59/7
1	0	1/7	2/7	0	20/7
0	1	0	1	0	3
0	0	-2/7	10/7	1	23/7

Optimallösung LP-Relaxation:
$x_1 = \frac{20}{7}, x_2 = 3, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = \frac{23}{7}$

Betrachten Gleichung: $x_1 + \frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 = \frac{20}{7}$

$\rightarrow$ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 \geq \frac{6}{7}$

Wie kommen wir auf diesen Schnitt?

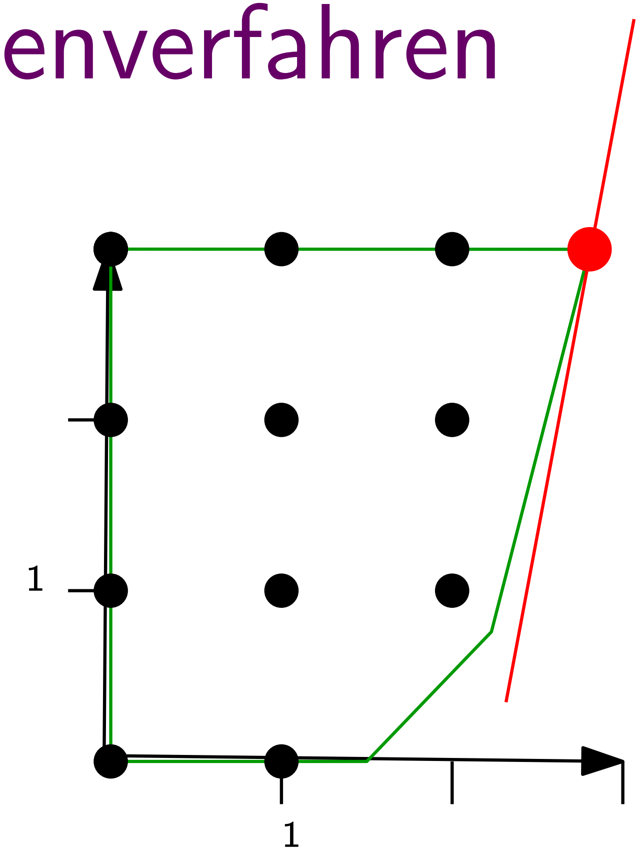
Jede zulässige Lösung der LP-Relaxation erfüllt $x_1 = \frac{20}{7} - \frac{1}{7}y_1 - \frac{2}{7}y_2$, und für die ganzzahligen Lösungen gilt (weil x_1 ganzzahlig) auch $\frac{20}{7} - \frac{1}{7}y_1 - \frac{2}{7}y_2 \in \mathbb{Z}$
An der Ganzzahligkeit ändert sich nichts, wenn wir auf diesen Term ganze Zahlen addieren. Mit Hilfe dieser Idee wollen wir jetzt eine Ungleichung erzeugen, die für x^* nicht gilt, für jedes ganzzahlige $x \in X$ aber schon.
Dazu nutzen wir, dass y_1^* und y_2^* 0 sind (weil nicht in der Basis), für ganzzahlige x aber nicht 0 sein können (da $x_1 = \frac{20}{7} - \frac{1}{7}y_1 - \frac{2}{7}y_2 \in \mathbb{Z}$).
Über den Term $(\frac{20}{7} - \lceil \frac{20}{7} \rceil) - \frac{1}{7}y_1 - \frac{2}{7}y_2 \in \mathbb{Z}$ wissen wir

1. dass er < 1 ist (weil ich von einer Zahl < 1 etwas Positives abziehe)
2. dass er für die Lösung der LP-Relaxation x^* positiv ist
3. dass er ganzzahlig ist, wenn x ganzzahlig ist
4. und somit dass er ≤ 0 (weil $\in \mathbb{Z}$) und < 1) ist wenn x ganzzahlig ist

Somit erfüllt $(\frac{20}{7} - \lceil \frac{20}{7} \rceil) - \frac{1}{7}y_1 - \frac{2}{7}y_2 \leq 0$ die Voraussetzungen an den gesuchten Schnitt

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	14
0	1	0	1	0	3
2	-2	0	0	1	3



Löse LP-Relaxation

0	0	-4/7	-1/7	0	-59/7
1	0	1/7	2/7	0	20/7
0	1	0	1	0	3
0	0	-2/7	10/7	1	23/7

Optimallösung LP-Relaxation:
$x_1 = \frac{20}{7}, x_2 = 3, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = \frac{23}{7}$

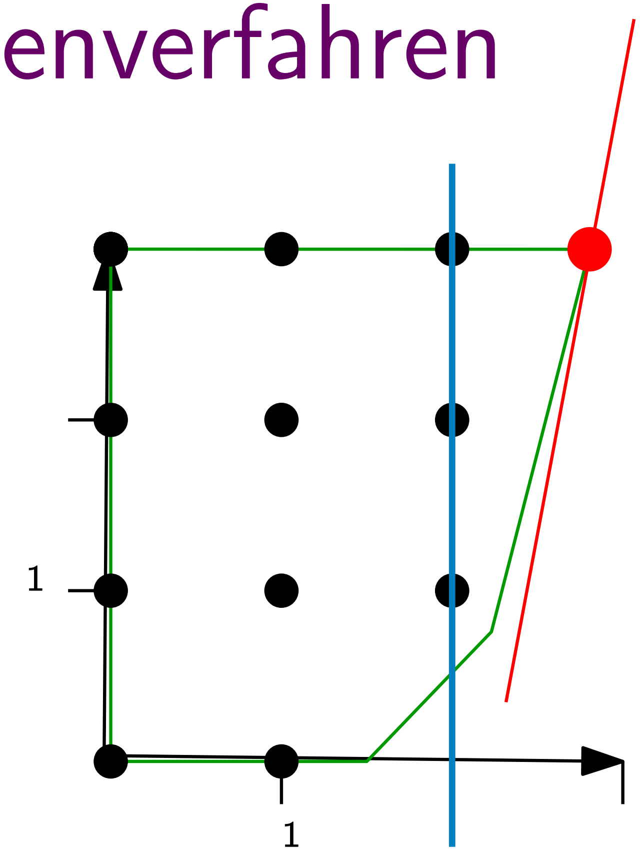
Betrachten Gleichung: $x_1 + \frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 = \frac{20}{7}$

$\rightarrow$ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 \geq \frac{6}{7}$

Ausgedrückt in x_1 und x_2:
$\frac{1}{7} \cdot (14 - 7x_1 + 2x_2) + \frac{2}{7}(3 - x_2) \geq \frac{6}{7}$

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	14
0	1	0	1	0	3
2	-2	0	0	1	3



Löse LP-Relaxation

0	0	-4/7	-1/7	0	-59/7
1	0	1/7	2/7	0	20/7
0	1	0	1	0	3
0	0	-2/7	10/7	1	23/7

Optimallösung LP-Relaxation:
$x_1 = \frac{20}{7}, x_2 = 3, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = \frac{23}{7}$

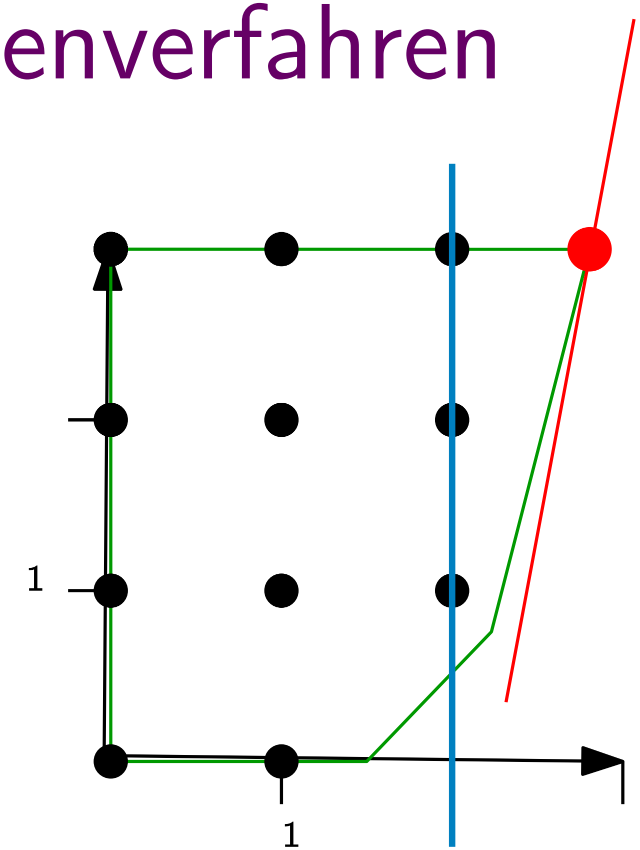
Betrachten Gleichung: $x_1 + \frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 = \frac{20}{7}$

$\to$ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 \geq \frac{6}{7}$

Ausgedrückt in x_1 und x_2:
$\frac{1}{7} \cdot (14 - 7x_1 + 2x_2) + \frac{2}{7}(3 - x_2) \geq \frac{6}{7}$
$\Rightarrow \boxed{x_1 \leq 2}$

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	14
0	1	0	1	0	3
2	-2	0	0	1	3



Löse LP-Relaxation

0	0	-4/7	-1/7	0	-59/7
1	0	1/7	2/7	0	20/7
0	1	0	1	0	3
0	0	-2/7	10/7	1	23/7

Optimallösung LP-Relaxation:
$x_1 = \frac{20}{7}, x_2 = 3, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = \frac{23}{7}$

Betrachten Gleichung: $x_1 + \frac{1}{7} y_1 + \frac{2}{7} y_2 = \frac{20}{7}$

$\rightarrow$ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\frac{1}{7} y_1 + \frac{2}{7} y_2 \geq \frac{6}{7}$

Ausgedrückt in x_1 und x_2:
$\frac{1}{7} \cdot (14 - 7x_1 + 2x_2) + \frac{2}{7}(3 - x_2) \geq \frac{6}{7}$
$\Rightarrow \boxed{x_1 \leq 2}$

Füge Schnitt zu den Nebenbedingungen hinzu...

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	14
0	1	0	1	0	3
2	-2	0	0	1	3

Löse LP Relaxation

0	0	-4/7	-1/7	0	-59/7
1	0	1/7	2/7	0	20/7
0	1	0	1	0	3
0	0	-2/7	10/7	1	23/7

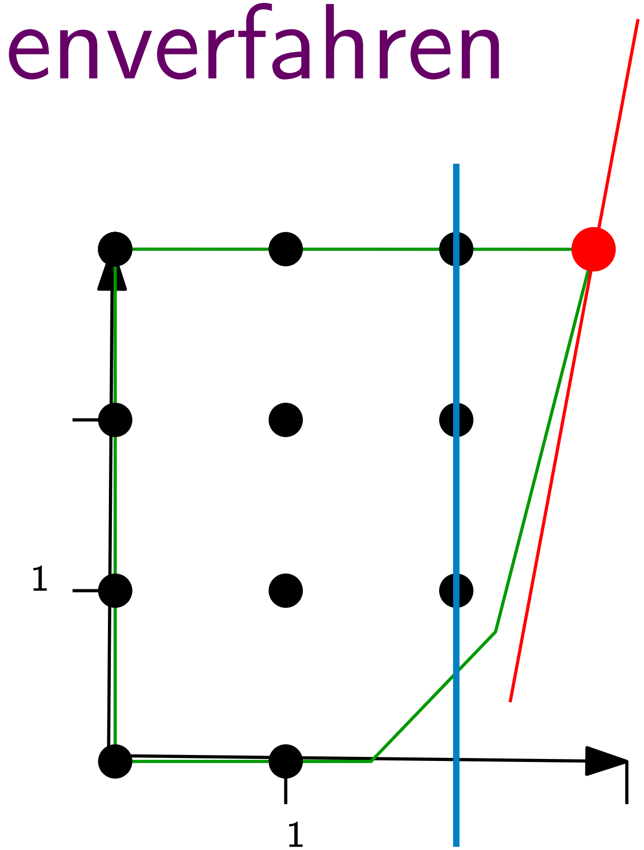
Optimallösung LP-Relaxation:
$x_1 = \frac{20}{7}, x_2 = 3, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = \frac{23}{7}$

Betrachten Gleichung: $x_1 + \frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 = \frac{20}{7}$

$\rightarrow$ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\boxed{\frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 \geq \frac{6}{7}}$

Ausgedrückt in x_1 und x_2:
$\frac{1}{7} \cdot (14 - 7x_1 + 2x_2) + \frac{2}{7}(3 - x_2) \geq \frac{6}{7}$
$\Rightarrow \boxed{x_1 \leq 2}$

Füge Schnitt zu den Nebenbedingungen hinzu...



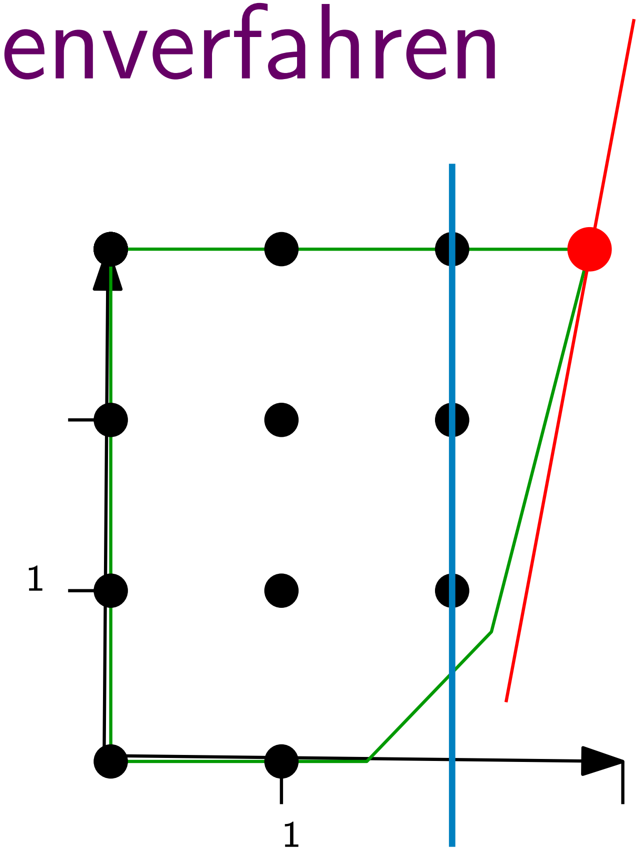
Welche Formulierung des Schnitts füge ich jetzt zu welcher Formulierung der Nebenbedingungen hinzu?

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	14
0	1	0	1	0	3
2	-2	0	0	1	3

Löse LP Relaxation

0	0	-4/7	-1/7	0	-59/7
1	0	1/7	2/7	0	20/7
0	1	0	1	0	3
0	0	-2/7	10/7	1	23/7



Optimallösung LP-Relaxation:
$x_1 = \frac{20}{7}, x_2 = 3, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = \frac{23}{7}$

Betrachten Gleichung: $x_1 + \frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 = \frac{20}{7}$

$\rightarrow$ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\boxed{\frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 \geq \frac{6}{7}}$

Ausgedrückt in x_1 und x_2:
$\frac{1}{7} \cdot (14 - 7x_1 + 2x_2) + \frac{2}{7}(3 - x_2) \geq \frac{6}{7}$
$\Rightarrow \boxed{x_1 \leq 2}$

Füge Schnitt zu den Nebenbedingungen hinzu. . .

Welche Formulierung des $\boxed{\text{Schnitts}}$ füge ich jetzt zu welcher Formulierung der $\boxed{\text{Nebenbedingungen}}$ hinzu?

Antwort: Alle Kombinationen sind 'gleich richtig', manche sind effizienter als andere.

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	14
0	1	0	1	0	3
2	-2	0	0	1	3

Löse LP Relaxation

0	0	-4/7	-1/7	0	-59/7
1	0	1/7	2/7	0	20/7
0	1	0	1	0	3
0	0	-2/7	10/7	1	23/7

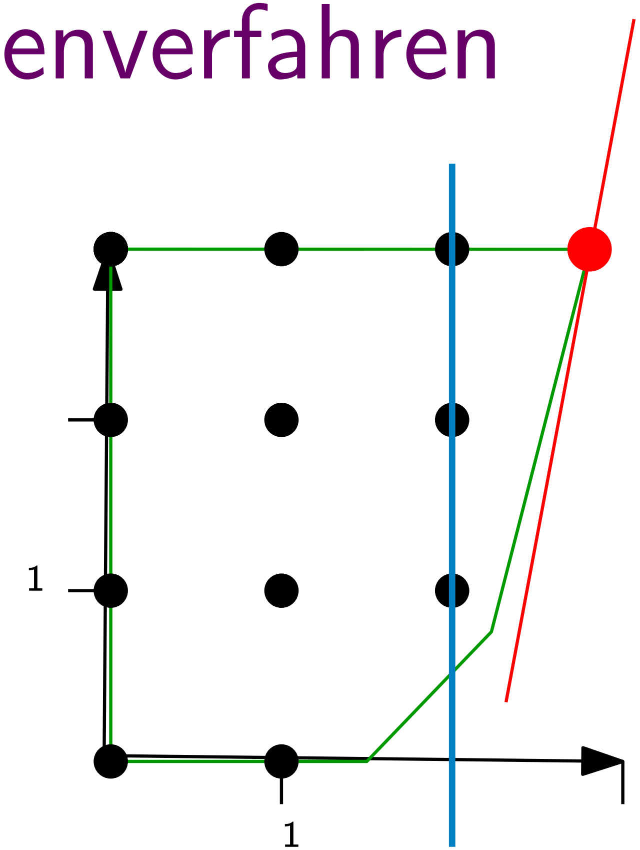
Optimallösung LP-Relaxation:
$x_1 = \frac{20}{7}, x_2 = 3, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = \frac{23}{7}$

Betrachten Gleichung: $x_1 + \frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 = \frac{20}{7}$

$\rightarrow$ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\boxed{\frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 \geq \frac{6}{7}}$

Ausgedrückt in x_1 und x_2:
$\frac{1}{7} \cdot (14 - 7x_1 + 2x_2) + \frac{2}{7}(3 - x_2) \geq \frac{6}{7}$
$\Rightarrow \boxed{x_1 \leq 2}$

Füge Schnitt zu den Nebenbedingungen hinzu...

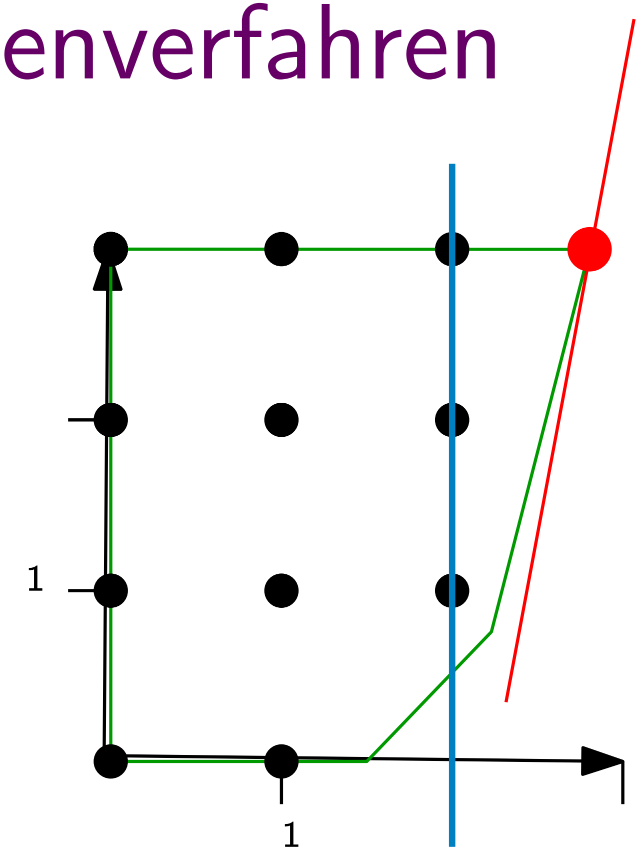


Welche Formulierung des Schnitts füge ich jetzt zu welcher Formulierung der Nebenbedingungen hinzu?

Antwort: Alle Kombinationen sind 'gleich richtig', manche sind effizienter als andere.

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	14
0	1	0	1	0	3
2	-2	0	0	1	3



Löse LP-Relaxation

0	0	-4/7	-1/7	0	-59/7
1	0	1/7	2/7	0	20/7
0	1	0	1	0	3
0	0	-2/7	10/7	1	23/7

Optimallösung LP-Relaxation:
$x_1 = \frac{20}{7}, x_2 = 3, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = \frac{23}{7}$

Betrachten Gleichung: $x_1 + \frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 = \frac{20}{7}$

$\rightarrow$ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 \geq \frac{6}{7}$

Ausgedrückt in x_1 und x_2:
$\frac{1}{7} \cdot (14 - 7x_1 + 2x_2) + \frac{2}{7}(3 - x_2) \geq \frac{6}{7}$
$\Rightarrow \boxed{x_1 \leq 2}$

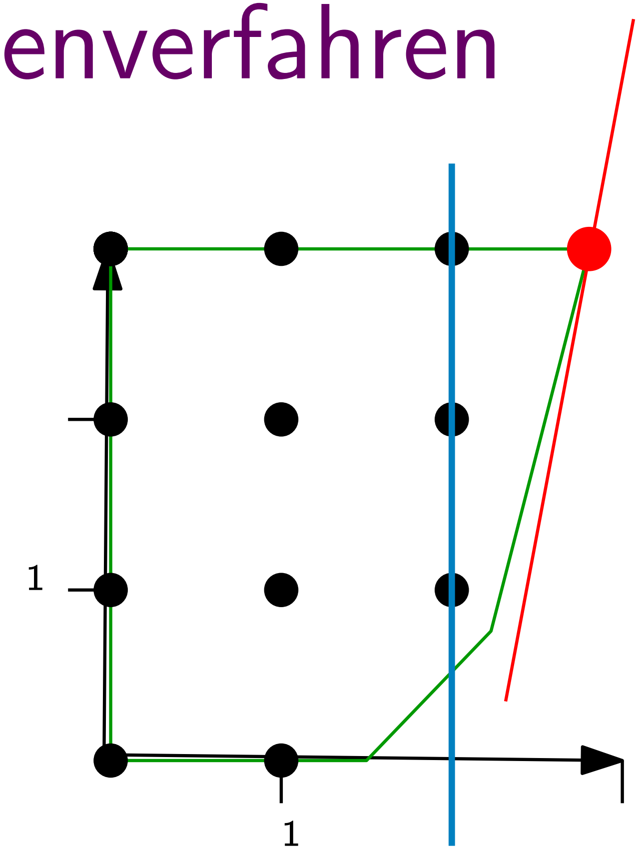
4	-1	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	3
1	0	0	0	0	1	2

Füge Schnitt zu den Nebenbedingungen hinzu. . .

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	3
1	0	0	0	0	1	2

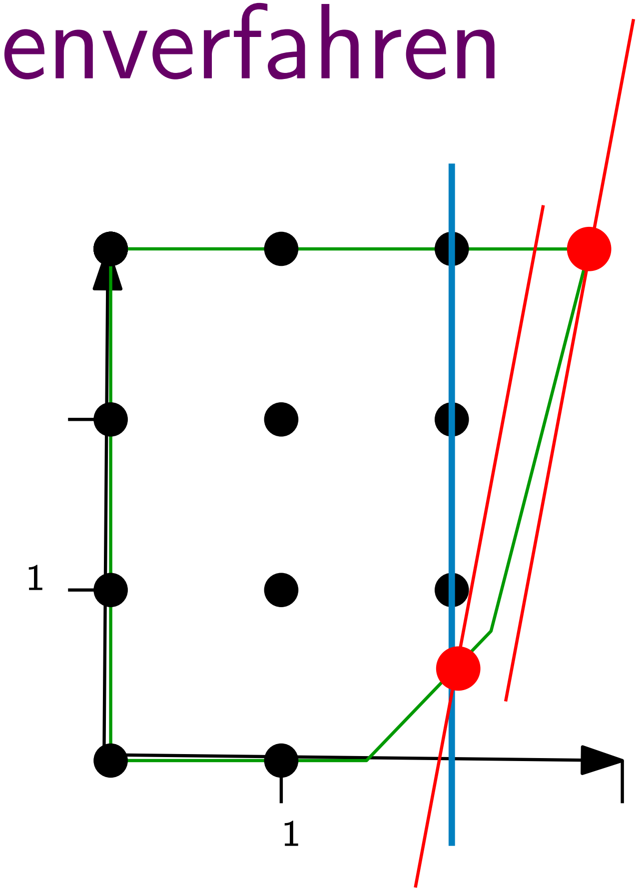
Löse LP-Relaxation



Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	3
1	0	0	0	0	1	2

Löse LP-Relaxation

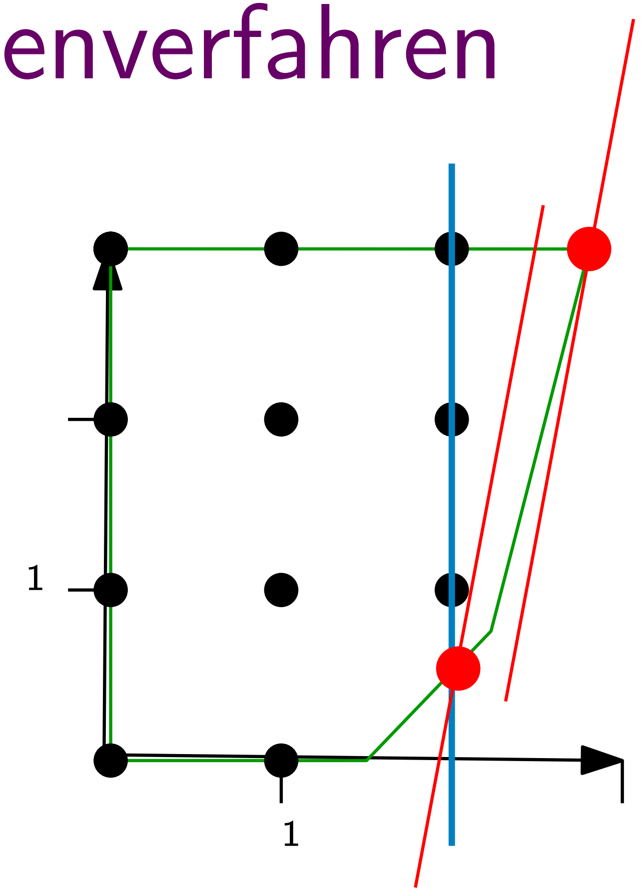


Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	3
1	0	0	0	0	1	2

Löse LP-Relaxation

0	0	0	0	-1/5	-3	-15/2
1	0	0	0	0	1	2
0	1	0	0	-1/2	1	1/2
0	0	1	0	-1	-1	1
0	0	0	1	1/2	6	5/2

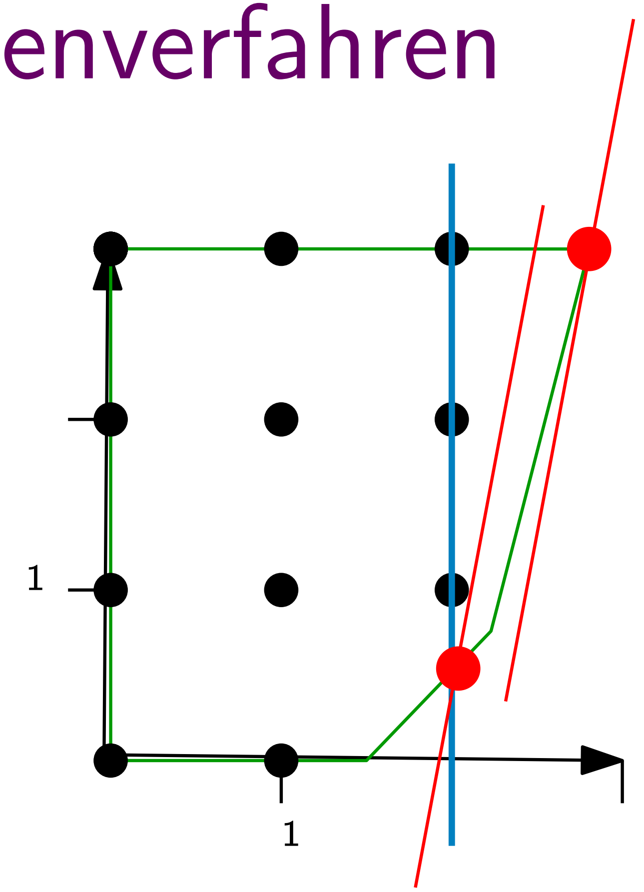


Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	3
1	0	0	0	0	1	2

Löse LP-Relaxation

0	0	0	0	-1/5	-3	-15/2
1	0	0	0	0	1	2
0	1	0	0	-1/2	1	1/2
0	0	1	0	-1	-1	1
0	0	0	1	1/2	6	5/2



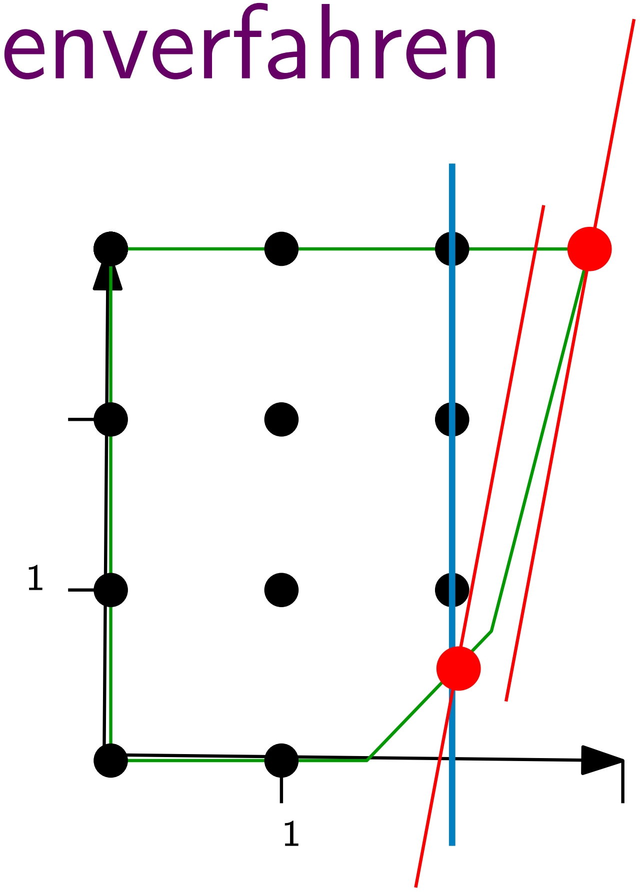
Betrachten Gleichung: $x_2 - \frac{1}{2} y_3 + \tilde{y}_1 = \frac{1}{2}$

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	3
1	0	0	0	0	1	2

Löse LP-Relaxation

0	0	0	0	-1/5	-3	-15/2
1	0	0	0	0	1	2
0	1	0	0	-1/2	1	1/2
0	0	1	0	-1	-1	1
0	0	0	1	1/2	6	5/2

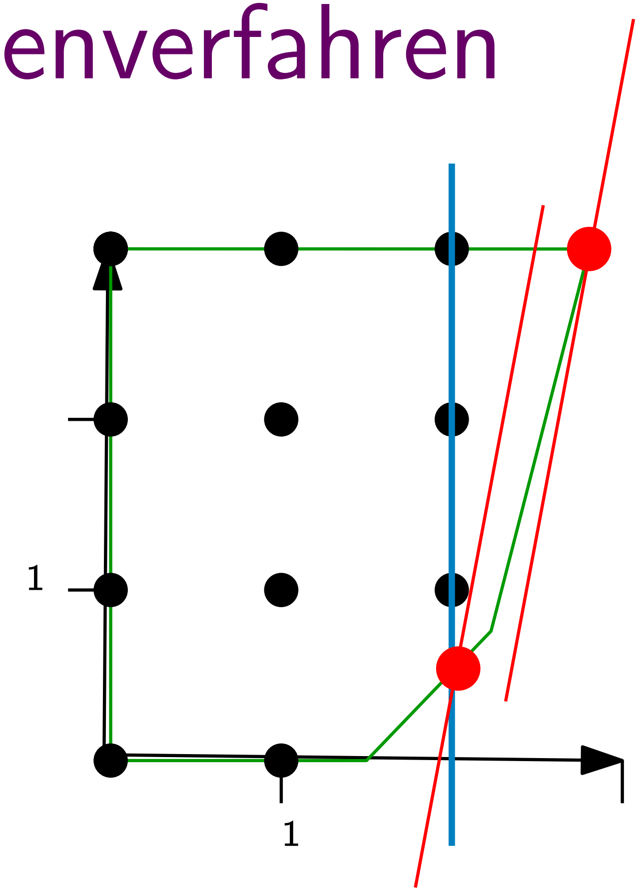


Betrachten Gleichung: $x_2 - \frac{1}{2}y_3 + \tilde{y}_1 = \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\frac{1}{2}y_3 \geq \frac{1}{2}$

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	3
1	0	0	0	0	1	2



Löse LP-Relaxation

0	0	0	0	-1/5	-3	-15/2
1	0	0	0	0	1	2
0	1	0	0	-1/2	1	1/2
0	0	1	0	-1	-1	1
0	0	0	1	1/2	6	5/2

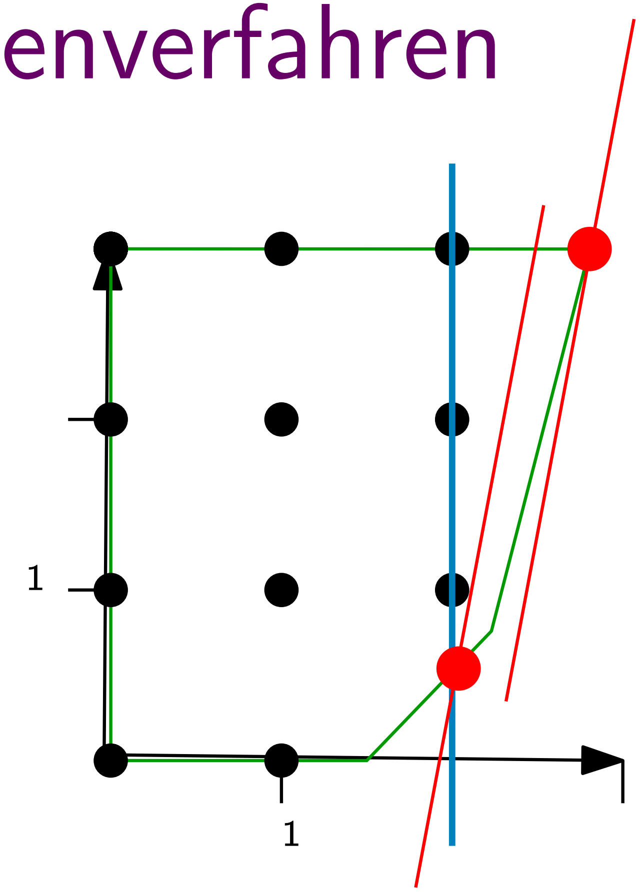
Betrachten Gleichung: $x_2 - \frac{1}{2}y_3 + \tilde{y}_1 = \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\frac{1}{2}y_3 \geq \frac{1}{2}$

Ausgedrückt in x_1 und x_2:
$\frac{1}{2} \cdot (3 - 2x_1 + 2x_2) \geq \frac{1}{2}$

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	3
1	0	0	0	0	1	2



Löse LP-Relaxation

0	0	0	0	-1/5	-3	-15/2
1	0	0	0	0	1	2
0	1	0	0	-1/2	1	1/2
0	0	1	0	-1	-1	1
0	0	0	1	1/2	6	5/2

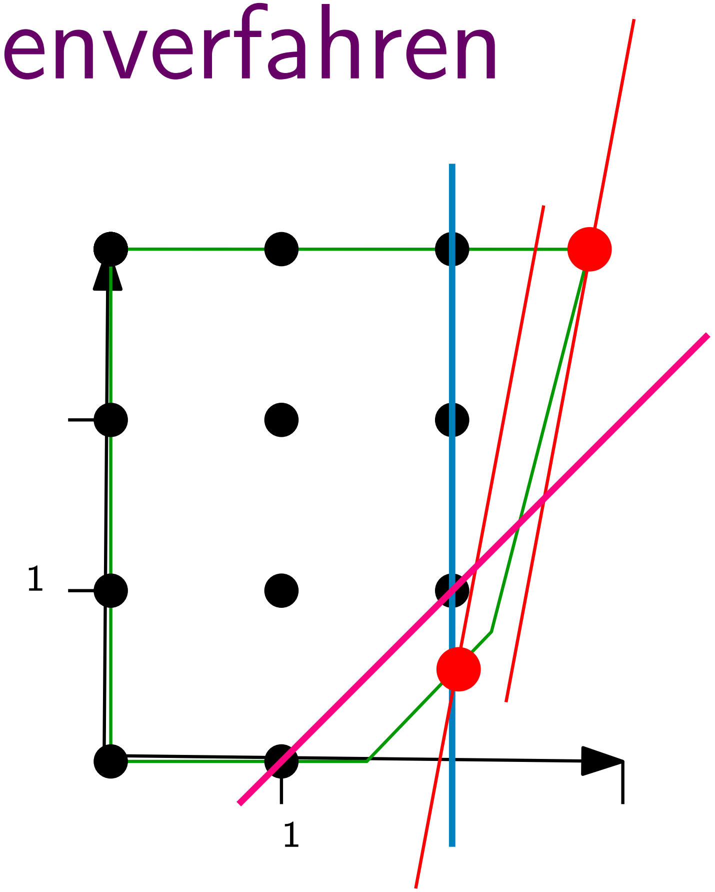
Betrachten Gleichung: $x_2 - \frac{1}{2} y_3 + \tilde{y}_1 = \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\frac{1}{2} y_3 \geq \frac{1}{2}$

Ausgedrückt in x_1 und x_2:
$\frac{1}{2} \cdot (3 - 2x_1 + 2x_2) \geq \frac{1}{2}$
$\Rightarrow x_1 - x_2 \leq 1$

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	3
1	0	0	0	0	1	2



Löse LP-Relaxation

0	0	0	0	-1/5	-3	-15/2
1	0	0	0	0	1	2
0	1	0	0	-1/2	1	1/2
0	0	1	0	-1	-1	1
0	0	0	1	1/2	6	5/2

Betrachten Gleichung: $x_2 - \frac{1}{2}y_3 + \tilde{y}_1 = \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\frac{1}{2}y_3 \geq \frac{1}{2}$

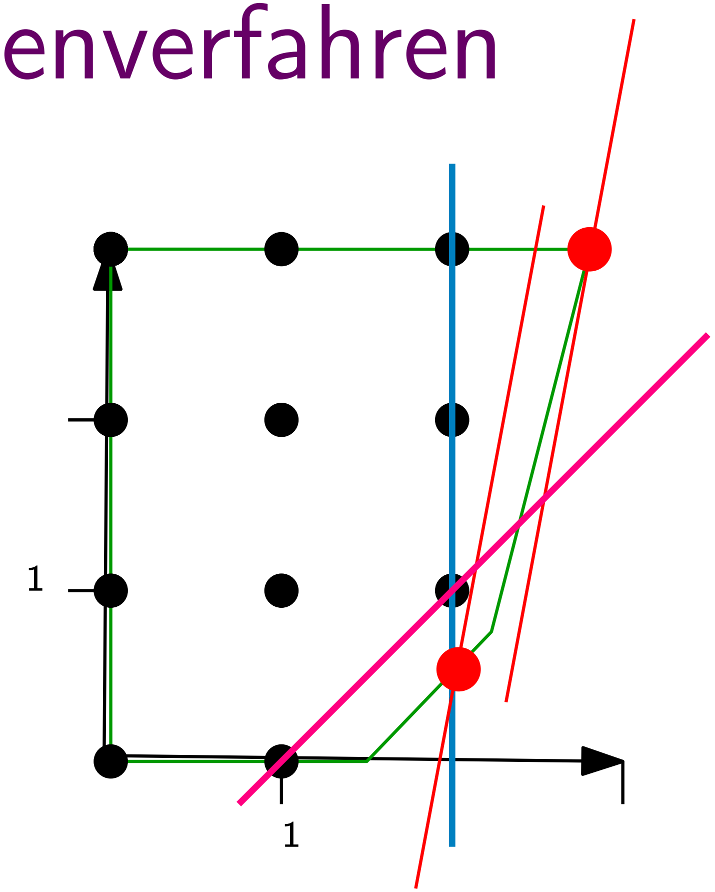
Ausgedrückt in x_1 und x_2:
$\frac{1}{2} \cdot (3 - 2x_1 + 2x_2) \geq \frac{1}{2}$
$\Rightarrow x_1 - x_2 \leq 1$

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	3
1	0	0	0	0	1	2

Löse LP-Relaxation

0	0	0	0	-1/5	-3	-15/2
1	0	0	0	0	1	2
0	1	0	0	-1/2	1	1/2
0	0	1	0	-1	-1	1
0	0	0	1	1/2	6	5/2



Betrachten Gleichung: $x_2 - \frac{1}{2} y_3 + \tilde{y}_1 = \frac{1}{2}$

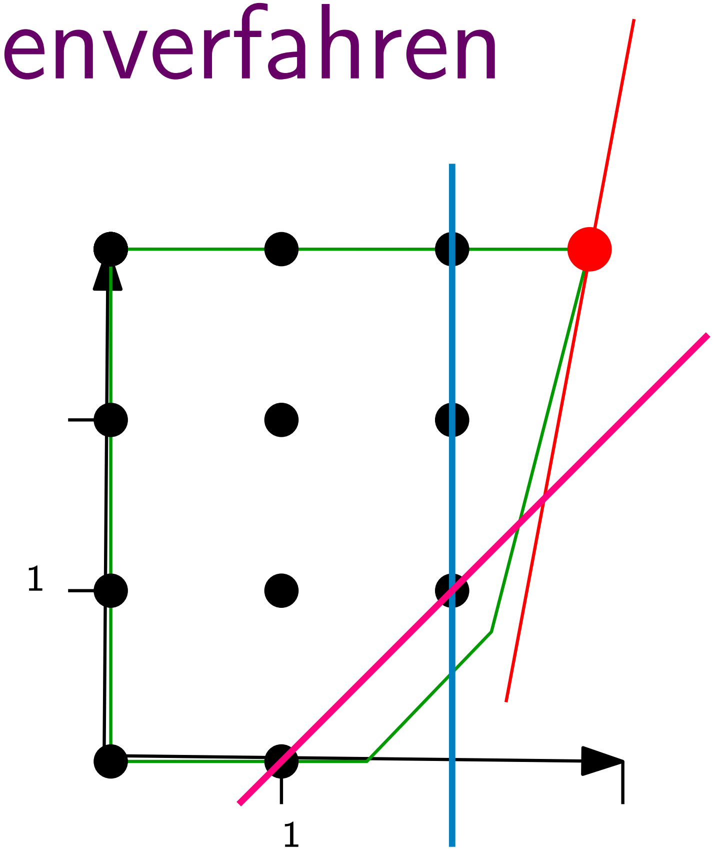
$\rightarrow$ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\frac{1}{2} y_3 \geq \frac{1}{2}$

Ausgedrückt in x_1 und x_2:
$\frac{1}{2} \cdot (3 - 2x_1 + 2x_2) \geq \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \boxed{x_1 - x_2 \leq 1}$

4	-1	0	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	0	3
1	0	0	0	0	1	0	2
1	-1	0	0	0	0	1	1

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

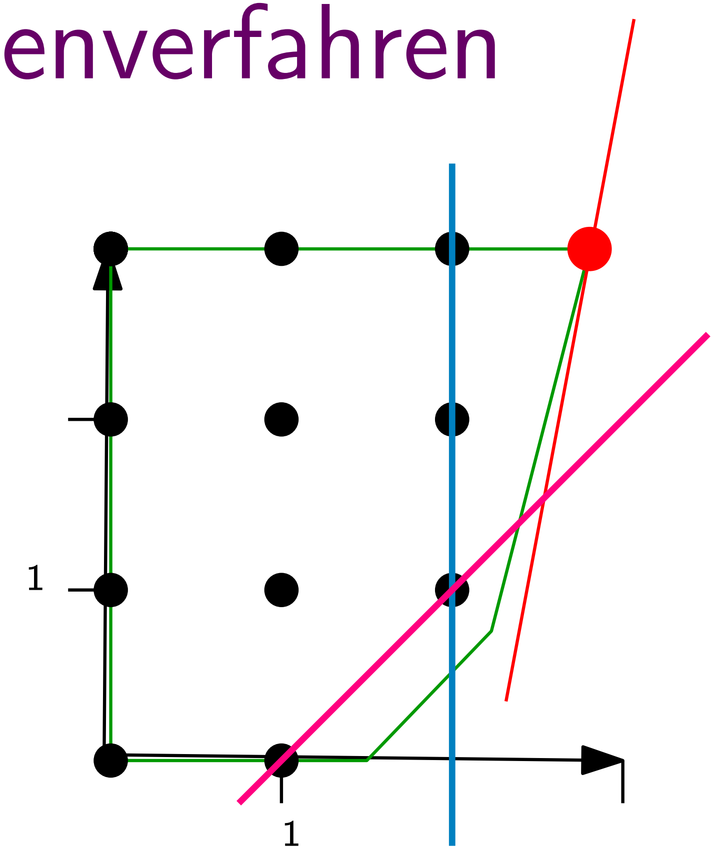
4	-1	0	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	0	3
1	0	0	0	0	1	0	2
1	-1	0	0	0	0	1	1



Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	0	3
1	0	0	0	0	1	0	2
1	-1	0	0	0	0	1	1

Löse LP-Relaxation

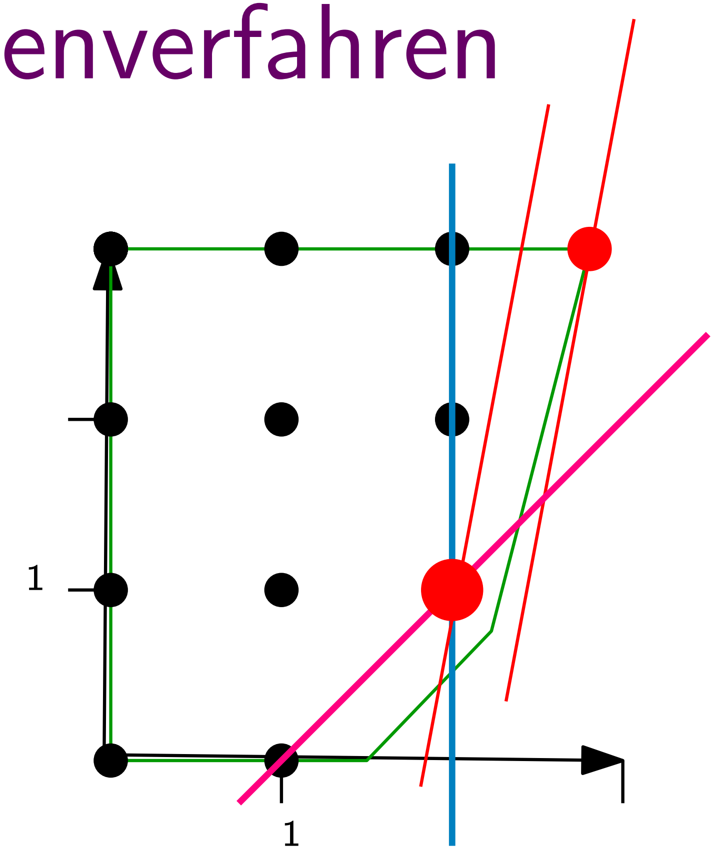


Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	0	3
1	0	0	0	0	1	0	2
1	-1	0	0	0	0	1	1

Löse LP-Relaxation

0	0	0	0	0	-3	-1	-7
1	0	0	0	0	1	0	2
0	1	0	0	0	1	-1	1
0	0	1	0	0	-5	-2	2
0	0	0	1	0	6	1	2
0	0	0	0	1	0	-1	1



Optimallösung LP-Relaxation:

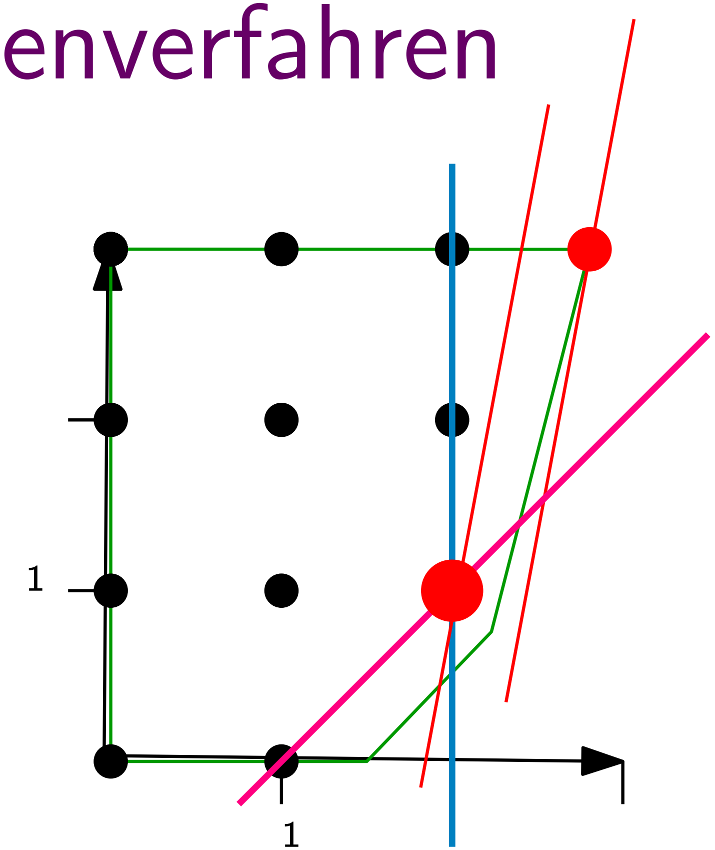
$x_1 = 2, x_2 = 1, y_1 = 2, y_2 = 2, y_3 = 1$

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	0	3
1	0	0	0	0	1	0	2
1	-1	0	0	0	0	1	1

Löse LP-Relaxation

0	0	0	0	0	-3	-1	-7
1	0	0	0	0	1	0	2
0	1	0	0	0	1	-1	1
0	0	1	0	0	-5	-2	2
0	0	0	1	0	6	1	2
0	0	0	0	1	0	-1	1



Optimallösung LP-Relaxation:
$x_1 = 2, x_2 = 1, y_1 = 2, y_2 = 2, y_3 = 1$

Ist ganzzahlig - also optimal für ILP!

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

Require: ganzzahliges lineares Programm ILP
Ensure: Optimallösung für ILP
  Setze $P := ILP$
  Setze stop $= 0$
  while stop $= 0$ **do**
      Löse die LP-Relaxation von P, sei x' die gefundene Optimallösung
    if x' ganzzahlig **then**
      Setze $x^* := x'$, stop$=1$
    end if
    Wähle fraktionale Basisvariable aus x' und erstelle zugehörigen
    Gomory-Chvátal-Cut C.
    Füge C zu P hinzu.
  end while

Anzahl der Iterationen ist endlich - wenn Schnitte 'clever' gewählt werden.

Stichworte heute

Mathematische Programmierung:
Formulierung, *bessere/stärkere* Formulierung, konvexe Hülle, TU Matrizen, Schnitte

Lösungsmethoden der mathematischen Programmierung
Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren