

Graphen und diskrete Optimierung

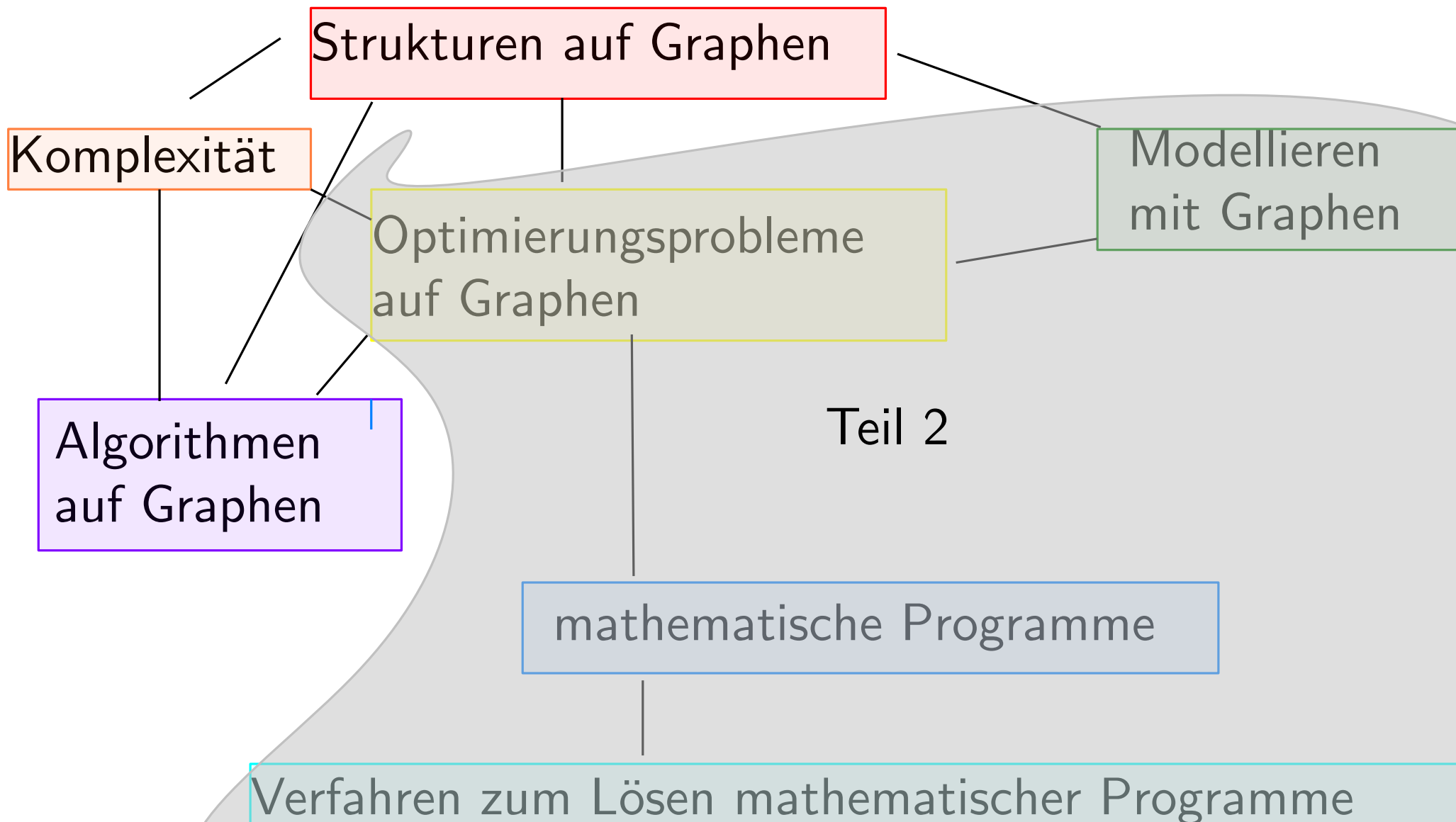
im Bachelorstudiengang 'Informatik und Nachhaltigkeit'

Ganzzahlige lineare Programmierung 2: Formulierungen und Schnittebenen

Marie Schmidt

12.07.2023

Worum soll er hier gehen?



Vorlesungsübersicht

- Einführung: Modellieren auf Graphen ✓
- Teil 1: Graphen und Algorithmen auf Graphen ✓
- Teil 2: Mathematische Programmierung
 - Einführung in die lineare und ganzzahlig lineare Programmierung ✓
 - lineare Programmierung ✓
 - ganzzahlige Programmierung
 - * Komplexität der ganzzahligen Programmierung
 - * Das Branch-and-Bound-Verfahren
 - * etwas Polyedertheorie: Formulierungen, konvexe Hülle, TU Matrizen
 - * Schnitte und Schnittebenenverfahren

19.7.: kein neuer Stoff, Zeit für Ihre Fragen oder (auf Wunsch)
Wiederholung von einzelnen Inhalten

Gibt es dafür schon Vorschläge?

Ganzzahlige Programme

Wir nennen ein mathematisches Programm **ganzzahlig linear**, wenn

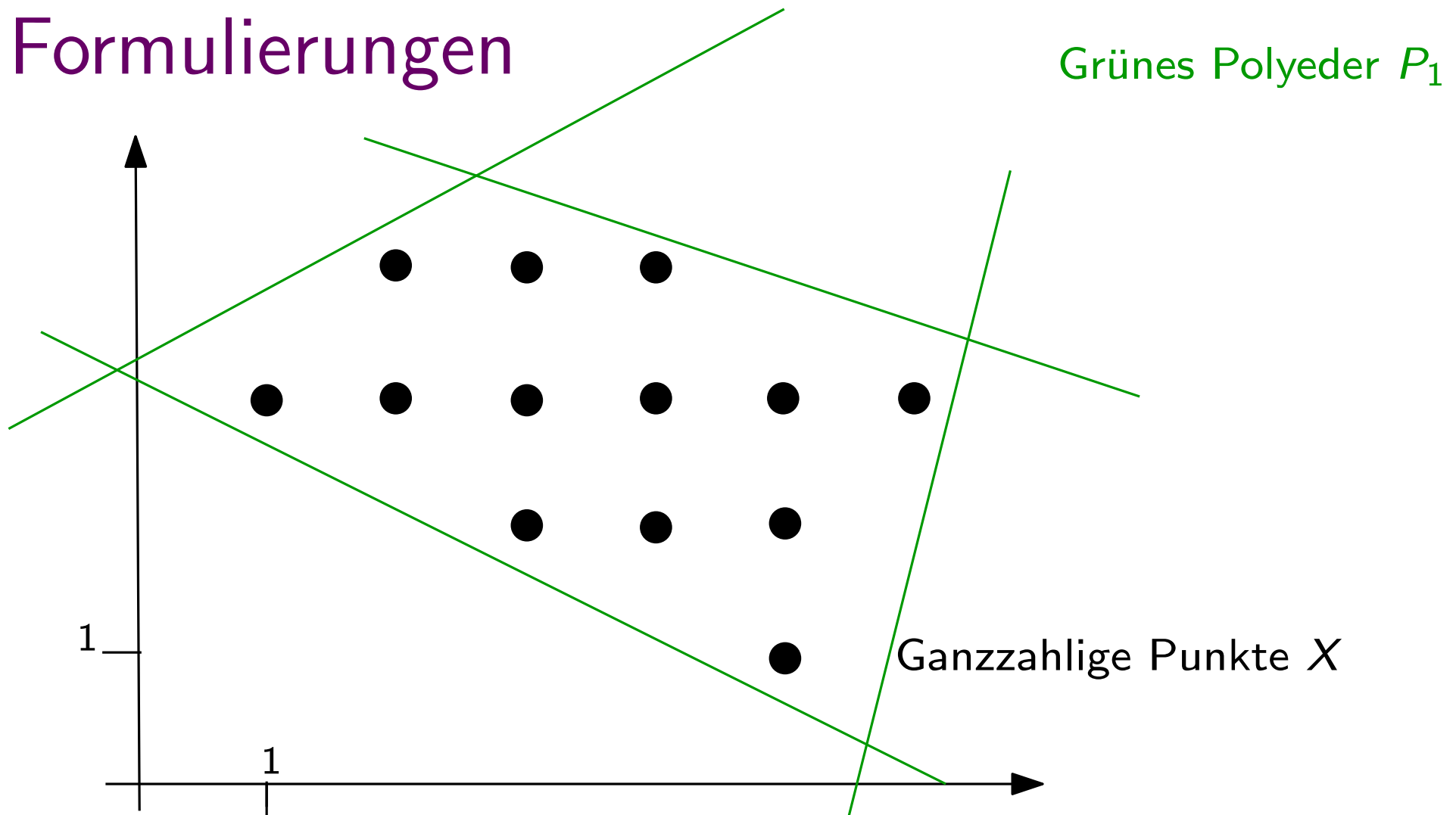
- die Zielfunktion (**affin**) **linear** in den Variablen ist
- der zulässige Bereich ein **Polyeder geschnitten mit \mathbb{Z}^n** ist, d.h. wir haben lineare Nebenbedingungen (Gleichungen und oder Ungleichungen) und eine Ganzzahligkeitsbedingungen ($x \in \mathbb{Z}^n$)

Das ganzzahlig lineare Programm schreiben wir dann normalerweise so auf:

$$\begin{array}{rcl}
 \max & 3x_1 + 5x_2 & \\
 \text{so dass} & x_1 + 2x_2 & \leq 170 \\
 & x_1 + x_2 & \leq 150 \\
 & 3x_2 & \leq 180 \\
 & x_1, x_2 & \geq 0 \\
 & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z}
 \end{array}$$

Englisch: ganzzahliges lineares Programm = integer linear program (**ILP**)

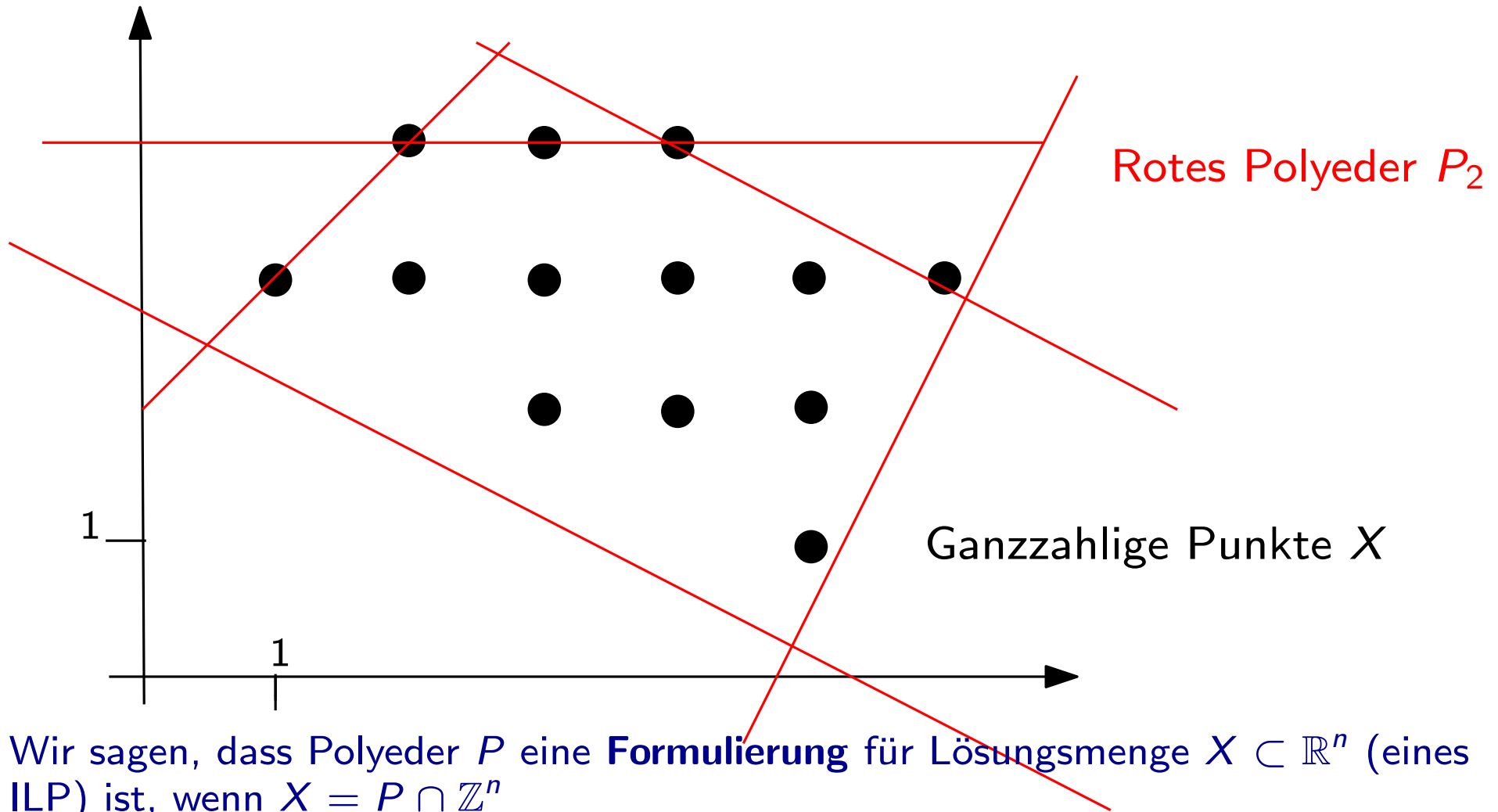
Formulierungen



Wir sagen, dass Polyeder P eine **Formulierung** für Lösungsmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ (eines ILP) ist, wenn $X = P \cap \mathbb{Z}^n$

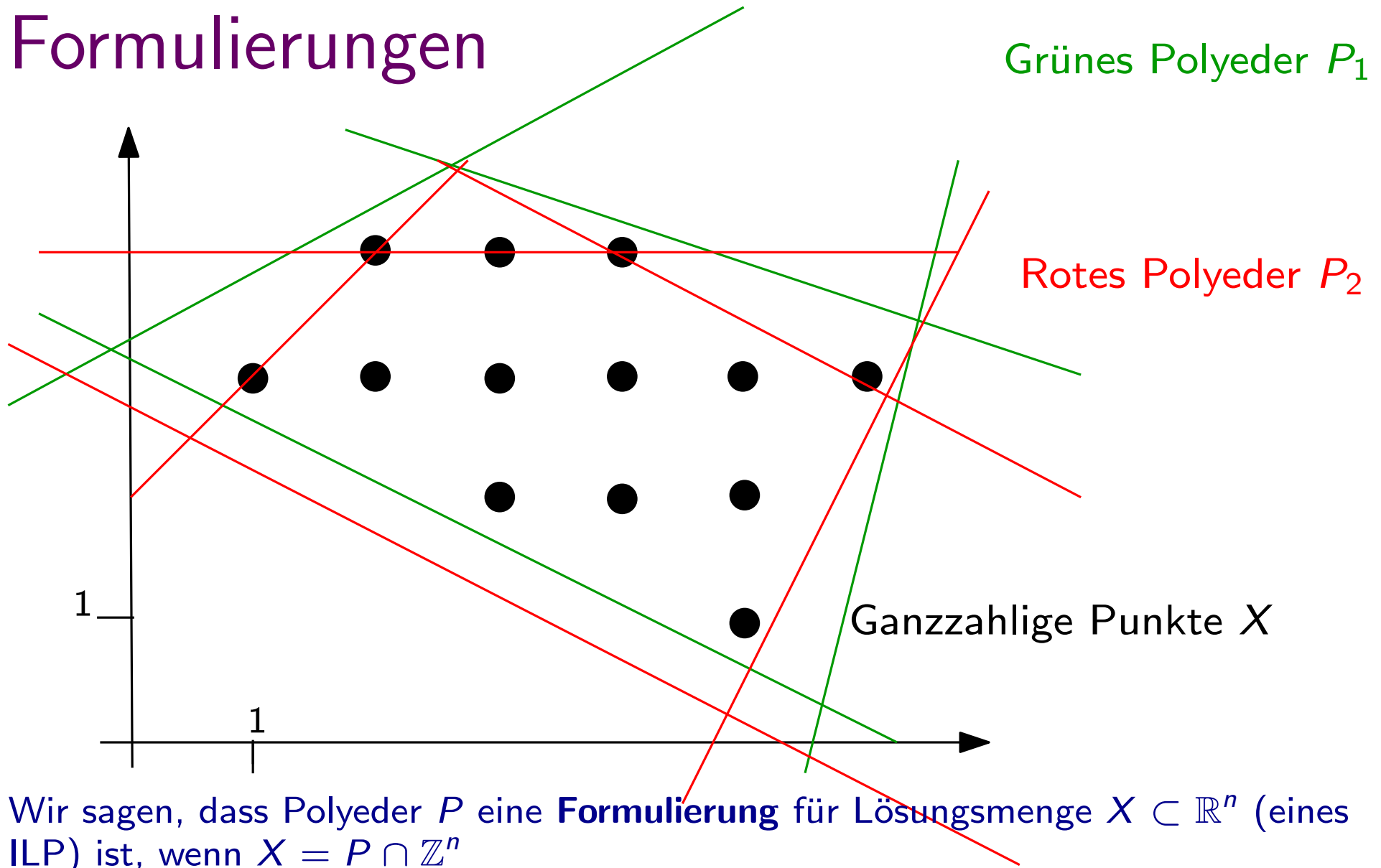
Das grüne Polyeder P_1 ist eine Formulierung für die durch die schwarzen Punkte gegebene Lösungsmenge X .

Formulierungen



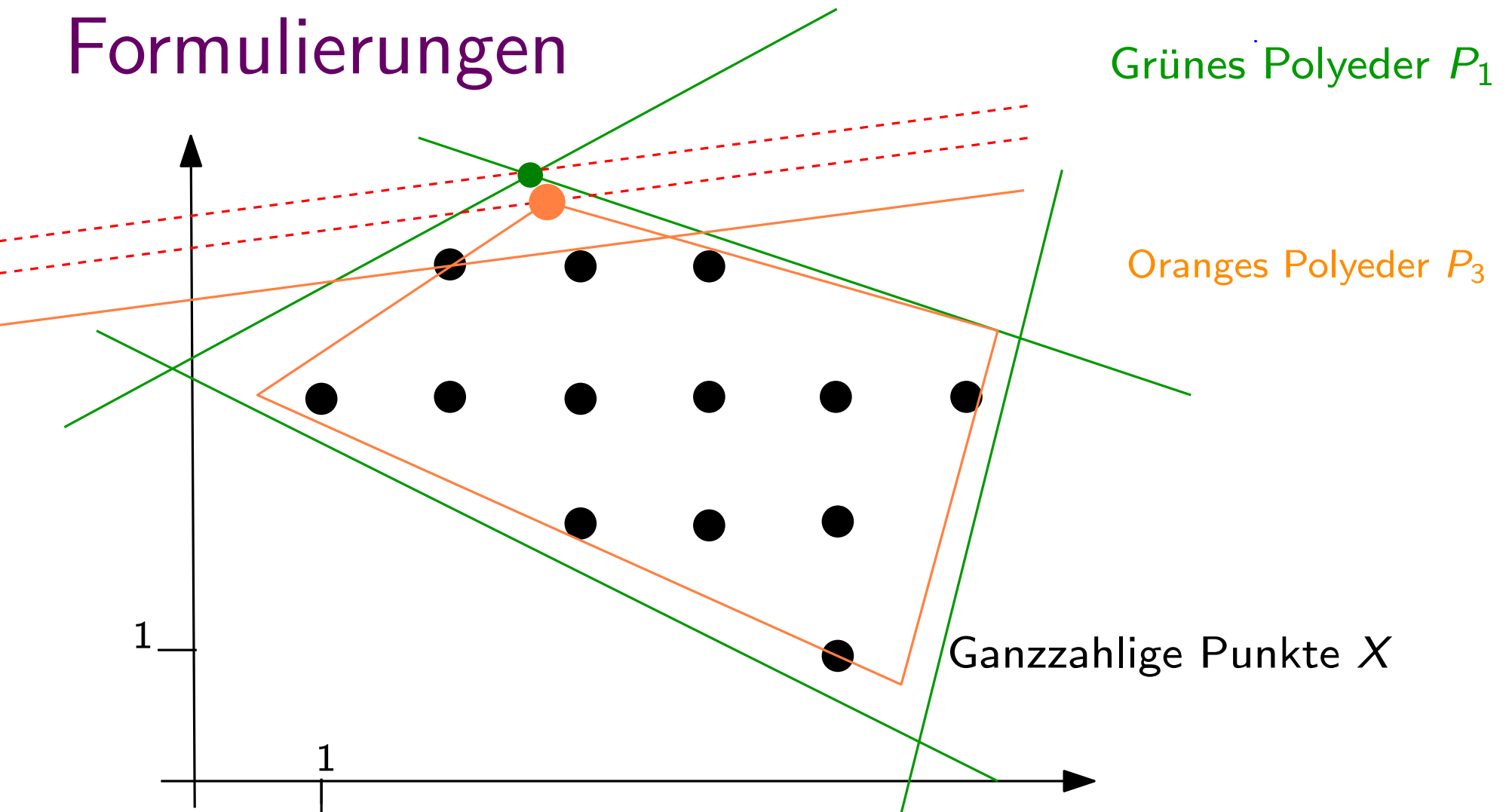
P_2 ist auch eine Formulierung für die durch die Punkte gegebene Lösungsmenge X .

Formulierungen



Ist eine der Formulierungen *besser*?

Formulierungen

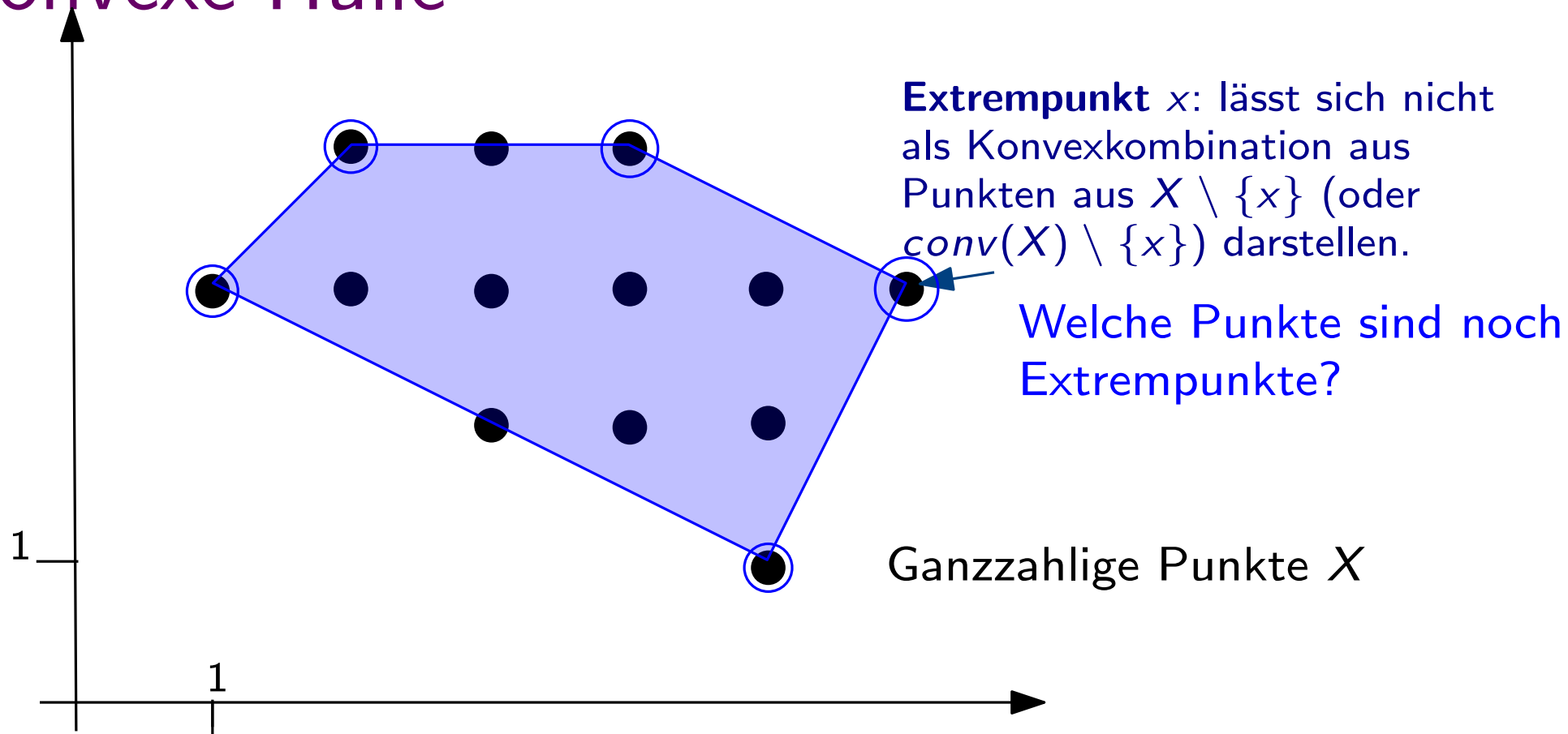


Wir sagen, dass Polyeder P eine **Formulierung** für Lösungsmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ (eines ILP) ist, wenn $X = P \cap \mathbb{Z}^n$

Formulierung P ist **besser** (oder: **stärker**) als Formulierung P' , wenn $P \subsetneq P'$.

Ist eine Formulierung F besser als eine Formulierung F' , dann ist der optimale Zielfunktionswert der LP-Relaxation von F dichter (besser gesagt: mindestens genauso dicht) am Zielfunktionswert der Optimallösung des ursprünglichen Problems als der optimale Zielfunktionswert der LP-Relaxation von F' .

Konvexe Hülle

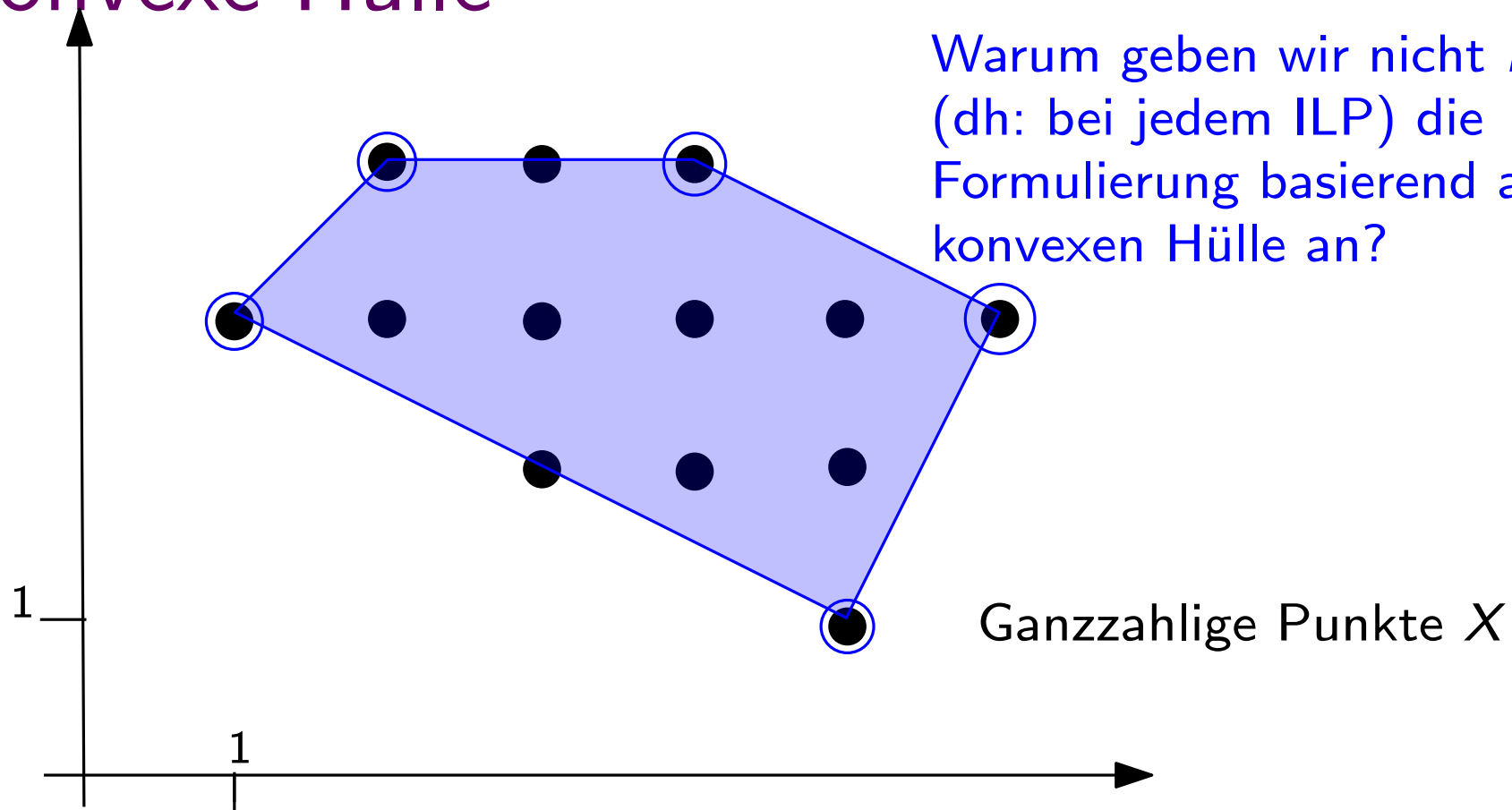


Seien x_1, \dots, x_n in \mathbb{R}^n . Dann nennen wir $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \in [0, 1]$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ eine **Konvexkombination** von x_1, \dots, x_n .

Die Menge $\text{conv}(\{x_1, \dots, x_n\}) := \{x : x \text{ ist Konvexkombination von } x_1, \dots, x_n\}$ heißt **konvexe Hülle** von X .

Die konvexe Hülle der zulässigen Punkte X , $\text{conv}(X)$ ist die **bestmögliche/stärkste** Formulierung für X .

Konvexe Hülle



Seien x_1, \dots, x_n in \mathbb{R}^n . Dann nennen wir $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \in [0, 1]$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ eine **Konvexkombination** von x_1, \dots, x_n .

Die Menge $\text{conv}(\{x_1, \dots, x_n\}) := \{x : x \text{ ist Konvexkombination von } x_1, \dots, x_n\}$ heißt **konvexe Hülle** von X .

Die konvexe Hülle der zulässigen Punkte X , $\text{conv}(X)$ ist die **bestmögliche/stärkste** Formulierung für X .

Für diese Formulierung sind Optimallösungen von ILP und seiner LP-Relaxation identisch. Basislösungen des ILP sind ganzzahlig.

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Warum ist das relevant?

Was hat das mit Polyederformulierungen zu tun?

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular (TU)**, wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Erinnerung: die Inverse einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$ kann man

mit der Cramerschen Regel berechnen als

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{r1} & \tilde{a}_{r2} & \dots & \tilde{a}_{rr} \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$\tilde{a}_{ij} := \det A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1r} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rj-1} & a_{rj+1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}.$$

Konsequenz für total unimodulare Matrizen:

Die *Inversen* von quadratischen Untermatrizen von total unimodularen Matrizen haben nur Einträge $\{-1, 0, 1\}$.

Total unimodulare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** (TU), wenn für jede ihrer quadratischen Untermatrizen A' der Dimension $1 \leq r \leq \min(n, m)$ $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$ ist.

Die *Inversen* von quadratischen Untermatrizen von total unimodularen Matrizen haben nur Einträge $\{-1, 0, 1\}$.

Ganzzahligkeitssatz von Hoffmann und Kruskal

Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Dann gilt:

A total unimodular und b ganzzahlig

\Leftrightarrow das Polyeder $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ hat nur ganzzahlige Eckpunkte

Beweis:

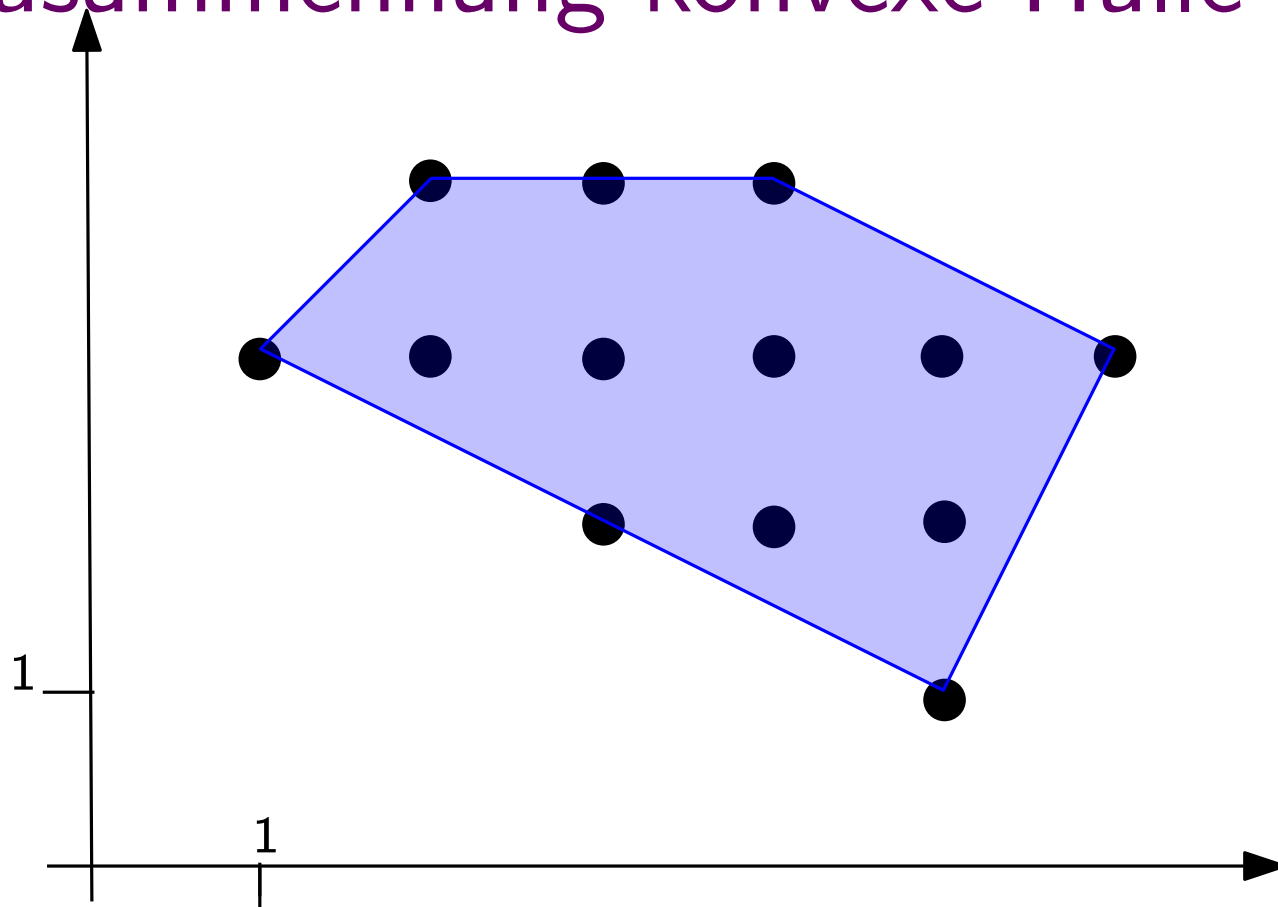
Jeder Polyedereckpunkt entspricht einer zulässigen Basis B der Matrix und lässt sich berechnen als $x_B = A_B^{-1}b$.

Nach der Cramerschen Regel hat die Inverse A_B^{-1} auch nur Einträge aus $\{-1, 0, 1\}$, somit ist $A_B^{-1}b$ ganzzahlig, wenn b ganzzahlig.

Konsequenz: Ist A TU und b ganzzahlig, dann ist die Lösung der LP Relaxation direkt ganzzahlig.

Was, wenn die rechte Seite b nicht ganzzahlig ist?

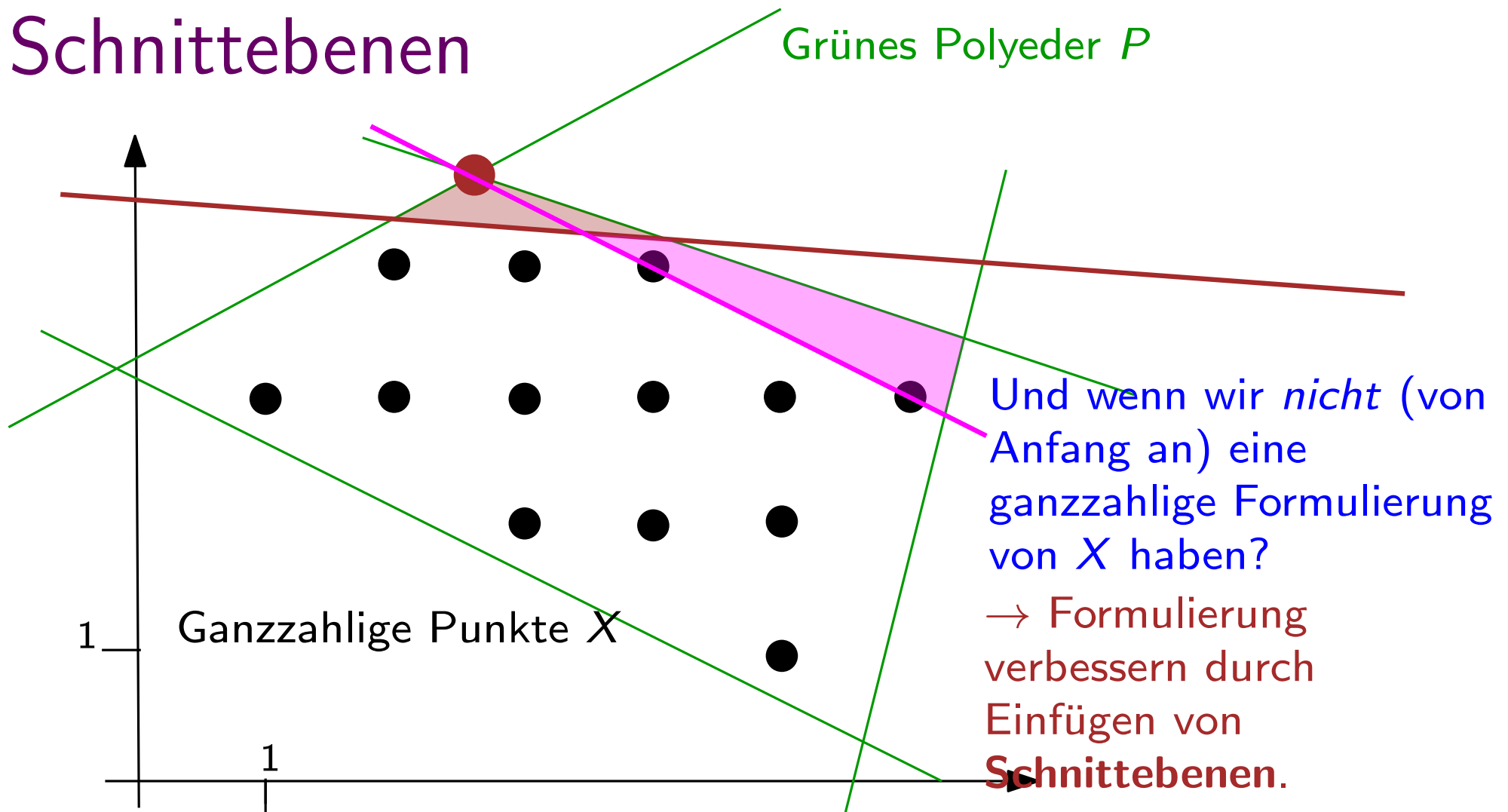
Zusammenhang konvexe Hülle und TU Matrize



Wenn wir eine ILP-Formulierung für ein Problem haben, die auf einer TU-Matrix basiert, dann beschreibt diese die konvexe Hülle der zulässigen Punkte des ILP.

Aber: längst nicht jede konvexe Hülle von ganzzahligen Punkten lässt sich mit Hilfe von TU Matrizen darstellen!

Schnittebenen



Die gesuchten **Schnittebenen** sind gegeben durch Vektor d und Zahl δ mit der Eigenschaft, dass

- $d^t x \leq \delta$ für alle $x \in X$
- $\exists y \in P$ so dass $d^t y > \delta$

Wir sagen dazu auch '**Schnitt bezüglich Vektor d** '.

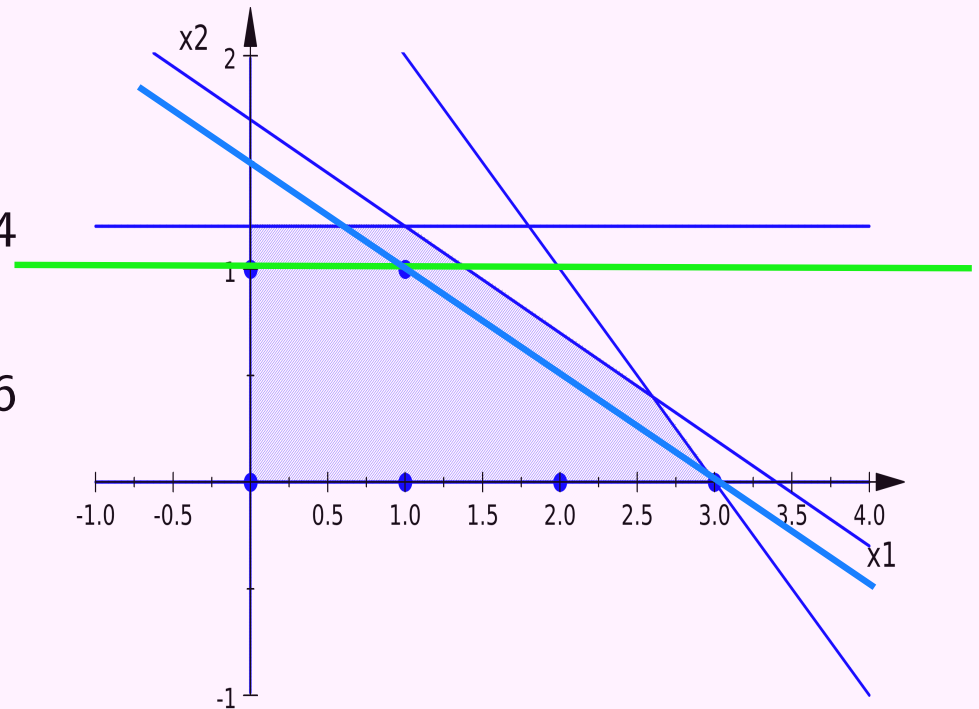
Ganzzahligkeitsschnitte

Beispiel:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3 \cdot 50 \cdot x_1 + 5 \cdot 50 \cdot x_2 \\ \text{so dass} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 170/50 = 3.4 \\ & x_1 + x_2 \leq 150/50 = 3 \\ & 3x_2 \leq 180/50 = 3.6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Schnitte:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ 3x_2 &\leq 3 \end{aligned}$$



In diesem Beispiel ausreichend um konvexe Hülle zu finden!

$$a_{1i}x_i + a_{2i}x_2 + \dots + a_{ni}x_i \leq b_i \text{ mit ganzzahligen Koeffizienten } a_{ij} \text{ wird zu } a_{1i}x_i + a_{2i}x_2 + \dots + a_{ni}x_i \leq \lfloor b_i \rfloor$$

'Abschneiden' der Lösung der LP-Relaxation

Beispiel:

$$\max 3x_1 + 4x_2$$

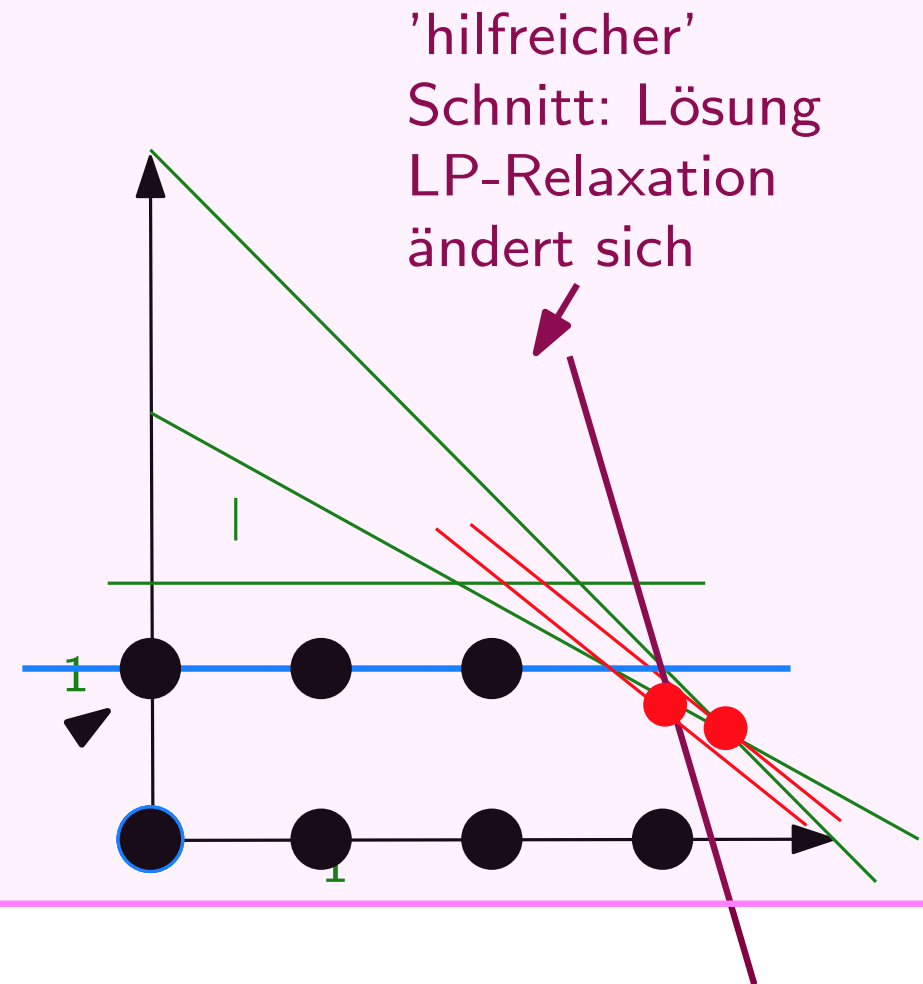
$$\text{so dass } x_2 \leq 1.5$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$5/9x_1 + x_2 \leq 5/2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$
 $x_2 \leq 1$: Kein hilfreicher
 Schnitt (Lsg LP-Relaxation
 unverändert)



Gomory-Chvátal-Schnitte

Schneiden Lösung der LP-Relaxation ab

Wie betrachten ein ILP $\max\{c^t x : x \in X, x \in \mathbb{Z}^n\}$ mit $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$.

Sei x^* optimale Basislösung der LP-Relaxation zur Basis B und x_i^* nicht ganzzahlig.

Seien $\bar{b} := A_B^{-1} b$ und $\bar{A}_N := A_B^{-1} A_N$ die zu der Basisdarstellung gehörenden Nebenbedingungsvektor und Nebenbedingungsmatrix. Dann gilt dass:

1. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$ for all $x \in X$
2. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j^* < (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$

Einen so erzeugten Schnitt nennen wir **Gomory-Chvátal-Schnitt**.

Beweis:

Zu 2.):

$$x_j^* = 0 \forall j \in N \Rightarrow \sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j^* = 0.$$

Andererseits: $\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor = x_i^* - \lfloor x_i^* \rfloor > 0$, da $x_i^* \geq 0$ und $x_i^* \notin \mathbb{Z}$

Gomory-Chvátal-Schnitte

Schneiden Lösung der LP-Relaxation ab

Wie betrachten ein ILP $\max\{c^t x : x \in X, x \in \mathbb{Z}^n\}$ mit $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$.

Sei x^* optimale Basislösung der LP-Relaxation zur Basis B und x_i^* nicht ganzzahlig.

Seien $\bar{b} := A_B^{-1} b$ und $\bar{A}_N := A_B^{-1} A_N$ die zu der Basisdarstellung gehörenden Nebenbedingungsvektor und Nebenbedingungsmatrix. Dann gilt dass:

1. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$ for all $x \in X$
2. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j^* < (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$

Einen so erzeugten Schnitt nennen wir **Gomory-Chvátal-Schnitt**.

Beweis:

zu 1.): Betrachte Nebenbedingung $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ (die wir durch Umschreiben von X in zur Basisdarstellung B erhalten).

Insbesondere muss natürlich auch jedes ganzzahlige $x \in X$ das erfüllen, dh für alle Lösungen in $x \in X \cap \mathbb{Z}^n$ ist $\bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ ganzzahlig.

Gomory-Chvátal-Schnitte

Schneiden Lösung der LP-Relaxation ab

Wie betrachten ein ILP $\max\{c^t x : x \in X, x \in \mathbb{Z}^n\}$ mit $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$.

Sei x^* optimale Basislösung der LP-Relaxation zur Basis B und x_i^* nicht ganzzahlig.

Seien $\bar{b} := A_B^{-1} b$ und $\bar{A}_N := A_B^{-1} A_N$ die zu der Basisdarstellung gehörenden Nebenbedingungsvektor und Nebenbedingungsmatrix. Dann gilt dass:

1. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$ for all $x \in X$
2. $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j^* < (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$

Einen so erzeugten Schnitt nennen wir **Gomory-Chvátal-Schnitt**.

Beweis:

zu 1.): Betrachte Nebenbedingung $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ (die wir durch Umschreiben von X in zur Basisdarstellung B erhalten).

Insbesondere muss natürlich auch jedes ganzzahlige $x \in X$ das erfüllen, dh für alle Lösungen in $x \in X \cap \mathbb{Z}^n$ ist $\bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j$ ganzzahlig.

$\Rightarrow \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j - \lfloor \bar{b}_i \rfloor - \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j = (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor) - \sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j$
ganzzahlig

Außerdem gilt $(\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor) \in (0, 1)$ und $\sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq 0$

Also gilt: $(\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor) - \sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \leq 0$

$\Leftrightarrow \sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor)$

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

Require: ganzzahliges lineares Programm ILP

Ensure: Optimallösung für ILP

Setze $P := ILP$

Setze $stop = 0$

while $stop = 0$ **do**

 Löse die LP-Relaxation von P , sei x' die gefundene Optimallösung

if x' ganzzahlig **then**

 Setze $x^* := x'$, $stop=1$

end if

 Wähle fraktionale Basisvariable aus x' und erstelle zugehörigen

 Gomory-Chvátal-Cut C .

 Füge C zu P hinzu.

end while

Gomory-Chvátal-Schnitt

4	-1	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	14
0	1	0	1	0	3
2	-2	0	0	1	3

Löse LP-Relaxation

0	0	-4/7	-1/7	0	-59/7
1	0	1/7	2/7	0	20/7
0	1	0	1	0	3
0	0	-2/7	10/7	1	23/7

Optimallösung LP-Relaxation:

$$x_1 = \frac{20}{7}, x_2 = 3, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = \frac{23}{7}$$

Betrachten Gleichung: $x_1 + \frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 = \frac{20}{7}$

→ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 \geq \frac{6}{7}$

Wie kommen wir auf diesen Schnitt?

Jede zulässige Lösung der LP-Relaxation erfüllt $x_1 = \frac{20}{7} - \frac{1}{7}y_1 - \frac{2}{7}y_2$, und für die ganzzahligen Lösungen gilt (weil x_1 ganzzahlig) auch $\frac{20}{7} - \frac{1}{7}y_1 - \frac{2}{7}y_2 \in \mathbb{Z}$. An der Ganzzahligkeit ändert sich nichts, wenn wir auf diesen Term ganze Zahlen addieren. Mit Hilfe dieser Idee wollen wir jetzt eine Ungleichung erzeugen, die für x^* nicht gilt, für jedes ganzzahlige $x \in X$ aber schon.

Dazu nutzen wir, dass y_1^* und y_2^* 0 sind (weil nicht in der Basis), für ganzzahlige x aber nicht 0 sein können (da $x_1 = \frac{20}{7} - \frac{1}{7}y_1 - \frac{2}{7}y_2 \in \mathbb{Z}$).

Über den Term

$(\frac{20}{7} - \lceil \frac{20}{7} \rceil) - \frac{1}{7}y_1 - \frac{2}{7}y_2 \in \mathbb{Z}$ wissen wir

1. dass er < 1 ist (weil ich von einer Zahl < 1 etwas Positives abziehe)
2. dass er für die Lösung der LP-Relaxation x^* positiv ist
3. dass er ganzzahlig ist, wenn x ganzzahlig ist
4. und somit dass er ≤ 0 (weil $\in \mathbb{Z}$ und < 1) ist wenn x ganzzahlig ist

Somit erfüllt $(\frac{20}{7} - \lceil \frac{20}{7} \rceil) - \frac{1}{7}y_1 - \frac{2}{7}y_2 \leq 0$ die Voraussetzungen an den gesuchten Schnitt

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	14
0	1	0	1	0	3
2	-2	0	0	1	3

Löse LP Relaxation

0	0	-4/7	-1/7	0	-59/7
1	0	1/7	2/7	0	20/7
0	1	0	1	0	3
0	0	-2/7	10/7	1	23/7

Optimallösung LP-Relaxation:

$$x_1 = \frac{20}{7}, x_2 = 3, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = \frac{23}{7}$$

Betrachten Gleichung: $x_1 + \frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 = \frac{20}{7}$

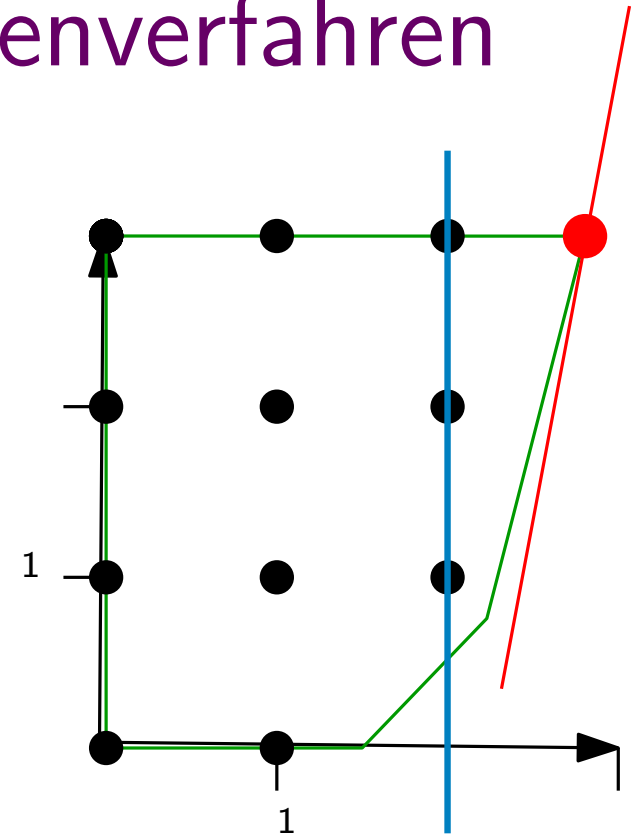
→ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 \geq \frac{6}{7}$

Ausgedrückt in x_1 und x_2 :

$$\frac{1}{7} \cdot (14 - 7x_1 + 2x_2) + \frac{2}{7}(3 - x_2) \geq \frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow x_1 \leq 2$$

Füge Schnitt zu den Nebenbedingungen hinzu...



Welche Formulierung des Schnitts füge ich jetzt zu welcher Formulierung der Nebenbedingungen hinzu?

Antwort: Alle Kombinationen sind 'gleich richtig', manche sind effizienter als andere.

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	14
0	1	0	1	0	3
2	-2	0	0	1	3

Löse LP-Relaxation

0	0	-4/7	-1/7	0	-59/7
1	0	1/7	2/7	0	20/7
0	1	0	1	0	3
0	0	-2/7	10/7	1	23/7

Optimallösung LP-Relaxation:

$$x_1 = \frac{20}{7}, x_2 = 3, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = \frac{23}{7}$$

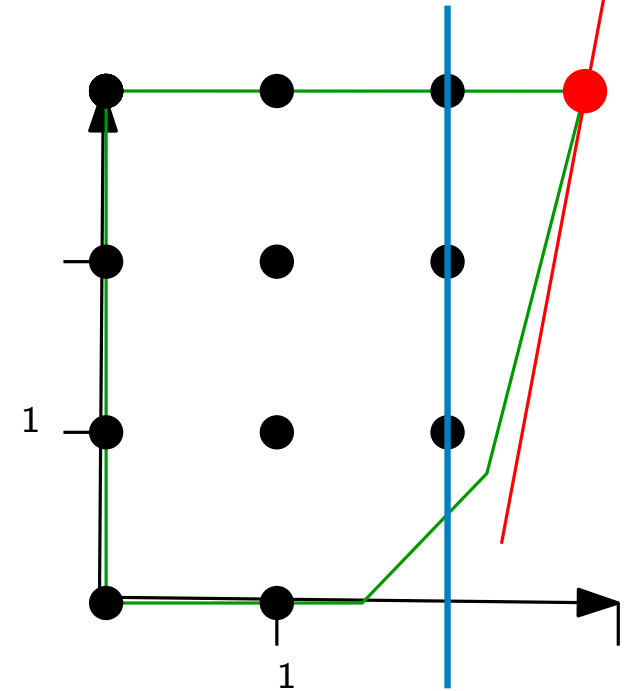
Betrachten Gleichung: $x_1 + \frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 = \frac{20}{7}$

→ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 \geq \frac{6}{7}$

Ausgedrückt in x_1 und x_2 :

$$\frac{1}{7} \cdot (14 - 7x_1 + 2x_2) + \frac{2}{7}(3 - x_2) \geq \frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow x_1 \leq 2$$



4	-1	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	3
1	0	0	0	0	1	2

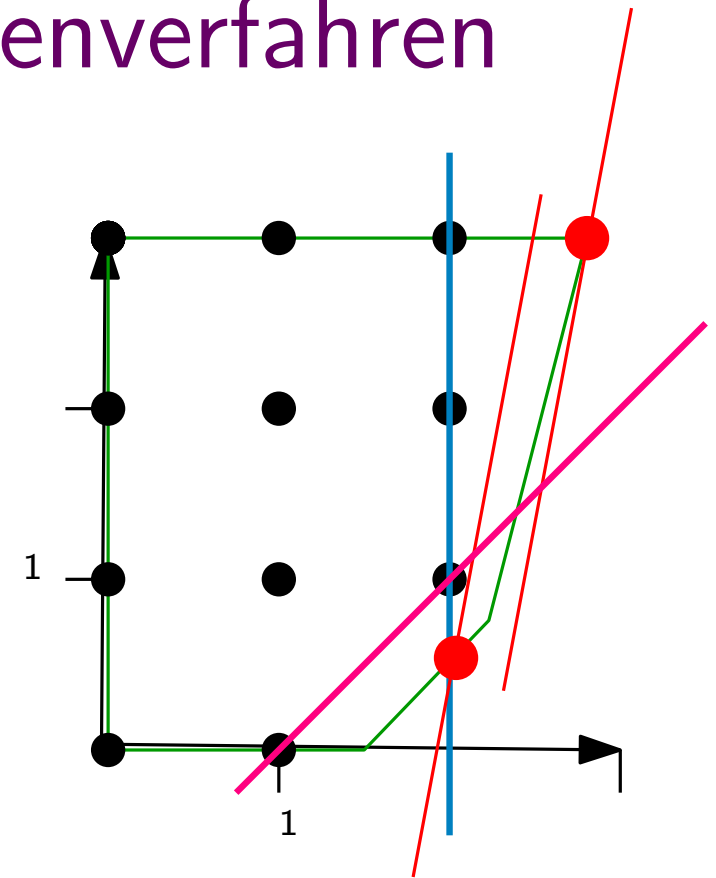
Füge Schnitt zu den Nebenbedingungen hinzu...

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	3
1	0	0	0	0	1	2

Löse LP-Relaxation

0	0	0	0	-1/5	-3	-15/2
1	0	0	0	0	1	2
0	1	0	0	-1/2	1	1/2
0	0	1	0	-1	-1	1
0	0	0	1	1/2	6	5/2



Betrachten Gleichung: $x_2 - \frac{1}{2}y_3 + \tilde{y}_1 = \frac{1}{2}$

→ Gomory-Chvátal-Schnitt: $\frac{1}{2}y_3 \geq \frac{1}{2}$

Ausgedrückt in x_1 und x_2 :

$$\frac{1}{2} \cdot (3 - 2x_1 + 2x_2) \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 \leq 1$$

4	-1	0	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	0	3
1	0	0	0	0	1	0	2
1	-1	0	0	0	0	1	1

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

4	-1	0	0	0	0	0	0
7	-2	1	0	0	0	0	14
0	1	0	1	0	0	0	3
2	-2	0	0	1	0	0	3
1	0	0	0	0	1	0	2
1	-1	0	0	0	0	1	1

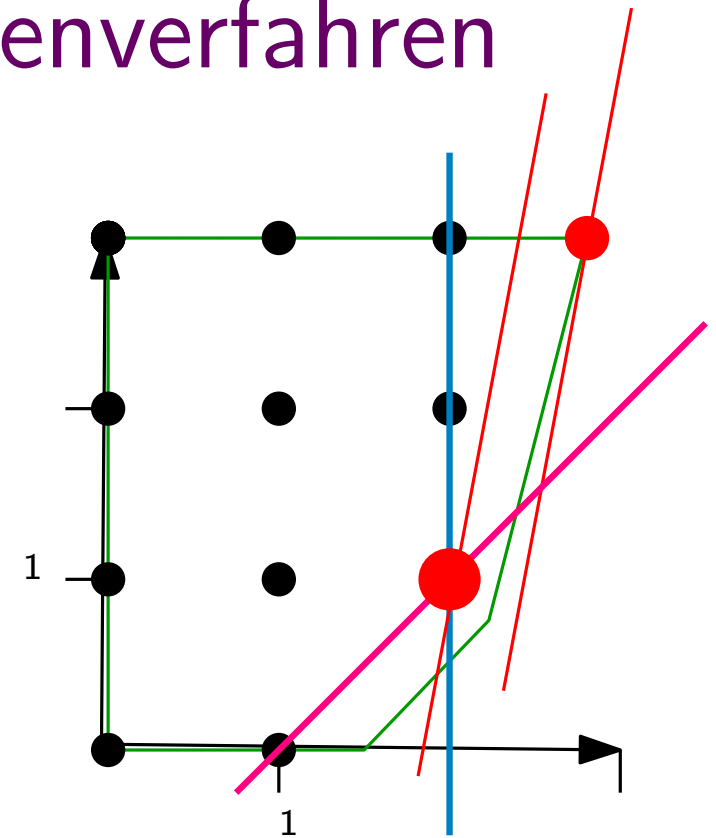
Löse LP-Relaxation

0	0	0	0	0	-3	-1	-7
1	0	0	0	0	1	0	2
0	1	0	0	0	1	-1	1
0	0	1	0	0	-5	-2	2
0	0	0	1	0	6	1	2
0	0	0	0	1	0	-1	1

Optimallösung LP-Relaxation:

$$x_1 = 2, x_2 = 1, y_1 = 2, y_2 = 2, y_3 = 1$$

Ist ganzzahlig - also optimal für ILP!



Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren

Require: ganzzahliges lineares Programm ILP

Ensure: Optimallösung für ILP

Setze $P := ILP$

Setze $stop = 0$

while $stop = 0$ **do**

 Löse die LP-Relaxation von P , sei x' die gefundene Optimallösung

if x' ganzzahlig **then**

 Setze $x^* := x'$, $stop=1$

end if

 Wähle fraktionale Basisvariable aus x' und erstelle zugehörigen

 Gomory-Chvátal-Cut C .

 Füge C zu P hinzu.

end while

Anzahl der Iterationen ist endlich - wenn Schnitte 'clever' gewählt werden.

Stichworte heute

Mathematische Programmierung:

Formulierung, *bessere/stärkere* Formulierung, konvexe Hülle, TU Matrizen, Schnitte

Lösungsmethoden der mathematischen Programmierung

Gomory-Chvátal-Schnittebenenverfahren