Graphen und diskrete Optimierung

im Bachelorstudiengang 'Informatik und Nachhaltigkeit'

Dualität

Marie Schmidt

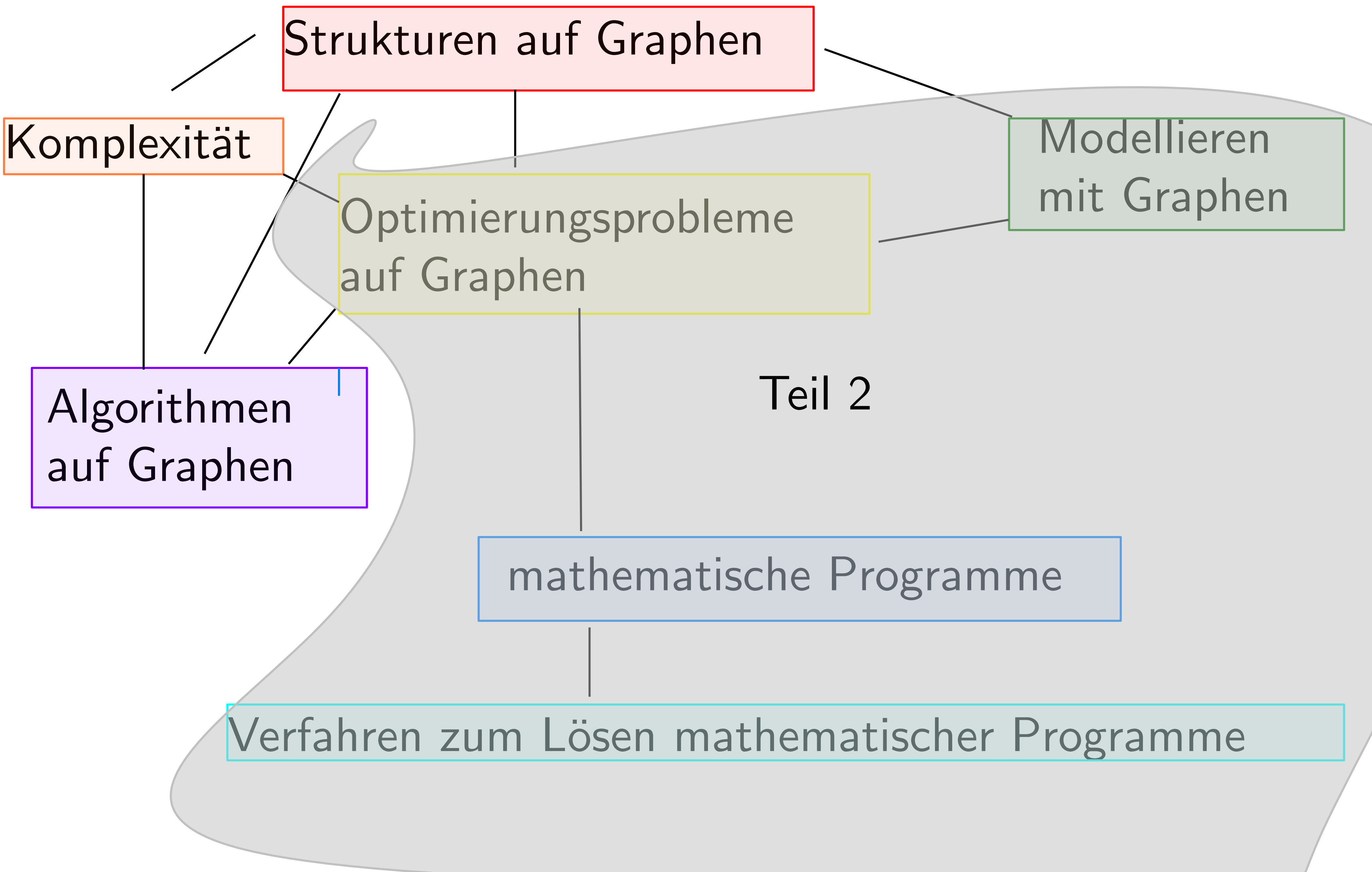
28.06.2023

Mündliche Prüfungen
am 26. und 28.7.

Bitte Termin über Doodle wählen (first-come, first-served)

https://tinyurl.com/GudO2023

Worum soll er hier gehen?



Vorlesungsübersicht

- Einführung: Modellieren auf Graphen ✓
- Teil 1: Graphen und Algorithmen auf Graphen ✓
- Teil 2: Mathematische Programmierung
  - Einführung in die lineare und ganzzahlig lineare Programmierung ✓
    - Was sind lineare / ganzzahlig lineare Programme ✓
    - Modellierung als lineares / ganzzahlig lineares Programm ✓
    - Graphische Lösungsmethode für lineare Programme mit zwei Variablen ✓
  - lineare Programmierung
    - Hauptsatz der linearen Optimierung ✓
    - Simplexverfahren✓
    - Komplexität lineare Programmierung✓
    - Flussprobleme als lineare Programme ✓
    - Dualität
  - ganzzahlige Programmierung
    - Komplexität
    - total unimodulare Matrizen

Das duale Programm

Für ein allgemeines lineares Programm (P) ist das duale Programm gegeben duch (D):

$$
\begin{array}{lllll}
(P) \max & c^t x & & & \\
\text{so dass} & a_i.x \leq b_i & i \in M_1 \\
& a_i.x \geq b_i & i \in M_2 \\
& a_i.x = b_i & i \in M_3 \\
& x_i \gtrless 0 & i \in N_1 \\
& x_i \geq 0 & i \in N_2 \\
& x_i \leq 0 & i \in N_3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(D) \min & b^t \pi & \\
\text{so dass} & a_{.j}^t \pi = c_j & j \in N_1 \\
& a_{.j}^t \pi \geq c_j & j \in N_2 \\
& a_{.j}^t \pi \leq c_j & i \in N_3 \\
& \pi_i \geq 0 & i \in M_1 \\
& \pi_i \leq 0 & i \in M_2 \\
& \pi_i \gtrless 0 & i \in M_3
\end{array}
$$

Starke Dualität: Seien (P) und (D) zueinander duale lineare Programme. Dann gelten die folgenden Beziehungen:

1.) Ist (P) unbeschränkt, dann ist (D) unzulässig.

2.) Ist (D) unbeschränkt, dann ist (P) unzulässig.

3.) Sei x zulässig für (P) und π zulässig für (D) und gelte $c^t x = b^t \pi$. Dann sind x und π optimal.

4.) Hat (P) eine endliche Optimallösung, so auch (D) und die optimalen Zielfunktionswerte von (P) und (D) sind gleich.

Wozu nützt uns die Dualität?(1)

- Jede *dual zulässige* Lösung ist (bei Maximierungsproblemen) eine obere Schranke an die primale Optimallösung - und hilft uns somit, die Lösungsqualität von primal zulässigen Lösungen zu bestimmen.

Wozu nützt uns die Dualität?(1)

- Jede *dual zulässige* Lösung ist (bei Maximierungsproblemen) eine obere Schranke an die primale Optimallösung - und hilft uns somit, die Lösungsqualität von primal zulässigen Lösungen zu bestimmen.

Schwierige (große) lineare Programme lösen

Wir lassen vom Solver gleichzeitig das primale und das duale Problem lösen.

Wozu nützt uns die Dualität?(1)

- Jede *dual zulässige* Lösung ist (bei Maximierungsproblemen) eine obere Schranke an die primale Optimallösung - und hilft uns somit, die Lösungsqualität von primal zulässigen Lösungen zu bestimmen.

Schwierige (große) lineare Programme lösen

Wir lassen vom Solver gleichzeitig das primale und das duale Problem lösen.

blau: primale zulässige Lösung
grün: dual zulässige Lösung

Wozu nützt uns die Dualität?(1)

- Jede *dual zulässige* Lösung ist (bei Maximierungsproblemen) eine obere Schranke an die primale Optimallösung - und hilft uns somit, die Lösungsqualität von primal zulässigen Lösungen zu bestimmen.

Schwierige (große) lineare Programme lösen

Wir lassen vom Solver gleichzeitig das primale und das duale Problem lösen.

blau: primale zulässige Lösung
grün: dual zulässige Lösung

Wozu nützt uns die Dualität?(1)

- Jede *dual zulässige* Lösung ist (bei Maximierungsproblemen) eine obere Schranke an die primale Optimallösung - und hilft uns somit, die Lösungsqualität von primal zulässigen Lösungen zu bestimmen.

Schwierige (große) lineare Programme lösen

Wir lassen vom Solver gleichzeitig das primale und das duale Problem lösen.

blau: primale zulässige Lösung
grün: dual zulässige Lösung

Wozu nützt uns die Dualität?(1)

- Jede *dual zulässige* Lösung ist (bei Maximierungsproblemen) eine obere Schranke an die primale Optimallösung - und hilft uns somit, die Lösungsqualität von primal zulässigen Lösungen zu bestimmen.

Schwierige (große) lineare Programme lösen

Wir lassen vom Solver gleichzeitig das primale und das duale Problem lösen.

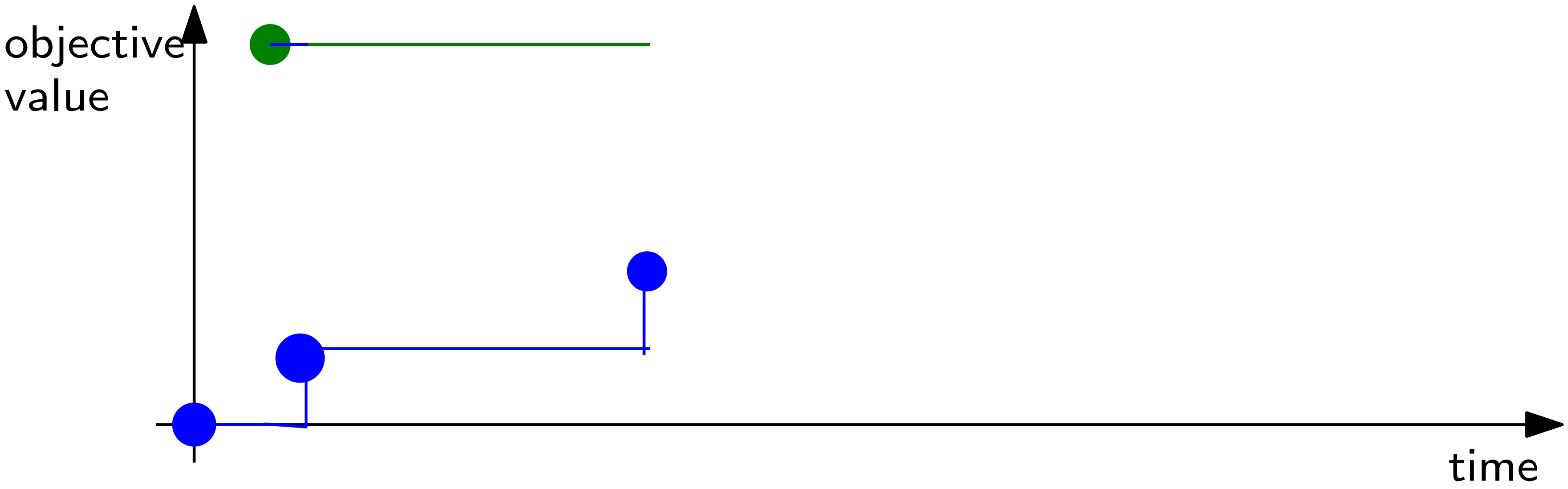
blau: primale zulässige Lösung
grün: dual zulässige Lösung

Wozu nützt uns die Dualität?(1)

- Jede *dual zulässige* Lösung ist (bei Maximierungsproblemen) eine obere Schranke an die primale Optimallösung - und hilft uns somit, die Lösungsqualität von primal zulässigen Lösungen zu bestimmen.

Schwierige (große) lineare Programme lösen

Wir lassen vom Solver gleichzeitig das primale und das duale Problem lösen.



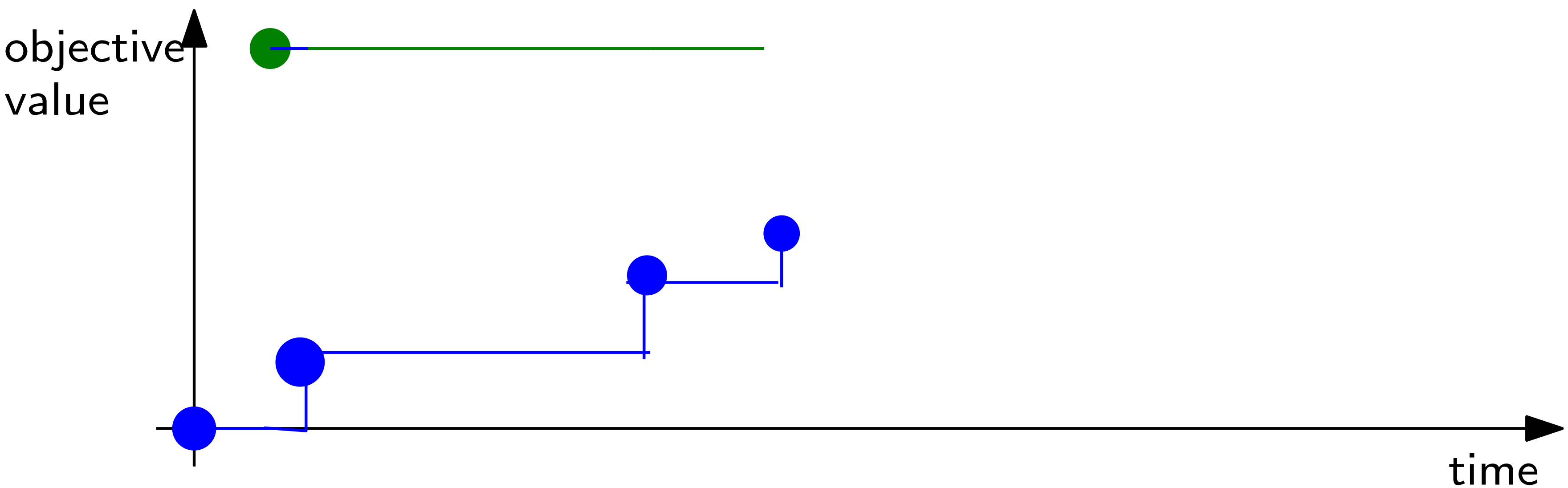
blau: primale zulässige Lösung
grün: dual zulässige Lösung

Wozu nützt uns die Dualität?(1)

- Jede *dual zulässige* Lösung ist (bei Maximierungsproblemen) eine obere Schranke an die primale Optimallösung - und hilft uns somit, die Lösungsqualität von primal zulässigen Lösungen zu bestimmen.

Schwierige (große) lineare Programme lösen

Wir lassen vom Solver gleichzeitig das primale und das duale Problem lösen.



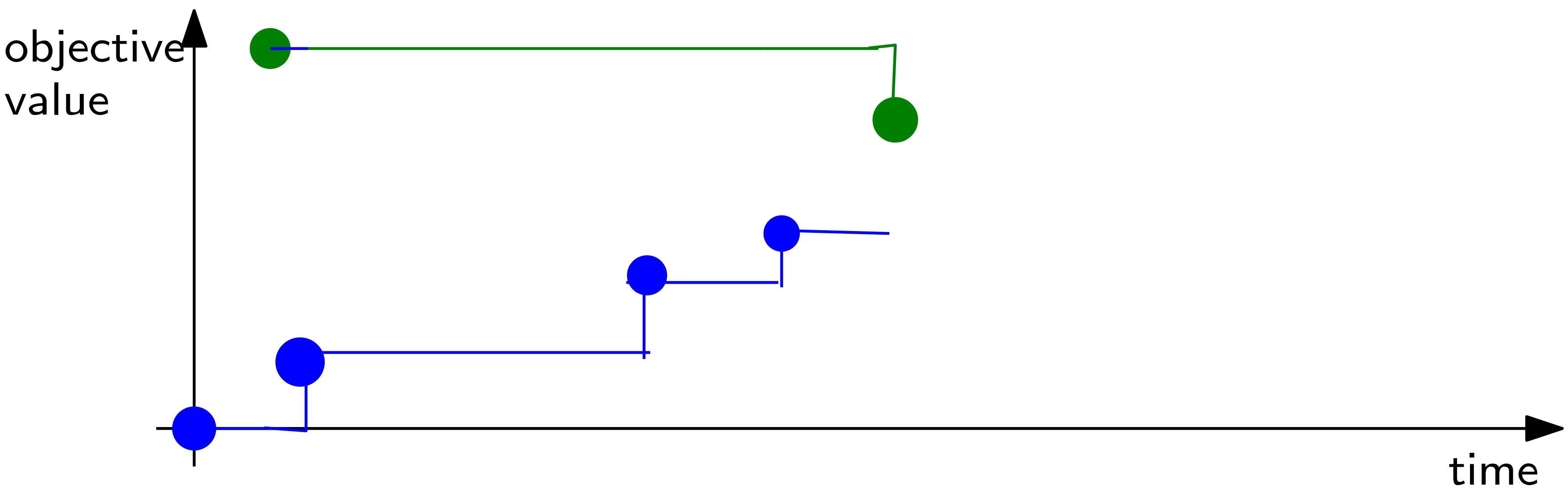
blau: primale zulässige Lösung
grün: dual zulässige Lösung

Wozu nützt uns die Dualität?(1)

- Jede *dual zulässige* Lösung ist (bei Maximierungsproblemen) eine obere Schranke an die primale Optimallösung - und hilft uns somit, die Lösungsqualität von primal zulässigen Lösungen zu bestimmen.

Schwierige (große) lineare Programme lösen

Wir lassen vom Solver gleichzeitig das primale und das duale Problem lösen.



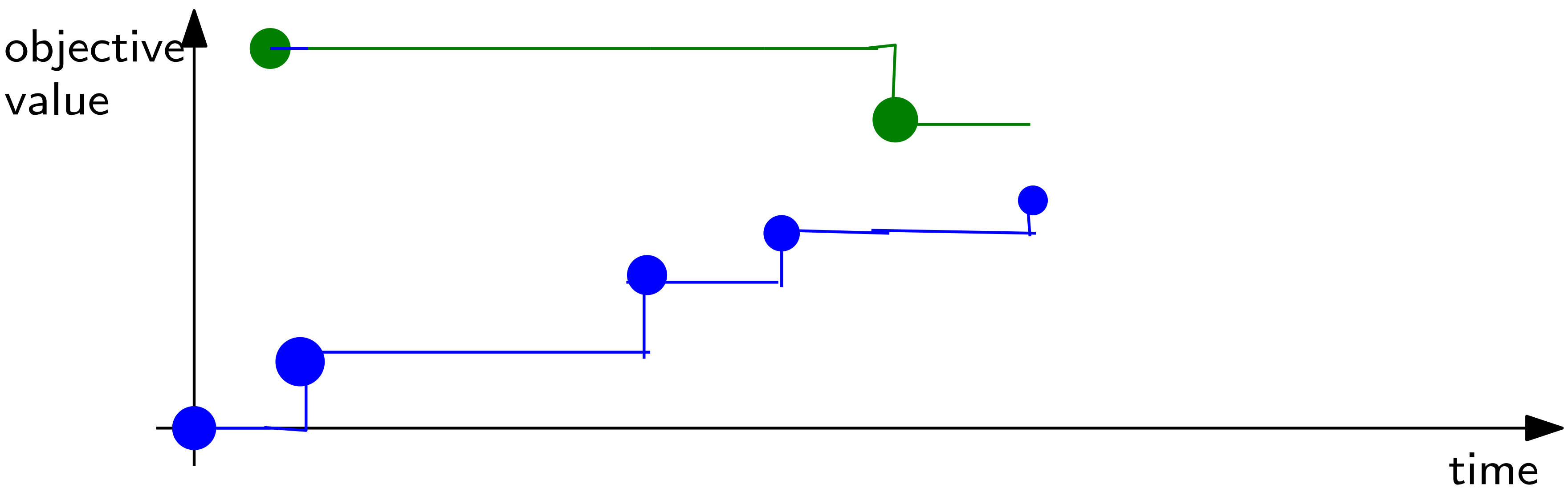
blau: primale zulässige Lösung
grün: dual zulässige Lösung

Wozu nützt uns die Dualität?(1)

- Jede *dual zulässige* Lösung ist (bei Maximierungsproblemen) eine obere Schranke an die primale Optimallösung - und hilft uns somit, die Lösungsqualität von primal zulässigen Lösungen zu bestimmen.

Schwierige (große) lineare Programme lösen

Wir lassen vom Solver gleichzeitig das primale und das duale Problem lösen.



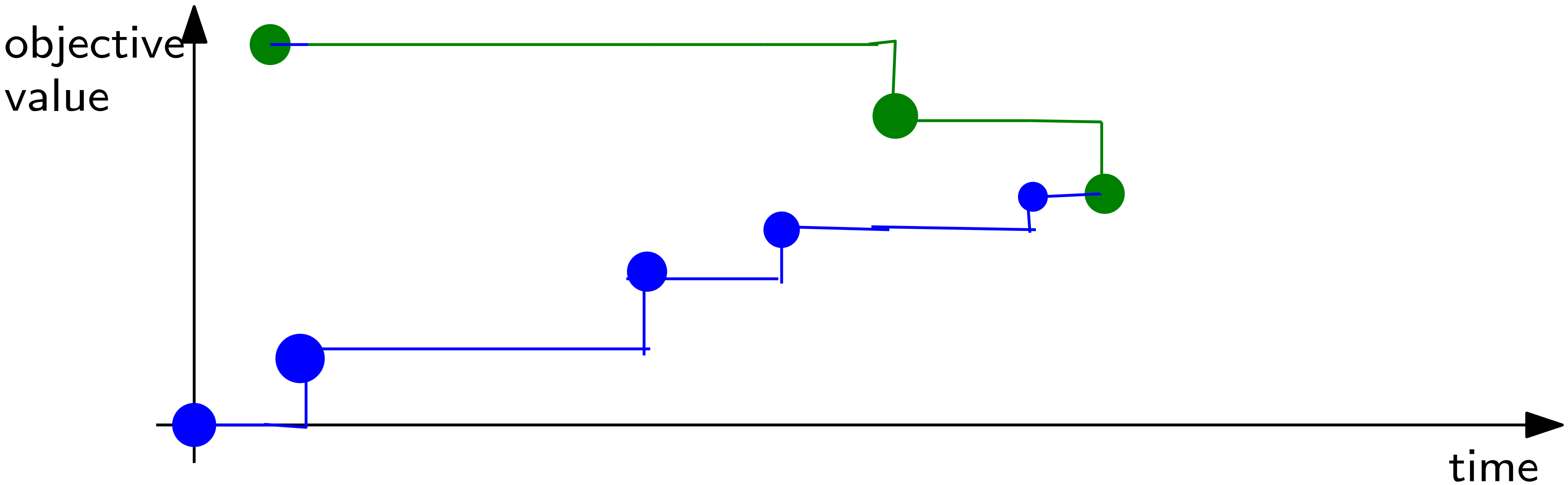
blau: primale zulässige Lösung
grün: dual zulässige Lösung

Wozu nützt uns die Dualität?(1)

- Jede *dual zulässige* Lösung ist (bei Maximierungsproblemen) eine obere Schranke an die primale Optimallösung - und hilft uns somit, die Lösungsqualität von primal zulässigen Lösungen zu bestimmen.

Schwierige (große) lineare Programme lösen

Wir lassen vom Solver gleichzeitig das primale und das duale Problem lösen.



blau: primale zulässige Lösung
grün: dual zulässige Lösung

Wozu nützt uns die Dualität?(1)

- Jede *dual zulässige* Lösung ist (bei Maximierungsproblemen) eine obere Schranke an die primale Optimallösung - und hilft uns somit, die Lösungsqualität von primal zulässigen Lösungen zu bestimmen.

- Manchmal: duales Problem leichter zu lösen als das Primale

Dualisieren - Beispiel

$$
\begin{array}{llll}
(P)\ \max & x_1 - 2x_2 + 2x_3 & & \\
\text{so dass} & x_1 + 3x_2 & \geq 4 & \pi_1 \\
& x_1 + x_2 & \leq 0 & \pi_2 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 & \leq 6 & \pi_3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(D)\ \min & 4\pi_1 + 6\pi_3 & \\
\text{so dass} & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = 1 \\
& 3\pi_1 + \pi_2 - \pi_3 & = -2 \\
& 2\pi_3 & = 2 \\
& \pi_1 \leq 0, \pi_2 \geq 0, \pi_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

Dualisieren - Beispiel

$$
\begin{array}{llll}
(P)\ \max & x_1 - 2x_2 + 2x_3 & & \\
\text{so dass} & x_1 + 3x_2 & \geq 4 & \pi_1 \\
 & x_1 + x_2 & \leq 0 & \pi_2 \\
 & x_1 - x_2 + 2x_3 & \leq 6 & \pi_3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(D)\ \min & 4\pi_1 + 6\pi_3 & \\
\text{so dass} & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = 1 \\
 & 3\pi_1 + \pi_2 - \pi_3 & = -2 \\
 & 2\pi_3 & = 2 \\
 & \pi_1 \leq 0, \pi_2 \geq 0, \pi_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

Optimallösung von (D) $=$ einzige zulässige Lösung von (D):
$\pi_1 = -\frac{1}{2}, \pi_2 = \frac{1}{2}, \pi_3 = 1$ mit ZFW 4

Dualisieren - Beispiel

$$
\begin{array}{llll}
(P)\ \max & x_1 - 2x_2 + 2x_3 & & \\
\text{so dass} & x_1 + 3x_2 & \geq 4 & \pi_1 \\
& x_1 + x_2 & \leq 0 & \pi_2 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 & \leq 6 & \pi_3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(D)\ \min & 4\pi_1 + 6\pi_3 & \\
\text{so dass} & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = 1 \\
& 3\pi_1 + \pi_2 - \pi_3 & = -2 \\
& 2\pi_3 & = 2 \\
& \pi_1 \leq 0, \pi_2 \geq 0, \pi_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

Optimallösung von (D) $=$ einzige zulässige Lösung von (D):
$\pi_1 = -\frac{1}{2}, \pi_2 = \frac{1}{2}, \pi_3 = 1$ mit ZFW 4

$\rightarrow$ optimaler ZFW von (P) ist auch 4

Dualisieren - Beispiel

$$
\begin{array}{lllll}
(P) \max & x_1 - 2x_2 + 2x_3 & & & \\
\text{so dass} & x_1 + 3x_2 & \geq 4 & & \pi_1 \\
& x_1 + x_2 & \leq 0 & & \pi_2 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 & \leq 6 & & \pi_3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(D) \min & 4\pi_1 + 6\pi_3 & \\
\text{so dass} & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = 1 \\
& 3\pi_1 + \pi_2 - \pi_3 & = -2 \\
& 2\pi_3 & = 2 \\
& \pi_1 \leq 0, \pi_2 \geq 0, \pi_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

Optimallösung von (D) $=$ einzige zulässige Lösung von (D):
$\pi_1 = -\frac{1}{2}, \pi_2 = \frac{1}{2}, \pi_3 = 1$ mit ZFW 4

$\rightarrow$ optimaler ZFW von (P) ist auch 4

Welche Lösung (Variablenbelegung) ist optimal?

Satz vom komplementären Schlupf

Seien (P) und (D) zueinander duale lineare Programme. Sei x zulässig für (P) und π zulässig für (D).
Definiere $u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \;\; \forall i = 1, \ldots, m$
und $v_j := x_j((a._j)^t\pi - c_j) \;\; \forall j = 1, \ldots, n$.
Dann ist x optimal für (P) und π optimal für (D) genau dann wenn $u_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $v_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Beweis:

Satz vom komplementären Schlupf

Seien (P) und (D) zueinander duale lineare Programme. Sei x zulässig für (P) und π zulässig für (D).
Definiere $u_i := \pi_i(b_i - a_{i\cdot}x) \;\; \forall i = 1, \ldots, m$
und $v_j := x_j((a_{\cdot j})^t\pi - c_j) \;\; \forall j = 1, \ldots, n$.
Dann ist x optimal für (P) und π optimal für (D) genau dann wenn $u_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $v_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Beweis:
1. Zeige: $u_i \geq 0$ für alle i:

Satz vom komplementären Schlupf

Seien (P) und (D) zueinander duale lineare Programme. Sei x zulässig für (P) und π zulässig für (D).
Definiere $u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \ \ \forall i = 1, \dots, m$
und $v_j := x_j((a._j)^t\pi - c_j) \ \ \forall j = 1, \dots, n$.
Dann ist x optimal für (P) und π optimal für (D) genau dann wenn $u_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $v_j = 0$ für alle $j = 1, \dots, n$.

Beweis:
1. Zeige: $u_i \geq 0$ für alle i:

$$
\begin{array}{lll}
(P) \max & c^t x & \\
\text{so dass} & a_i.x \leq b_i & i \in M_1 \\
& a_i.x \geq b_i & i \in M_2 \\
& a_i.x = b_i & i \in M_3 \\
& x_i \gtrless 0 & i \in N_1 \\
& x_i \geq 0 & i \in N_2 \\
& x_i \leq 0 & i \in N_3
\end{array}
$$

Satz vom komplementären Schlupf

Seien (P) und (D) zueinander duale lineare Programme. Sei x zulässig für (P) und π zulässig für (D).
Definiere $u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \;\; \forall i = 1, \ldots, m$
und $v_j := x_j((a._j)^t \pi - c_j) \;\; \forall j = 1, \ldots, n$.
Dann ist x optimal für (P) und π optimal für (D) genau dann wenn $u_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $v_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Beweis:
1. Zeige: $u_i \geq 0$ für alle i:

$$
\begin{array}{llll}
(P) \max & c^t x & & \\
\text{so dass} & a_i.x \leq b_i & i \in M_1 & \rightarrow \pi_i \geq 0 \\
 & a_i.x \geq b_i & i \in M_2 & \rightarrow \pi_i \leq 0 \\
 & a_i.x = b_i & i \in M_3 & \rightarrow \pi_i \gtrless 0 \\
 & x_i \gtrless 0 & i \in N_1 & \\
 & x_i \geq 0 & i \in N_2 & \\
 & x_i \leq 0 & i \in N_3 &
\end{array}
$$

Satz vom komplementären Schlupf

Seien (P) und (D) zueinander duale lineare Programme. Sei x zulässig für (P) und π zulässig für (D).
Definiere $u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \ \ \forall i = 1, \ldots, m$
und $v_j := x_j((a._j)^t\pi - c_j) \ \ \forall j = 1, \ldots, n$.
Dann ist x optimal für (P) und π optimal für (D) genau dann wenn $u_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $v_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Beweis:
1. Zeige: $u_i \geq 0$ für alle i:

$$
\begin{array}{llll}
(P)\ \max & c^t x & & \\
\text{so dass} & a_i.x \leq b_i \quad i \in M_1 & \rightarrow \pi_i \geq 0 & u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \geq 0 \\
& a_i.x \geq b_i \quad i \in M_2 & \rightarrow \pi_i \leq 0 & u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \geq 0 \\
& a_i.x = b_i \quad i \in M_3 & \rightarrow \pi_i \gtrless 0 & u_i := \pi_i \cdot 0 = 0 \\
& x_i \gtrless 0 \qquad i \in N_1 & & \\
& x_i \geq 0 \qquad i \in N_2 & & \\
& x_i \leq 0 \qquad i \in N_3 & &
\end{array}
$$

Satz vom komplementären Schlupf

Seien (P) und (D) zueinander duale lineare Programme. Sei x zulässig für (P) und π zulässig für (D).
Definiere $u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \;\; \forall i = 1, \ldots, m$
und $v_j := x_j((a._j)^t \pi - c_j) \;\; \forall j = 1, \ldots, n$.
Dann ist x optimal für (P) und π optimal für (D) genau dann wenn $u_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $v_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Beweis:
1. Zeige: $u_i \geq 0$ für alle i:

(P) max $c^t x$

so dass	$a_i.x \leq b_i$	$i \in M_1$	$\to \pi_i \geq 0$	$u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \geq 0$
	$a_i.x \geq b_i$	$i \in M_2$	$\to \pi_i \leq 0$	$u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \geq 0$
	$a_i.x = b_i$	$i \in M_3$	$\to \pi_i \gtrless 0$	$u_i := \pi_i \cdot 0 = 0$
	$x_i \gtrless 0$	$i \in N_1$		
	$x_i \geq 0$	$i \in N_2$		
	$x_i \leq 0$	$i \in N_3$		

Analog: zeige $v_j \geq 0$ für alle j (2.)

Satz vom komplementären Schlupf

Seien (P) und (D) zueinander duale lineare Programme. Sei x zulässig für (P) und π zulässig für (D).
Definiere $u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \ \ \forall i = 1, \ldots, m$
und $v_j := x_j((a._j)^t\pi - c_j) \ \ \forall j = 1, \ldots, n$.
Dann ist x optimal für (P) und π optimal für (D) genau dann wenn $u_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $v_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Beweis:
1. Zeige: $u_i \geq 0$ für alle i: ✓ 2. Zeige: $v_j \geq 0$ für alle j:✓

Satz vom komplementären Schlupf

Seien (P) und (D) zueinander duale lineare Programme. Sei x zulässig für (P) und π zulässig für (D).
Definiere $u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \ \ \forall i = 1, \ldots, m$
und $v_j := x_j((a._j)^t\pi - c_j) \ \ \forall j = 1, \ldots, n$.
Dann ist x optimal für (P) und π optimal für (D) genau dann wenn $u_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $v_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Beweis:
1. Zeige: $u_i \geq 0$ für alle i: ✓ 2. Zeige: $v_j \geq 0$ für alle j:✓

Sei $u := \sum_i u_i$ und $v := \sum_j v_j$

Satz vom komplementären Schlupf

Seien (P) und (D) zueinander duale lineare Programme. Sei x zulässig für (P) und π zulässig für (D).
Definiere $u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \ \ \forall i = 1, \ldots, m$
und $v_j := x_j((a._j)^t\pi - c_j) \ \ \forall j = 1, \ldots, n$.
Dann ist x optimal für (P) und π optimal für (D) genau dann wenn $u_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $v_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Beweis:
1. Zeige: $u_i \geq 0$ für alle i: ✓ 2. Zeige: $v_j \geq 0$ für alle j:✓

Sei $u := \sum_i u_i$ und $v := \sum_j v_j$

Dann gilt:
$u_i = 0 \ \ \forall i$ und $v_j = 0 \ \ \forall j$

Satz vom komplementären Schlupf

Seien (P) und (D) zueinander duale lineare Programme. Sei x zulässig für (P) und π zulässig für (D).
Definiere $u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \;\; \forall i = 1, \ldots, m$
und $v_j := x_j((a._j)^t\pi - c_j) \;\; \forall j = 1, \ldots, n$.
Dann ist x optimal für (P) und π optimal für (D) genau dann wenn
$u_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $v_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Beweis:
1. Zeige: $u_i \geq 0$ für alle i: ✓ 2. Zeige: $v_j \geq 0$ für alle j:✓

Sei $u := \sum_i u_i$ und $v := \sum_j v_j$

Dann gilt:
$u_i = 0 \;\; \forall i$ und $v_j = 0 \;\; \forall j \;\; \Leftrightarrow u = 0$ und $v = 0$

Satz vom komplementären Schlupf

Seien (P) und (D) zueinander duale lineare Programme. Sei x zulässig für (P) und π zulässig für (D).
Definiere $u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \ \ \forall i = 1, \ldots, m$
und $v_j := x_j((a._j)^t\pi - c_j) \ \ \forall j = 1, \ldots, n$.
Dann ist x optimal für (P) und π optimal für (D) genau dann wenn $u_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $v_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Beweis:
1. Zeige: $u_i \geq 0$ für alle i: $\checkmark$ 2. Zeige: $v_j \geq 0$ für alle j:$\checkmark$

Sei $u := \sum_i u_i$ und $v := \sum_j v_j$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
u_i = 0 \ \ \forall i \text{ und } v_j = 0 \ \ \forall j \ &\Leftrightarrow u = 0 \text{ und } v = 0 \\
&\Leftrightarrow \pi^t(b - Ax) = 0 \text{ und } x^{\cdot}(A^t\pi - c) = 0
\end{aligned}
$$

Satz vom komplementären Schlupf

Seien (P) und (D) zueinander duale lineare Programme. Sei x zulässig für (P) und π zulässig für (D).
Definiere $u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \;\; \forall i = 1, \ldots, m$
und $v_j := x_j((a._j)^t\pi - c_j) \;\; \forall j = 1, \ldots, n$.
Dann ist x optimal für (P) und π optimal für (D) genau dann wenn $u_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $v_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Beweis:
1. Zeige: $u_i \geq 0$ für alle i: ✓ 2. Zeige: $v_j \geq 0$ für alle j:✓

Sei $u := \sum_i u_i$ und $v := \sum_j v_j$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
u_i = 0 \;\; \forall i \text{ und } v_j = 0 \;\; \forall j \;\; &\Leftrightarrow u = 0 \text{ und } v = 0 \\
&\Leftrightarrow \pi^t(b - Ax) = 0 \text{ und } x^\cdot(A^t\pi - c) = 0 \\
&\Leftrightarrow \pi^t(b - Ax) + x^\cdot(A^t\pi - c) = 0
\end{aligned}
$$

Satz vom komplementären Schlupf

Seien (P) und (D) zueinander duale lineare Programme. Sei x zulässig für (P) und π zulässig für (D).
Definiere $u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \;\; \forall i = 1, \ldots, m$
und $v_j := x_j((a._j)^t\pi - c_j) \;\; \forall j = 1, \ldots, n$.
Dann ist x optimal für (P) und π optimal für (D) genau dann wenn $u_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $v_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Beweis:
1. Zeige: $u_i \geq 0$ für alle i: ✓ 2. Zeige: $v_j \geq 0$ für alle j:✓

Sei $u := \sum_i u_i$ und $v := \sum_j v_j$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
u_i = 0 \;\; \forall i \text{ und } v_j = 0 \;\; \forall j \; &\Leftrightarrow u = 0 \text{ und } v = 0 \\
&\Leftrightarrow \pi^t(b - Ax) = 0 \text{ und } x^\cdot(A^t\pi - c) = 0 \\
&\Leftrightarrow \pi^t(b - Ax) + x^\cdot(A^t\pi - c) = 0 \\
&\Leftrightarrow \pi^t b - \pi^t Ax + x^t A^t \pi - x^t c = 0
\end{aligned}
$$

Satz vom komplementären Schlupf

Seien (P) und (D) zueinander duale lineare Programme. Sei x zulässig für (P) und π zulässig für (D).
Definiere $u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \;\; \forall i = 1, \dots, m$
und $v_j := x_j((a_{.j})^t \pi - c_j) \;\; \forall j = 1, \dots, n$.
Dann ist x optimal für (P) und π optimal für (D) genau dann wenn $u_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $v_j = 0$ für alle $j = 1, \dots, n$.

Beweis:
1. Zeige: $u_i \geq 0$ für alle i: ✓ 2. Zeige: $v_j \geq 0$ für alle j:✓

Sei $u := \sum_i u_i$ und $v := \sum_j v_j$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
u_i = 0 \;\; \forall i \text{ und } v_j = 0 \;\; \forall j \; & \Leftrightarrow u = 0 \text{ und } v = 0 \\
& \Leftrightarrow \pi^t(b - Ax) = 0 \text{ und } x^{\cdot}(A^t\pi - c) = 0 \\
& \Leftrightarrow \pi^t(b - Ax) + x^{\cdot}(A^t\pi - c) = 0 \\
& \Leftrightarrow \pi^t b - \pi^t Ax + x^t A^t \pi - x^t c = 0 \\
& \Leftrightarrow \pi^t b = x^t c
\end{aligned}
$$

Satz vom komplementären Schlupf

Seien (P) und (D) zueinander duale lineare Programme. Sei x zulässig für (P) und π zulässig für (D).
Definiere $u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \quad \forall i = 1, \ldots, m$
und $v_j := x_j((a._j)^t\pi - c_j) \quad \forall j = 1, \ldots, n$.
Dann ist x optimal für (P) und π optimal für (D) genau dann wenn $u_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $v_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Beweis:
1. Zeige: $u_i \geq 0$ für alle i: ✓ 2. Zeige: $v_j \geq 0$ für alle j:✓

Sei $u := \sum_i u_i$ und $v := \sum_j v_j$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
u_i = 0 \quad \forall i \text{ und } v_j = 0 \quad \forall j \quad &\Leftrightarrow u = 0 \text{ und } v = 0\\
&\Leftrightarrow \pi^t(b - Ax) = 0 \text{ und } x^\cdot(A^t\pi - c) = 0\\
&\Leftrightarrow \pi^t(b - Ax) + x^\cdot(A^t\pi - c) = 0\\
&\Leftrightarrow \pi^t b - \pi^t Ax + x^t A^t \pi - x^t c = 0\\
&\Leftrightarrow \pi^t b = x^t c\\
\text{starke Dualität} \longrightarrow \quad &\Leftrightarrow x \text{ und } \pi \text{ sind optimal}
\end{aligned}
$$

Satz vom komplementären Schlupf

Seien (P) und (D) zueinander duale lineare Programme. Sei x zulässig für (P) und π zulässig für (D).
Definiere $u_i := \pi_i(b_i - a_i.x) \quad \forall i = 1, \ldots, m$
und $v_j := x_j((a_{.j})^t\pi - c_j) \quad \forall j = 1, \ldots, n$.
Dann ist x optimal für (P) und π optimal für (D) genau dann wenn $u_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $v_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Beweis:
1. Zeige: $u_i \geq 0$ für alle i: ✓ 2. Zeige: $v_j \geq 0$ für alle j:✓

Sei $u := \sum_i u_i$ und $v := \sum_j v_j$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
u_i = 0 \quad \forall i \text{ und } v_j = 0 \quad \forall j \quad &\Leftrightarrow u = 0 \text{ und } v = 0 \\
&\Leftrightarrow \pi^t(b - Ax) = 0 \text{ und } x^{\cdot}(A^t\pi - c) = 0 \\
&\Leftrightarrow \pi^t(b - Ax) + x^{\cdot}(A^t\pi - c) = 0 \\
&\Leftrightarrow \pi^t b - \pi^t Ax + x^t A^t \pi - x^t c = 0 \\
&\Leftrightarrow \pi^t b = x^t c \\
\text{starke Dualität} \longrightarrow \quad &\Leftrightarrow x \text{ und } \pi \text{ sind optimal} \qquad ✓
\end{aligned}
$$

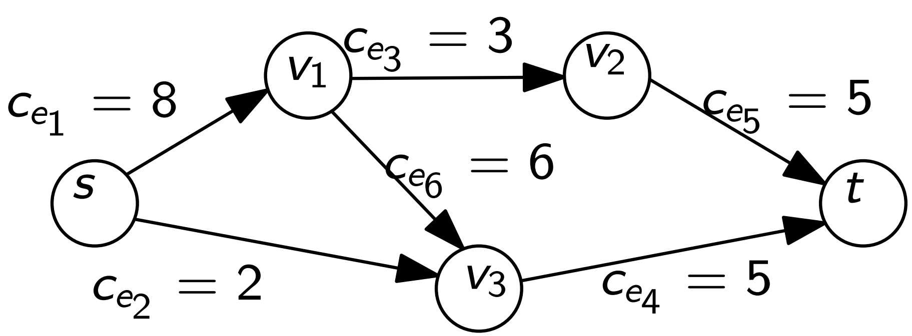
Wozu nützt uns die Dualität?(2)

- Jede *dual zulässige* Lösung ist (bei Maximierungsproblemen) eine obere Schranke an die primale Optimallösung - und hilft uns somit, die Lösungsqualität von primal zulässigen Lösungen zu bestimmen.

- Manchmal: duales Problem leichter zu lösen als das Primale

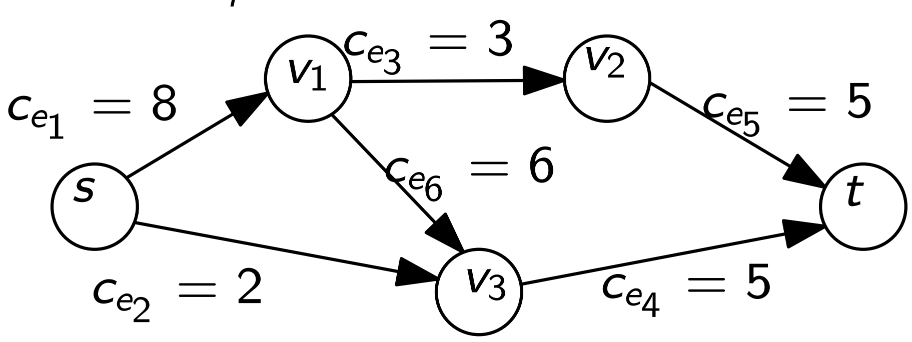
  Über Lösung des Dualen und den Satz vom komplementären Schlupf erhalten wir Lösung des Primalen.

Das Duale von Flussproblemen



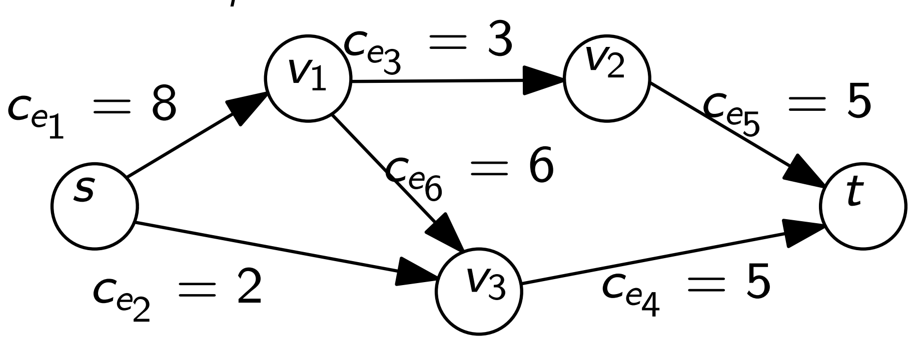
Das Duale von Flussproblemen

$$
\begin{aligned}
\text{(P)}\quad \max\ & f_{e_5} + f_{e_4} \\
\text{so dass } & f_{e_1} - f_{e_3} - f_{e_6} = 0 \\
& f_{e_3} - f_{e_5} = 0 \\
& f_{e_2} + f_{e_6} - f_{e_4} = 0 \\
& f_{e_1} \leq 8 \\
& f_{e_2} \leq 2 \\
& f_{e_3} \leq 3 \\
& f_{e_4} \leq 5 \\
& f_{e_5} \leq 7 \\
& f_{e_6} \leq 6 \\
& f_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 6
\end{aligned}
$$



Das Duale von Flussproblemen

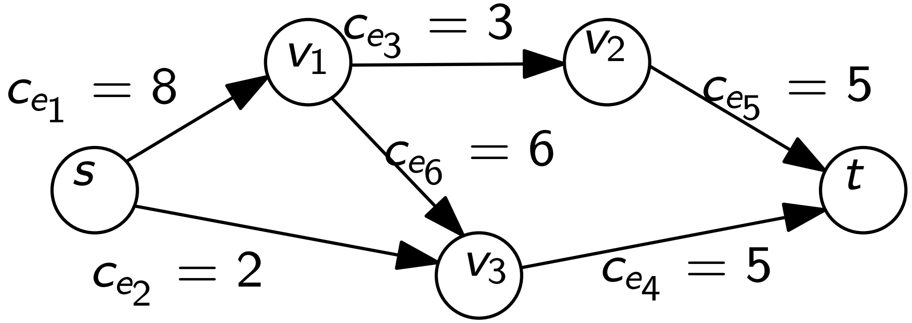
$$
\begin{array}{llll}
\text{(P)} & \max & f_{e_5} + f_{e_4} & \\
& \text{so dass} & f_{e_1} - f_{e_3} - f_{e_6} = 0 & (\pi_{v_1}) \\
& & f_{e_3} - f_{e_5} = 0 & (\pi_{v_2}) \\
& & f_{e_2} + f_{e_6} - f_{e_4} = 0 & (\pi_{v_3}) \\
& & f_{e_1} \leq 8 & (\lambda_{e_1}) \\
& & f_{e_2} \leq 2 & (\lambda_{e_2}) \\
& & f_{e_3} \leq 3 & (\lambda_{e_3}) \\
& & f_{e_4} \leq 5 & (\lambda_{e_4}) \\
& & f_{e_5} \leq 7 & (\lambda_{e_5}) \\
& & f_{e_6} \leq 6 & (\lambda_{e_6}) \\
& & f_{e_i} \geq 0 \ \ \forall i = 1, \dots, 6 &
\end{array}
$$



Das Duale von Flussproblemen

(P) max $f_{e_5} + f_{e_4}$

$$
\begin{aligned}
\text{so dass } & f_{e_1} - f_{e_3} - f_{e_6} = 0 && (\pi_{v_1}) \\
& f_{e_3} - f_{e_5} = 0 && (\pi_{v_2}) \\
& f_{e_2} + f_{e_6} - f_{e_4} = 0 && (\pi_{v_3}) \\
& f_{e_1} \leq 8 && (\lambda_{e_1}) \\
& f_{e_2} \leq 2 && (\lambda_{e_2}) \\
& f_{e_3} \leq 3 && (\lambda_{e_3}) \\
& f_{e_4} \leq 5 && (\lambda_{e_4}) \\
& f_{e_5} \leq 7 && (\lambda_{e_5}) \\
& f_{e_6} \leq 6 && (\lambda_{e_6}) \\
& f_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 6
\end{aligned}
$$

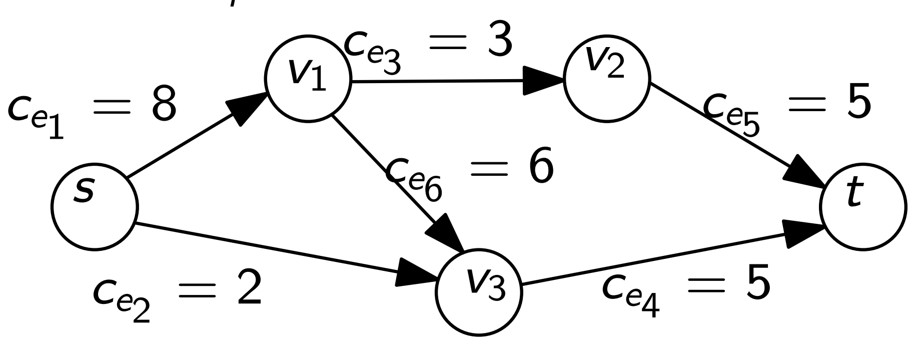


(D) min

$$\text{so dass } \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 \qquad (f_{e_1})$$

Das Duale von Flussproblemen

$$
\begin{aligned}
\text{(P)} \quad \max \quad & f_{e_5} + f_{e_4} \\
\text{so dass} \quad & f_{e_1} - f_{e_3} - f_{e_6} = 0 && (\pi_{v_1}) \\
& f_{e_3} - f_{e_5} = 0 && (\pi_{v_2}) \\
& f_{e_2} + f_{e_6} - f_{e_4} = 0 && (\pi_{v_3}) \\
& f_{e_1} \leq 8 && (\lambda_{e_1}) \\
& f_{e_2} \leq 2 && (\lambda_{e_2}) \\
& f_{e_3} \leq 3 && (\lambda_{e_3}) \\
& f_{e_4} \leq 5 && (\lambda_{e_4}) \\
& f_{e_5} \leq 7 && (\lambda_{e_5}) \\
& f_{e_6} \leq 6 && (\lambda_{e_6}) \\
& f_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 6
\end{aligned}
$$

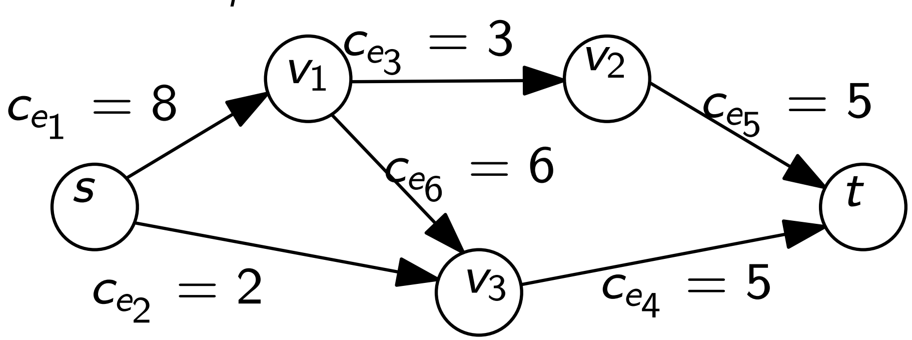


$$
\begin{aligned}
\text{(D)} \quad \min \quad & \\
\text{so dass} \quad & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 && (f_{e_1}) \\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 && (f_{e_2})
\end{aligned}
$$

Das Duale von Flussproblemen

(P)

$$
\begin{aligned}
\max\quad & f_{e_5} + f_{e_4} & \\
\text{so dass}\quad & f_{e_1} - f_{e_3} - f_{e_6} = 0 & (\pi_{v_1})\\
& f_{e_3} - f_{e_5} = 0 & (\pi_{v_2})\\
& f_{e_2} + f_{e_6} - f_{e_4} = 0 & (\pi_{v_3})\\
& f_{e_1} \leq 8 & (\lambda_{e_1})\\
& f_{e_2} \leq 2 & (\lambda_{e_2})\\
& f_{e_3} \leq 3 & (\lambda_{e_3})\\
& f_{e_4} \leq 5 & (\lambda_{e_4})\\
& f_{e_5} \leq 7 & (\lambda_{e_5})\\
& f_{e_6} \leq 6 & (\lambda_{e_6})\\
& f_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 6 &
\end{aligned}
$$



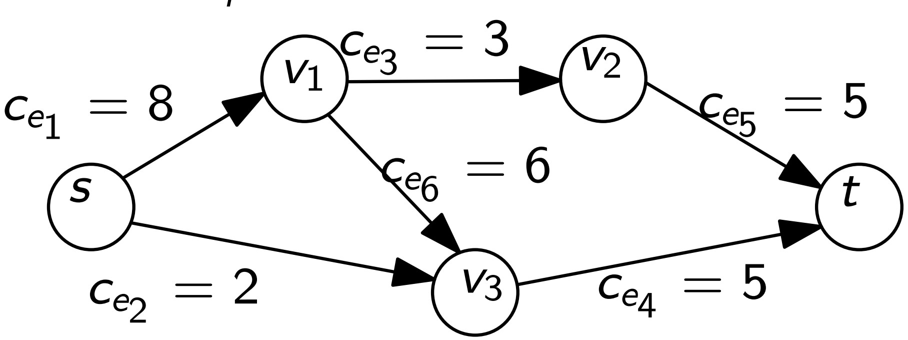
(D) min

$$
\begin{aligned}
\text{so dass}\quad & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 & (f_{e_1})\\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 & (f_{e_2})\\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \geq 0 & (f_{e_3})
\end{aligned}
$$

Das Duale von Flussproblemen

(P) max $f_{e_5} + f_{e_4}$

$$
\begin{aligned}
\text{so dass } & f_{e_1} - f_{e_3} - f_{e_6} = 0 && (\pi_{v_1}) \\
& f_{e_3} - f_{e_5} = 0 && (\pi_{v_2}) \\
& f_{e_2} + f_{e_6} - f_{e_4} = 0 && (\pi_{v_3}) \\
& f_{e_1} \le 8 && (\lambda_{e_1}) \\
& f_{e_2} \le 2 && (\lambda_{e_2}) \\
& f_{e_3} \le 3 && (\lambda_{e_3}) \\
& f_{e_4} \le 5 && (\lambda_{e_4}) \\
& f_{e_5} \le 7 && (\lambda_{e_5}) \\
& f_{e_6} \le 6 && (\lambda_{e_6}) \\
& f_{e_i} \ge 0 \quad \forall i = 1, \dots, 6
\end{aligned}
$$



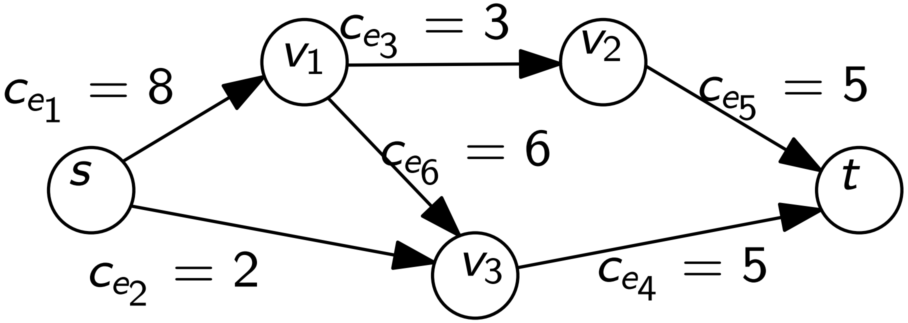
(D) min

$$
\begin{aligned}
\text{so dass } & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \ge 0 && (f_{e_1}) \\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \ge 0 && (f_{e_2}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \ge 0 && (f_{e_3}) \\
& -\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \ge 1 && (f_{e_4})
\end{aligned}
$$

Das Duale von Flussproblemen

(P) $\max \ f_{e_5} + f_{e_4}$

$$
\begin{aligned}
\text{so dass } & f_{e_1} - f_{e_3} - f_{e_6} = 0 && (\pi_{v_1})\\
& f_{e_3} - f_{e_5} = 0 && (\pi_{v_2})\\
& f_{e_2} + f_{e_6} - f_{e_4} = 0 && (\pi_{v_3})\\
& f_{e_1} \leq 8 && (\lambda_{e_1})\\
& f_{e_2} \leq 2 && (\lambda_{e_2})\\
& f_{e_3} \leq 3 && (\lambda_{e_3})\\
& f_{e_4} \leq 5 && (\lambda_{e_4})\\
& f_{e_5} \leq 7 && (\lambda_{e_5})\\
& f_{e_6} \leq 6 && (\lambda_{e_6})\\
& f_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 6
\end{aligned}
$$



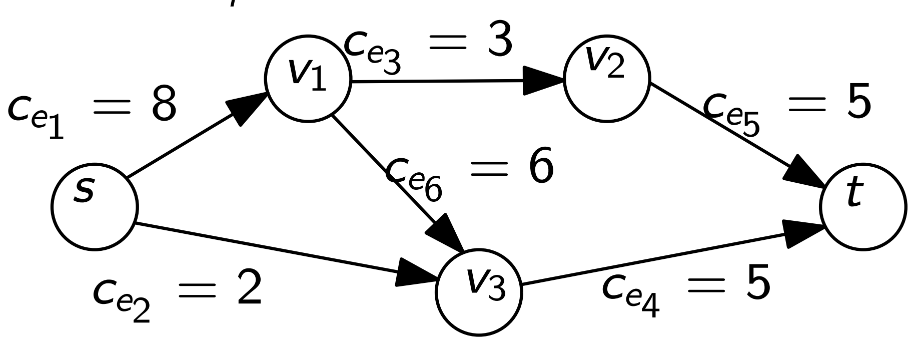
(D) min

$$
\begin{aligned}
\text{so dass } & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 && (f_{e_1})\\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 && (f_{e_2})\\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \geq 0 && (f_{e_3})\\
& -\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \geq 1 && (f_{e_4})\\
& -\pi_{v_2} + \lambda_{e_5} \geq 1 && (f_{e_5})\\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_3} + \lambda_{e_6} \geq 0 && (f_{e_6})
\end{aligned}
$$

Das Duale von Flussproblemen

(P) max $f_{e_5} + f_{e_4}$

$$
\begin{aligned}
\text{so dass } & f_{e_1} - f_{e_3} - f_{e_6} = 0 && (\pi_{v_1})\\
& f_{e_3} - f_{e_5} = 0 && (\pi_{v_2})\\
& f_{e_2} + f_{e_6} - f_{e_4} = 0 && (\pi_{v_3})\\
& f_{e_1} \leq 8 && (\lambda_{e_1})\\
& f_{e_2} \leq 2 && (\lambda_{e_2})\\
& f_{e_3} \leq 3 && (\lambda_{e_3})\\
& f_{e_4} \leq 5 && (\lambda_{e_4})\\
& f_{e_5} \leq 7 && (\lambda_{e_5})\\
& f_{e_6} \leq 6 && (\lambda_{e_6})\\
& f_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 6
\end{aligned}
$$



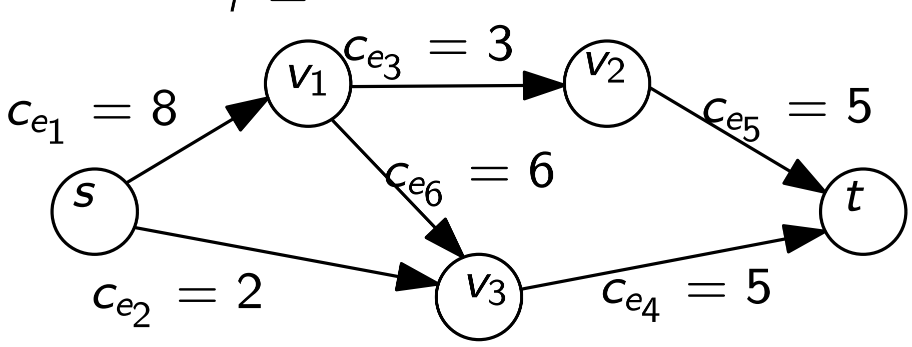
(D) min

$$
\begin{aligned}
\text{so dass } & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 && (f_{e_1})\\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 && (f_{e_2})\\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \geq 0 && (f_{e_3})\\
& -\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \geq 1 && (f_{e_4})\\
& -\pi_{v_2} + \lambda_{e_5} \geq 1 && (f_{e_5})\\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_3} + \lambda_{e_6} \geq 0 && (f_{e_6})\\
& \pi_{v_j} \gtrless 0 \quad \forall j = 1, 2, 3\\
& \lambda_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6
\end{aligned}
$$

Das Duale von Flussproblemen

(P) max $f_{e_5} + f_{e_4}$

$$
\begin{aligned}
\text{so dass } & f_{e_1} - f_{e_3} - f_{e_6} = 0 && (\pi_{v_1})\\
& f_{e_3} - f_{e_5} = 0 && (\pi_{v_2})\\
& f_{e_2} + f_{e_6} - f_{e_4} = 0 && (\pi_{v_3})\\
& f_{e_1} \leq 8 && (\lambda_{e_1})\\
& f_{e_2} \leq 2 && (\lambda_{e_2})\\
& f_{e_3} \leq 3 && (\lambda_{e_3})\\
& f_{e_4} \leq 5 && (\lambda_{e_4})\\
& f_{e_5} \leq 7 && (\lambda_{e_5})\\
& f_{e_6} \leq 6 && (\lambda_{e_6})\\
& f_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 6
\end{aligned}
$$



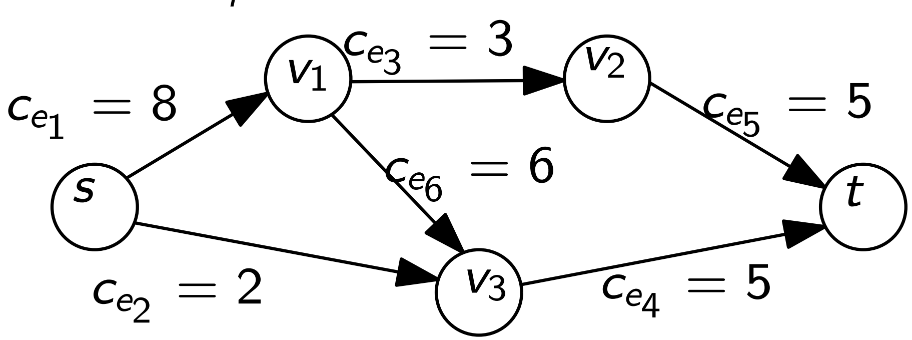
(D) min $8\lambda_{e_1} + 2\lambda_{e_2} + 3\lambda_{e_3} + 5\lambda_{e_4} + 5\lambda_{e_5} + 6\lambda_{e_6}$

$$
\begin{aligned}
\text{so dass } & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 && (f_{e_1})\\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 && (f_{e_2})\\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \geq 0 && (f_{e_3})\\
& -\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \geq 1 && (f_{e_4})\\
& -\pi_{v_2} + \lambda_{e_5} \geq 1 && (f_{e_5})\\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_3} + \lambda_{e_6} \geq 0 && (f_{e_6})\\
& \pi_{v_j} \gtrless 0 \quad \forall j = 1, 2, 3\\
& \lambda_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6
\end{aligned}
$$

Das Duale von Flussproblemen

(P) max $f_{e_5} + f_{e_4}$

so dass
$$f_{e_1} - f_{e_3} - f_{e_6} = 0 \qquad (\pi_{v_1})$$
$$f_{e_3} - f_{e_5} = 0 \qquad (\pi_{v_2})$$
$$f_{e_2} + f_{e_6} - f_{e_4} = 0 \qquad (\pi_{v_3})$$
$$f_{e_1} \leq 8 \qquad (\lambda_{e_1})$$
$$f_{e_2} \leq 2 \qquad (\lambda_{e_2})$$
$$f_{e_3} \leq 3 \qquad (\lambda_{e_3})$$
$$f_{e_4} \leq 5 \qquad (\lambda_{e_4})$$
$$f_{e_5} \leq 7 \qquad (\lambda_{e_5})$$
$$f_{e_6} \leq 6 \qquad (\lambda_{e_6})$$
$$f_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 6$$



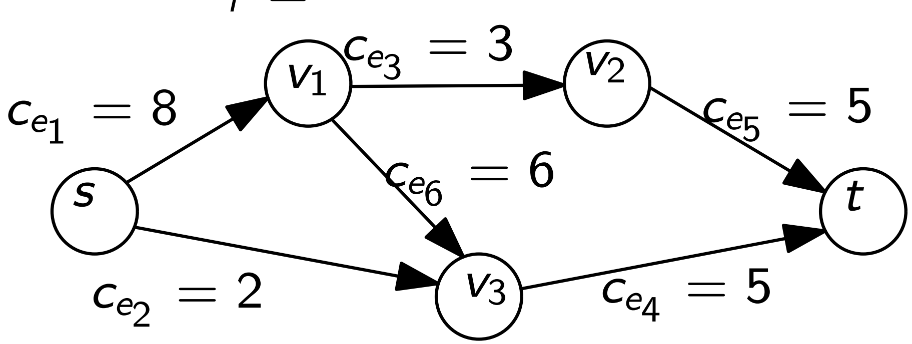
(D) min $8\lambda_{e_1} + 2\lambda_{e_2} + 3\lambda_{e_3} + 5\lambda_{e_4} + 5\lambda_{e_5} + 6\lambda_{e_6}$

so dass
$$\pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 \qquad (f_{e_1})$$
$$\pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 \qquad (f_{e_2})$$
$$-\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \geq 0 \qquad (f_{e_3})$$
$$-\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \geq 1 \qquad (f_{e_4})$$
$$-\pi_{v_2} + \lambda_{e_5} \geq 1 \qquad (f_{e_5})$$
$$-\pi_{v_1} + \pi_{v_3} + \lambda_{e_6} \geq 0 \qquad (f_{e_6})$$
$$\pi_{v_j} \gtrless 0 \quad \forall j = 1, 2, 3$$
$$\lambda_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Wie können wir (D) interpretieren?

Das Duale von Flussproblemen

$$
\begin{aligned}
\text{(P)}\quad \max\quad & f_{e_5} + f_{e_4} & \\
\text{so dass}\quad & f_{e_1} - f_{e_3} - f_{e_6} = 0 & (\pi_{v_1}) \\
& f_{e_3} - f_{e_5} = 0 & (\pi_{v_2}) \\
& f_{e_2} + f_{e_6} - f_{e_4} = 0 & (\pi_{v_3}) \\
& f_{e_1} \le 8 & (\lambda_{e_1}) \\
& f_{e_2} \le 2 & (\lambda_{e_2}) \\
& f_{e_3} \le 3 & (\lambda_{e_3}) \\
& f_{e_4} \le 5 & (\lambda_{e_4}) \\
& f_{e_5} \le 7 & (\lambda_{e_5}) \\
& f_{e_6} \le 6 & (\lambda_{e_6}) \\
& f_{e_i} \ge 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 6 &
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\text{(D)}\quad \min\quad & 8\lambda_{e_1} + 2\lambda_{e_2} + 3\lambda_{e_3} + 5\lambda_{e_4} & \\
& + 5\lambda_{e_5} + 6\lambda_{e_6} & \\
\text{so dass}\quad & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \ge 0 & (f_{e_1}) \\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \ge 0 & (f_{e_2}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \ge 0 & (f_{e_3}) \\
& -\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \ge 1 & (f_{e_4}) \\
& -\pi_{v_2} + \lambda_{e_5} \ge 1 & (f_{e_5}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_3} + \lambda_{e_6} \ge 0 & (f_{e_6}) \\
& \pi_{v_j} \gtrless 0 \quad \forall j = 1, 2, 3 & \\
& \lambda_{e_i} \ge 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 &
\end{aligned}
$$

Wie können wir (D) interpretieren?

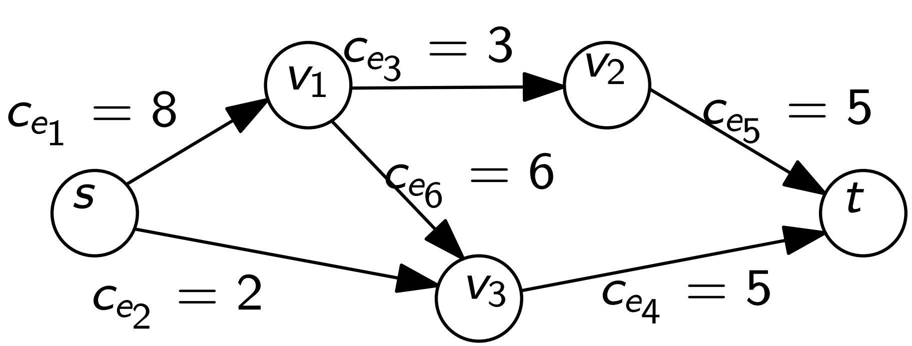
Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\}\ \forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\}\ \forall i = 1, \ldots, 6$

Das Duale von Flussproblemen

(wird auch **Relaxierung** genannt)

Relaxation
Sei ein mathematisches Programm $(P1)$ $\min\{z_1(y) : y \in Y_1\}$ gegeben.
Das Programm $(P2)$ $\min\{z_2(y) : y \in Y_2\}$ heißt **Relaxation** von (P_1), falls
- $P_1 \subseteq P_2$ und
- $z_2(y) \leq z_1(y)$ für alle $y \in P_1$

$$
\begin{aligned}
(D) \min \quad & 8\lambda_{e_1} + 2\lambda_{e_2} + 3\lambda_{e_3} + 5\lambda_{e_4} \\
& + 5\lambda_{e_5} + 6\lambda_{e_6} \\
\text{so dass } & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 && (f_{e_1}) \\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 && (f_{e_2}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \geq 0 && (f_{e_3}) \\
& -\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \geq 1 && (f_{e_4}) \\
& -\pi_{v_2} + \lambda_{e_5} \geq 1 && (f_{e_5}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_3} + \lambda_{e_6} \geq 0 && (f_{e_6}) \\
& \pi_{v_j} \gtrless 0 \quad \forall j = 1, 2, 3 \\
& \lambda_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6
\end{aligned}
$$



Wie können wir (D) interpretieren?

Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\}\ \forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\}\ \forall i = 1, \ldots, 6$

Das Duale von Flussproblemen

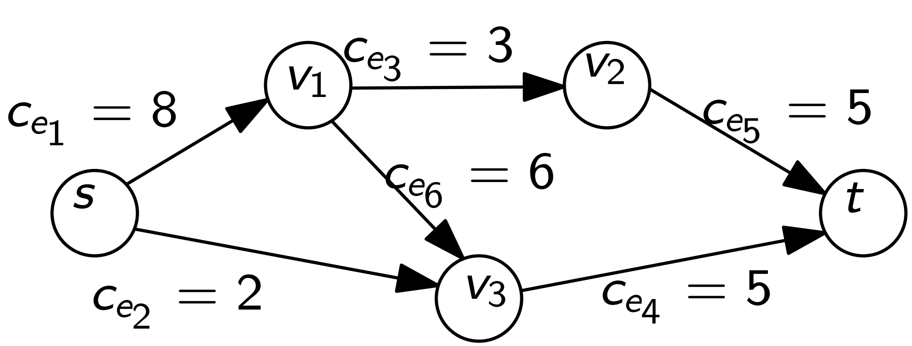
Relaxation
Sei ein mathematisches Programm $(P1)$ $\min\{z_1(y) : y \in Y_1\}$ gegeben.
Das Programm $(P2)$ $\min\{z_2(y) : y \in Y_2\}$ heißt **Relaxation** von (P_1), falls
- $P_1 \subseteq P_2$ und
- $z_2(y) \leq z_1(y)$ für alle $y \in P_1$

(D) min $8\lambda_{e_1} + 2\lambda_{e_2} + 3\lambda_{e_3} + 5\lambda_{e_4}$

Kann man natürlich auch für Maximierungsprobleme definieren. Wie?

s

$$\pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 \qquad (f_{e_2})$$
$$-\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \geq 0 \qquad (f_{e_3})$$
$$-\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \geq 1 \qquad (f_{e_4})$$
$$-\pi_{v_2} + \lambda_{e_5} \geq 1 \qquad (f_{e_5})$$
$$-\pi_{v_1} + \pi_{v_3} + \lambda_{e_6} \geq 0 \qquad (f_{e_6})$$
$$\pi_{v_j} \gtrless 0 \quad \forall j = 1,2,3$$
$$\lambda_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1,2,3,4,5,6$$



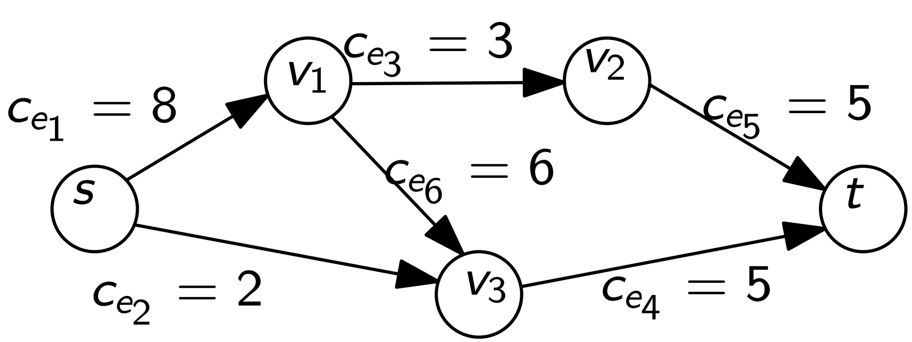
Wie können wir (D) interpretieren?

Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0,1\}\ \forall j = 1,2,3$
$\pi_{v_j} \in \{0,1\}\ \forall i = 1,\ldots,6$

Das Duale von Flussproblemen

Relaxation
Sei ein mathematisches Programm $(P1)$ $\min\{z_1(y) : y \in Y_1\}$ gegeben.
Das Programm $(P2)$ $\min\{z_2(y) : y \in Y_2\}$ heißt **Relaxation** von (P_1), falls
- $P_1 \subseteq P_2$ und
- $z_2(y) \leq z_1(y)$ für alle $y \in P_1$

$$
\begin{aligned}
\text{(D) min} \quad & 8\lambda_{e_1} + 2\lambda_{e_2} + 3\lambda_{e_3} + 5\lambda_{e_4} \\
& + 5\lambda_{e_5} + 6\lambda_{e_6} \\
\text{so dass} \quad & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 && (f_{e_1}) \\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 && (f_{e_2}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \geq 0 && (f_{e_3}) \\
& -\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \geq 1 && (f_{e_4}) \\
& -\pi_{v_2} + \lambda_{e_5} \geq 1 && (f_{e_5}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_3} + \lambda_{e_6} \geq 0 && (f_{e_6}) \\
& \pi_{v_j} \gtrless 0 \quad \forall j = 1, 2, 3 \\
& \lambda_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6
\end{aligned}
$$



Wie können wir (D) interpretieren?

Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\}\ \forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\}\ \forall i = 1, \ldots, 6$

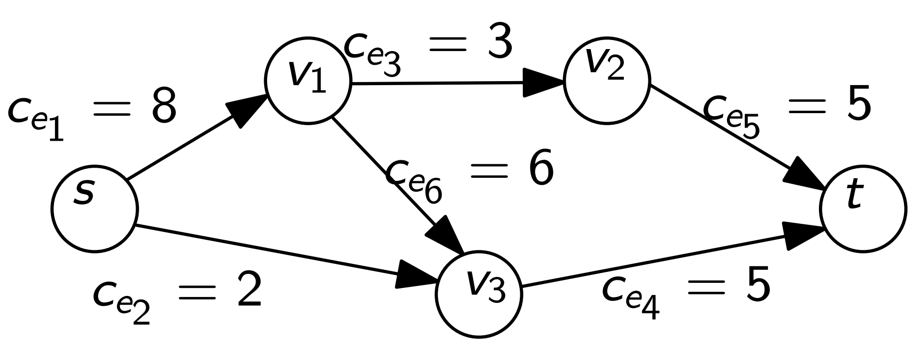
Das Duale von Flussproblemen

Relaxation

Sei ein mathematisches Programm ($P1$) $\min\{z_1(y) : y \in Y_1\}$ gegeben.
Das Programm ($P2$) $\min\{z_2(y) : y \in Y_2\}$ heißt **Relaxation** von (P_1), falls

- $P_1 \subseteq P_2$ und
- $z_2(y) \leq z_1(y)$ für alle $y \in P_1$

$$
\begin{aligned}
\text{(D)} \min \quad & 8\lambda_{e_1} + 2\lambda_{e_2} + 3\lambda_{e_3} + 5\lambda_{e_4} \\
& + 5\lambda_{e_5} + 6\lambda_{e_6} \\
\text{so dass} \quad & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 & (f_{e_1}) \\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 & (f_{e_2}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \geq 0 & (f_{e_3}) \\
& -\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \geq 1 & (f_{e_4}) \\
& -\pi_{v_2} + \lambda_{e_5} \geq 1 & (f_{e_5}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_3} + \lambda_{e_6} \geq 0 & (f_{e_6}) \\
& \pi_{v_j} \gtrless 0 \quad \forall j = 1, 2, 3 \\
& \lambda_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6
\end{aligned}
$$



Wie können wir (D) interpretieren?

Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\} \; \forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\} \; \forall i = 1, \dots, 6$

(D) ist eine Relaxation von (D2).

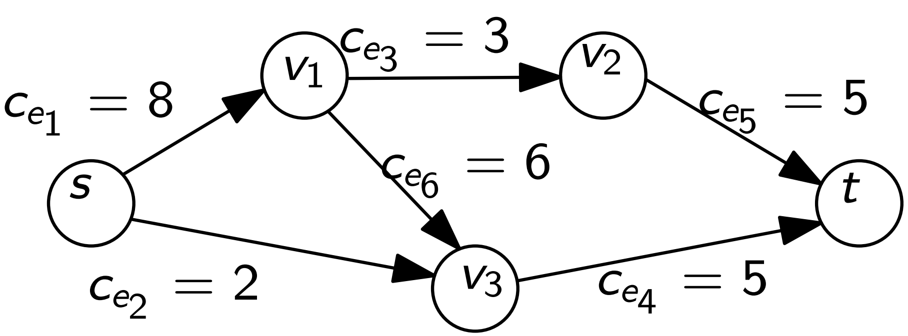
Das Duale von Flussproblemen

Relaxation
Sei ein mathematisches Programm $(P1)$
$\min\{z_1(y) : y \in Y_1\}$ gegeben.
Das Programm $(P2)$
$\min\{z_2(y) : y \in Y_2\}$ heißt **Relaxation** von (P_1), falls

- $P_1 \subseteq P_2$ und
- $z_2(y) \leq z_1(y)$ für alle $y \in P_1$

Es gilt: Ist $y \in P_1$ optimal für (P_2)
$\Rightarrow$ y optimal für (P_1)

$$
\begin{array}{lll}
\text{(D)}\ \min & 8\lambda_{e_1} + 2\lambda_{e_2} + 3\lambda_{e_3} + 5\lambda_{e_4} & \\
& + 5\lambda_{e_5} + 6\lambda_{e_6} & \\
\text{so dass} & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 & (f_{e_1}) \\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 & (f_{e_2}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \geq 0 & (f_{e_3}) \\
& -\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \geq 1 & (f_{e_4}) \\
& -\pi_{v_2} + \lambda_{e_5} \geq 1 & (f_{e_5}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_3} + \lambda_{e_6} \geq 0 & (f_{e_6}) \\
& \pi_{v_j} \gtrless 0 \quad \forall j = 1, 2, 3 & \\
& \lambda_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 &
\end{array}
$$



Wie können wir (D) interpretieren?

Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\}\ \forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\}\ \forall i = 1, \ldots, 6$

(D) ist eine Relaxation von (D2).

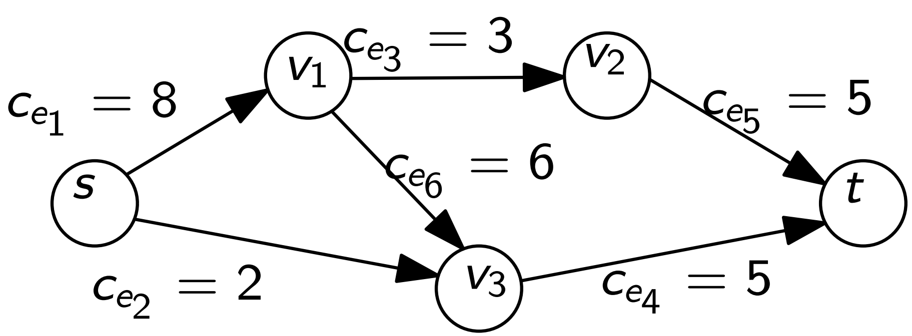
Das Duale von Flussproblemen

Relaxation
Sei ein mathematisches Programm $(P1)$
$\min\{z_1(y) : y \in Y_1\}$ gegeben.
Das Programm $(P2)$
$\min\{z_2(y) : y \in Y_2\}$ heißt **Relaxation** von (P_1), falls
- $P_1 \subseteq P_2$ und
- $z_2(y) \leq z_1(y)$ für alle $y \in P_1$

Es gilt: Ist $y \in P_1$ optimal für (P_2)
$\Rightarrow$ y optimal für (P_1)

Die Relaxation, die wir durch Weglassen aller Ganzzahligkeitsbedingungen in (P1) erhalten, nennen wir **LP-Relaxation**.

$$
\begin{aligned}
\text{(D) min} \quad & 8\lambda_{e_1} + 2\lambda_{e_2} + 3\lambda_{e_3} + 5\lambda_{e_4} \\
& + 5\lambda_{e_5} + 6\lambda_{e_6} \\
\text{so dass} \quad & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 && (f_{e_1}) \\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 && (f_{e_2}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \geq 0 && (f_{e_3}) \\
& -\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \geq 1 && (f_{e_4}) \\
& -\pi_{v_2} + \lambda_{e_5} \geq 1 && (f_{e_5}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_3} + \lambda_{e_6} \geq 0 && (f_{e_6}) \\
& \pi_{v_j} \gtrless 0 \quad \forall j = 1, 2, 3 \\
& \lambda_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6
\end{aligned}
$$



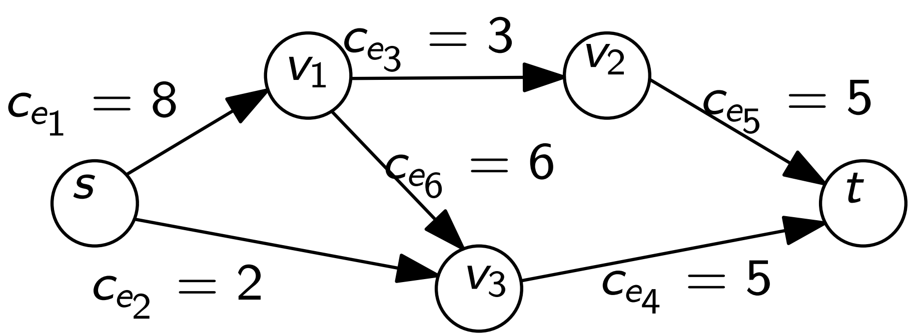
Wie können wir (D) interpretieren?

Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\}\ \forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\}\ \forall i = 1, \ldots, 6$

(D) ist eine Relaxation von (D2).

Das Duale von Flussproblemen

$$\begin{aligned}
\text{(D) min} \quad & 8\lambda_{e_1} + 2\lambda_{e_2} + 3\lambda_{e_3} + 5\lambda_{e_4} \\
& + 5\lambda_{e_5} + 6\lambda_{e_6} \\
\text{so dass} \quad & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 && (f_{e_1}) \\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 && (f_{e_2}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \geq 0 && (f_{e_3}) \\
& -\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \geq 1 && (f_{e_4}) \\
& -\pi_{v_2} + \lambda_{e_5} \geq 1 && (f_{e_5}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_3} + \lambda_{e_6} \geq 0 && (f_{e_6}) \\
& \pi_{v_j} \gtrless 0 \quad \forall j = 1, 2, 3 \\
& \lambda_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6
\end{aligned}$$



Wie können wir (D) interpretieren?

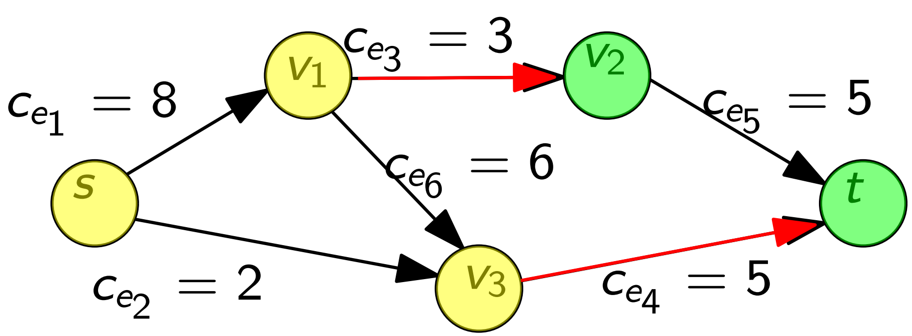
Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\} \; \forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\} \; \forall i = 1, \ldots, 6$

(D) ist eine Relaxation von (D2).

Das Duale von Flussproblemen

$$
\begin{aligned}
\text{(D) min} \quad & 8\lambda_{e_1} + 2\lambda_{e_2} + 3\lambda_{e_3} + 5\lambda_{e_4} \\
& + 5\lambda_{e_5} + 6\lambda_{e_6} \\
\text{so dass} \quad & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 && (f_{e_1}) \\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 && (f_{e_2}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \geq 0 && (f_{e_3}) \\
& -\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \geq 1 && (f_{e_4}) \\
& -\pi_{v_2} + \lambda_{e_5} \geq 1 && (f_{e_5}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_3} + \lambda_{e_6} \geq 0 && (f_{e_6}) \\
& \pi_{v_j} \gtrless 0 \quad \forall j = 1, 2, 3 \\
& \lambda_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6
\end{aligned}
$$

Eine Beispiellösung für (D2) (und (D)):
gelb: Variable hat Wert 0
grün: Variable hat Wert 1
rot: Variable hat Wert 1



Wie können wir (D) interpretieren?

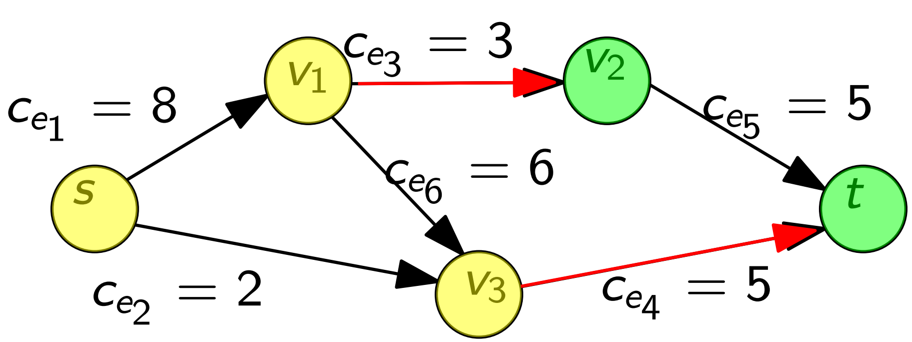
Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\} \; \forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\} \; \forall i = 1, \ldots, 6$

(D) ist eine Relaxation von (D2).

Das Duale von Flussproblemen

$$
\begin{aligned}
\text{(D) min} \quad & 8\lambda_{e_1} + 2\lambda_{e_2} + 3\lambda_{e_3} + 5\lambda_{e_4} \\
& + 5\lambda_{e_5} + 6\lambda_{e_6} \\
\text{so dass} \quad & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 && (f_{e_1}) \\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 && (f_{e_2}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \geq 0 && (f_{e_3}) \\
& -\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \geq 1 && (f_{e_4}) \\
& -\pi_{v_2} + \lambda_{e_5} \geq 1 && (f_{e_5}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_3} + \lambda_{e_6} \geq 0 && (f_{e_6}) \\
& \pi_{v_j} \gtrless 0 \quad \forall j = 1, 2, 3 \\
& \lambda_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6
\end{aligned}
$$

Eine Beispiellösung für (D2) (und (D)):
gelb: Variable hat Wert 0
grün: Variable hat Wert 1
rot: Variable hat Wert 1



Wie können wir (D) interpretieren?

Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\}$ $\forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\}$ $\forall i = 1, \ldots, 6$

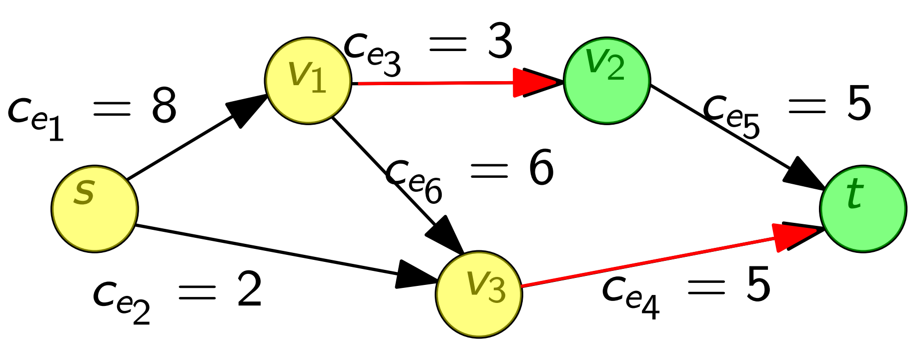
(D) ist eine Relaxation von (D2).

Das Duale von Flussproblemen

Beobachtung: Ein s-t-Schnitt (S, T) lässt sich als Lösung von (D) (oder (D2)) modellieren als:

$$\pi_{v_j} = \begin{cases} 0 & v_j \in S \\ 1 & v_j \in T \end{cases} \quad \lambda_{(v_i,v_j)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in S, v_j \in T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine Beispiellösung für (D2) (und (D)):
gelb: Variable hat Wert 0
grün: Variable hat Wert 1
rot: Variable hat Wert 1



$$\begin{aligned}
\text{(D) min} \quad & 8\lambda_{e_1} + 2\lambda_{e_2} + 3\lambda_{e_3} + 5\lambda_{e_4} \\
& + 5\lambda_{e_5} + 6\lambda_{e_6} \\
\text{so dass} \quad & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 && (f_{e_1}) \\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 && (f_{e_2}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \geq 0 && (f_{e_3}) \\
& -\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \geq 1 && (f_{e_4}) \\
& -\pi_{v_2} + \lambda_{e_5} \geq 1 && (f_{e_5}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_3} + \lambda_{e_6} \geq 0 && (f_{e_6}) \\
& \pi_{v_j} \gtrless 0 \quad \forall j = 1, 2, 3 \\
& \lambda_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6
\end{aligned}$$

Wie können wir (D) interpretieren?

Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\} \ \forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\} \ \forall i = 1, \ldots, 6$

(D) ist eine Relaxation von (D2).

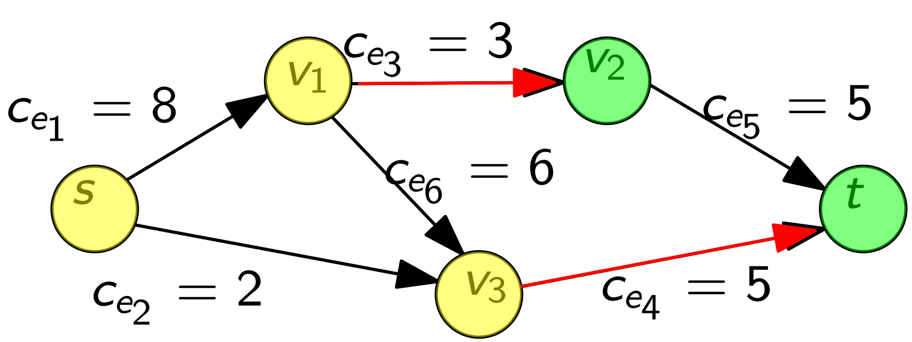
Das Duale von Flussproblemen

Beobachtung: Ein s-t-Schnitt (S, T) lässt sich als Lösung von (D) (oder (D2)) modellieren als:

$$\pi_{v_j} = \begin{cases} 0 & v_j \in S \\ 1 & v_j \in T \end{cases} \quad \lambda_{(v_i,v_j)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in S, v_j \in T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $8\lambda_{e_1} + 2\lambda_{e_2} + 3\lambda_{e_3} + 5\lambda_{e_4} + 5\lambda_{e_5} + 6\lambda_{e_6}$ = Kapazität des Schnitts

Eine Beispiellösung für (D2) (und (D)):
gelb: Variable hat Wert 0
grün: Variable hat Wert 1
rot: Variable hat Wert 1



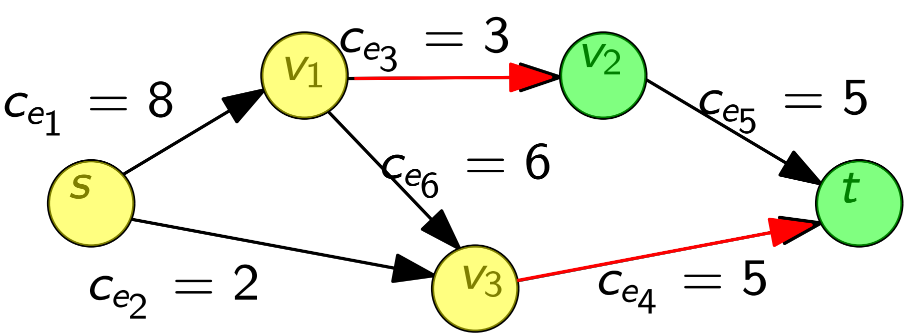
$$\begin{array}{llr}
\text{(D) min} & 8\lambda_{e_1} + 2\lambda_{e_2} + 3\lambda_{e_3} + 5\lambda_{e_4} & \\
& + 5\lambda_{e_5} + 6\lambda_{e_6} & \\
\text{so dass} & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 & (f_{e_1}) \\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 & (f_{e_2}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \geq 0 & (f_{e_3}) \\
& -\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \geq 1 & (f_{e_4}) \\
& -\pi_{v_2} + \lambda_{e_5} \geq 1 & (f_{e_5}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_3} + \lambda_{e_6} \geq 0 & (f_{e_6}) \\
& \pi_{v_j} \gtrless 0 \quad \forall j = 1, 2, 3 & \\
& \lambda_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 &
\end{array}$$

Wie können wir (D) interpretieren?

Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\} \; \forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\} \; \forall i = 1, \ldots, 6$

(D) ist eine Relaxation von (D2).

Das Duale von Flussproblemen



Wie können wir (D) interpretieren?

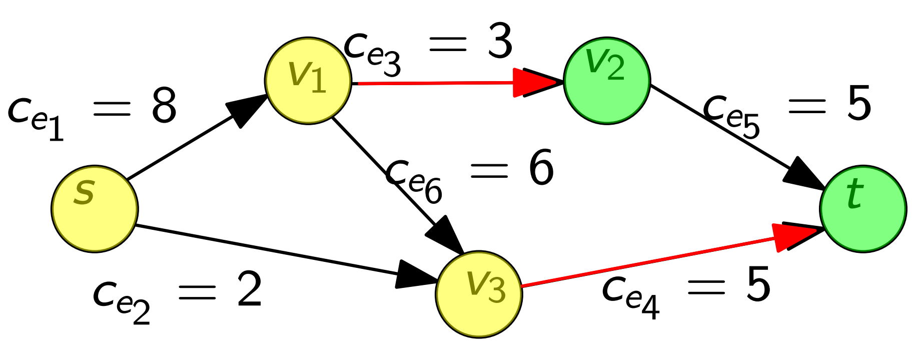
Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\}\ \forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\}\ \forall i = 1, \ldots, 6$

(D) ist eine Relaxation von (D2).

Das Duale von Flussproblemen

Es gilt:

- ((D) Relaxation von (D2)): $z_{D2}(\pi, \lambda) \geq z_D(\pi, \lambda)\ \forall(\pi, \lambda) \in Y$
- (schwache Dualität:) Jede zulässige Lösung von (D) ist eine obere Schranke an (P): $z_P(f) \leq z_D(\pi, \lambda)$ für alle $f \in X$ und alle $(\pi, \lambda) \in Y$
- (MaxFlow/MinCut:) Der Zielfunktionswert einer Optimallösung (π^*, λ^*) von (D2) ist gleich dem Zielfunktionswert einer Optimallösung f^* von (P): $z_P(x^*) = z_{D2}(\pi^*, \lambda^*)$



Wie können wir (D) interpretieren?

Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\}\ \forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\}\ \forall i = 1, \ldots, 6$

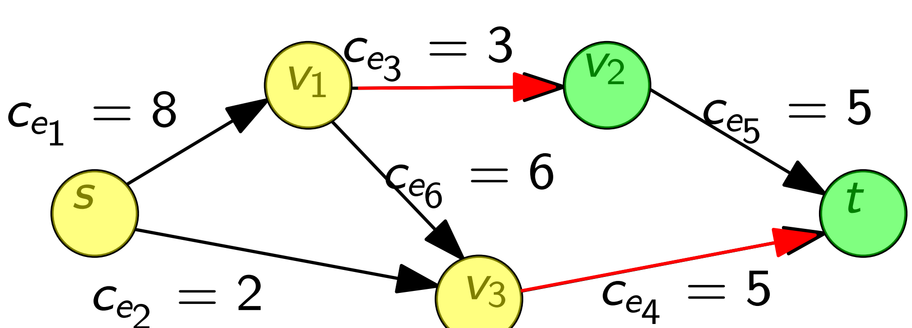
(D) ist eine Relaxation von (D2).

Das Duale von Flussproblemen

Es gilt:

- ((D) Relaxation von (D2)): $z_{D2}(\pi, \lambda) \geq z_D(\pi, \lambda)\ \forall(\pi, \lambda) \in Y$
- (schwache Dualität:) Jede zulässige Lösung von (D) ist eine obere Schranke an (P): $z_P(f) \leq z_D(\pi, \lambda)$ für alle $f \in X$ und alle $(\pi, \lambda) \in Y$
- (MaxFlow/MinCut:) Der Zielfunktionswert einer Optimallösung (π^*, λ^*) von (D2) ist gleich dem Zielfunktionswert einer Optimallösung f^* von (P): $z_P(x^*) = z_{D2}(\pi^*, \lambda^*)$

Zusammengesetzt: $z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*) \geq z_P(f^*) = z_{D2}(\pi_2^*, \lambda_2^*) = z_D(\pi_2^*, \lambda_2^*) \geq z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*)$



Wie können wir (D) interpretieren?

Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\}\ \forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\}\ \forall i = 1, \ldots, 6$

(D) ist eine Relaxation von (D2).

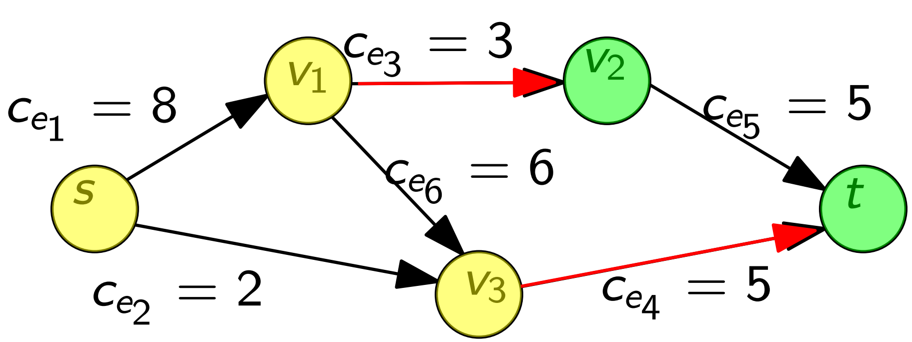
Das Duale von Flussproblemen

Es gilt:

- ((D) Relaxation von (D2)): $z_{D2}(\pi, \lambda) \geq z_D(\pi, \lambda)\ \forall(\pi, \lambda) \in Y$
- (schwache Dualität:) Jede zulässige Lösung von (D) ist eine obere Schranke an (P): $z_P(f) \leq z_D(\pi, \lambda)$ für alle $f \in X$ und alle $(\pi, \lambda) \in Y$
- (MaxFlow/MinCut:) Der Zielfunktionswert einer Optimallösung (π^*, λ^*) von (D2) ist gleich dem Zielfunktionswert einer Optimallösung f^* von (P): $z_P(x^*) = z_{D2}(\pi^*, \lambda^*)$

Zusammengesetzt: $z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*) \geq z_P(f^*) = z_{D2}(\pi_2^*, \lambda_2^*) = z_D(\pi_2^*, \lambda_2^*) \geq z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*)$

Also gilt: $z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*) = z_P(f^*) = z_{D2}(\pi_2^*, \lambda_2^*) = z_D(\pi_2^*, \lambda_2^*) = z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*)$



Wie können wir (D) interpretieren?

Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\}\ \forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\}\ \forall i = 1, \ldots, 6$

(D) ist eine Relaxation von (D2).

Das Duale von Flussproblemen

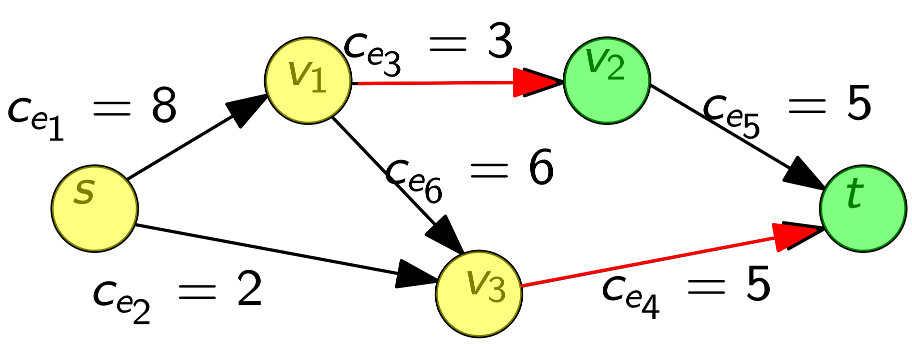
Es gilt:

- ((D) Relaxation von (D2)): $z_{D2}(\pi, \lambda) \geq z_D(\pi, \lambda)\ \forall(\pi, \lambda) \in Y$
- (schwache Dualität:) Jede zulässige Lösung von (D) ist eine obere Schranke an (P): $z_P(f) \leq z_D(\pi, \lambda)$ für alle $f \in X$ und alle $(\pi, \lambda) \in Y$
- (MaxFlow/MinCut:) Der Zielfunktionswert einer Optimallösung (π^*, λ^*) von (D2) ist gleich dem Zielfunktionswert einer Optimallösung f^* von (P): $z_P(x^*) = z_{D2}(\pi^*, \lambda^*)$

Zusammengesetzt: $z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*) \geq z_P(f^*) = z_{D2}(\pi_2^*, \lambda_2^*) = z_D(\pi_2^*, \lambda_2^*) \geq z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*)$

Also gilt: $z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*) = z_P(f^*) = z_{D2}(\pi_2^*, \lambda_2^*) = z_D(\pi_2^*, \lambda_2^*) = z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*)$

Aus $z_D(\pi_2^*, \lambda_2^*) = z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*)$ folgt: (π_2^*, λ_2^*) ist Optimallösung für (D).



Wie können wir (D) interpretieren?

Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\}\ \forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\}\ \forall i = 1, \ldots, 6$

(D) ist eine Relaxation von (D2).

Das Duale von Flussproblemen

Es gilt:

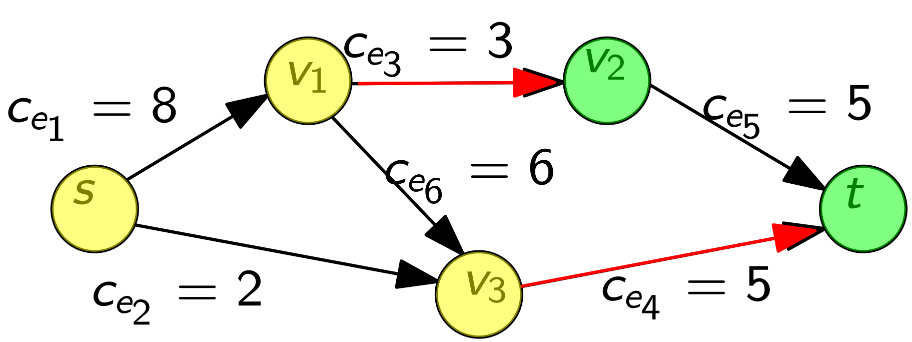
- ((D) Relaxation von (D2)): $z_{D2}(\pi, \lambda) \geq z_D(\pi, \lambda) \ \forall (\pi, \lambda) \in Y$
- (schwache Dualität:) Jede zulässige Lösung von (D) ist eine obere Schranke an (P): $z_P(f) \leq z_D(\pi, \lambda)$ für alle $f \in X$ und alle $(\pi, \lambda) \in Y$
- (MaxFlow/MinCut:) Der Zielfunktionswert einer Optimallösung (π^*, λ^*) von (D2) ist gleich dem Zielfunktionswert einer Optimallösung f^* von (P): $z_P(x^*) = z_{D2}(\pi^*, \lambda^*)$

Zusammengesetzt: $z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*) \geq z_P(f^*) = z_{D2}(\pi_2^*, \lambda_2^*) = z_D(\pi_2^*, \lambda_2^*) \geq z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*)$

Also gilt: $z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*) = z_P(f^*) = z_{D2}(\pi_2^*, \lambda_2^*) = z_D(\pi_2^*, \lambda_2^*) = z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*)$

Aus $z_D(\pi_2^*, \lambda_2^*) = z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*)$ folgt: (π_2^*, λ_2^*) ist Optimallösung für (D).

Das Duale (D) vom MaxFluss Problem können wir also als Problem, einen minimalen Schnitt zu finden, interpretieren.



Wie können wir (D) interpretieren?

Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\} \ \forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\} \ \forall i = 1, \ldots, 6$

(D) ist eine Relaxation von (D2).

Das Duale von Flussproblemen

Es gilt:

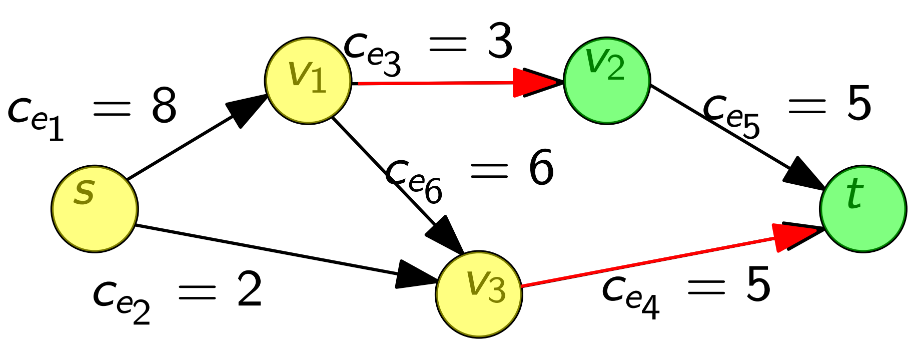
- ((D) Relaxation von (D2)): $z_{D2}(\pi, \lambda) \geq z_D(\pi, \lambda)\ \forall (\pi, \lambda) \in Y$
- (schwache Dualität:) Jede zulässige Lösung von (D) ist eine obere Schranke an (P): $z_P(f) \leq z_D(\pi, \lambda)$ für alle $f \in X$ und alle $(\pi, \lambda) \in Y$
- (MaxFlow/MinCut:) Der Zielfunktionswert einer Optimallösung (π^*, λ^*) von (D2) ist gleich dem Zielfunktionswert einer Optimallösung f^* von (P): $z_P(x^*) = z_{D2}(\pi^*, \lambda^*)$

Zusammengesetzt: $z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*) \geq z_P(f^*) = z_{D2}(\pi_2^*, \lambda_2^*) = z_D(\pi_2^*, \lambda_2^*) \geq z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*)$

Also gilt: $z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*) = z_P(f^*) = z_{D2}(\pi_2^*, \lambda_2^*) = z_D(\pi_2^*, \lambda_2^*) = z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*)$

Aus $z_D(\pi_2^*, \lambda_2^*) = z_D(\pi_1^*, \lambda_1^*)$ folgt: (π_2^*, λ_2^*) ist Optimallösung für (D).

Das Duale (D) vom MaxFluss Problem können wir also als Problem, einen minimalen Schnitt zu finden, interpretieren.
Tatsächlich entsprechen sogar alle Basislösungen von (D) *s*-*t*-Schnitten. Das hat mit einer Eigenschaft der Nebenbedingungsmatrix zu tun (sie ist *total unimodular* - was das bedeutet lernen wir auf dem Übungsblatt und nächste Woche).



Wie können wir (D) interpretieren?

Betrachten LP (D2):
(D) + Nebenbedingungen
$\lambda_{e_i} \in \{0, 1\}\ \forall j = 1, 2, 3$
$\pi_{v_j} \in \{0, 1\}\ \forall i = 1, \ldots, 6$

(D) ist eine Relaxation von (D2).

Das Duale von Flussproblemen

$$
\begin{aligned}
\text{(P)}\quad \max\quad & f_{e_5} + f_{e_4} & \\
\text{so dass}\quad & f_{e_1} - f_{e_3} - f_{e_6} = 0 & (\pi_{v_1}) \\
& f_{e_3} - f_{e_5} = 0 & (\pi_{v_2}) \\
& f_{e_2} + f_{e_6} - f_{e_4} = 0 & (\pi_{v_3}) \\
& f_{e_1} \leq 8 & (\lambda_{e_1}) \\
& f_{e_2} \leq 2 & (\lambda_{e_2}) \\
& f_{e_3} \leq 3 & (\lambda_{e_3}) \\
& f_{e_4} \leq 5 & (\lambda_{e_4}) \\
& f_{e_5} \leq 7 & (\lambda_{e_5}) \\
& f_{e_6} \leq 6 & (\lambda_{e_6}) \\
& f_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 6 &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(D)}\ \min\quad & 8\lambda_{e_1} + 2\lambda_{e_2} + 3\lambda_{e_3} + 5\lambda_{e_4} & \\
& + 5\lambda_{e_5} + 6\lambda_{e_6} & \\
\text{so dass}\quad & \pi_{v_1} + \lambda_{e_1} \geq 0 & (f_{e_1}) \\
& \pi_{v_3} + \lambda_{e_2} \geq 0 & (f_{e_2}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_2} + \lambda_{e_3} \geq 0 & (f_{e_3}) \\
& -\pi_{v_3} + \lambda_{e_4} \geq 1 & (f_{e_4}) \\
& -\pi_{v_2} + \lambda_{e_5} \geq 1 & (f_{e_5}) \\
& -\pi_{v_1} + \pi_{v_3} + \lambda_{e_6} \geq 0 & (f_{e_6}) \\
& \pi_{v_j} \gtrless 0 \quad \forall j = 1, 2, 3 & \\
& \lambda_{e_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 &
\end{aligned}
$$

Wie können wir (D) interpretieren?

Die Basislösungen von (D) entsprechen s-t-Schnitten, die Optimallösung von (D) ist ein minimaler Schnitt,

Wozu nützt uns die Dualität?(3)

- Jede *dual zulässige* Lösung ist (bei Maximierungsproblemen) eine obere Schranke an die primale Optimallösung - und hilft uns somit, die Lösungsqualität von primal zulässigen Lösungen zu bestimmen.

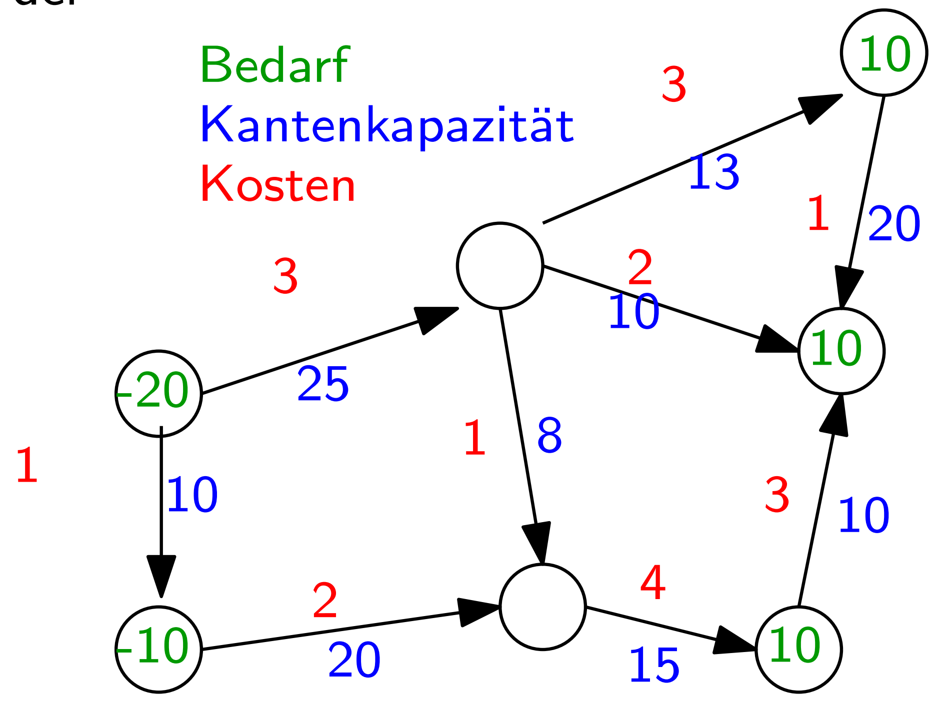
- Manchmal: duales Problem leichter zu lösen als das Primale

  Über Lösung des Dualen und den Satz vom komplementären Schlupf erhalten wir Lösung des Primalen.

- Duales vom 'Maximaler Fluss'-Problem zusammen mit MaxFlow-MinCut-Satz erlaubt es, 'Minimaler Schnitt'-Problem als *lineares* Programm zu formulieren.

Bedarfsflussproblem

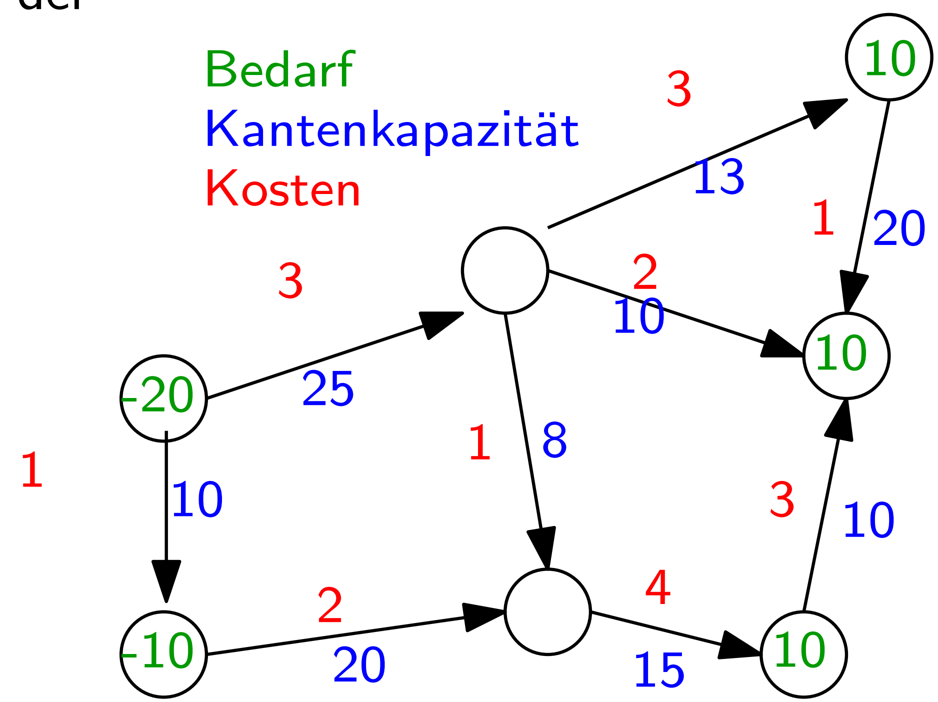
Situation: Im Katastrophenfall sollen Hilfslieferungen aus den Lagern (links) zu den Bedarfstätten (rechts) gebracht werden, wobei der Bedarf vollständig gedeckt werden soll. Transportwege (Kanten) sind kapazitätsbeschränkt. Dabei sollen die Transportkosten minimiert werden.



Bedarfsflussproblem

$$
\begin{aligned}
\text{(LP)}\quad \min\quad & {\color{red}k}^t\mathbf{f} \\
\text{so dass } A\mathbf{f} &= {\color{green}b} \\
\mathbf{f}_e &\leq {\color{blue}c_e} \qquad \forall e \in E \\
\mathbf{f}_e &\geq 0 \qquad \forall e \in E
\end{aligned}
$$

Situation: Im Katastrophenfall sollen Hilfslieferungen aus den Lagern (links) zu den Bedarfstätten (rechts) gebracht werden, wobei der Bedarf vollständig gedeckt werden soll. Transportwege (Kanten) sind kapazitätsbeschränkt. Dabei sollen die Transportkosten minimiert werden.

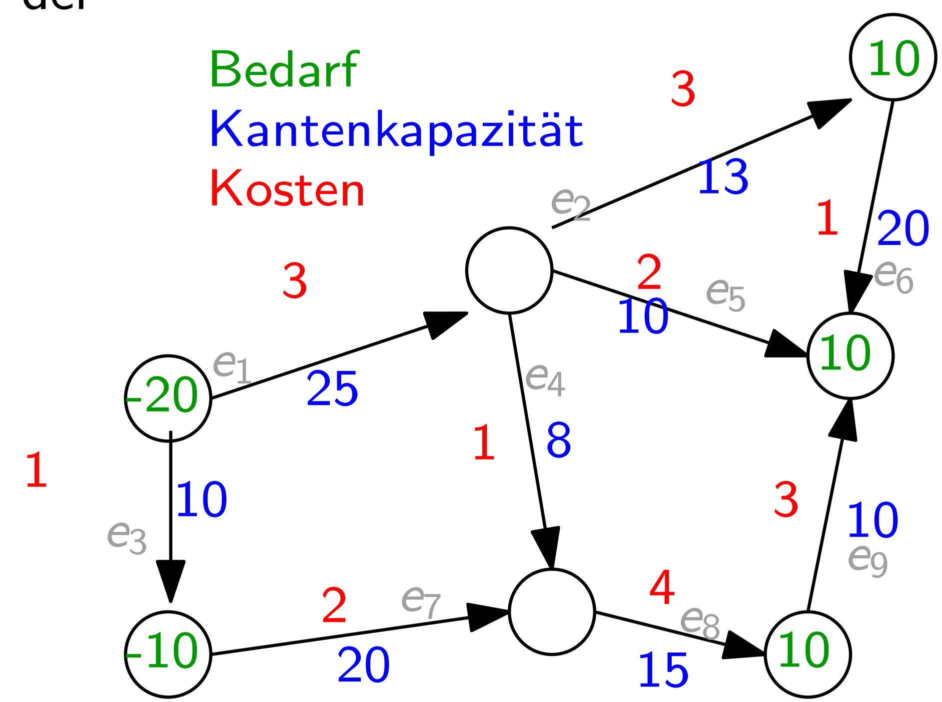


Bedarfsflussproblem

$$
\begin{aligned}
-\mathbf{f}_{e_1} - \mathbf{f}_{e_3} &= -20\\
\mathbf{f}_{e_3} - \mathbf{f}_{e_7} &= -10\\
\mathbf{f}_{e_1} - \mathbf{f}_{e_2} - \mathbf{f}_{e_5} - \mathbf{f}_{e_4} &= 0\\
\mathbf{f}_{e_7} + \mathbf{f}_{e_4} - \mathbf{f}_{e_8} &= 0\\
\mathbf{f}_{e_2} - \mathbf{f}_{e_6} &= 10\\
\mathbf{f}_{e_5} + \mathbf{f}_{e_6} + \mathbf{f}_{e_9} &= 10\\
\mathbf{f}_{e_8} - \mathbf{f}_{e_9} &= 10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(LP)}\quad \min\ & k^t\mathbf{f}\\
\text{so dass } & A\mathbf{f} = b\\
& \mathbf{f}_e \le c_e \qquad \forall e \in E\\
& \mathbf{f}_e \ge 0 \qquad \forall e \in E
\end{aligned}
$$

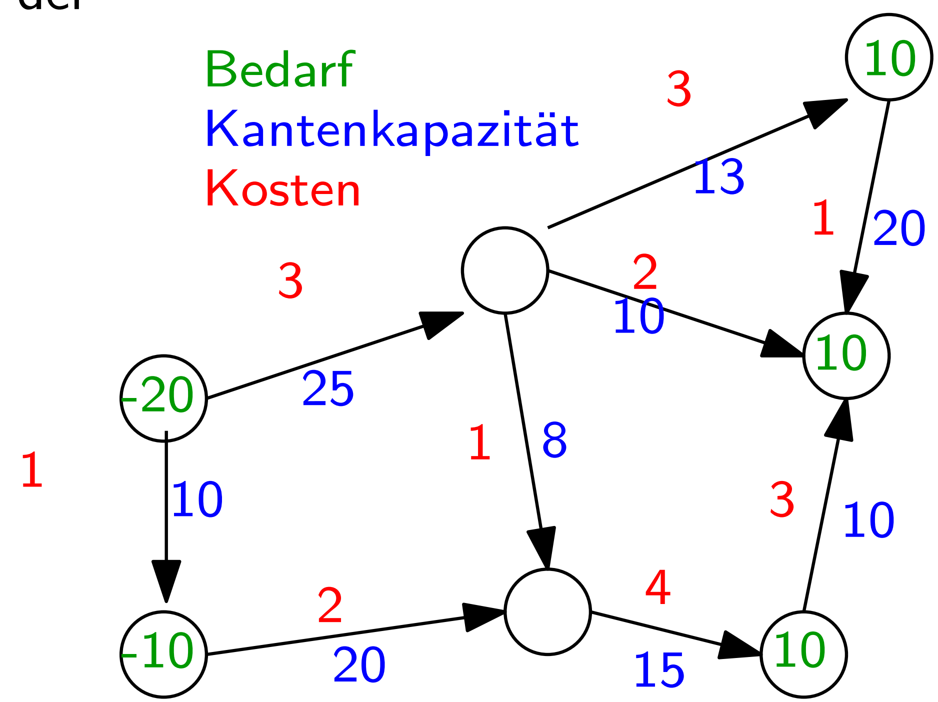
Situation: Im Katastrophenfall sollen Hilfslieferungen aus den Lagern (links) zu den Bedarfstätten (rechts) gebracht werden, wobei der Bedarf vollständig gedeckt werden soll. Transportwege (Kanten) sind kapazitätsbeschränkt. Dabei sollen die Transportkosten minimiert werden.



Bedarfsflussproblem

Situation: Im Katastrophenfall sollen Hilfslieferungen aus den Lagern (links) zu den Bedarfstätten (rechts) gebracht werden, wobei der Bedarf vollständig gedeckt werden soll. Transportwege (Kanten) sind kapazitätsbeschränkt. Dabei sollen die Transportkosten minimiert werden.

Anders als in der (traditionellen) Optimierung sind in der wirklichen Welt Parameter nicht exakt bekannt, sondern mit **Unsicherheit** behaftet.

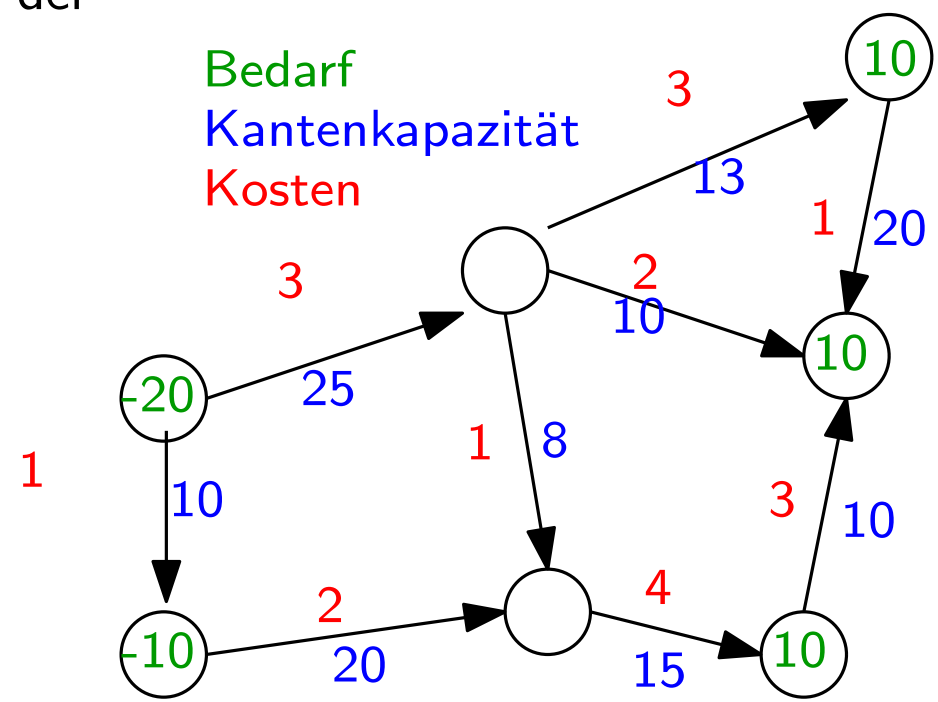


Bedarfsflussproblem

Situation: Im Katastrophenfall sollen Hilfslieferungen aus den Lagern (links) zu den Bedarfstätten (rechts) gebracht werden, wobei der Bedarf vollständig gedeckt werden soll. Transportwege (Kanten) sind kapazitätsbeschränkt. Dabei sollen die Transportkosten minimiert werden.

Anders als in der (traditionellen) Optimierung sind in der wirklichen Welt Parameter nicht exakt bekannt, sondern mit **Unsicherheit** behaftet.

Was könnten in der beschriebenen Situation unsicher sein?



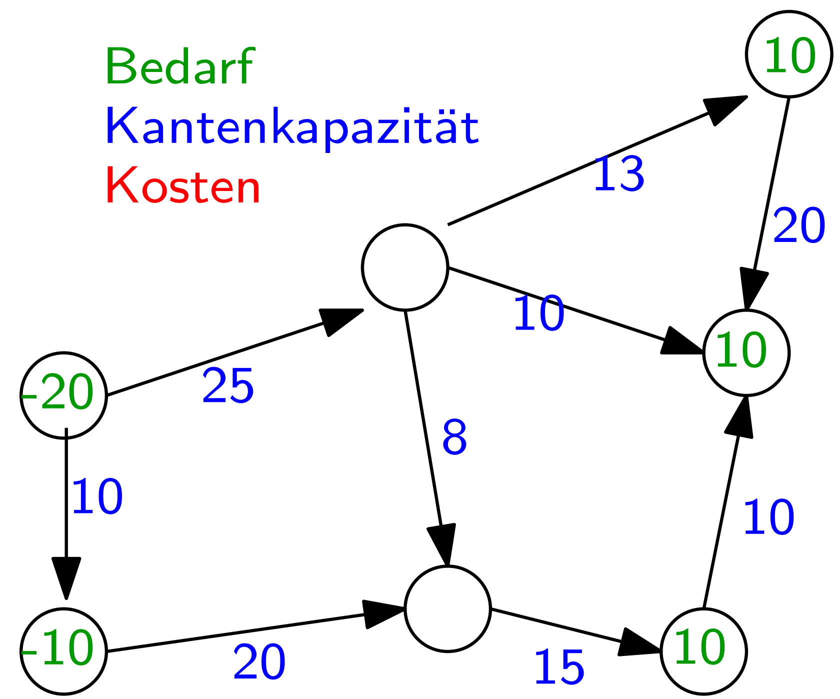
Bedarfsflussproblem

Wir betrachten im folgenden die Situation bei unsicheren **Kosten**.

Situation: Im Katastrophenfall sollen Hilfslieferungen aus den Lagern (links) zu den Bedarfstätten (rechts) gebracht werden, wobei der Bedarf vollständig gedeckt werden soll. Transportwege (Kanten) sind kapazitätsbeschränkt. Dabei sollen die Transportkosten minimiert werden.

Anders als in der (traditionellen) Optimierung sind in der wirklichen Welt Parameter nicht exakt bekannt, sondern mit **Unsicherheit** behaftet.

Was könnten in der beschriebenen Situation unsicher sein?



Bedarfsflussproblem

(LP(ξ))

$$\min \quad k(\xi)^t \mathbf{f}$$

so dass $A\mathbf{f} = b$

$$\mathbf{f}_e \le c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \ge 0 \qquad \forall e \in E$$

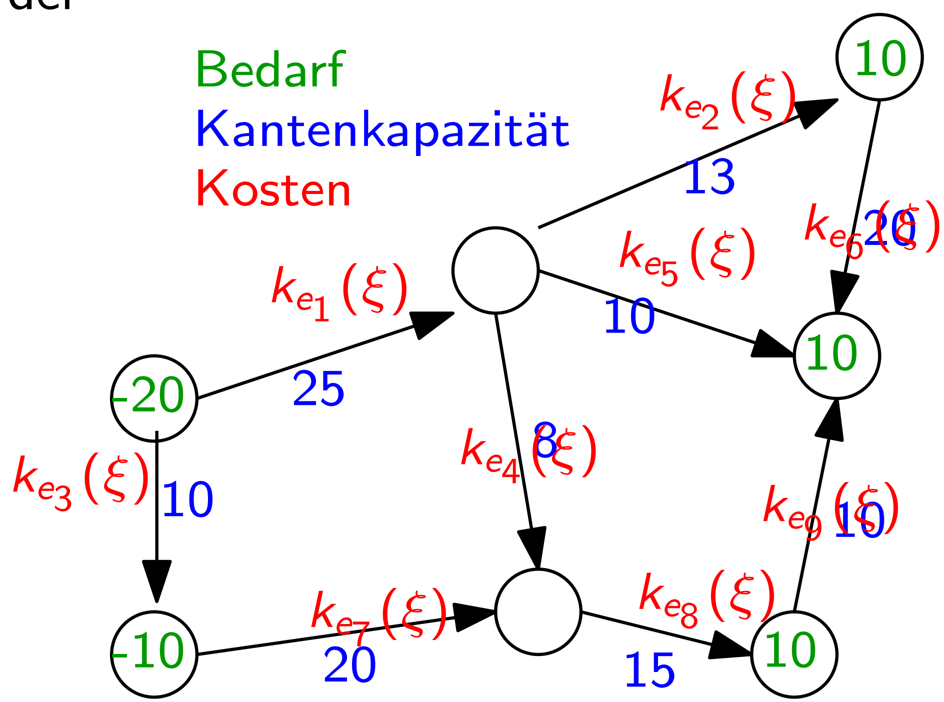
Wir betrachten im folgenden die Situation bei unsicheren **Kosten**.

Für jedes *vorab bekannte* **Kostenszenario** ξ könnten wir einfach $LP(\xi)$ lösen.

Situation: Im Katastrophenfall sollen Hilfslieferungen aus den Lagern (links) zu den Bedarfstätten (rechts) gebracht werden, wobei der Bedarf vollständig gedeckt werden soll. Transportwege (Kanten) sind kapazitätsbeschränkt. Dabei sollen die Transportkosten minimiert werden.

Anders als in der (traditionellen) Optimierung sind in der wirklichen Welt Parameter nicht exakt bekannt, sondern mit **Unsicherheit** behaftet.

Was könnten in der beschriebenen Situation unsicher sein?



Bedarfsflussproblem

(LP(ξ))

$$\min \; k(\xi)^t \mathbf{f}$$

so dass $A\mathbf{f} = b$

$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

Wir betrachten im folgenden die Situation bei unsicheren **Kosten**.

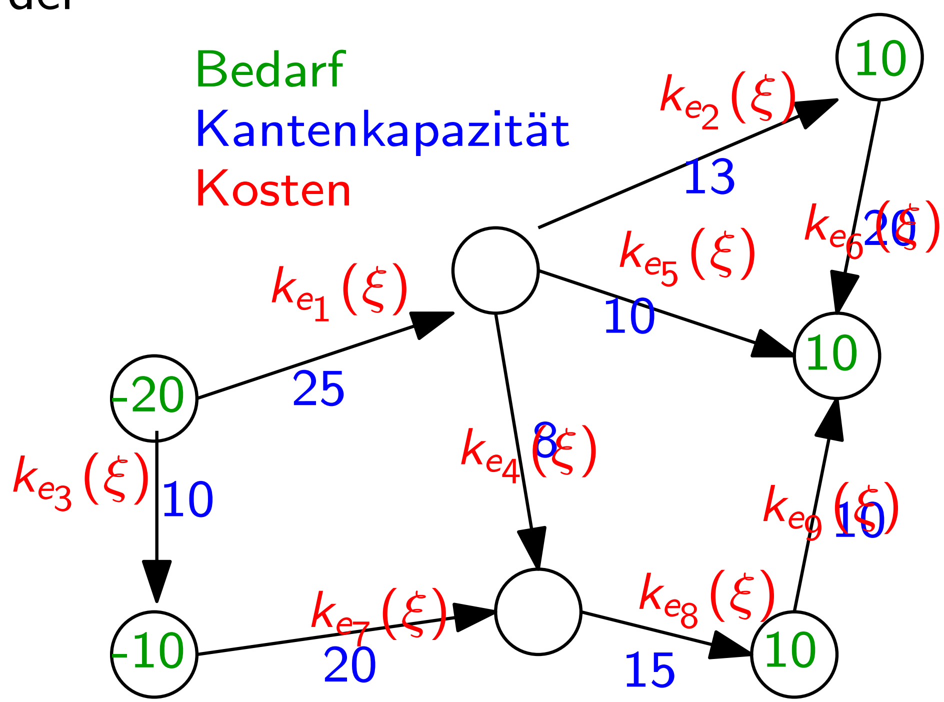
Für jedes *vorab bekannte* Kosten**szenario** ξ könnten wir einfach $LP(\xi)$ lösen.

Leider müssen wir uns für Transportflüsse entscheiden *bevor* wir das Szenario ξ kennen.

Situation: Im Katastrophenfall sollen Hilfslieferungen aus den Lagern (links) zu den Bedarfstätten (rechts) gebracht werden, wobei der Bedarf vollständig gedeckt werden soll. Transportwege (Kanten) sind kapazitätsbeschränkt. Dabei sollen die Transportkosten minimiert werden.

Anders als in der (traditionellen) Optimierung sind in der wirklichen Welt Parameter nicht exakt bekannt, sondern mit **Unsicherheit** behaftet.

Was könnten in der beschriebenen Situation unsicher sein?



Bedarfsflussproblem

(RC)

$$\min \boxed{\max_{\xi \in \mathcal{U}} k(\xi)^t \mathbf{f}}$$

so dass $A\mathbf{f} = b$

$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

Situation: Im Katastrophenfall sollen Hilfslieferungen aus den Lagern (links) zu den Bedarfstätten (rechts) gebracht werden, wobei der Bedarf vollständig gedeckt werden soll. Transportwege (Kanten) sind kapazitätsbeschränkt. Dabei sollen die Transportkosten minimiert werden.

Anders als in der (traditionellen) Optimierung sind in der wirklichen Welt Parameter nicht exakt bekannt, sondern mit **Unsicherheit** behaftet.

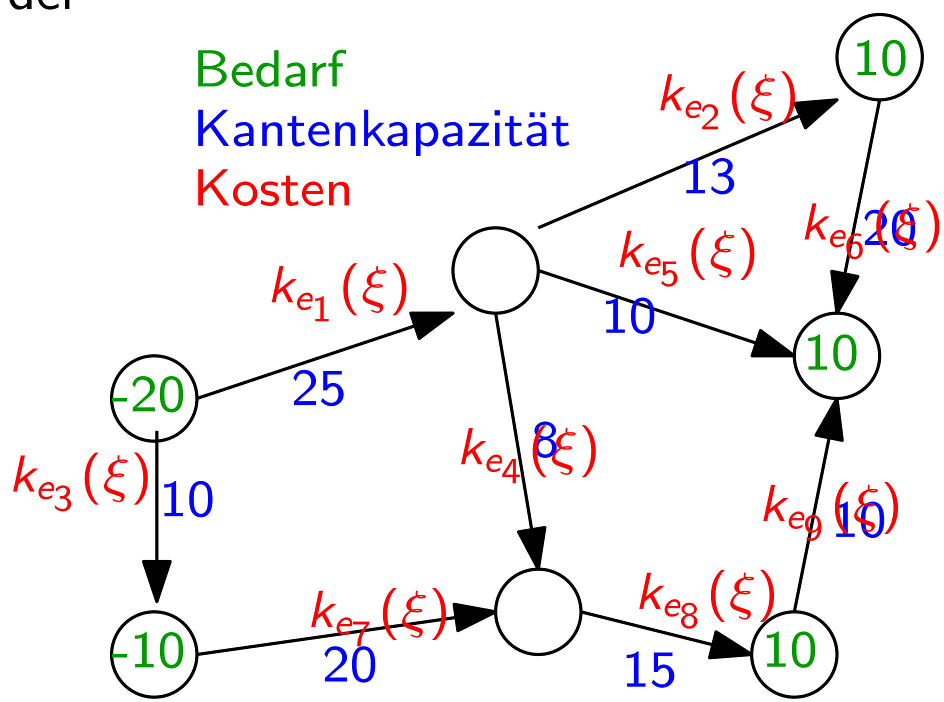
Was könnten in der beschriebenen Situation unsicher sein?

Wir betrachten im folgenden die Situation bei unsicheren **Kosten**.

Für jedes *vorab bekannte* **Kostenszenario** ξ könnten wir einfach $LP(\xi)$ lösen.

Leider müssen wir uns für Transportflüsse entscheiden *bevor* wir das Szenario ξ kennen.

In der **robusten Optimierung** suchen wir die Lösung, die im schlimmsten Fall noch so gut wie möglich ist.



Bedarfsflussproblem

(RC)

$$\min \boxed{\max_{\xi \in \mathcal{U}} k(\xi)^t \mathbf{f}}$$

RC steht für **robust counterpart**

so dass $A\mathbf{f} = b$

$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

Situation: Im Katastrophenfall sollen Hilfslieferungen aus den Lagern (links) zu den Bedarfstätten (rechts) gebracht werden, wobei der Bedarf vollständig gedeckt werden soll. Transportwege (Kanten) sind kapazitätsbeschränkt. Dabei sollen die Transportkosten minimiert werden.

Anders als in der (traditionellen) Optimierung sind in der wirklichen Welt Parameter nicht exakt bekannt, sondern mit **Unsicherheit** behaftet.

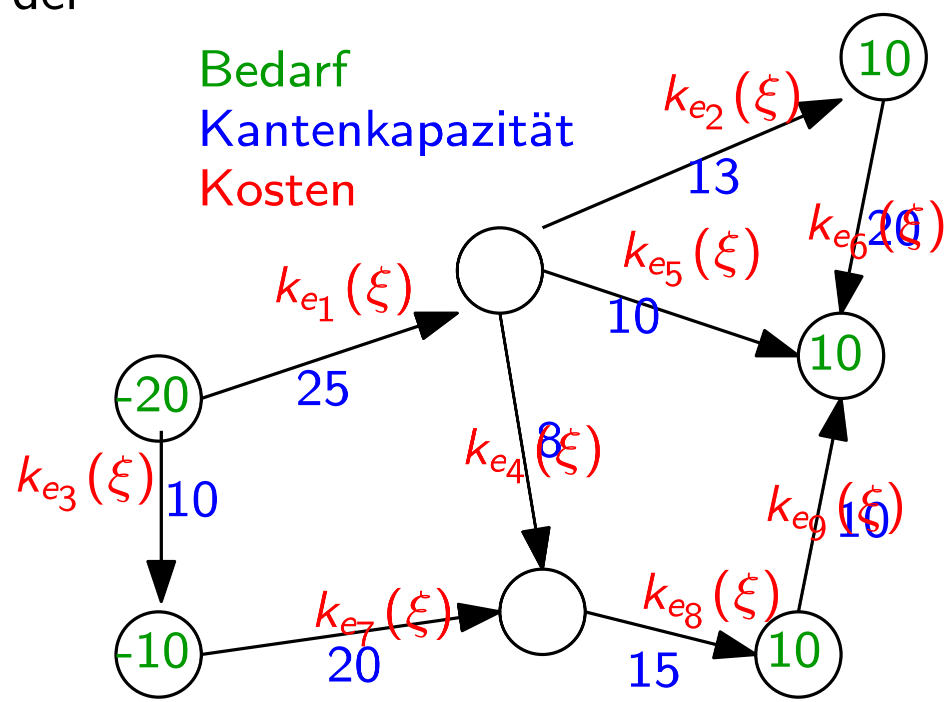
Was könnten in der beschriebenen Situation unsicher sein?

Wir betrachten im folgenden die Situation bei unsicheren **Kosten**.

Für jedes *vorab bekannte* **Kostenszenario** ξ könnten wir einfach $LP(\xi)$ lösen.

Leider müssen wir uns für Transportflüsse entscheiden *bevor* wir das Szenario ξ kennen.

In der **robusten Optimierung** suchen wir die Lösung, die im $\boxed{\text{schlimmsten}}$ Fall noch so gut wie möglich ist.



Bedarfsflussproblem

$$(\mathrm{RC})\qquad \min \boxed{\max_{\xi \in \mathcal{U}} k(\xi)^t \mathbf{f}}$$

$$\text{so dass } A\mathbf{f} = b$$

$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

Im Gegensatz dazu minim. **stochastische Optimierung** den Erwartungswert der Kosten

Situation: Im Katastrophenfall sollen Hilfslieferungen aus den Lagern (links) zu den Bedarfstätten (rechts) gebracht werden, wobei der Bedarf vollständig gedeckt werden soll. Transportwege (Kanten) sind kapazitätsbeschränkt. Dabei sollen die Transportkosten minimiert werden.

Anders als in der (traditionellen) Optimierung sind in der wirklichen Welt Parameter nicht exakt bekannt, sondern mit **Unsicherheit** behaftet.

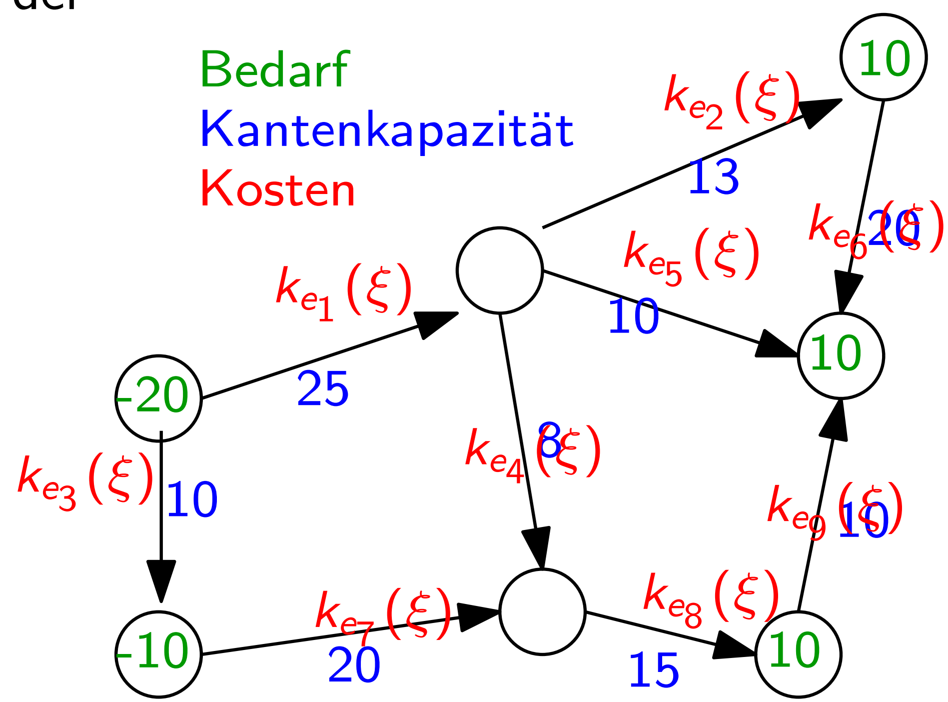
Was könnten in der beschriebenen Situation unsicher sein?

Wir betrachten im folgenden die Situation bei unsicheren **Kosten**.

Für jedes *vorab bekannte* **Kostenszenario** ξ könnten wir einfach $LP(\xi)$ lösen.

Leider müssen wir uns für Transportflüsse entscheiden *bevor* wir das Szenario ξ kennen.

In der **robusten Optimierung** suchen wir die Lösung, die im $\boxed{\text{schlimmsten}}$ Fall noch so gut wie möglich ist.



Bedarfsflussproblem mit unsicheren Kosten

(RC)

$$\min \quad \max_{\xi \in \mathcal{U}} k(\xi)^t \mathbf{f}$$

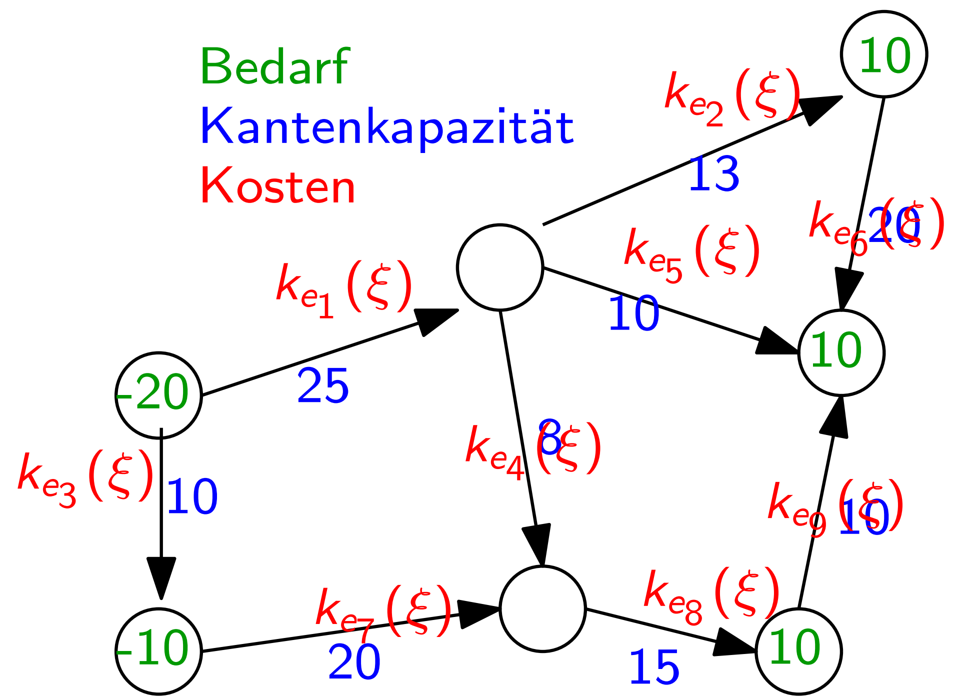
$$\text{so dass } A\mathbf{f} = b$$

$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

In der **robusten Optimierung** suchen wir die Lösung, die im schlimmsten Fall noch so gut wie möglich ist.

Was ist der *schlimmste Fall*?



Bedarfsflussproblem mit unsicheren Kosten

(RC)

$$\min \quad \max_{\xi \in \mathcal{U}} k(\xi)^t \mathbf{f}$$

$$\text{so dass } A\mathbf{f} = b$$

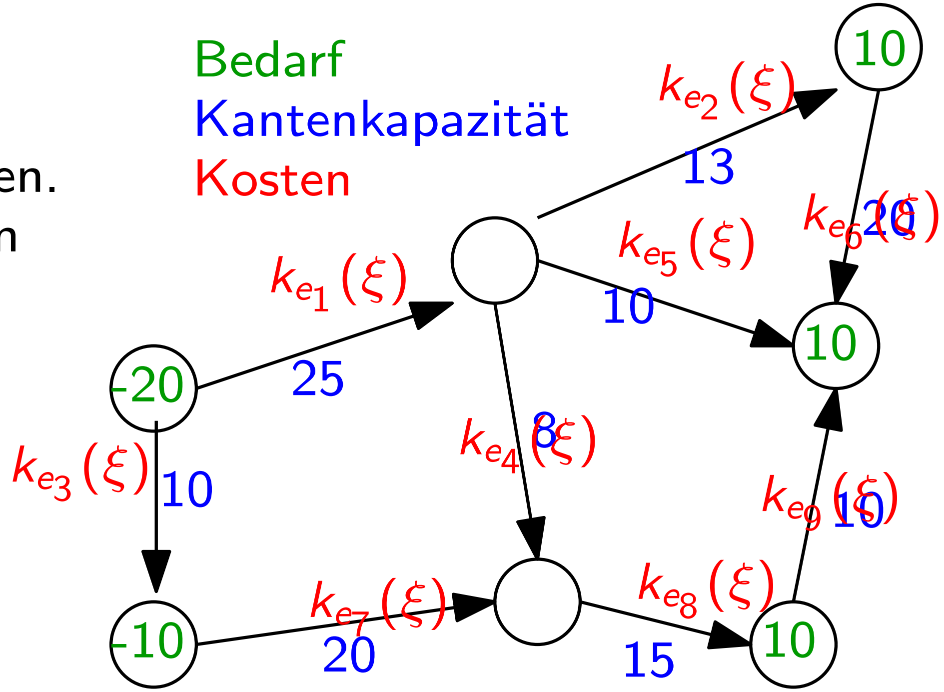
$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

In der **robusten Optimierung** suchen wir die Lösung, die im schlimmsten Fall noch so gut wie möglich ist.

Was ist der *schlimmste Fall*?

$\mathcal{U}$ beschreibt, welche Szenarien auftreten können. *Schlimmster Fall* im Allgemeinen abhängig vom gewählten Bedarfsfluss.



Bedarfsflussproblem mit unsicheren Kosten

(RC)

$$\min \quad \max_{\xi \in \mathcal{U}} k(\xi)^t \mathbf{f}$$

$$\text{so dass } A\mathbf{f} = b$$
$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$
$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

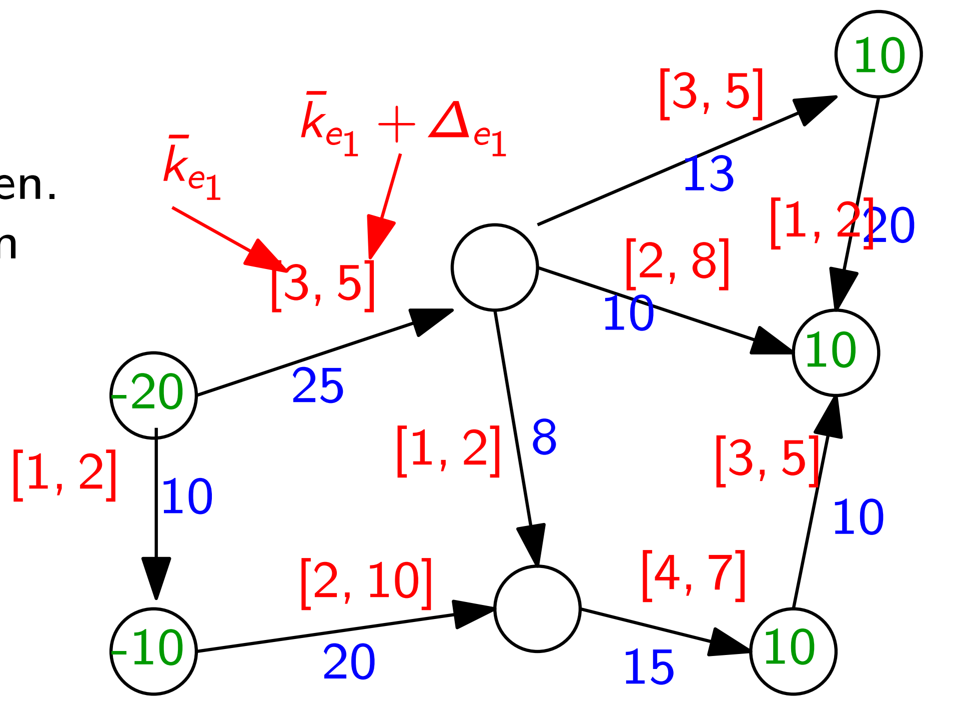
In der **robusten Optimierung** suchen wir die Lösung, die im schlimmsten Fall noch so gut wie möglich ist.

Was ist der *schlimmste Fall*?

$\mathcal{U}$ beschreibt, welche Szenarien auftreten können. *Schlimmster Fall* im Allgemeinen abhängig vom gewählten Bedarfsfluss.

Hier: **Gamma-Unsicherheit:**

$$\mathcal{U} := \{k(\xi) \in \mathbb{R}^{|E|}_{\geq 0} : k_e(\xi) \in [\bar{k}_e, \bar{k}_e + \Delta_e], \sum_{e \in E} (k_e(\xi) - \bar{k}_e) \leq \Gamma\}$$



Bedarfsflussproblem mit unsicheren Kosten

(RC)

$$\min \quad \max_{\xi \in \mathcal{U}} k(\xi)^t \mathbf{f}$$

so dass $A\mathbf{f} = b$

$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

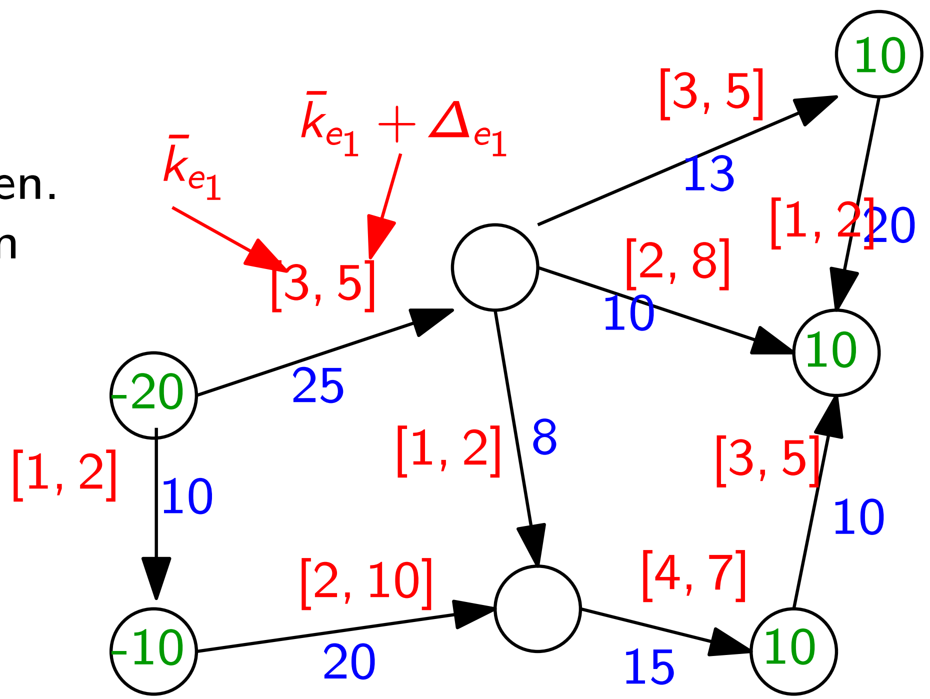
In der **robusten Optimierung** suchen wir die Lösung, die im schlimmsten Fall noch so gut wie möglich ist.

Was ist der *schlimmste Fall*?

$\mathcal{U}$ beschreibt, welche Szenarien auftreten können. *Schlimmster Fall* im Allgemeinen abhängig vom gewählten Bedarfsfluss.

Hier: **Gamma-Unsicherheit:**

$$\mathcal{U} := \{k(\xi) \in \mathbb{R}^{|E|}_{\geq 0} : k_e(\xi) \in [\bar{k}_e, \bar{k}_e + \Delta_e], \boxed{\sum_{e \in E} (k_e(\xi) - \bar{k}_e) \leq \Gamma}\}$$



Gesamtabweichung vom **nominalem** Szenario $\bar{k}$ wird durch Γ beschränkt.

Bedarfsflussproblem mit unsicheren Kosten

(RC)
$$\min \max_{\xi \in \mathcal{U}} \boxed{k(\xi)}^t \mathbf{f}$$

$$\text{so dass } A\mathbf{f} = b$$
$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$
$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

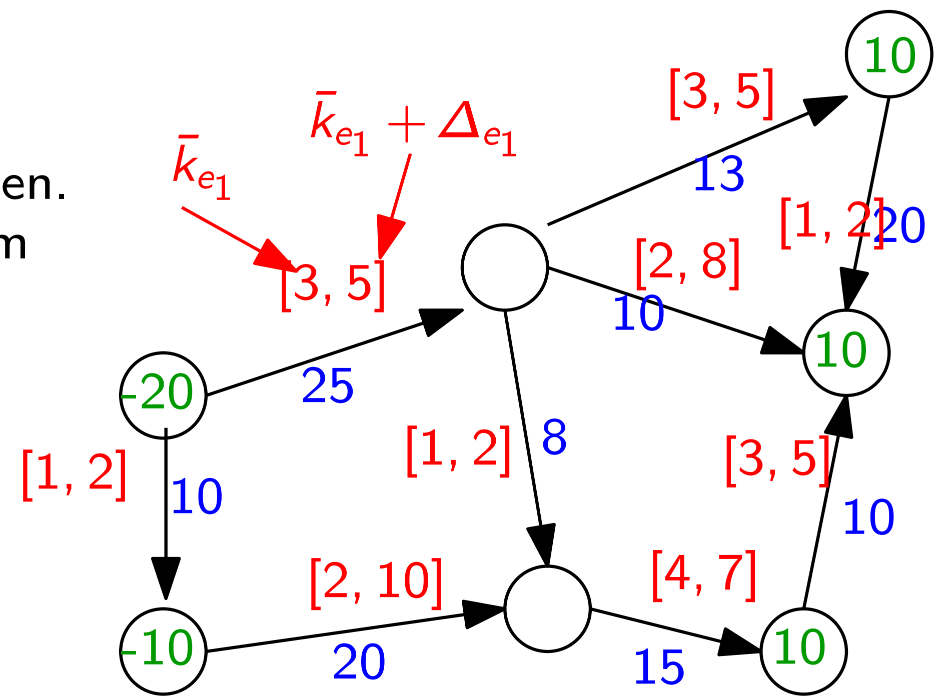
In der **robusten Optimierung** suchen wir die Lösung, die im schlimmsten Fall noch so gut wie möglich ist.

Was ist der *schlimmste Fall*?

$\mathcal{U}$ beschreibt, welche Szenarien auftreten können. *Schlimmster Fall* im Allgemeinen abhängig vom gewählten Bedarfsfluss.

Hier: **Gamma-Unsicherheit:**

$$\mathcal{U} := \{\boxed{k(\xi)} \in \mathbb{R}^{|E|}_{\geq 0} \boxed{: k_e(\xi)} \in [\bar{k}_e, \bar{k}_e + \Delta_e],$$
$$\sum_{e \in E} (\boxed{k_e(\xi)} - \bar{k}_e) \leq \Gamma\}$$



Ersetze $k(\xi)_e$ ab jetzt in Notation durch $\bar{k}_e + d_e$

Bedarfsflussproblem mit unsicheren Kosten

(RC)

$$\min \boxed{\max_{d\in\mathcal{U}'} (\bar{k} + d)^t}\mathbf{f}$$

$$\text{so dass } A\mathbf{f} = b$$

$$\mathbf{f}_e \le c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \ge 0 \qquad \forall e \in E$$

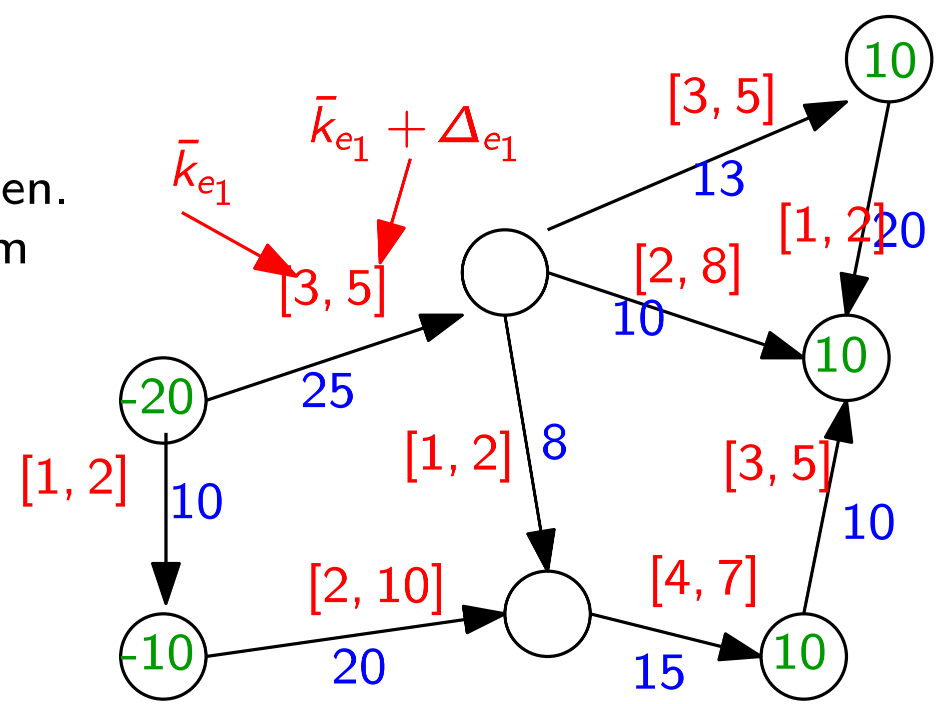
In der **robusten Optimierung** suchen wir die Lösung, die im schlimmsten Fall noch so gut wie möglich ist.

Was ist der *schlimmste Fall*?

$\mathcal{U}$ beschreibt, welche Szenarien auftreten können. *Schlimmster Fall* im Allgemeinen abhängig vom gewählten Bedarfsfluss.

Hier: **Gamma-Unsicherheit:**

$$\mathcal{U}' := \{\boxed{d} \in \mathbb{R}^{|E|}_{\ge 0} : \boxed{d_e} \in [0, \Delta_e], \sum_{e\in E} \boxed{d_e} \le \Gamma\}$$



Ersetze $k(\xi)_e$ ab jetzt in Notation durch $\bar{k}_e$ (sicher) $+d_e$ (unsicher)

Bedarfsflussproblem mit unsicheren Kosten

$$\min \quad \boxed{\left(\bar{k}^t \mathbf{f} + \max_{d \in \mathcal{U}'} d^t \mathbf{f}\right)}$$

so dass $A\mathbf{f} = b$

$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

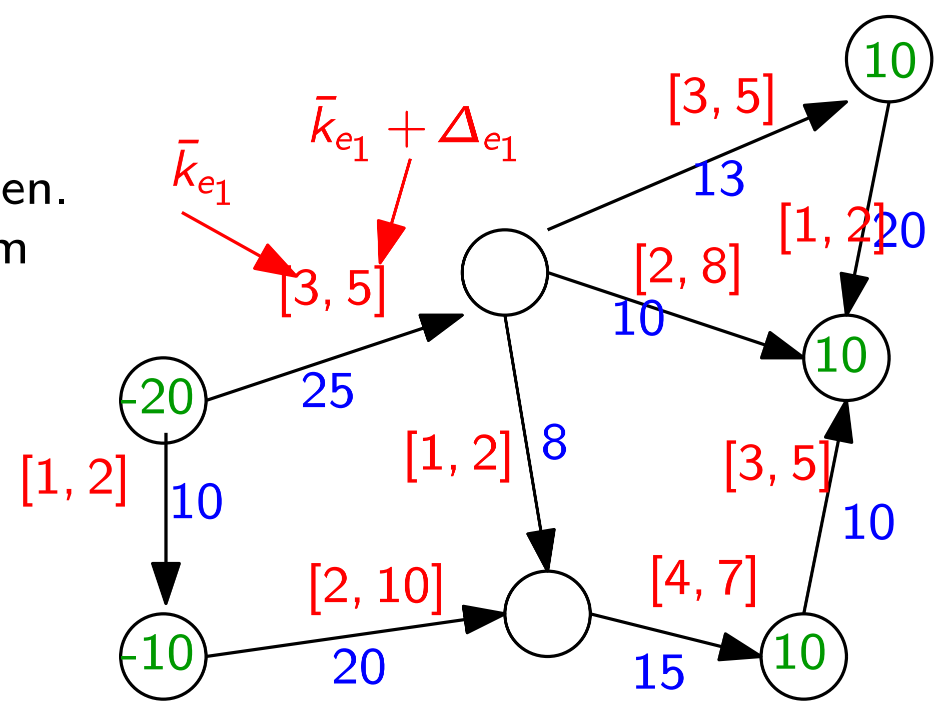
In der **robusten Optimierung** suchen wir die Lösung, die im schlimmsten Fall noch so gut wie möglich ist.

Was ist der *schlimmste Fall*?

$\mathcal{U}$ beschreibt, welche Szenarien auftreten können. *Schlimmster Fall* im Allgemeinen abhängig vom gewählten Bedarfsfluss.

Hier: **Gamma-Unsicherheit:**

$$\mathcal{U}' := \{\boxed{d} \in \mathbb{R}^{|E|}_{\geq 0} : \boxed{d_e} \in [0, \Delta_e], \sum_{e \in E} \boxed{d_e} \leq \Gamma\}$$



Ersetze $k(\xi)_e$ ab jetzt in Notation durch $\bar{k}_e$ (sicher) $+d_e$ (unsicher)

Bedarfsflussproblem mit unsicheren Kosten

$$\min \quad \left(\bar{k}^t \mathbf{f} + \max_{d \in \mathcal{U}'} d^t \mathbf{f} \right)$$

so dass $A\mathbf{f} = b$

$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

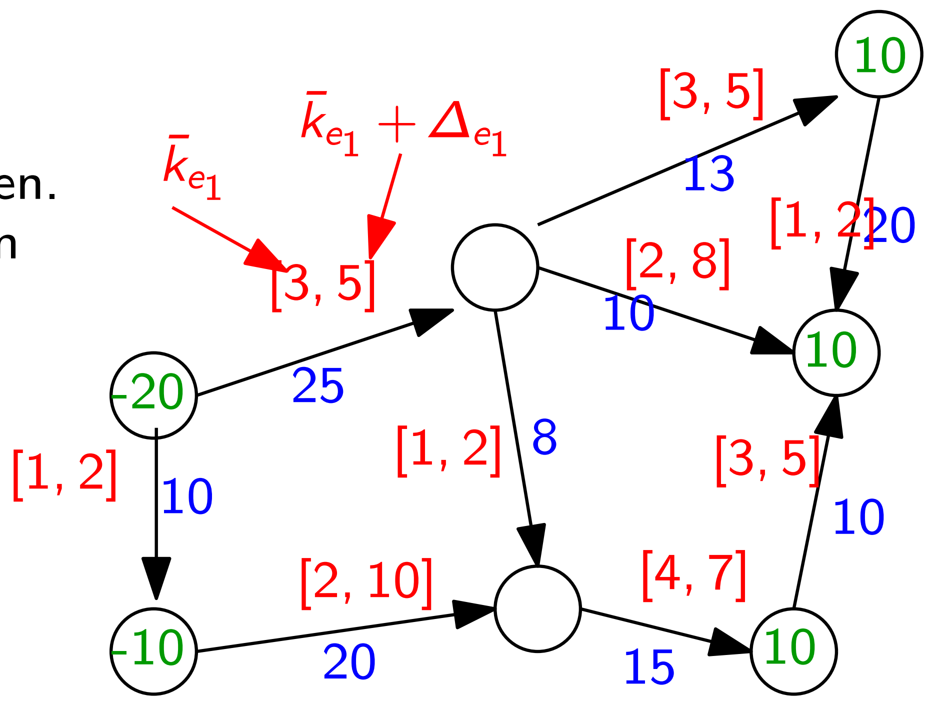
In der **robusten Optimierung** suchen wir die Lösung, die im schlimmsten Fall noch so gut wie möglich ist.

Was ist der *schlimmste Fall*?

$\mathcal{U}$ beschreibt, welche Szenarien auftreten können. *Schlimmster Fall* im Allgemeinen abhängig vom gewählten Bedarfsfluss.

Hier: **Gamma-Unsicherheit:**

$$\mathcal{U}' := \{d \in \mathbb{R}^{|E|}_{\geq 0} : d_e \in [0, \Delta_e], \sum_{e \in E} d_e \leq \Gamma\}$$



Bedarfsflussproblem

Für ein *gegebenes, festes f* können wir den schlimmsten Fall $d(f)$ über ein Optimierungsproblem bestimmen:

$$\min \quad \left(\bar{k}^t \mathbf{f} + \boxed{\max_{d \in \mathcal{U}'} d^t \mathbf{f}} \right)$$

so dass $A\mathbf{f} = b$

$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

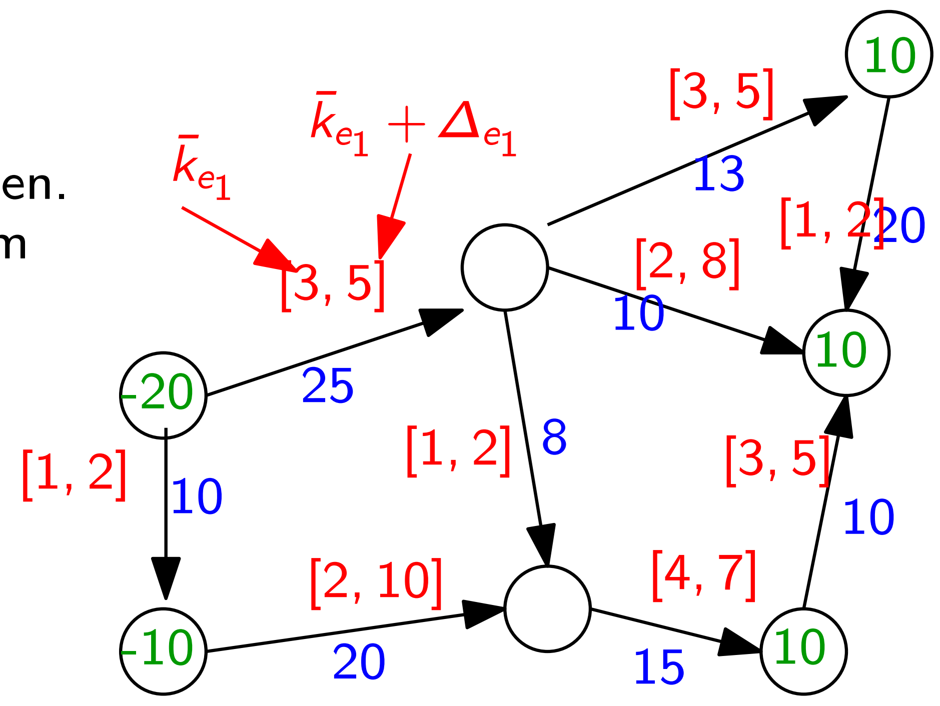
In der **robusten Optimierung** suchen wir die Lösung, die im schlimmsten Fall noch so gut wie möglich ist.

Was ist der *schlimmste Fall*?

$\mathcal{U}$ beschreibt, welche Szenarien auftreten können. *Schlimmster Fall* im Allgemeinen abhängig vom gewählten Bedarfsfluss.

Hier: **Gamma-Unsicherheit:**

$$\mathcal{U}' := \{d \in \mathbb{R}^{|E|}_{\geq 0} : d_e \in [0, \Delta_e], \sum_{e \in E} d_e \leq \Gamma\}$$



Bedarfsflussproblem

$$\min \quad \left(\bar{k}^t \mathbf{f} + \boxed{\max_{d \in \mathcal{U}'} d^t \mathbf{f}}\right)$$

so dass $A\mathbf{f} = b$

$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

Für ein *gegebenes, festes* f können wir den schlimmsten Fall $d(f)$ über ein Optimierungsproblem bestimmen:

$$\max \quad \mathbf{d}^t f$$

so dass $\mathbf{d}_e \leq \Delta_e \qquad \forall e \in E$

$$\sum_{e \in E} \mathbf{d}_e \leq \Gamma$$

$$\mathbf{d}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

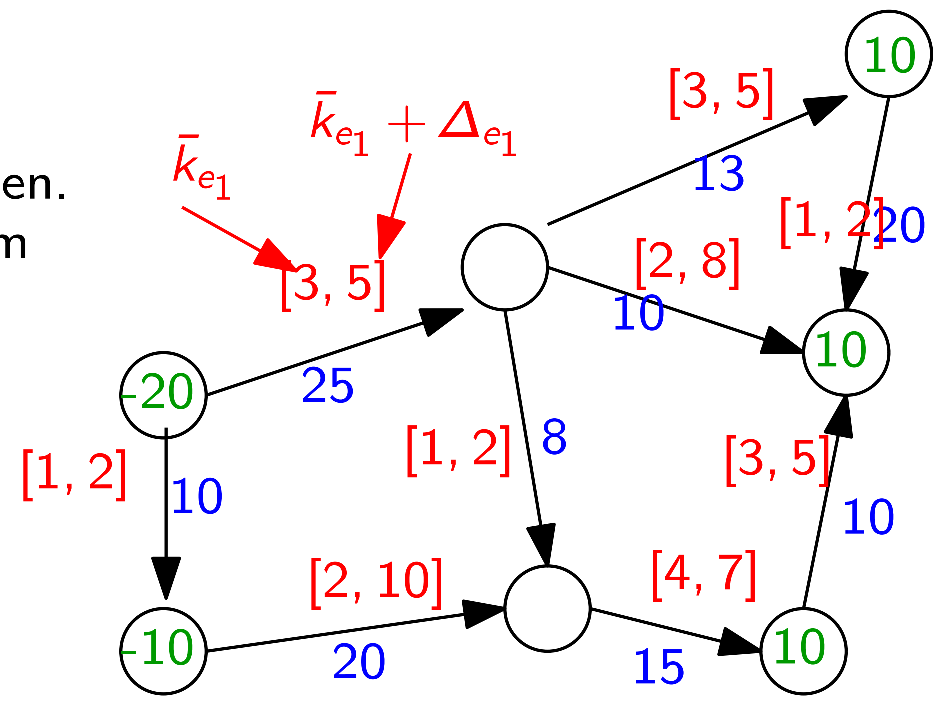
In der **robusten Optimierung** suchen wir die Lösung, die im schlimmsten Fall noch so gut wie möglich ist.

Was ist der *schlimmste Fall*?

$\mathcal{U}$ beschreibt, welche Szenarien auftreten können. *Schlimmster Fall* im Allgemeinen abhängig vom gewählten Bedarfsfluss.

Hier: **Gamma-Unsicherheit:**

$$\mathcal{U}' := \{d \in \mathbb{R}^{|E|}_{\geq 0} : d_e \in [0, \Delta_e], \sum_{e \in E} d_e \leq \Gamma\}$$



Bedarfsflussproblem

$$\min \quad \left(\bar{k}^t \mathbf{f} + \boxed{\max_{d \in \mathcal{U}'} d^t \mathbf{f}} \right)$$

$$\text{so dass } A\mathbf{f} = b$$

$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

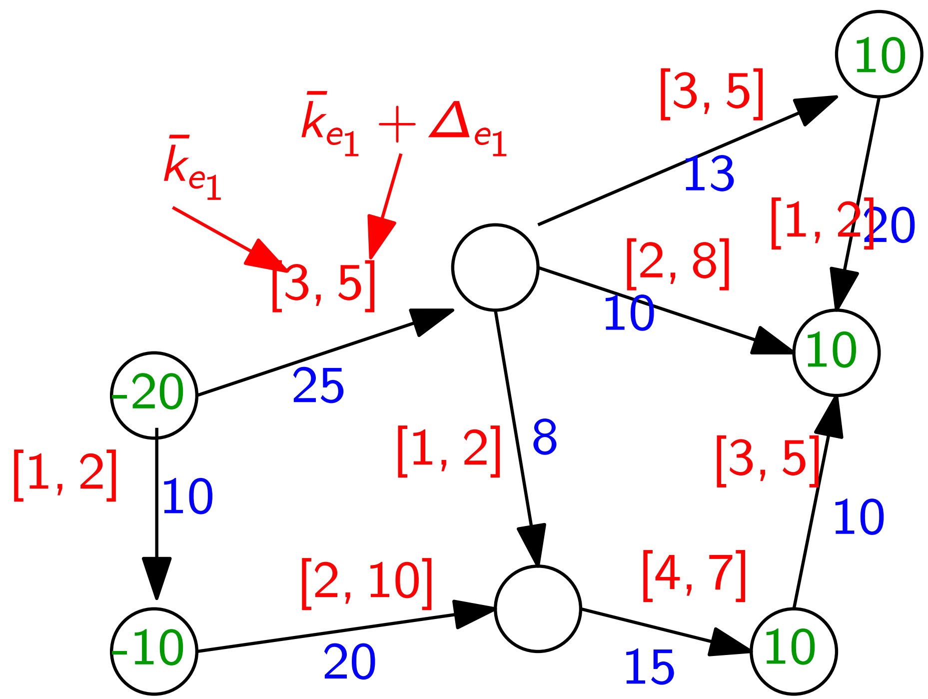
Für ein *gegebenes, festes f* können wir den schlimmsten Fall $d(f)$ über ein Optimierungsproblem bestimmen:

$$\max \quad \mathbf{d}^t f$$

$$\text{so dass } \mathbf{d}_e \leq \Delta_e \qquad \forall e \in E$$

$$\sum_{e \in E} \mathbf{d}_e \leq \Gamma$$

$$\mathbf{d}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$



Bedarfsflussproblem

$$\min \quad \left(\bar{k}^t \mathbf{f} + \boxed{\max_{d \in \mathcal{U}'} d^t \mathbf{f}} \right)$$

so dass $A\mathbf{f} = b$

$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

Für ein *gegebenes, festes f* können wir den schlimmsten Fall $d(f)$ über ein Optimierungsproblem bestimmen:

$$\max \quad \mathbf{d}^t f$$

so dass $\mathbf{d}_e \leq \Delta_e \qquad \forall e \in E$

$$\sum_{e \in E} \mathbf{d}_e \leq \Gamma$$

$$\mathbf{d}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

Ausgeschrieben als *ein* Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{f}} \quad \left(\bar{k}^t \mathbf{f} + \max_{\mathbf{d}} \mathbf{d}^t \mathbf{f} \right)$$

so dass $A\mathbf{f} = b$

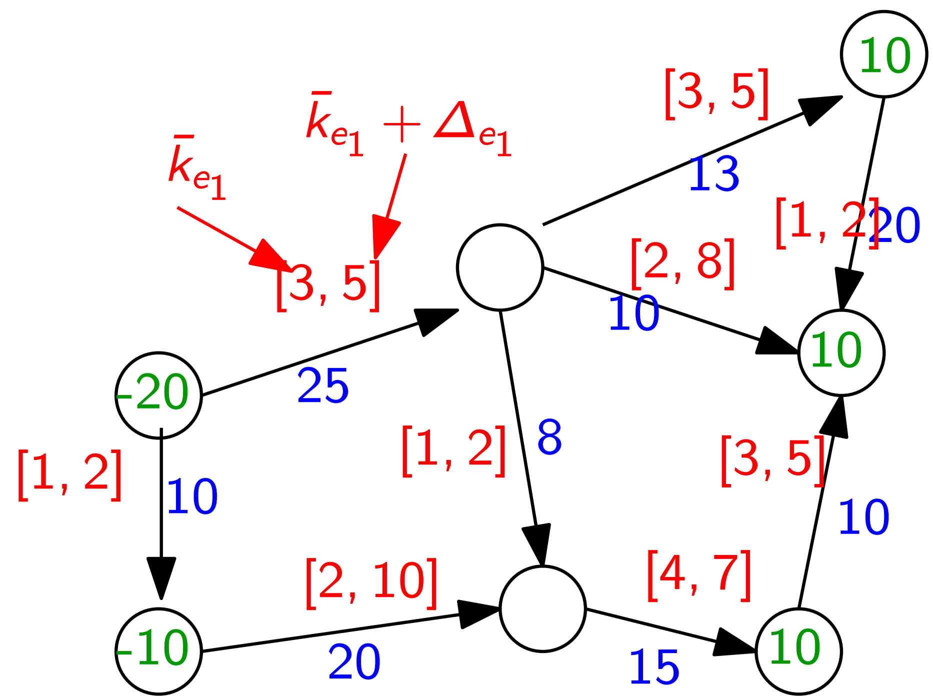
$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{d}_e \leq \Delta_e \qquad \forall e \in E$$

$$\sum_{e \in E} \mathbf{d}_e \leq \Gamma,$$

$$\mathbf{k}_e \geq 0$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$



Bedarfsflussproblem

$$\min \quad \left(\bar{k}^t \mathbf{f} + \boxed{\max_{d \in \mathcal{U}'} d^t \mathbf{f}} \right)$$

so dass $A\mathbf{f} = b$

$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

Für ein *gegebenes, festes* f können wir den schlimmsten Fall $d(f)$ über ein Optimierungsproblem bestimmen:

$$\max \quad \mathbf{d}^t f$$

so dass $\mathbf{d}_e \leq \Delta_e \qquad \forall e \in E$

$$\sum_{e \in E} \mathbf{d}_e \leq \Gamma$$

$$\mathbf{d}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

Ausgeschrieben als *ein* Optimierungsproblem

$$\boxed{\min_{\mathbf{f}} \quad \left(\bar{k}^t \mathbf{f} + \max_{\mathbf{d}} \mathbf{d}^t \mathbf{f} \right)}$$

so dass $A\mathbf{f} = b$

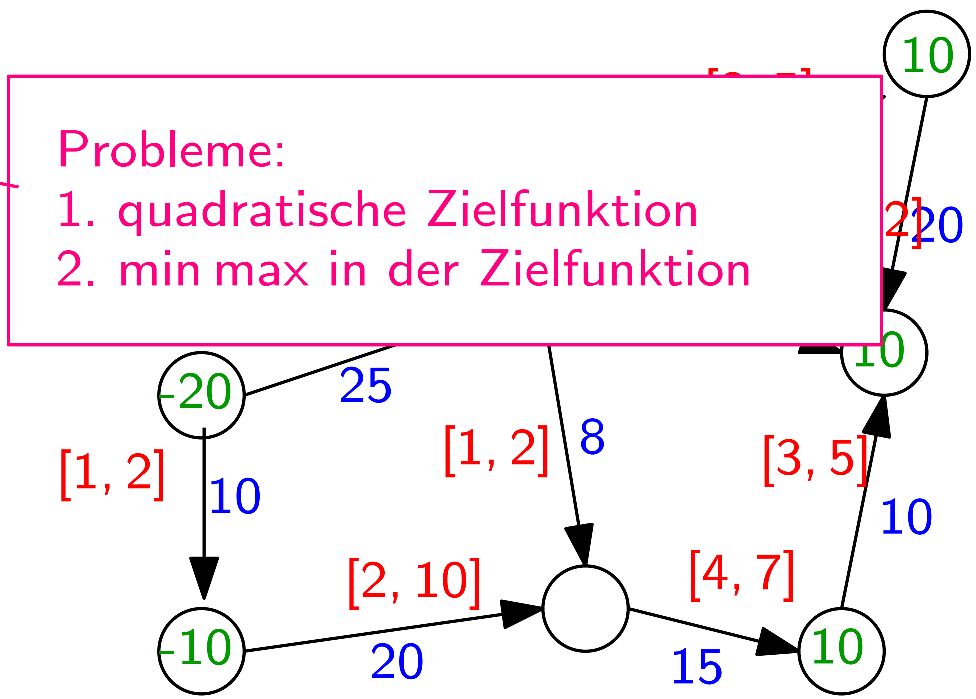
$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{d}_e \leq \Delta_e \qquad \forall e \in E$$

$$\sum_{e \in E} \mathbf{d}_e \leq \Gamma,$$

$$\mathbf{k}_e \geq 0$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$



Probleme:

1. quadratische Zielfunktion
2. min max in der Zielfunktion

Bedarfsflussproblem

$$\min \quad \left(\bar{k}^t \mathbf{f} + \boxed{\max_{d \in \mathcal{U}'} d^t \mathbf{f}}\right)$$

$$\text{so dass } A\mathbf{f} = b$$

$$\mathbf{f}_e \le c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \ge 0 \qquad \forall e \in E$$

Für ein *gegebenes, festes f* können wir den schlimmsten Fall $d(f)$ über ein Optimierungsproblem bestimmen:

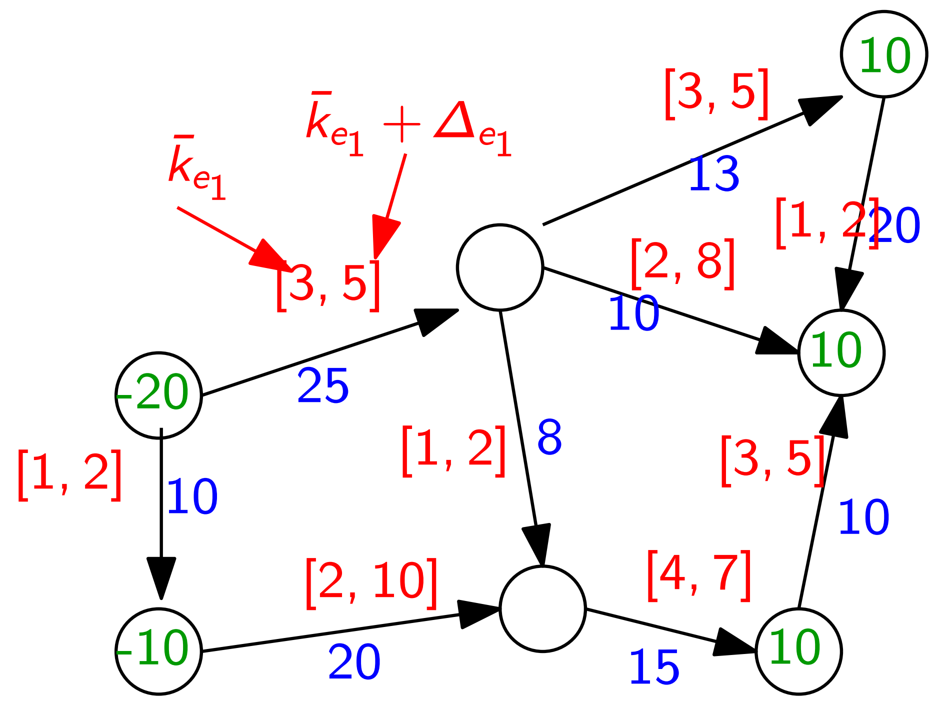
$$\max \quad \mathbf{d}^t f$$

$$\text{so dass } \mathbf{d}_e \le \Delta_e \qquad \forall e \in E$$

$$\sum_{e \in E} \mathbf{d}_e \le \Gamma$$

$$\mathbf{d}_e \ge 0 \qquad \forall e \in E$$

Idee: bilde (für festes f) Duales



Bedarfsflussproblem

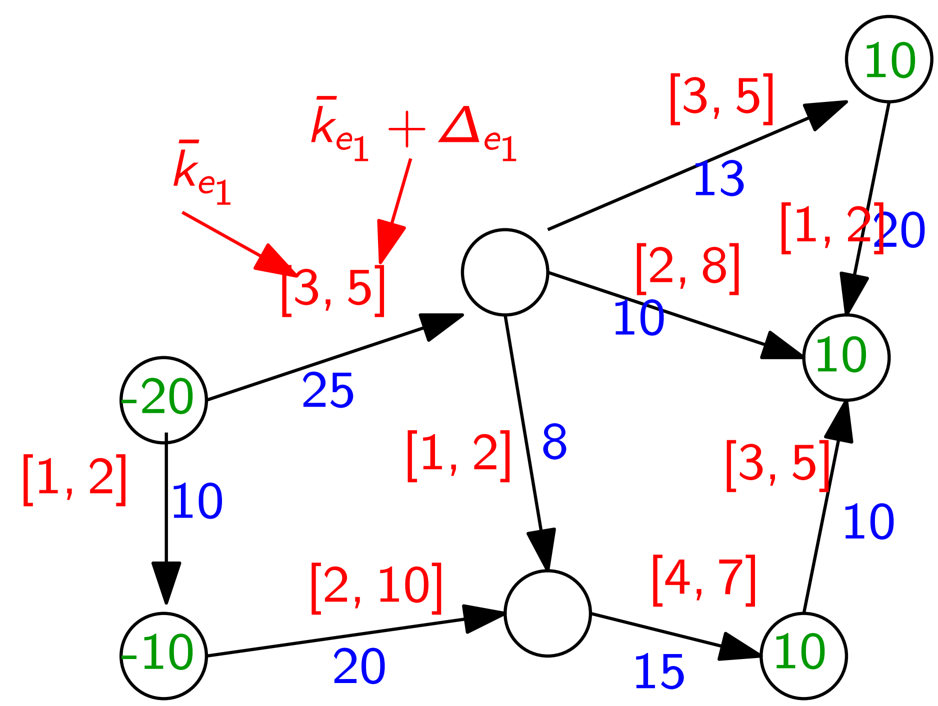
$$\min \quad \left(\bar{k}^t \mathbf{f} + \boxed{\max_{d \in \mathcal{U}'} d^t \mathbf{f}} \right)$$

$$\begin{aligned}
\text{so dass } A\mathbf{f} &= b \\
\mathbf{f}_e &\leq c_e \qquad && \forall e \in E \\
\mathbf{f}_e &\geq 0 \qquad && \forall e \in E
\end{aligned}$$

Für ein *gegebenes, festes* f können wir den schlimmsten Fall $d(f)$ über ein Optimierungsproblem bestimmen:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \mathbf{d}^t f \\
\text{so dass } & \mathbf{d}_e \leq \Delta_e && \forall e \in E \quad (\mathbf{y}_e) \\
& \sum_{e \in E} \mathbf{d}_e \leq \Gamma && (\mathbf{z}) \\
& \mathbf{d}_e \geq 0 && \forall e \in E
\end{aligned}$$

Idee: bilde (für festes f) Duales



Bedarfsflussproblem

$$\min \left(\bar{k}^t \mathbf{f} + \boxed{\max_{d \in \mathcal{U}'} d^t \mathbf{f}} \right)$$

$$\text{so dass } A\mathbf{f} = b$$

$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

Für ein *gegebenes, festes* f können wir den schlimmsten Fall $d(f)$ über ein Optimierungsproblem bestimmen:

$$\max \ \mathbf{d}^t f$$

$$\text{so dass } \mathbf{d}_e \leq \Delta_e \qquad \forall e \in E \quad (\mathbf{y}_e)$$

$$\sum_{e \in E} \mathbf{d}_e \leq \Gamma \qquad (\mathbf{z})$$

$$\mathbf{d}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

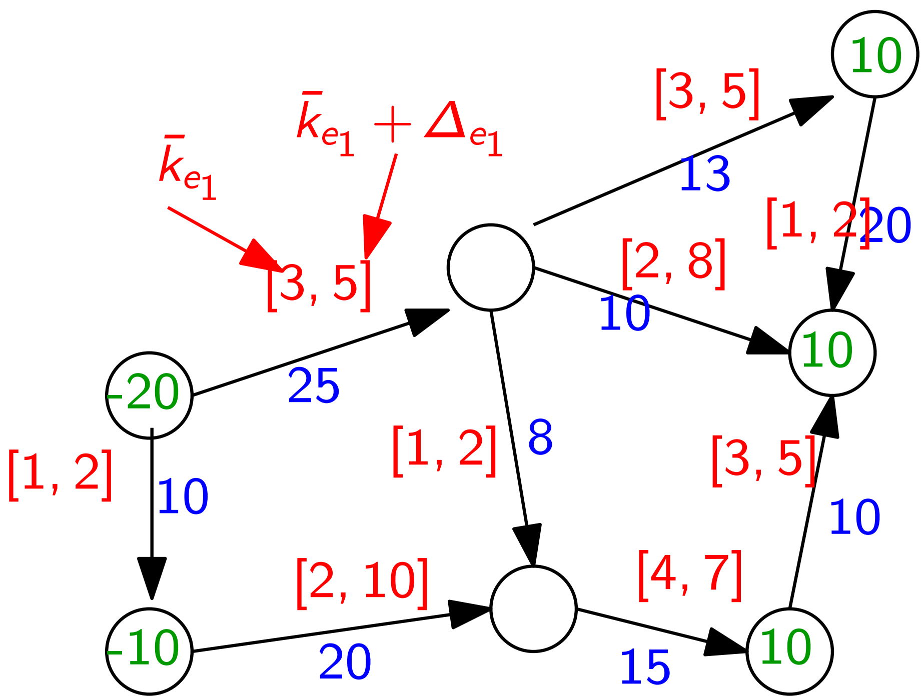
Idee: bilde (für festes f) Duales

$$\min_{\mathbf{y},\mathbf{z}} \sum_{e \in E} \Delta_e \mathbf{y}_e + \Gamma \mathbf{z}$$

$$\text{so dass } \mathbf{y}_e + \mathbf{z} \geq f_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{y}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{z} \geq 0$$



Bedarfsflussproblem

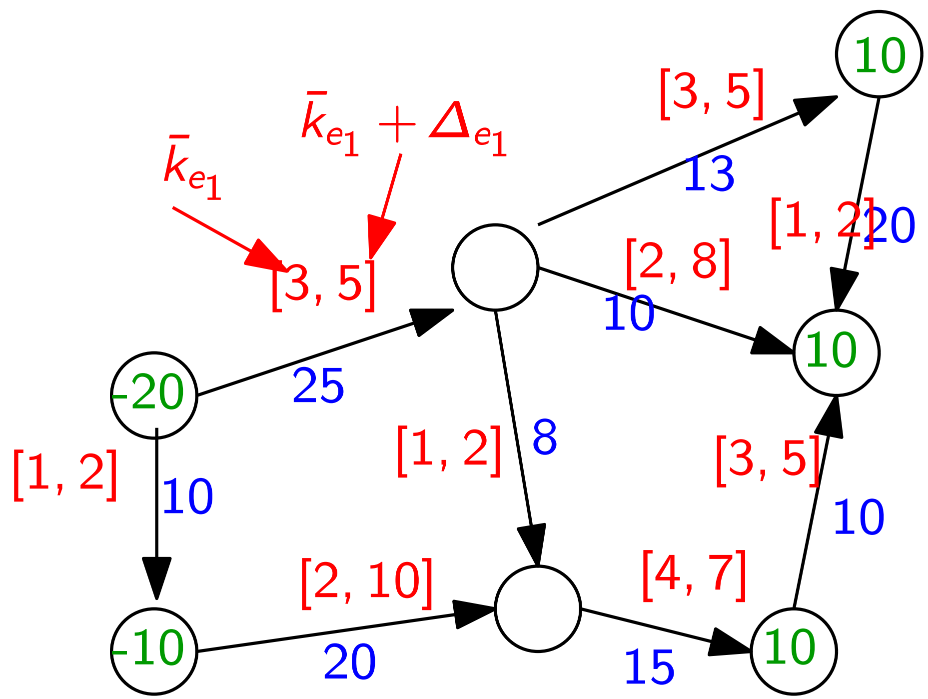
Für ein *gegebenes, festes* f können wir den schlimmsten Fall $d(f)$ über ein Optimierungsproblem bestimmen:

$$\begin{aligned} & \max \quad \mathbf{d}^t f & & \\ \text{so dass } & \mathbf{d}_e \leq \Delta_e & \forall e \in E \quad & (\mathbf{y}_e) \\ & \sum_{e \in E} \mathbf{d}_e \leq \Gamma & & (\mathbf{z}) \\ & \mathbf{d}_e \geq 0 & \forall e \in E & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \min \quad \left(\bar{k}^t \mathbf{f} + \boxed{\max_{d \in \mathcal{U}'} d^t \mathbf{f}} \right) & & \\ \text{so dass } & A\mathbf{f} = b & & \\ & \mathbf{f}_e \leq c_e & \forall e \in E & \\ & \mathbf{f}_e \geq 0 & \forall e \in E & \end{aligned}$$

Idee: bilde (für festes f) Duales

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{y},\mathbf{z}} \quad \sum_{e \in E} \Delta_e \mathbf{y}_e + \Gamma \mathbf{z} & & \\ \text{so dass } & \mathbf{y}_e + \mathbf{z} \geq f_e & \forall e \in E & \\ & \mathbf{y}_e \geq 0 & \forall e \in E & \\ & \mathbf{z} \geq 0 & & \end{aligned}$$



Setze Duales ein

Bedarfsflussproblem

$$\min \quad \left(\bar{k}^t \mathbf{f} + \boxed{\max_{d \in \mathcal{U}'} d^t \mathbf{f}} \right)$$

so dass $A\mathbf{f} = b$

$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

Idee: bilde (für festes f) Duales

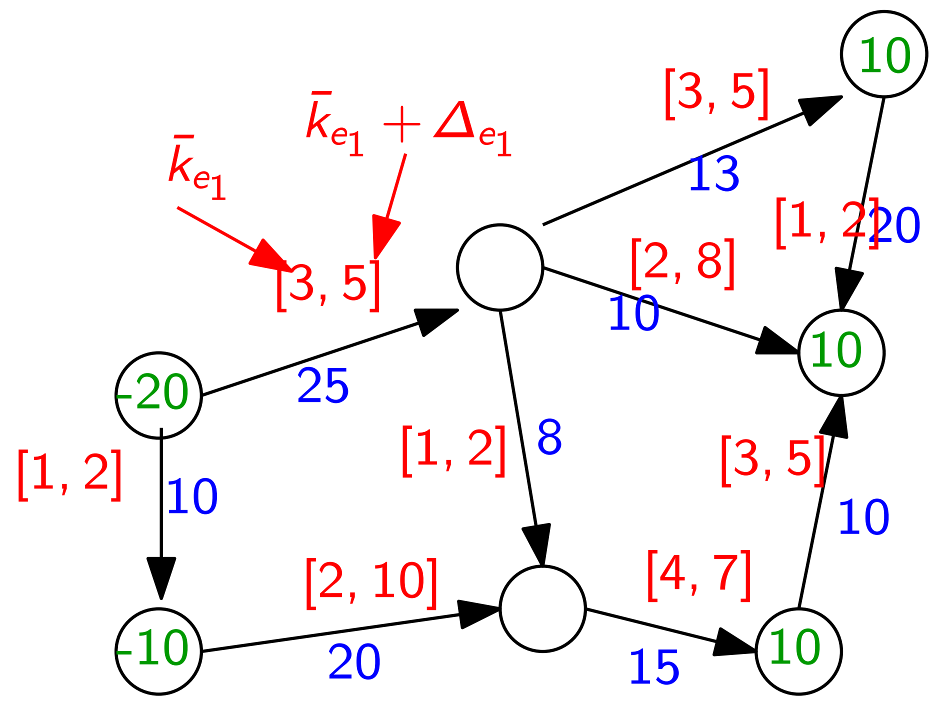
$$\min_{\mathbf{y},\mathbf{z}} \quad \sum_{e \in E} \Delta_e \mathbf{y}_e + \Gamma \mathbf{z}$$

so dass $\mathbf{y}_e + \mathbf{z} \geq f_e \qquad \forall e \in E$

$$\mathbf{y}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{z} \geq 0$$

Setze Duales ein



Bedarfsflussproblem

$$\min \quad \left(\bar{k}^t \mathbf{f} + \boxed{\max_{d \in \mathcal{U}'} d^t \mathbf{f}} \right)$$

$$\text{so dass } A\mathbf{f} = b$$

$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

$$\min_{\mathbf{f},\mathbf{y},\mathbf{z}} \quad \bar{k}^t \mathbf{f} + \sum_{e \in E} \Delta_e \mathbf{y}_e \qquad + \Gamma \mathbf{z}$$

$$\text{so dass } \mathbf{y}_e + \mathbf{z} \geq \mathbf{f}_e \qquad \forall e \in E$$

$$A\mathbf{f} = b$$

$$\mathbf{f}_e \leq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{f}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{y}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{z} \geq 0$$

Lineares Programm!

Idee: bilde (für festes f) Duales

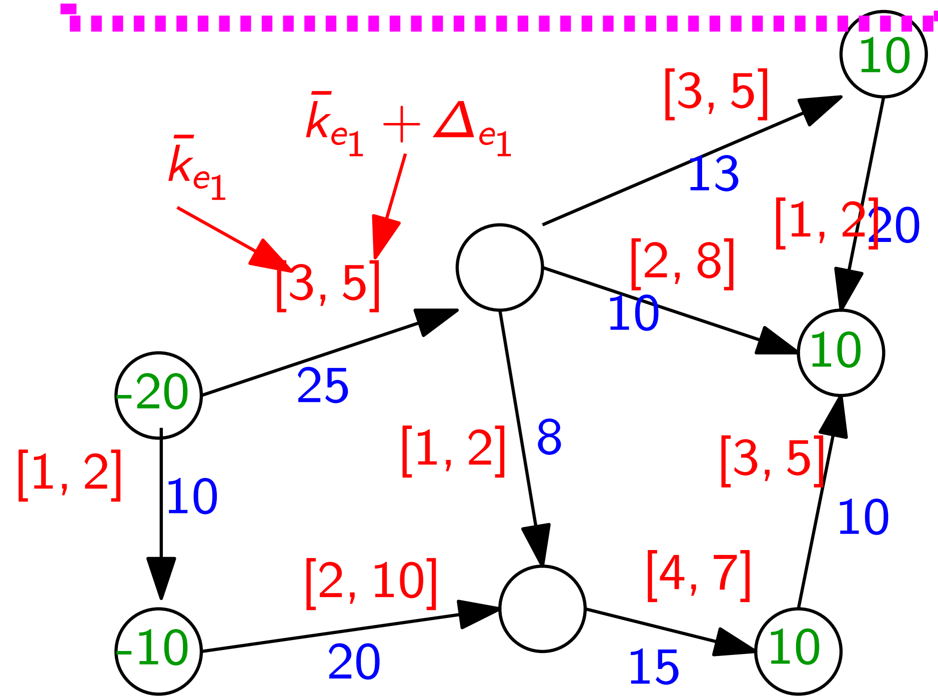
$$\min_{\mathbf{y},\mathbf{z}} \quad \sum_{e \in E} \Delta_e \mathbf{y}_e + \Gamma \mathbf{z}$$

$$\text{so dass } \mathbf{y}_e + \mathbf{z} \geq f_e \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{y}_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

$$\mathbf{z} \geq 0$$

Setze Duales ein



Wozu nützt uns die Dualität?(4)

- Jede *dual zulässige* Lösung ist (bei Maximierungsproblemen) eine obere Schranke an die primale Optimallösung - und hilft uns somit, die Lösungsqualität von primal zulässigen Lösungen zu bestimmen.

- Manchmal: duales Problem leichter zu lösen als das Primale

  Über Lösung des Dualen und den Satz vom komplementären Schlupf erhalten wir Lösung des Primalen.

- Duales vom 'Maximaler Fluss'-Problem zusammen mit MaxFlow-MinCut-Satz erlaubt es, 'Minimaler Schnitt'-Problem als *lineares* Programm zu formulieren.

- Ist das 'innere' Problem linear, erlaubt uns das Dualisieren des inneren Problems Minmax-Probleme (wie sie zum Beispiel in der robusten Optimierung oder in der Spieltheorie auftreten) als Min-Probleme zu schreiben. (Das gleiche gilt natürlich auch für Maxmin-Probleme, die dann als Max-Probleme geschrieben werden können.)

Stichworte heute

Mathematische Programmierung:
Dualität, Satz vom komplementären Schlupf

Optimierungsprobleme: Bedarfsflüsse mit minimalen Kosten im schlimmsten Fall (robuste Optimierung), minimale Schnitte