

10. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (Winter 2022/23)

Aufgabe 1 – Tiefensuche

Geben Sie für jedes der geforderten Beispiele den Graphen und das Ergebnis einer Tiefensuche in Form der resultierenden Bäume sowie der Entdeckungs- und Abschlusszeiten an. In dieser Aufgabe sind keine Selbst- oder Mehrfachkanten erlaubt.

- a) Geben Sie ein Beispiel an, das folgende Behauptung widerlegt:

Sei G ein gerichteter Graph, der einen Pfad von u nach v enthält, und sei $u.d < v.d$ das Resultat einer Tiefensuche in G . Dann folgt, dass v im Tiefensuchbaum ein Nachkomme von u ist (d.h. es gibt in diesem Baum einen u - v -Pfad). **2 Punkte**

- b) Geben Sie ein Beispiel an, das folgende Behauptung widerlegt:

Sei G ein gerichteter Graph, der einen Pfad von u nach v enthält. Für die Entdeckungs- und Abschlusszeiten jeder Tiefensuche in G gilt dann $v.d < u.f$. **1 Punkt**

- c) Geben Sie ein Beispiel für eine Tiefensuche in einem gerichteten Graphen G an, in der ein Baum mit einem einzelnen Knoten u gebildet wird, obwohl u sowohl eingehende als auch ausgehende Kanten hat. **2 Punkte**

Aufgabe 2 – Pfade in kreisfreien Graphen

Gegeben sei ein gerichteter kreisfreier Graph $G = (V, E)$, zwei Knoten $s, t \in V$ und eine Menge $W \subset V$ von k Knoten, wobei $s, t \notin W$. Wir bezeichnen einen s - t -Pfad P als *zulässig*, wenn er durch alle Knoten in W geht. Dabei ist es egal, in welcher Reihenfolge die Knoten in W durchlaufen werden.

- a) Seien P_1 und P_2 zwei zulässige s - t -Pfade. Zeigen Sie, dass P_1 und P_2 die Knoten in W in derselben Reihenfolge durchlaufen. **1 Punkt**

- b) Ergänzen Sie den folgenden Algorithmus, so dass er einen zulässigen s - t -Pfad als Liste von Knoten zurückgibt, falls es solch einen Pfad gibt. Falls es keinen zulässigen s - t -Pfad gibt, soll der Algorithmus nil zurückgeben. Begründen Sie, warum der Algorithmus korrekt ist. **3 Punkte**

```

getPath(DirectedAcyclicGraph G, Vertex s, Vertex t, Array of Vertices W)
P = new List()
A = getVertexOrder(G, s, t, W) // Liefert ein Feld mit s, mit den Knoten in W in
    der richtigen Reihenfolge, wenn es eine solche gibt, und mit t.
for i = A.length downto 2 do
    // Ergänze Pfad P um Knoten zwischen A[i - 1] und A[i]
    // (ohne A[i - 1] aber einschließlich A[i]).
    // Gib nil zurück, wenn es von A[i - 1] nach A[i] keinen Pfad gibt.
P.Insert(A[1])
return P

```

- c) Hat Ihr Algorithmus aus Aufgabenteil b) die Laufzeit $O(|V| + |E|)$? Falls nicht, beschreiben Sie in Worten, wie man diese Laufzeit durch Verbesserung Ihres Algorithmus erreichen kann. **2 Punkte**
- d) Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, der nicht notwendigerweise kreisfrei ist, zwei Knoten $s, t \in V$ und eine Folge von Knoten $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$. Zeigen Sie, dass im schlechtesten Fall jeder s - t -Pfad, der die Knoten in W durchläuft und dabei die gegebene Reihenfolge einhält, Länge $\Omega(|V|^2)$ hat. Beachten Sie, dass ein Pfad einen Knoten mehrfach durchlaufen kann. **2 Punkte**

Aufgabe 3 – Amortisierte Analyse

- a) Gegeben sei folgende Variante der Datenstruktur Schlange: Nach jeweils k Operationen wird eine Kopie der Datenstruktur angefertigt und als Backup abgespeichert. Betrachten Sie nun den Fall, dass die Schlange zu jedem Zeitpunkt höchstens $10 \cdot k$ Elemente enthält. Zeigen Sie, dass in diesem Fall alle Schlangenoperationen in $O(1)$ amortisierter Zeit laufen. **3 Punkte**
- Beachten Sie:* Die Laufzeitbeschränkung $O(1)$ bedeutet, dass die Laufzeit *nicht* von k abhängen darf.

Aufgabe 4 – Leichte Kanten und Schnitte

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Kantengewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Sei weiter $T = (V, E_T)$ ein minimaler Spannbaum von G bezüglich w . Zeigen Sie: für jede Kante $\{u, v\} \in E_T$ gibt es einen Schnitt, für den $\{u, v\}$ *leicht* ist. **4 Punkte**

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Donnerstag, 02. Februar 2023, 14:00 Uhr** einmal pro Gruppe über Wuecampus als pdf-Datei ab. Vermerken Sie dabei stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen auf der Abgabe.

Grundsätzlich sind stets alle Ihrer Aussagen zu begründen und Ihr Pseudocode ist stets zu kommentieren.

Die Lösungen zu den mit PABS gekennzeichneten Aufgaben, geben Sie bitte nur über das PABS-System ab. Vermerken Sie auf Ihrem Übungsblatt, in welchem Repository (sXXXXXX-Nummer) die Abgabe zu finden ist. Geben Sie Ihre Namen hier als Kommentare in den Quelltextdateien an.