

## 5. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (Winter 2022/23)

### Aufgabe 1 – MinHeaps

Gegeben sei eine Menge  $S \subseteq \mathbb{Z}$  von  $n$  Zahlen und eine Zahl  $z \in \mathbb{Z}$ . Ein Algorithmus soll alle Zahlen in  $S$  ausgeben, die echt kleiner als  $z$  sind.

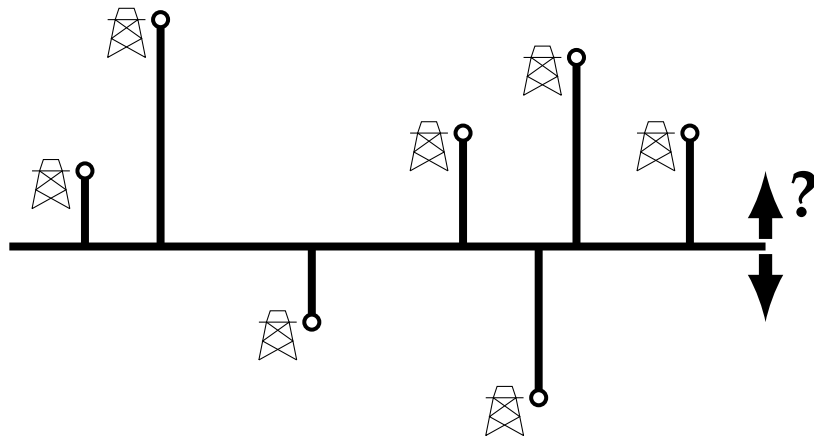
- a) Zeigen Sie: jeder Algorithmus für dieses Problem braucht im Worst-Case  $\Omega(n)$  Zeit.  
**2 Punkte**
- b) Geben Sie in Pseudocode einen Algorithmus an, der dieses Problem auf einem MinHeap  $S$  löst. Der Algorithmus soll echt schneller als linear in  $n$  sein, wenn die Mächtigkeit  $k$  der Ergebnismenge klein ist (das heißt  $k \in o(n)$ ). Am Ende soll  $S$  immer noch ein MinHeap sein, der die gleichen Elemente wie am Anfang enthält. Hierfür können 3 Punkte erreicht werden. Es gibt den 4. Punkt, wenn die Laufzeit nicht von  $n$ , sondern nur von  $k$  abhängt.  
**4 Punkte**
- c) Geben Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus aus Aufgabenteil b) in Abhängigkeit von  $n$  und  $k$  an. Begründen Sie Ihre Antwort.  
**2 Punkte**

### Aufgabe 2 – Pipelines

Jett Rink möchte eine Pipeline in Ost-West-Richtung bauen, an die er seine Ölquellen möglichst kostengünstig anschließen kann. Jede Ölquelle soll über eine Zuleitung, die in Nord-Süd-Richtung verlaufen soll, an die Pipeline angeschlossen werden. Jett Rink fragt sich, wo die billigste Ost-West-Pipeline verläuft, also die, bei der die Gesamtlänge aller Zuleitungen minimiert wird.

Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit in  $O(n)$  an, der für eine Menge von  $n$  Ölquellen  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$  die  $y$ -Koordinate einer billigsten Ost-West-Pipeline zurückgibt. Begründen Sie, warum der Algorithmus korrekt ist.

*Hinweis:* Sie dürfen davon ausgehen, dass die  $x$ -Koordinaten aller Ölquellen paarweise verschieden sind.  
**4 Punkte**



### Aufgabe 3 – Sortieren in Linearzeit

Geben Sie in kommentiertem Pseudocode einen Algorithmus an, der ein Eingabefeld  $A$  der Länge  $n$  mit Wertebereich  $\{1, \dots, n^2 - 1\}$  in  $O(n)$  Zeit sortiert! **4 Punkte**

*Tipp:* Verwenden Sie Methoden aus der Vorlesung. Wandeln Sie jedoch zunächst die Zahlen in eine geeignete Darstellung um.

### Aufgabe 4 – Münzwurf

Eine faire Münze wird dreimal geworfen. Die Zufallsvariable  $X$  gibt an, wie oft die Münze mit dem Kopf nach oben landet.

- a) Wie groß ist  $E[X^3]$ ? **2 Punkte**
- b) Wie groß ist  $(E[X])^3$ ? **2 Punkte**

---

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Donnerstag, 1. Dezember 2022, 14:00 Uhr** einmal pro Gruppe über Wuecampus als pdf-Datei ab. Vermerken Sie dabei stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen auf der Abgabe.

Grundsätzlich sind stets alle Ihrer Aussagen zu begründen und Ihr Pseudocode ist stets zu kommentieren.

Die Lösungen zu den mit PABS gekennzeichneten Aufgaben, geben Sie bitte nur über das PABS-System ab. Vermerken Sie auf Ihrem Übungsblatt, in welchem Repository (sXXXXXX-Nummer) die Abgabe zu finden ist. Geben Sie Ihre Namen hier als Kommentare in den Quelltextdateien an.