Chair of Computer Science I
Algorithms and Complexity
University of Würzburg

Würzburg, November 14, 2022

Prof. Dr. Alexander Wolff
M.Sc. Marie Diana Sieper

Tutoriumsblatt #1
Approximation Algorithms (Winter Semester 2022/23)

Exercise 1 – Maximum Matching

a) Zeige, dass jedes nicht-erweiterbare Matching eine 1/2-Approximation für ein größtes Matching ist.

b) Formuliere Minimum Maximal Matching als ILP.

Exercise 2 – Maximum Cut revisited

Wir betrachten das Max-Cut Problem von Blatt 1, Aufgabe 3.

a) Um einen Cut zu bestimmen, gehen wir folgendermaßen vor: Sei $S \subseteq V(G)$ beliebig. Solange es einen Knoten v in S oder $\bar{S} = V(G) \setminus S$ gibt, der mehr Nachbarn in der eigenen als in der Gegenmenge enthält, weisen wir v der jeweils anderen Menge zu.

   Zeige, dass dieses Vorgehen zu einer 1/2-Approximation führt. Ist die Schranke scharf? Warum ist es ggf erstrebenswerter, diesen Algorithmus anstelle dem von Blatt 1, Aufgabe 3 zu nutzen? Funktioniert der Algorithmus auch noch mit Kantengewichten?

   Hint: Zeige zunächst, dass dieses Vorgehen (in Polynomialzeit) terminiert.

b) Sei der Graph G nun gerichtet und gewichtet. Wir suchen eine Menge $S \subseteq V$, so dass die Gesamtkosten der von S nach $\bar{S}$ führenden Kanten so groß wie möglich sind. Finde einen 1/4-Approximationsalgorithmus für dieses Problem und zeige, dass er diese Approximationsgüte erfüllt. Ist die Schranke scharf?

Exercise 3 – Asymmetric TSP

Sei G ein vollständiger gerichteter Graph mit Kantenkosten $\omega \colon E(G) \to \mathbb{R}_+$, die die gerichtete Dreiecksungleichung erfüllen ($\omega(uv) \leq \omega(uw) + \omega(wv)$ für alle $u, v, w \in V(G)$). In dem Problem Asymmetric TSP suchen wir einen gerichteten Kreis mit kleinesten Kosten, der alle Knoten genau einmal enthält.

Gib einen $O(\log(n))$-Approximationsalgorithmus an und beweise, dass er die geforderte Approximationsgüte erfüllt.

Hint: Ein Cycle Cover kann in Polynomialzeit bestimmt werden.

Diese Aufgaben werden gemeinsam in der Übung am 15.11.2022 bearbeitet. Sie müssen nicht abgegeben werden und sie werden nicht korrigiert.