Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen und Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 27. Oktober 2022

Prof. Dr. Alexander Wolff
Felix Klesen, M. Sc.

2. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (Winter 2022/23)

Aufgabe 1 – Produkt

Sei folgender Algorithmus zur Berechnung des Produkts $i \cdot (i+1) \cdot \ldots \cdot (j-1) \cdot j$ für natürliche Zahlen i und j mit $i < j$ gegeben:

Produkt(i, j)
return Fakultaet(j)/Fakultaet($i - 1$)

Fakultaet(x)
if $x == 0$ **then**
  ∟ **return** 1
return $x \cdot$ Fakultaet($x - 1$)

a) Begründen Sie kurz, warum Algorithmus Produkt korrekt ist. **1 Punkt**

b) Geben Sie die Worst-Case-Laufzeit von Produkt in Abhängigkeit von i und j an. **1 Punkt**

c) Geben Sie eine neue Version des Algorithmus Produkt in Pseudocode an, deren Worst-Case-Laufzeit in $\Theta(j - i)$ ist. (Verwenden Sie hier keine mathematischen Operationen außer den Grundrechenarten!) **2 Punkte**

d) Was spricht für Ihre Version der Methode Produkt, außer dass sie schneller ist als die Version aus Aufgabenteil (a)? **1 Punkt**

Aufgabe 2 – Hirsch-Index

Professor Munroe ist sehr stolz auf seine Veröffentlichungen, die er aufsteigend nach Erscheinungsdatum nummeriert:

1. How much Force power can Yoda output?
2. How fast can you hit a speed bump while driving and live?
3. At what speed would you have to drive for rain to shatter your windshield?
4. Can you use a magnifying glass and moonlight to light a fire?

Ein Kollege zweifelt aber daran, dass die Veröffentlichungen von Prof. Munroe relevant sind, und führt daher eine Liste, in der er fortlaufend notiert, wenn eine Veröffentlichung von Prof. Munroe in einer anderen Veröffentlichung zitiert wird. Er vermerkt dabei nur die Nummer der Veröffentlichung aus Prof. Munroes Liste. Aktuell kommt er zu diesem Ergebnis: 1,3,4,4,1,4,2. Daraus berechnet er den *Hirsch-Index* von Prof. Munroe. Das ist die größte natürliche Zahl k, für die gilt, dass Prof. Munroe mindestens k Veröffentlichungen hat, die mindestens k-mal zitiert wurden. Der Hirsch-Index von Prof. Munroe ist momentan also 2, denn nur Veröffentlichungen 1 und 4 wurden mindestens zweimal zitiert. Die Anzahl aller Zitierungen bezeichnen wir mit n.

a) Geben Sie textuell und in Pseudocode einen Algorithmus an, der den Hirsch-Index eines Wissenschaftlers berechnet. Der Algorithmus soll als Eingabe nur eine Folge von Zahlen erfordern, welche (wie im obigen Beispiel) die Zitierungen der Veröffentlichungen des Wissenschaftlers angibt.

   Die asymptotische Worst-Case-Laufzeit des Algorithmus soll $O(n \log n)$ sein. Sie dürfen Algorithmen aus der Vorlesung als Unterroutinen verwenden. **4 Punkte**

PABS

b) Implementieren Sie in der Klasse `HirschIndex` im Paket `hIndex` die Methode

   - `public static int hirschIndex(int[] citations)`

   in Java. Diese soll den Hirsch-Index aus einer Folge von Zitierungen berechnen.

   Die asymptotische Worst-Case-Laufzeit Ihrer Implementierung soll $O(n^2)$ sein. Zum Sortieren eines Feldes `int[] a` dürfen Sie `java.util.Arrays.sort(a);` verwenden. **3 Punkte**

Aufgabe 3 – MergeBackwards

Betrachten Sie die Methode Merge(array of int A, int ℓ, int m, int r) aus der Vorlesung. Geben Sie ein Feld A an, so dass nach der Ausführung von Merge(A, 1, 4, 8) gilt, dass $A = \langle 5, 4, 3, 6, 2, 1, 7, 8 \rangle$.

Wie viele Lösungen gibt es für A? Begründen Sie Ihre Antwort. **4 Punkte**

Beachten Sie, dass wir anders als in der Vorlesung hier nicht *davon ausgehen, dass* $A[\ell..m]$ *und* $A[m+1..r]$ *sortiert sind.*

Aufgabe 4 – Aussagen zur O-Notation

Nehmen Sie kurz zu den folgenden Aussagen über einen fiktiven Algorithmus Stellung. Welche Aussagen sind möglicherweise sinnvoll und welche Aussagen sind in sich widersprüchlich oder nichtssagend? Begründen Sie Ihre Antwort. **4 Punkte**

a) Der Algorithmus hat im besten Fall eine Laufzeit von $\Theta(n)$ und im schlechtesten Fall eine Laufzeit von $\Theta(n^2)$.

b) Der Algorithmus hat im besten Fall eine Laufzeit von $\Omega(n)$ und im schlechtesten Fall eine Laufzeit von $O(n^2)$.

c) Der Algorithmus hat im besten Fall eine Laufzeit von $\Omega(n^2)$ und im schlechtesten Fall eine Laufzeit von $O(n)$.

d) Die Laufzeit des Algorithmus ist $O(n)$ und $\Omega(n^2)$.

e) Die Laufzeit des Algorithmus ist $\Omega(n)$ und $O(n^2)$.

f) Die Laufzeit des Algorithmus ist entweder $O(n^2)$ oder höher.

g) Der Algorithmus sortiert Folgen von bis zu 100 Zahlen mit einer Laufzeit von $\Theta(n \log n)$.

h) Die Laufzeit des Algorithmus ist $o(n)$ und $\omega(n)$.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Donnerstag, 03. November 2022, 14:00 Uhr** einmal pro Gruppe über Wuecampus als pdf-Datei ab. Vermerken Sie dabei stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen auf der Abgabe.

Grundsätzlich sind stets alle Ihrer Aussagen zu begründen und Ihr Pseudocode ist stets zu kommentieren.

Die Lösungen zu den mit PABS gekennzeichneten Aufgaben, geben Sie bitte nur über das PABS-System ab. Vermerken Sie auf Ihrem Übungsblatt, in welchem Repository (*sXXXXXX*-Nummer) die Abgabe zu finden ist. Geben Sie Ihre Namen hier als Kommentare in den Quelltextdateien an.