Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2022/23
3. Vorlesung

Laufzeitanalyse

Prof. Dr. Alexander Wolff

Lehrstuhl für Informatik I

Recap: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn!

Recap: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn!

1. Was sind die zwei (oder drei?) entscheidensten Fragen, die wir uns über einen Algorithmus stellen?

Recap: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn!

1. Was sind die zwei (oder drei?) entscheidensten Fragen, die wir uns über einen Algorithmus stellen?

2. Warum eigentlich interessieren wir uns fürs Sortieren?

Recap: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn!

1. Was sind die zwei (oder drei?) entscheidensten Fragen, die wir uns über einen Algorithmus stellen?

2. Warum eigentlich interessieren wir uns fürs Sortieren?

3. Welche Entwurfstechniken für Algorithmen kennen wir schon?

Recap: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn!

1. Was sind die zwei (oder drei?) entscheidensten Fragen, die wir uns über einen Algorithmus stellen?

2. Warum eigentlich interessieren wir uns fürs Sortieren?

3. Welche Entwurfstechniken für Algorithmen kennen wir schon?

4. Wie beweisen wir die Korrektheit
   a) einer Schleife?

Recap: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn!

1. Was sind die zwei (oder drei?) entscheidensten Fragen, die wir uns über einen Algorithmus stellen?
2. Warum eigentlich interessieren wir uns fürs Sortieren?
3. Welche Entwurfstechniken für Algorithmen kennen wir schon?
4. Wie beweisen wir die Korrektheit
   a) einer Schleife?
   b) eines inkrementellen Algorithmus?

Recap: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn!

1. Was sind die zwei (oder drei?) entscheidensten Fragen, die wir uns über einen Algorithmus stellen?

2. Warum eigentlich interessieren wir uns fürs Sortieren?

3. Welche Entwurfstechniken für Algorithmen kennen wir schon?

4. Wie beweisen wir die Korrektheit
   a) einer Schleife?
   b) eines inkrementellen Algorithmus?
   c) eines rekursiven Algorithmus?

Recap: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn!

1. Was sind die zwei (oder drei?) entscheidensten Fragen, die wir uns über einen Algorithmus stellen?

2. Warum eigentlich interessieren wir uns fürs Sortieren?

3. Welche Entwurfstechniken für Algorithmen kennen wir schon?

4. Wie beweisen wir die Korrektheit
   a) einer Schleife?
   b) eines inkrementellen Algorithmus?
   c) eines rekursiven Algorithmus?

Heute schon implementiert?
Zum Beispiel
– InsertionSort,
– MergeSort, ...
Probieren Sie's selbst!

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
      key = A[j]
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key do
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

Laufzeit analysieren: InsertionSort

InsertionSort(int[ ] A)

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**
- $key = A[j]$
- $i = j - 1$
- **while** $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**
  - $A[i+1] = A[i]$
  - $i = i - 1$
- $A[i+1] = key$

Zwei Konventionen:

Laufzeit analysieren: InsertionSort

InsertionSort(int[ ] A)

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**
- $key = A[j]$
- $i = j - 1$
- **while** $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**
  - $A[i + 1] = A[i]$
  - $i = i - 1$
- $A[i + 1] = key$

Zwei Konventionen:

1) $n :=$ Größe der Eingabe

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
      key = A[j]
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key do
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

Zwei Konventionen:

1) $n :=$ Größe der Eingabe

$=_{\text{hier}} A.length$

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
      key = A[j]
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key do
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

Zwei Konventionen:

1) $n :=$ Größe der Eingabe

$=_{\text{hier}} A.length$

2) Wir zählen nur Vergleiche!

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
      key = A[j]
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key do
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

Zwei Konventionen:

1) $n :=$ Größe der Eingabe
$=_{\text{hier}} A.length$

2) Wir zählen nur Vergleiche!
(zwischen Elementen der Eingabe)

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
      key = A[j]
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key do
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

Zwei Konventionen:

1) $n :=$ Größe der Eingabe

   $=_{\text{hier}} A.length$

2) Wir zählen nur Vergleiche!

   (zwischen Elementen der Eingabe)

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j − 1
    while i > 0 and A[i] > key do
      A[i + 1] = A[i]
      i = i − 1
    A[i + 1] = key
```

Zwei Konventionen:

1) $n :=$ Größe der Eingabe

   $=_{\text{hier}} A.length$

2) Wir zählen nur Vergleiche!

   (zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
    for j = 2 to A.length do
        key = A[j]
        i = j − 1
        while i > 0 and A[i] > key do
            A[i + 1] = A[i]
            i = i − 1
        A[i + 1] = key
```

Zwei Konventionen:

1) $n :=$ Größe der Eingabe

$=_{\text{hier}}$ $A.length$

2) Wir zählen nur Vergleiche!

(zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Problem: Tatsächliche Laufzeit hängt stark von Eingabe ab.

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
      key = A[j]
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key do
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

Zwei Konventionen:

1) $n :=$ Größe der Eingabe
$=_{\text{hier}} A.length$

2) Wir zählen nur Vergleiche!
(zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Problem: Tatsächliche Laufzeit hängt stark von Eingabe ab.

Lösung(?): *Betrachte Extremfälle!*

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
      key = A[j]
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key do
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

Zwei Konventionen:

1) $n :=$ Größe der Eingabe
$=_{\text{hier}} A.length$

2) Wir zählen nur Vergleiche!
(zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Problem: Tatsächliche Laufzeit hängt stark von Eingabe ab.

Lösung(?): *Betrachte Extremfälle!*

Bester Fall:

Schlechtester Fall:

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
      key = A[j]
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key do
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

Zwei Konventionen:

1) $n :=$ Größe der Eingabe

$=_{\text{hier}} A.length$

2) Wir zählen nur Vergleiche!

(zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Problem: Tatsächliche Laufzeit hängt stark von Eingabe ab.

Lösung(?): *Betrachte Extremfälle!*

Bester Fall: A aufsteigend sortiert

Schlechtester Fall:

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
      key = A[j]
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key do
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

Zwei Konventionen:

1) $n :=$ Größe der Eingabe
$=_{\text{hier}} A.length$

2) Wir zählen nur Vergleiche!
(zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Problem: Tatsächliche Laufzeit hängt stark von Eingabe ab.

Lösung(?): *Betrachte Extremfälle!*

Bester Fall: A aufsteigend sortiert $\Rightarrow n - 1$ Vergleiche

Schlechtester Fall:

Laufzeit analysieren: InsertionSort

InsertionSort(int[] A)
for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**
$key = A[j]$
$i = j - 1$
while $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**
$A[i+1] = A[i]$
$i = i - 1$
$A[i+1] = key$

Zwei Konventionen:

1) $n :=$ Größe der Eingabe
$=_{\text{hier}} A.length$

2) Wir zählen nur Vergleiche!
(zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Problem: Tatsächliche Laufzeit hängt stark von Eingabe ab.

Lösung(?): *Betrachte Extremfälle!*

Bester Fall: A aufsteigend sortiert $\Rightarrow n - 1$ Vergleiche

Schlechtester Fall: A absteigend sortiert

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
    for j = 2 to A.length do
        key = A[j]
        i = j − 1
        while i > 0 and A[i] > key do
            A[i + 1] = A[i]
            i = i − 1
        A[i + 1] = key
```

Zwei Konventionen:

1) $n :=$ Größe der Eingabe
   $=_{\text{hier}} A.length$

2) Wir zählen nur Vergleiche!
   (zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Problem: Tatsächliche Laufzeit hängt stark von Eingabe ab.

Lösung(?): *Betrachte Extremfälle!*

Bester Fall: A aufsteigend sortiert $\Rightarrow n - 1$ Vergleiche

Schlechtester Fall: A absteigend sortiert

$$\Rightarrow 1 + 2 + \cdots + (n-1) =$$

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
      key = A[j]
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key do
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

Zwei Konventionen:

1) $n :=$ Größe der Eingabe
   $=_{\text{hier}}\ A.length$

2) Wir zählen nur Vergleiche!
   (zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Problem: Tatsächliche Laufzeit hängt stark von Eingabe ab.

Lösung(?): *Betrachte Extremfälle!*

Bester Fall: A aufsteigend sortiert $\Rightarrow n-1$ Vergleiche

Schlechtester Fall: A absteigend sortiert

$$\Rightarrow 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n^2 - n}{2} \text{ Vgl.}$$

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j − 1
    while i > 0 and A[i] > key do
      A[i + 1] = A[i]
      i = i − 1
    A[i + 1] = key
```

Zwei Konventionen:

1) $n :=$ Größe der Eingabe $=_{\text{hier}} A.\mathit{length}$

2) Wir zählen nur Vergleiche! (zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Problem: Tatsächliche Laufzeit hängt stark von Eingabe ab.

Lösung(?): *Betrachte Extremfälle!*

Bester Fall: A aufsteigend sortiert $\Rightarrow n-1$ Vergleiche

Schlechtester Fall: A absteigend sortiert

$$\Rightarrow 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n^2 - n}{2} \text{ Vgl.}$$

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Korrekt?

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Korrekt? ✓

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Korrekt? ✓

Effizient?

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

$m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile

MergeSort(A, ℓ, m)

MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche

Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \begin{cases} & \text{falls } n = 1, \\ & \text{sonst.} \end{cases}$$

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
  $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
  MergeSort(A, ℓ, m)
  MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
  Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ & \text{sonst.} \end{cases}$$

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ + & \text{sonst.} \end{cases}$$

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Laufzeit von MergeSort

```
MergeSort(int[] A, int ℓ = 1, int r = A.length)
  if ℓ < r then
     m = ⌊(ℓ + r)/2⌋                 } teile
     MergeSort(A, ℓ, m)              } herrsche
     MergeSort(A, m + 1, r)
     Merge(A, ℓ, m, r)               } kombiniere
```

Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases}\right\} = \text{?}$$

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases}\right\} = ?$$

falls n Zweierpotenz

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

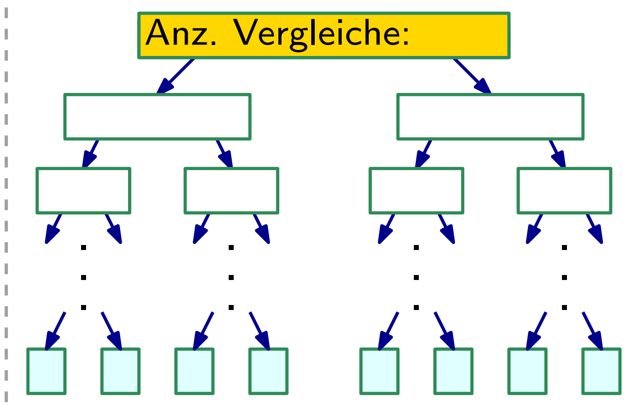
if $\ell < r$ **then**

$m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile

MergeSort(A, ℓ, m)
MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche

Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

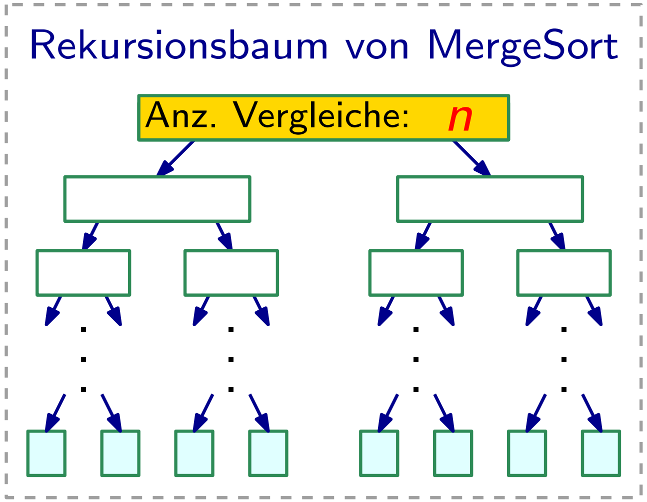
Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases} \Bigg\} = \textbf{?}$$

falls n Zweierpotenz

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



Effizient? Sei $V_{\text{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

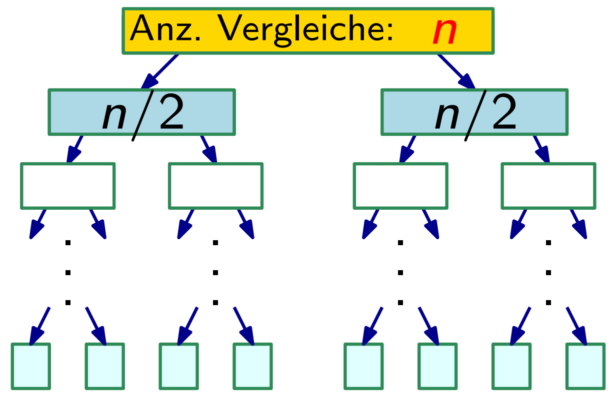
$$V_{\text{MS}}(n) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\text{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases}\right\} = \textbf{?}$$

falls n Zweierpotenz

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

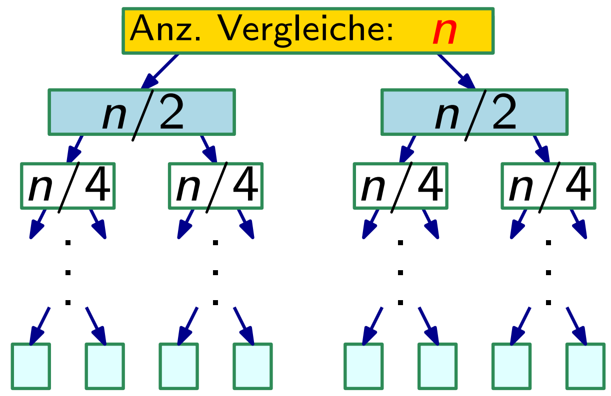
$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases}\right\} = \,?$$

falls n Zweierpotenz

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.\mathit{length}$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

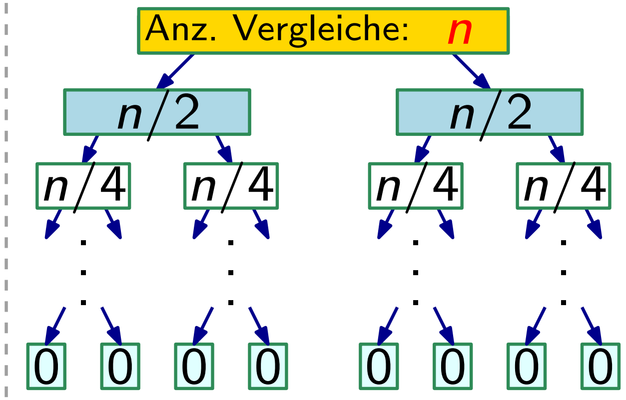
$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases}\right\} = \textbf{?}$$

falls n Zweierpotenz

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort$(A, m+1, r)$ } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases} = \;?$$

falls n Zweierpotenz

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.\mathit{length}$)

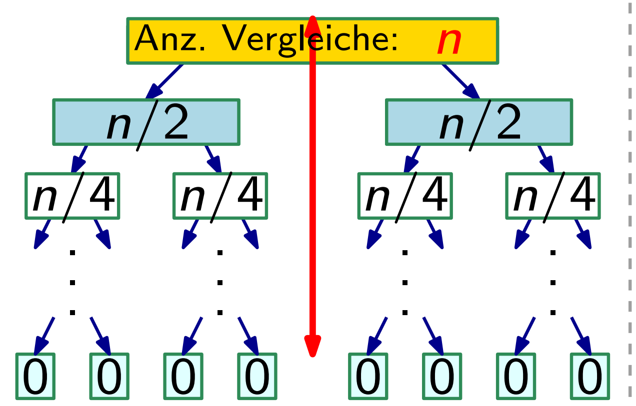
if $\ell < r$ **then**

$m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile

MergeSort(A, ℓ, m)
MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche

Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

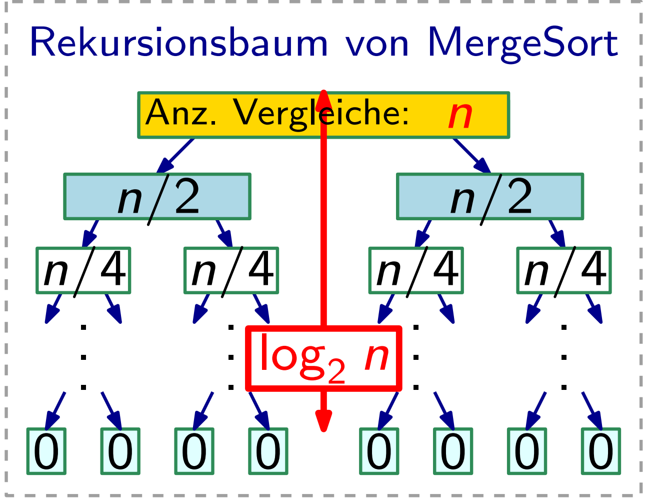
Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases}\right\} = \text{?}$$

falls n Zweierpotenz

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
  $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
  MergeSort(A, ℓ, m)
  MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
  Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{array} \right\} = \textbf{?}$$

falls n Zweierpotenz

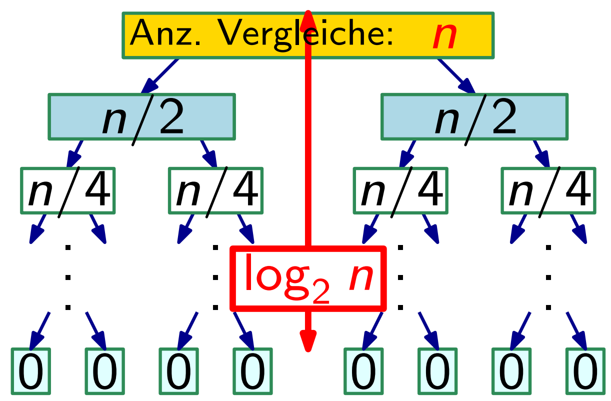
Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort$(A, m+1, r)$ } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases}\right\} = \underset{\text{falls } n \text{ Zweierpotenz}}{n \cdot \log_2 n}$$

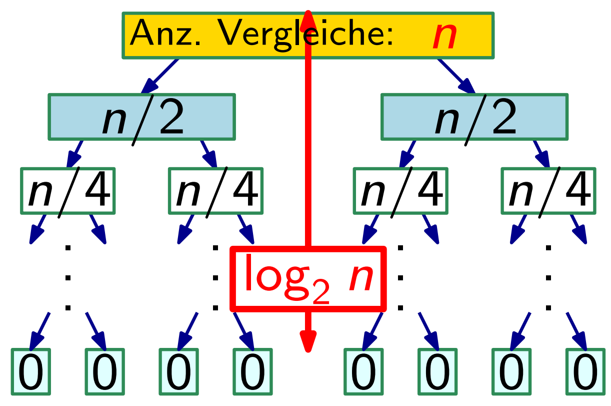
Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases}\right\} = n \cdot \log_2 n$$

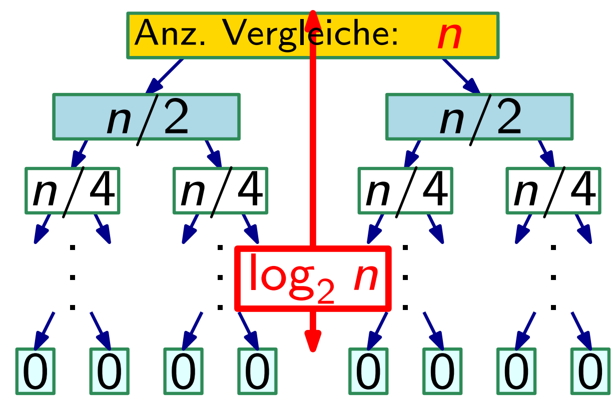
falls n Zweierpotenz

Beweis:

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

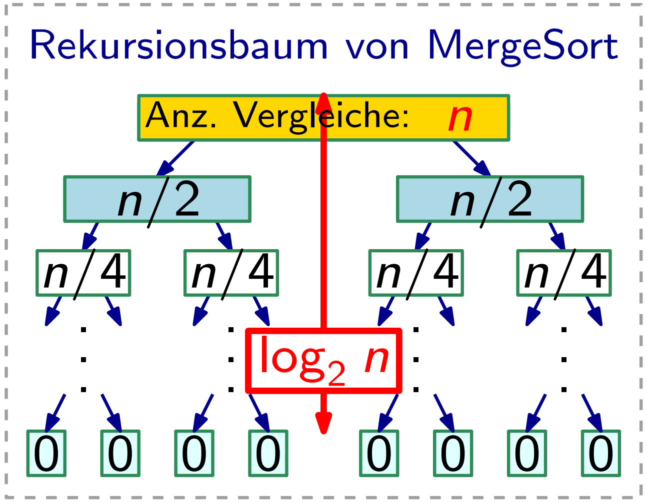
$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases}\right\} = n \cdot \log_2 n$$

falls n Zweierpotenz

Beweis: per Induktion über n.

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{array} \right\} = n \cdot \log_2 n$$

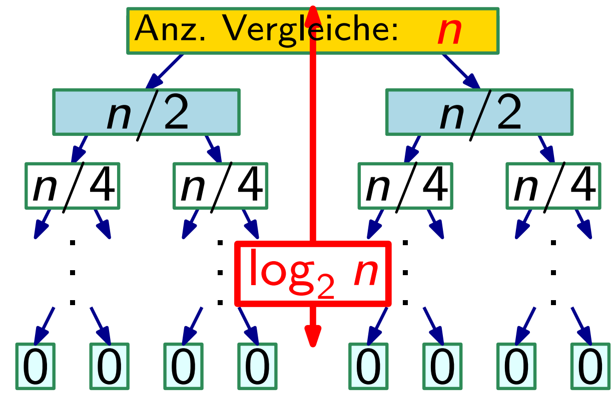
falls n Zweierpotenz

Beweis: per Induktion über n.
Induktionsanfang:

Laufzeit von MergeSort

```
MergeSort(int[] A, int ℓ = 1, int r = A.length)
  if ℓ < r then
    m = ⌊(ℓ + r)/2⌋              } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)           } herrsche
    MergeSort(A, m + 1, r)
    Merge(A, ℓ, m, r)            } kombiniere
```

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases} = n \cdot \log_2 n$$

falls n Zweierpotenz

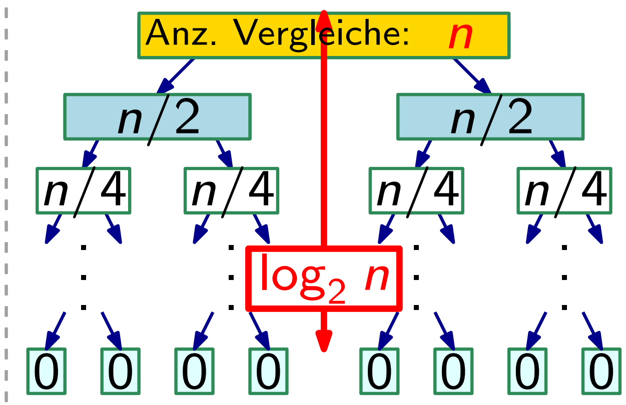
Beweis: per Induktion über n.

Induktionsanfang: $V_{\mathrm{MS}}(1) =$

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort$(A, m+1, r)$ } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases}\right\} = n \cdot \log_2 n$$

falls n Zweierpotenz

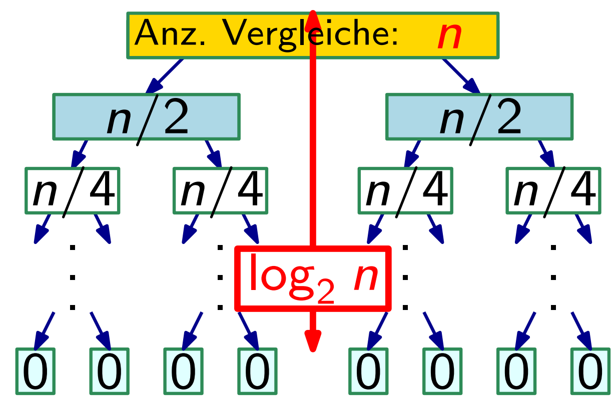
Beweis: per Induktion über n.

Induktionsanfang: $V_{\mathrm{MS}}(1) = 1 \cdot \log_2 1 =$

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases}\right\} = n \cdot \log_2 n$$

falls n Zweierpotenz

Beweis: per Induktion über n.

Induktionsanfang: $V_{\mathrm{MS}}(1) = 1 \cdot \log_2 1 = 0$ ✓

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.\mathit{length}$)

if $\ell < r$ **then**

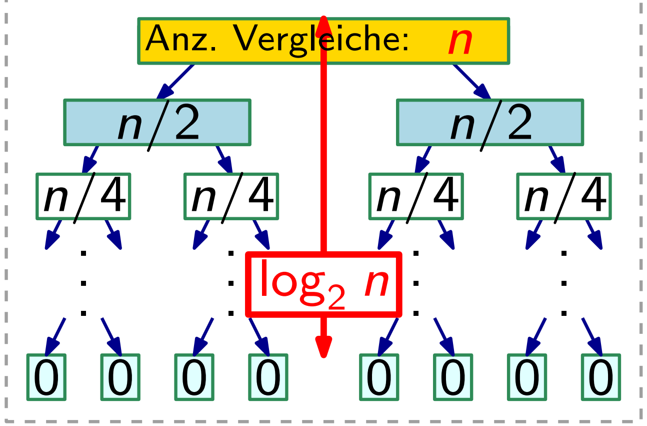
$m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile

MergeSort(A, ℓ, m)

MergeSort$(A, m+1, r)$ } herrsche

Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{array} \right\} = n \cdot \log_2 n$$

falls n Zweierpotenz

Beweis: per Induktion über n.

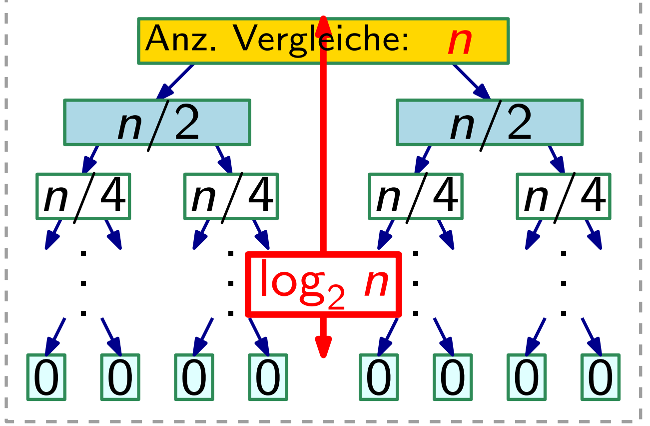
Induktionsanfang: $V_{\mathrm{MS}}(1) = 1 \cdot \log_2 1 = 0$ ✓

Induktionsschritt: $V_{\mathrm{MS}}(n) \underset{n>1}{=}$

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
  $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
  MergeSort(A, ℓ, m)
  MergeSort$(A, m+1, r)$ } herrsche
  Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases}\right\} = n \cdot \log_2 n$$

falls n Zweierpotenz

Beweis: per Induktion über n.

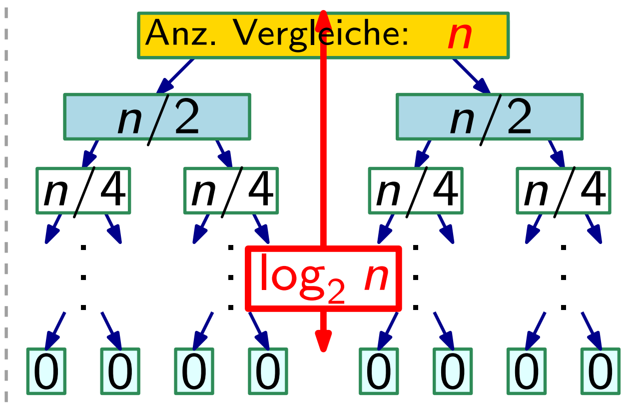
Induktionsanfang: $V_{\mathrm{MS}}(1) = 1 \cdot \log_2 1 = 0$ ✓

Induktionsschritt: $V_{\mathrm{MS}}(n) \underset{n>1}{=} 2 \cdot \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + n =$

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{array}\right\} = n \cdot \log_2 n$$

falls n Zweierpotenz

Beweis: per Induktion über n.

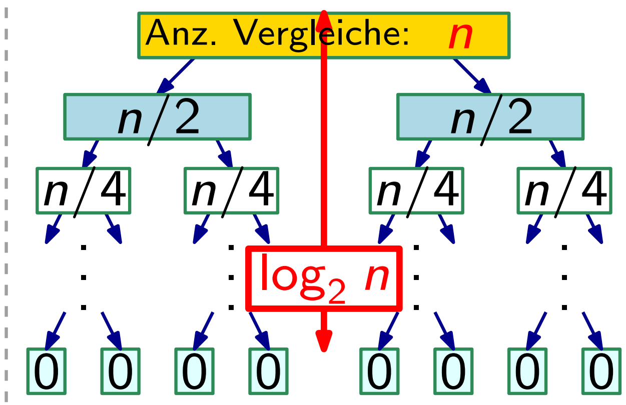
Induktionsanfang: $V_{\mathrm{MS}}(1) = 1 \cdot \log_2 1 = 0$ ✓

Induktionsschritt: $V_{\mathrm{MS}}(n) \underset{n>1}{=} 2 \cdot \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + n =$

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort$(A, m+1, r)$ } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases} = n \cdot \log_2 n$$

falls n Zweierpotenz

Beweis: per Induktion über n.

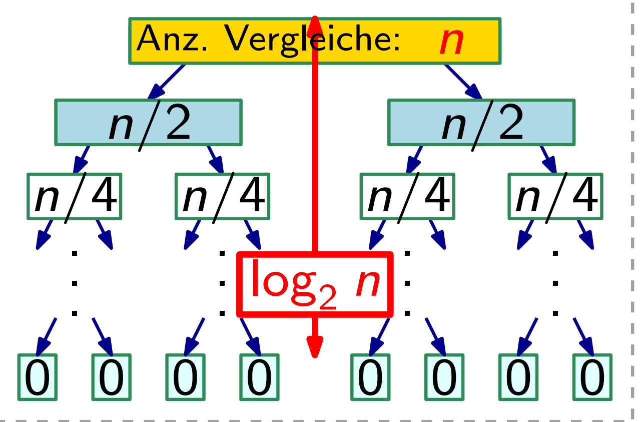
Induktionsanfang: $V_{\mathrm{MS}}(1) = 1 \cdot \log_2 1 = 0$ ✓

Induktionsschritt: $V_{\mathrm{MS}}(n) \underset{n>1}{=} 2 \cdot \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + n = n \log_2 n - n \log_2 2 + n$

Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
  $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
  MergeSort(A, ℓ, m)
  MergeSort$(A, m+1, r)$ } herrsche
  Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases}\right\} = n \cdot \log_2 n$$

falls n Zweierpotenz

Beweis: per Induktion über n.

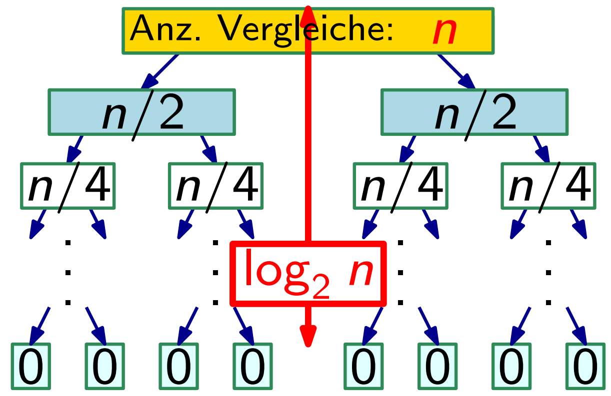
Induktionsanfang: $V_{\mathrm{MS}}(1) = 1 \cdot \log_2 1 = 0$ ✓

Induktionsschritt: $V_{\mathrm{MS}}(n) \underset{n>1}{=} 2 \cdot \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + n = n \log_2 n - n \log_2 2 + n$
$= n \log_2 n$ ✓

Laufzeit von MergeSort

```
MergeSort(int[] A, int ℓ = 1, int r = A.length)
  if ℓ < r then
    m = ⌊(ℓ + r)/2⌋                     } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)                  } herrsche
    MergeSort(A, m + 1, r)
    Merge(A, ℓ, m, r)                   } kombiniere
```

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? ✓ Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases}\right\} = n \cdot \log_2 n$$

falls n Zweierpotenz

Beweis: per Induktion über n.

Induktionsanfang: $V_{\mathrm{MS}}(1) = 1 \cdot \log_2 1 = 0$ ✓

Induktionsschritt: $V_{\mathrm{MS}}(n) \underset{n>1}{=} 2 \cdot \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + n = n \log_2 n - n \log_2 2 + n$

$= n \log_2 n$ ✓

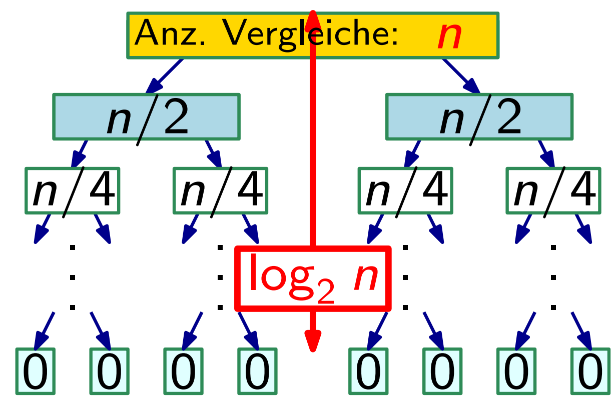
Laufzeit von MergeSort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.\mathit{length}$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort



Effizient? ✓ Sei $V_{\mathrm{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\mathrm{MS}}(n) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\mathrm{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases}\right\} = n \cdot \log_2 n$$

falls n Zweierpotenz – und sonst?

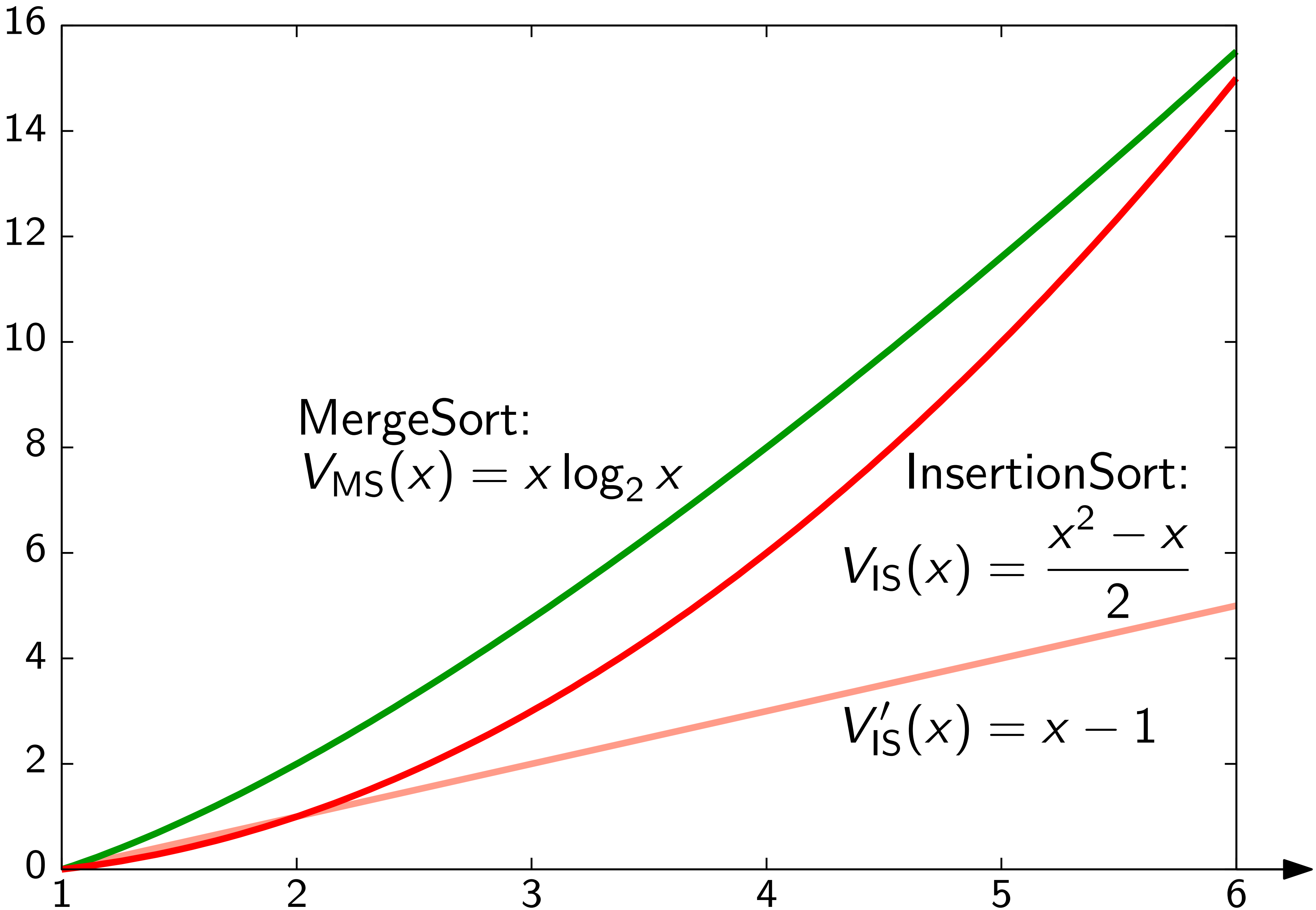
Beweis: per Induktion über n.

Induktionsanfang: $V_{\mathrm{MS}}(1) = 1 \cdot \log_2 1 = 0$ ✓

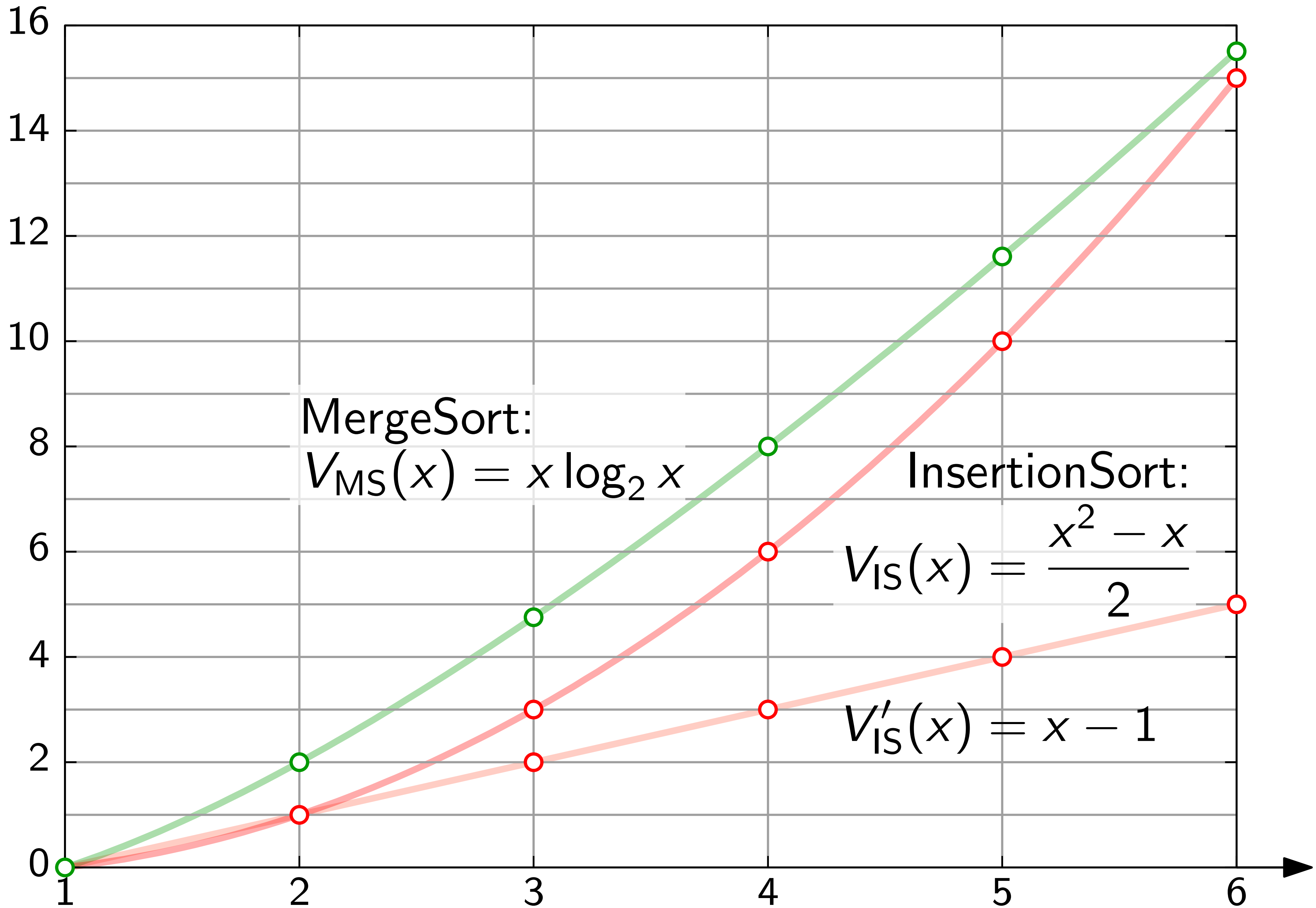
Induktionsschritt: $V_{\mathrm{MS}}(n) \underset{n>1}{=} 2 \cdot \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + n = n \log_2 n - n \log_2 2 + n$

$= n \log_2 n$ ✓

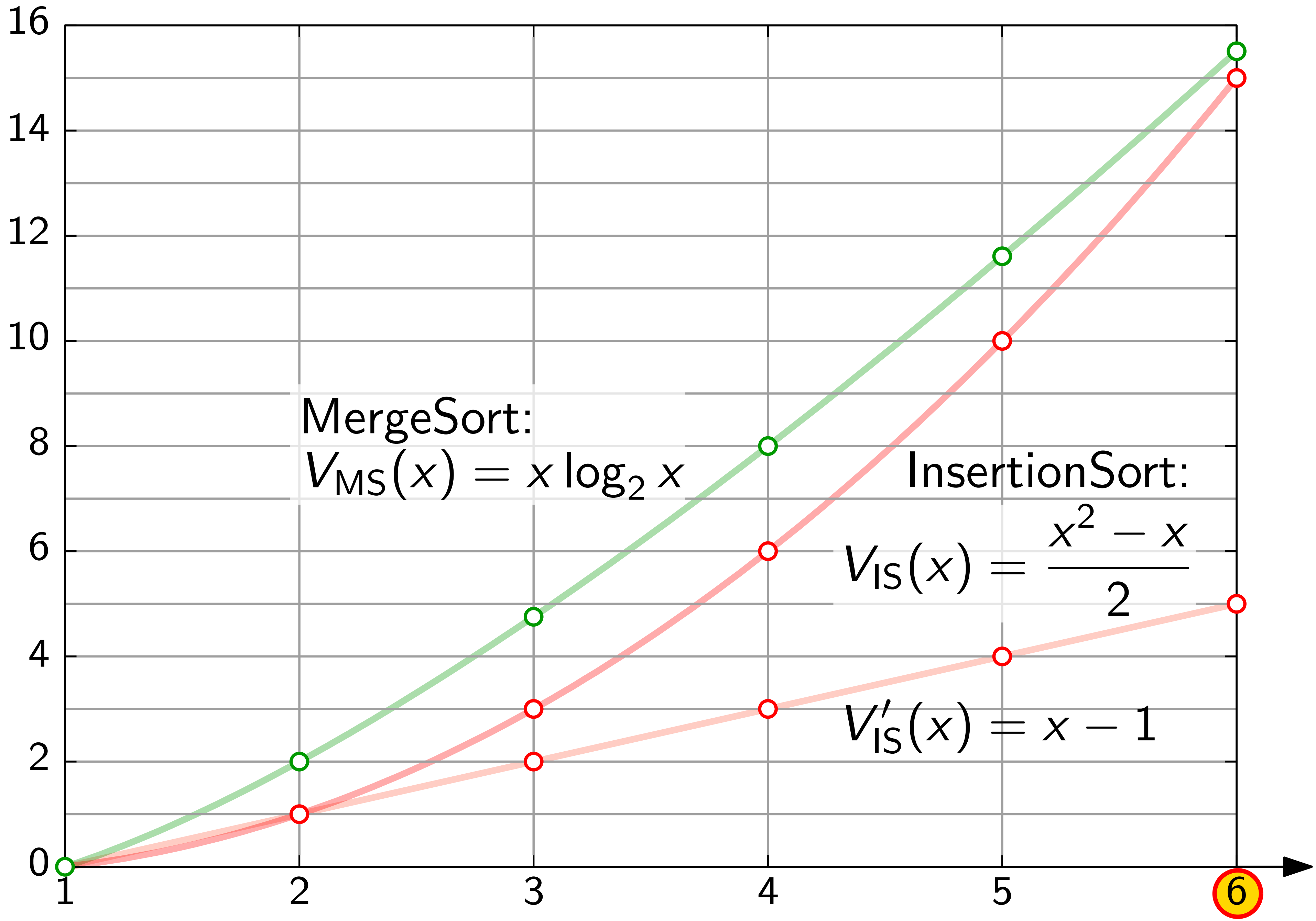
Vergleich InsertionSort vs. MergeSort



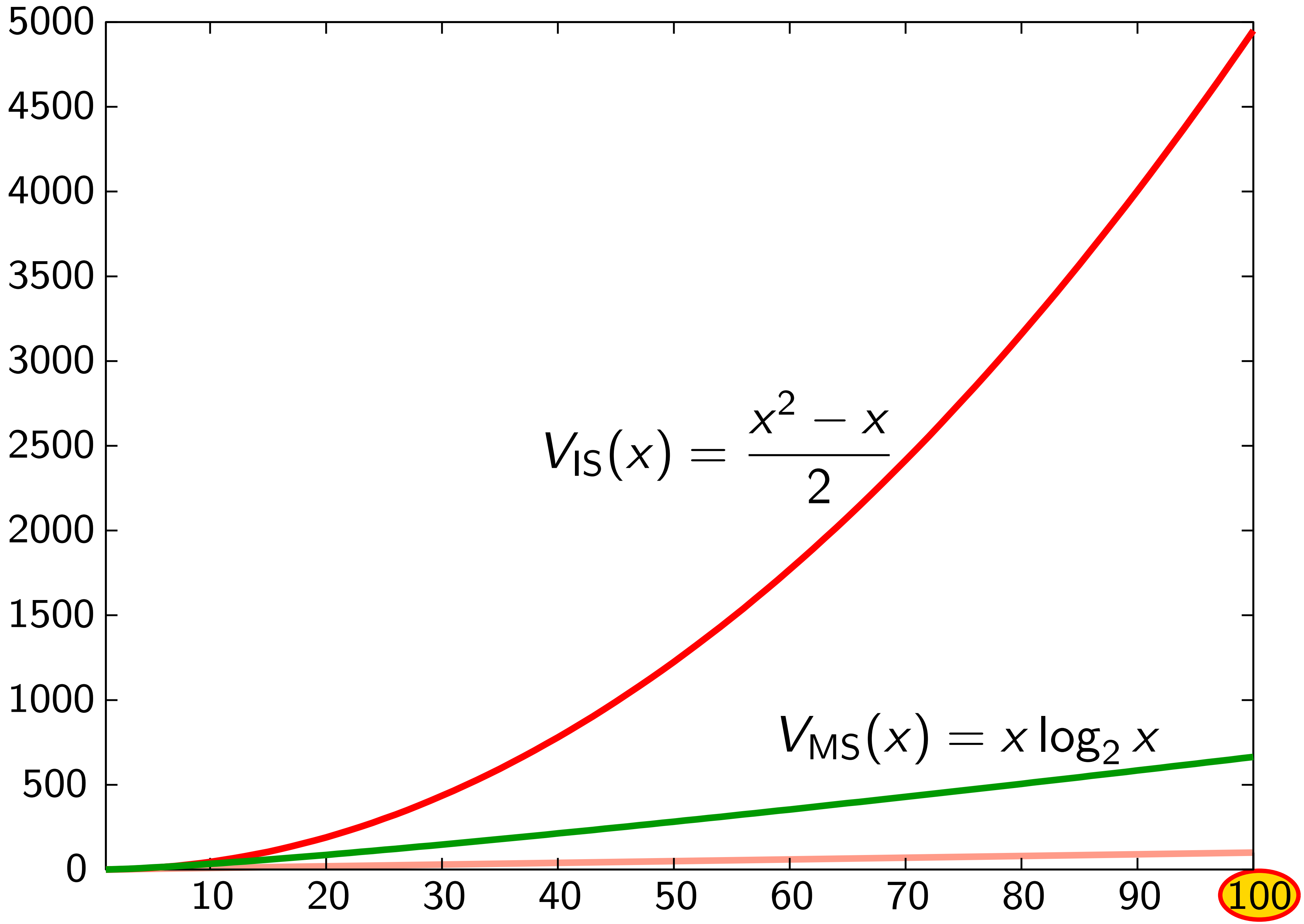
Vergleich InsertionSort vs. MergeSort



Vergleich InsertionSort vs. MergeSort



Vergleich InsertionSort vs. MergeSort



Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Menge der *reellen* Zahlen, z.B. -7, 3, $\frac{2}{9}$, $\sqrt{2}$, e, π^2.

Menge der *natürlichen Zahlen* $0, 1, 2, \ldots$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g"

$$O(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. *Wähle* positive c und n_0,

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. *Wähle* positive c und n_0,
so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. *Wähle* positive c und n_0,
so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. *Wähle* positive c und n_0,
so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.

$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \leq$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g"

$$O(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. *Wähle* positive c und n_0,
so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \;\leq\; 6n^2$$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. Wähle positive c und n_0,
so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.

da $4n \leq 4n^2$

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \leq 6n^2$$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g"

$$O(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. *Wähle* positive c und n_0,
so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.

da $4n \leq 4n^2$

$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \;\leq\; 6n^2 \quad \Rightarrow$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. Wähle positive c und n_0,
so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.

da $4n \leq 4n^2$

$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \leq 6n^2 \Rightarrow$ wähle $c = 6$.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. *Wähle* positive c und n_0,
so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $\boxed{f(n) \leq c \cdot n^2}$.

da $4n \leq 4n^2$

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \;\leq\; 6n^2 \quad \Rightarrow \quad \text{wähle } c = 6.$$

Welches n_0?

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. *Wähle* positive c und n_0,
so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $\boxed{f(n) \leq c \cdot n^2}$.

da $4n \leq 4n^2$

$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \leq 6n^2 \Rightarrow$ wähle $c = 6$.

Welches n_0? Aussage gilt für jedes $n \geq 0$.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. Wähle positive c und n_0,
so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.

da $4n \leq 4n^2$

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \leq 6n^2 \Rightarrow \text{wähle } c = 6.$$

Welches n_0? Aussage gilt für jedes $n \geq 0$. Nimm z.B. $n_0 = 1$.

□

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g"

$$O(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \notin O(n)$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige:

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \boxed{\begin{array}{c}\text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n)\end{array}} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige:

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g"

$$O(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \boxed{\begin{array}{c}\text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n)\end{array}} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$ *negiere!* ($\neg$)

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige: $\boxed{}$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \boxed{\begin{array}{c}\text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n)\end{array}} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$ *negiere!* ($\neg$)

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige: $\boxed{}$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \boxed{\begin{array}{c}\text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n)\end{array}} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$ *negiere!* ($\neg$)

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige: $\boxed{\text{für alle pos. Konst. } c \text{ und } n_0}$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g"

$$O(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \boxed{\begin{array}{c}\text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n)\end{array}} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$ *negiere!* ($\neg$)

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige: $\boxed{\text{für alle pos. Konst. } c \text{ und } n_0}$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \boxed{\begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array}} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$ *negiere!* ($\neg$)

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige: $\boxed{\text{für alle pos. Konst. } c \text{ und } n_0 \text{ gibt es ein } n \geq n_0,}$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \boxed{\begin{array}{c}\text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n)\end{array}} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$ *negiere!* ($\neg$)

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige: $\boxed{\text{für alle pos. Konst. } c \text{ und } n_0 \text{ gibt es ein } n \geq n_0,}$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g"

$$O(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$ *negiere!* ($\neg$)

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige: für alle pos. Konst. c und n_0 gibt es ein $n \geq n_0$, so dass $f(n) > c \cdot n$.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige: für alle pos. Konst. c und n_0 gibt es ein $n \geq n_0$,
so dass $\boxed{f(n) > c \cdot n.}$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.
Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige: für alle pos. Konst. c und n_0 gibt es ein $n \geq n_0$, so dass $\boxed{f(n) > c \cdot n.}$

Also: bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass

$$n \geq n_0 \quad \text{und} \quad f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \; > \; c \cdot n.$$

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \ > \ c \cdot n.$$

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \; > \; c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \;>\; c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann . . .

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \ > \ c \cdot n.$$

Problem: Die „-20" stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann ...

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.

$$\Updownarrow$$

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.

$$\Updownarrow$$

$$n > c/2$$

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „-20" stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.

$$\Updownarrow$$

$$n > c/2$$

$$\Uparrow$$

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \; > \; c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{n > c/2}$$

$$\Uparrow$$

Wie wär's mit $n = c$ **?**

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{n > c/2}$$

$$\Uparrow$$

Wie wär's mit $n = c$ **?**

Gut, aber ...

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \; > \; c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.

$$\Updownarrow$$

$$n > c/2$$

$$\Uparrow$$

Wie wär's mit $n = c$ **?**

Gut, aber ...

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $\boxed{n \geq n_0}$ und

$$f(n) = 2n^2 \boxed{+\, 4n - 20} > c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $\boxed{n \geq 5}$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{n > c/2}$$

$$\Uparrow$$

Wie wär's mit $n = c$ **?**

Gut, aber wir müssen sicherstellen, dass auch $n \geq 5$ und $n \geq n_0$ gilt.

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.

$$\Updownarrow$$

$$n > c/2$$

$$\Uparrow$$

Wie wär's mit $n = c$ **?**

Gut, aber wir müssen sicherstellen, dass auch $n \geq 5$ und $n \geq n_0$ gilt.

Also nehmen wir $n =$

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.

$$\Updownarrow$$

$$n > c/2$$

$$\Uparrow$$

Wie wär's mit $n = c$ **?**

Gut, aber wir müssen sicherstellen, dass auch $n \geq 5$ und $n \geq n_0$ gilt.

Also nehmen wir $n = \lceil \max\{c, 5, n_0\} \rceil$.

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \; > \; c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.

$$\Updownarrow$$

$$n > c/2$$

$$\Uparrow$$

Wie wär's mit $n = c$ **?**

Gut, aber wir müssen sicherstellen, dass auch $n \geq 5$ und $n \geq n_0$ gilt.

Also nehmen wir $n = \lceil \max\{c, 5, n_0\} \rceil$.

Für dieses n gilt $n \geq n_0$ und $f(n) > cn$.

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.

$$\Updownarrow$$

$$n > c/2$$

$$\Uparrow$$

Wie wär's mit $n = c$ **?**

Gut, aber wir müssen sicherstellen, dass auch $n \geq 5$ und $n \geq n_0$ gilt.

Also nehmen wir $n = \lceil \max\{c, 5, n_0\} \rceil$.

Für dieses n gilt $n \geq n_0$ und $f(n) > cn$.

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.

$$\Updownarrow$$

$$n > c/2$$

$$\Uparrow$$

Wie wär's mit $n = c$ **?**

Gut, aber wir müssen sicherstellen, dass auch $n \geq 5$ und $n \geq n_0$ gilt.

Also nehmen wir $n = \lceil \max\{c, 5, n_0\} \rceil$.

Für dieses n gilt $n \geq n_0$ und $f(n) > cn$. Also gilt $f \notin O(n)$. $\Box$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$O(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g“

$$\Omega(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \geq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g“

$$\Omega(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \geq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g“

$$\Omega(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \geq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n)$, $f \in O(n^2)$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g“

$$\Omega(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \geq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n)$, $f \in O(n^2)$, $f \in O(n^3)$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g“

$$\Omega(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \geq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n)$, $f \in O(n^2)$, $f \in O(n^3)$

Entsprechend:

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.
Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g“

$$\Omega(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \geq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n)$, $f \in O(n^2)$, $f \in O(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g"

$$\Omega(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \geq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n)$, $f \in O(n^2)$, $f \in O(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$, $f \in \Omega(n^2)$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.
Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g“

$$\Omega(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \geq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n)$, $f \in O(n^2)$, $f \in O(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$, $f \in \Omega(n^2)$, $f \notin \Omega(n^3)$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g“

$$\Omega(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \geq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n)$, $\boxed{f \in O(n^2)}$, $f \in O(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$, $\boxed{f \in \Omega(n^2)}$, $f \notin \Omega(n^3)$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g“

$$\Omega(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \geq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n)$, $f \in O(n^2)$, $f \in O(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$, $f \in \Omega(n^2)$, $f \notin \Omega(n^3)$

Zusammen:

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.
Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g"

$$\Omega(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \geq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n)$, $f \in O(n^2)$, $f \in O(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$, $f \in \Omega(n^2)$, $f \notin \Omega(n^3)$

Zusammen: $f \in \Theta(n^2)$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.
Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g“

$$\Omega(g) = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \geq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n)$, $\boxed{f \in O(n^2)}$, $f \in O(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$, $\boxed{f \in \Omega(n^2)}$, $f \notin \Omega(n^3)$

Zusammen: $\boxed{f \in \Theta(n^2)}$

d.h. es gibt pos. Konst. c_1, c_2, n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.
Sei $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g"

$$\Omega(g) = \left\{ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \geq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n)$, $\boxed{f \in O(n^2)}$, $f \in O(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$, $\boxed{f \in \Omega(n^2)}$, $f \notin \Omega(n^3)$

Zusammen: $\boxed{f \in \Theta(n^2)}$

d.h. es gibt pos. Konst. c_1, c_2, n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$c_1 \cdot n^2 \leq f(n) \leq c_2 \cdot n^2.$$

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.

$f \in \Omega(n^2)$

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.

$f \in \Omega(n^2)$ *mindestens*

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.

$f \in \Omega(n^2)$ *mindestens*

$f \in \Theta(n^2)$

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.

$f \in \Omega(n^2)$ *mindestens*

$f \in \Theta(n^2)$ *„genau“*

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.

$f \in \Omega(n^2)$ *mindestens*

$f \in \Theta(n^2)$ *„genau“*

$f \in o(n^2)$ neu!

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.

$f \in \Omega(n^2)$ *mindestens*

$f \in \Theta(n^2)$ *„genau“*

$f \in o(n^2)$ neu! *echt langsamer als*

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.

$f \in \Omega(n^2)$ *mindestens*

$f \in \Theta(n^2)$ *„genau“*

$f \in o(n^2)$ neu! *echt langsamer als*

$f \in \omega(n^2)$

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$	bedeutet	f wächst	*höchstens*	quadratisch.
$f \in \Omega(n^2)$			*mindestens*	
$f \in \Theta(n^2)$			*„genau“*	
$f \in o(n^2)$	neu!		*echt langsamer als*	
$f \in \omega(n^2)$			*echt schneller als*	

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.

$f \in \Omega(n^2)$ *mindestens*

$f \in \Theta(n^2)$ *„genau“*

$f \in o(n^2)$ *echt langsamer als*

neu!

$f \in \omega(n^2)$ *echt schneller als*

Genaue Definition für „klein-Oh“ und „klein-Omega“ siehe Kapitel 3 [CLRS].

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.

$f \in \Omega(n^2)$ *mindestens*

$f \in \Theta(n^2)$ *„genau“*

$f \in o(n^2)$ neu! *echt langsamer als*

$f \in \omega(n^2)$ *echt schneller als*

Genaue Definition für „klein-Oh“ und „klein-Omega“ siehe Kapitel 3 [CLRS].

Übung.

Gegeben folgende Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $n \mapsto \dots$:

$$n^2,\ \log_2 n,\ \sqrt{n \log_2 n},\ 1{,}01^n,\ n^{\log_3 4},\ \log_2(n \cdot 2^n),\ 4^{\log_3 n}.$$

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$	bedeutet f wächst *höchstens*	quadratisch.
$f \in \Omega(n^2)$	*mindestens*	
$f \in \Theta(n^2)$	*„genau“*	
$f \in o(n^2)$ neu!	*echt langsamer als*	
$f \in \omega(n^2)$	*echt schneller als*	

Genaue Definition für „klein-Oh“ und „klein-Omega“ siehe Kapitel 3 [CLRS].

Übung.

Gegeben folgende Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $n \mapsto \ldots$:

$$n^2, \;\; \log_2 n, \;\; \sqrt{n \log_2 n}, \;\; 1{,}01^n, \;\; n^{\log_3 4}, \;\; \log_2(n \cdot 2^n), \;\; 4^{\log_3 n}.$$

Sortieren Sie nach Geschwindigkeit des *asymptotischen Wachstums*, also so, dass danach gilt: $O(\ldots) \subseteq O(\ldots) \subseteq \cdots \subseteq O(\ldots)$.