Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Lehrstuhl für INFORMATIK I Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

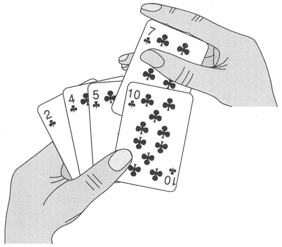
Wintersemester 2022/23

2. Vorlesung

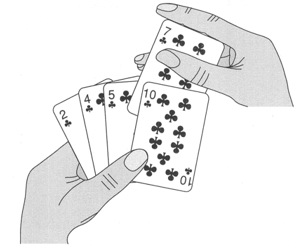
Sortieren mit anderen Mitteln

Prof. Dr. Alexander Wolff

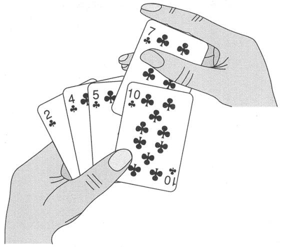
Lehrstuhl für Informatik I



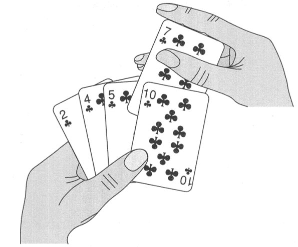
Teile und herrsche



Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



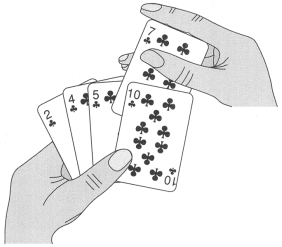
Teile und herrsche



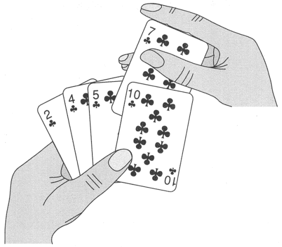
Idee:

- teile den Kartenstapel in zwei ungefähr gleichgroße Teile,
- sortiere die Teile (z.B. durch verschiedene Personen) und
- füge die Teilstapel zu einem sortierten Stapel zusammen.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche

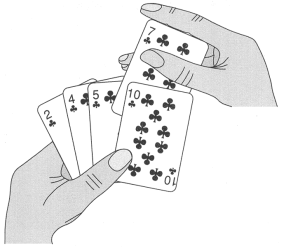


Idee:

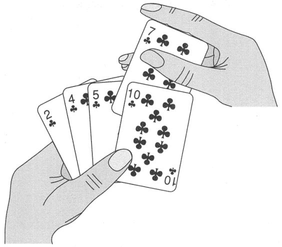
- teile den Kartenstapel in zwei ungefähr gleichgroße Teile,
- sortiere die Teile (z.B. durch verschiedene Personen) und
- füge die Teilstapel zu einem sortierten Stapel zusammen.

Allgemein:

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche



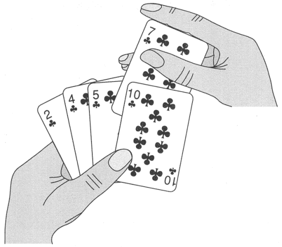
Idee:

- teile den Kartenstapel in zwei ungefähr gleichgroße Teile,
- sortiere die Teile (z.B. durch verschiedene Personen) und
- füge die Teilstapel zu einem sortierten Stapel zusammen.

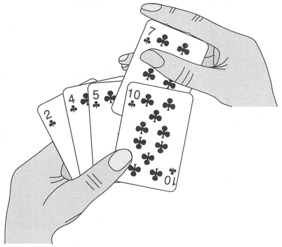
Allgemein:

Teile. . .

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche


7
2
4
5
10
10

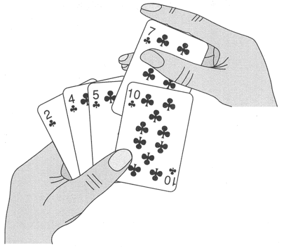
Idee:

- teile den Kartenstapel in zwei ungefähr gleichgroße Teile,
- sortiere die Teile (z.B. durch verschiedene Personen) und
- füge die Teilstapel zu einem sortierten Stapel zusammen.

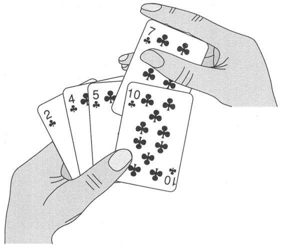
Allgemein:

Teile. . . eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms" [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche



Idee:

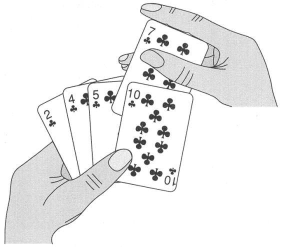
- teile den Kartenstapel in zwei ungefähr gleichgroße Teile,
- sortiere die Teile (z.B. durch verschiedene Personen) und
- füge die Teilstapel zu einem sortierten Stapel zusammen.

Allgemein:

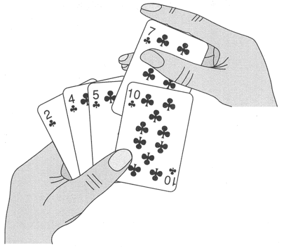
Teile. . . eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.

Herrsche. . .

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms" [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche



Idee:

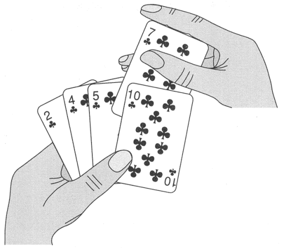
- teile den Kartenstapel in zwei ungefähr gleichgroße Teile,
- sortiere die Teile (z.B. durch verschiedene Personen) und
- füge die Teilstapel zu einem sortierten Stapel zusammen.

Allgemein:

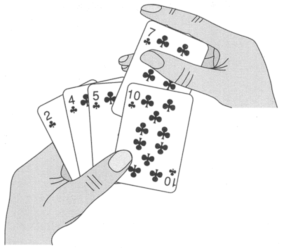
Teile. . . eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.

Herrsche. . . durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche



Idee:

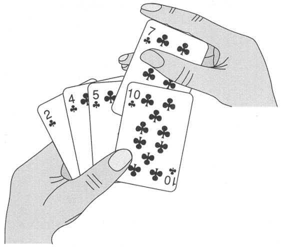
- teile den Kartenstapel in zwei ungefähr gleichgroße Teile,
- sortiere die Teile (z.B. durch verschiedene Personen) und
- füge die Teilstapel zu einem sortierten Stapel zusammen.

Allgemein:

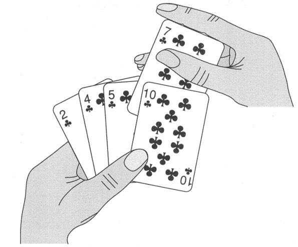
Teile. . . eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.

Herrsche. . . durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche



Idee:

- teile den Kartenstapel in zwei ungefähr gleichgroße Teile,
- sortiere die Teile (z.B. durch verschiedene Personen) und
- füge die Teilstapel zu einem sortierten Stapel zusammen.

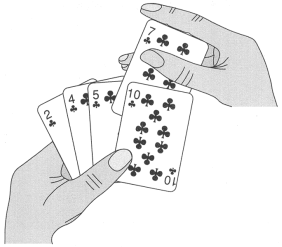
Allgemein:

Teile. . . eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.

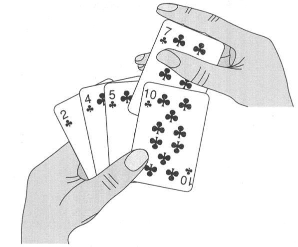
Aufruf einer Funktion durch sich selbst

Herrsche. . . durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche



Idee:

- teile den Kartenstapel in zwei ungefähr gleichgroße Teile,
- sortiere die Teile (z.B. durch verschiedene Personen) und
- füge die Teilstapel zu einem sortierten Stapel zusammen.

Allgemein:

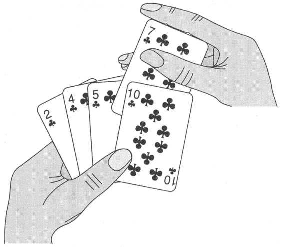
Teile. . . eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.

Aufruf einer Funktion durch sich selbst

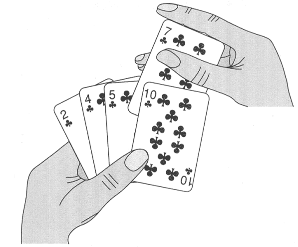
Herrsche. . . durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.

Kombiniere. . .

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche



Idee:

- teile den Kartenstapel in zwei ungefähr gleichgroße Teile,
- sortiere die Teile (z.B. durch verschiedene Personen) und
- füge die Teilstapel zu einem sortierten Stapel zusammen.

Allgemein:

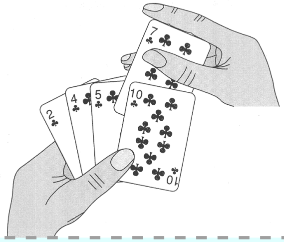
Teile. . . eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.

Aufruf einer Funktion durch sich selbst

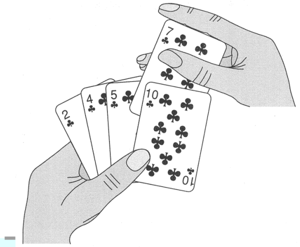
Herrsche. . . durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.

Kombiniere. . . die Teillösungen zu einer Lösung der ursprünglichen Instanz.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche



MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

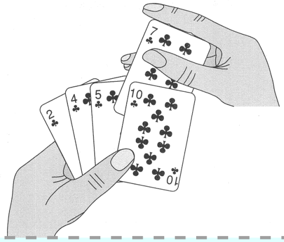
Allgemein:

Teile... eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.

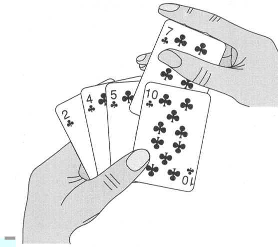
Herrsche... durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.

Kombiniere... die Teillösungen zu einer Lösung der ursprünglichen Instanz.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche



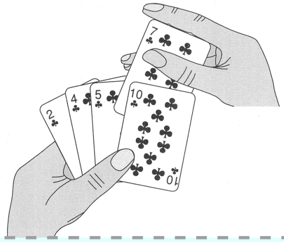
MergeSort(int[ ] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

Defaultwerte

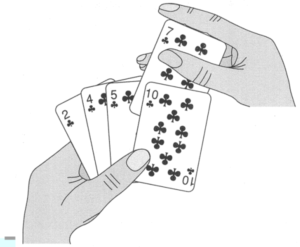
Allgemein:

Teile...	eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.
Herrsche...	durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.
Kombiniere...	die Teillösungen zu einer Lösung der ursprünglichen Instanz.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche



MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

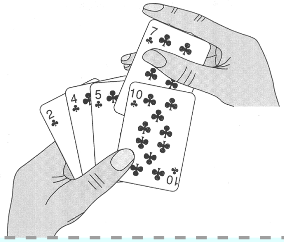
Defaultwerte –

Dadurch wird die Funktion
MergeSort(A) $\equiv$
MergeSort(A, 1, $A.length$)
definiert.

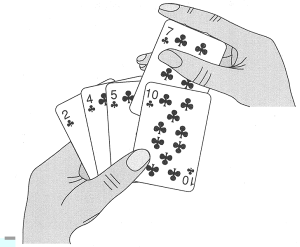
Allgemein:

Teile. . .	eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.
Herrsche. . .	durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.
Kombiniere. . .	die Teillösungen zu einer Lösung der ursprünglichen Instanz.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche

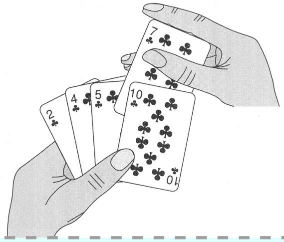


MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

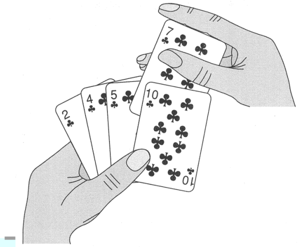
Allgemein:

Teile...	eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.
Herrsche...	durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.
Kombiniere...	die Teillösungen zu einer Lösung der ursprünglichen Instanz.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche

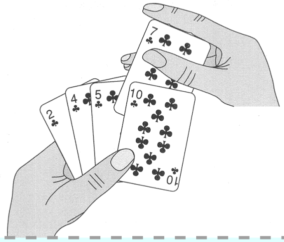


MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**

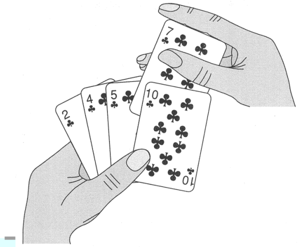
Allgemein:

Teile...	eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.
Herrsche...	durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.
Kombiniere...	die Teillösungen zu einer Lösung der ursprünglichen Instanz.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche

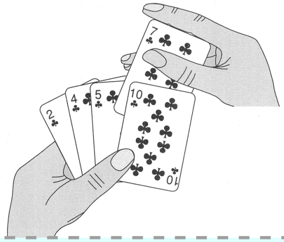


MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.\mathit{length}$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$

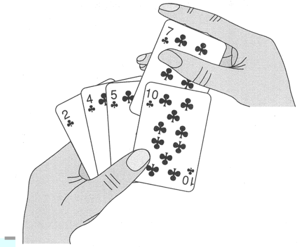
Allgemein:

Teile...	eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.
Herrsche...	durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.
Kombiniere...	die Teillösungen zu einer Lösung der ursprünglichen Instanz.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche



MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

$m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ $\quad \}$ teile

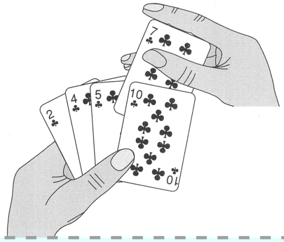
Allgemein:

Teile. . . eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.

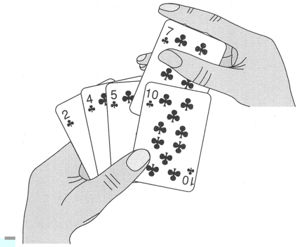
Herrsche. . . durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.

Kombiniere. . . die Teillösungen zu einer Lösung der ursprünglichen Instanz.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche



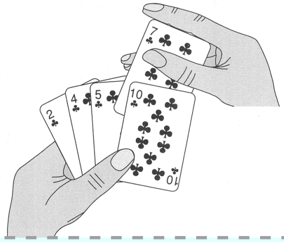
MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$)

Allgemein:

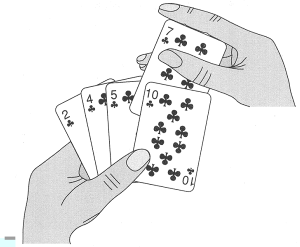
Teile... eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.

Herrsche... durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.

Kombiniere... die Teillösungen zu einer Lösung der ursprünglichen Instanz.



Teile und herrsche



MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

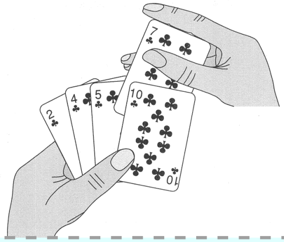
if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche

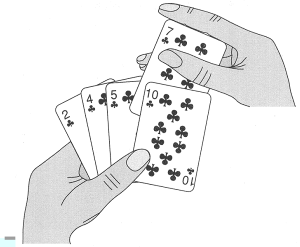
Allgemein:

Teile...	eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.
Herrsche...	durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.
Kombiniere...	die Teillösungen zu einer Lösung der ursprünglichen Instanz.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche



MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.\mathit{length}$)
  if $\ell < r$ **then**
    $\left.m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor\right\}$ teile
    $\left.\begin{array}{l}\text{MergeSort}(A, \ell, m) \\ \text{MergeSort}(A, m+1, r)\end{array}\right\}$ herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r)

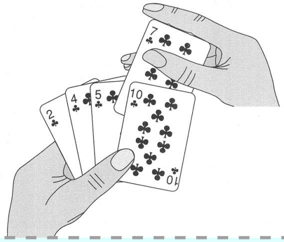
Allgemein:

Teile... eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.

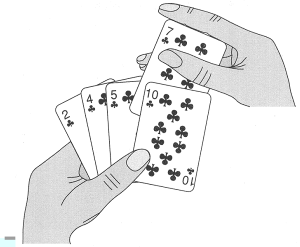
Herrsche... durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.

Kombiniere... die Teillösungen zu einer Lösung der ursprünglichen Instanz.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche

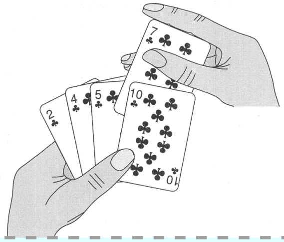


MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

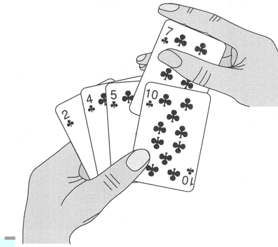
Allgemein:

Teile...	eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.
Herrsche...	durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.
Kombiniere...	die Teillösungen zu einer Lösung der ursprünglichen Instanz.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche



MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

  if $\ell < r$ **then**

    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile

    MergeSort(A, ℓ, m)

    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche

    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

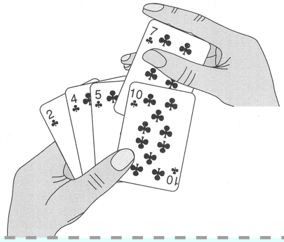
Allgemein:

Teile... eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.

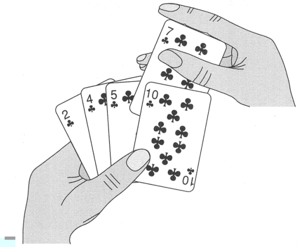
Herrsche... durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.

Kombiniere... die Teillösungen zu einer Lösung der ursprünglichen Instanz.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]



Teile und herrsche



MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m) } herrsche
    MergeSort($A, m+1, r$)
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

To do!

Allgemein:

Teile... eine Instanz in kleinere Instanzen *desselben* Problems.

Herrsche... durch *rekursives* Lösen von Teilinstanzen – nur falls diese sehr klein sind, löse sie direkt.

Kombiniere... die Teillösungen zu einer Lösung der ursprünglichen Instanz.

Zeichnungen aus: „Introduction to Algorithms“ [Cormen et al., MIT Press, 2. Aufl., 2001]

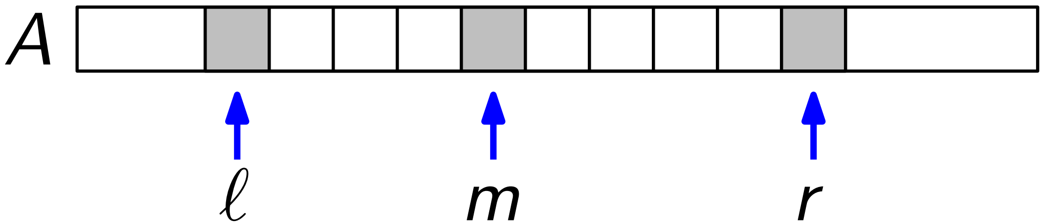
Kombiniere

Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

Kombiniere

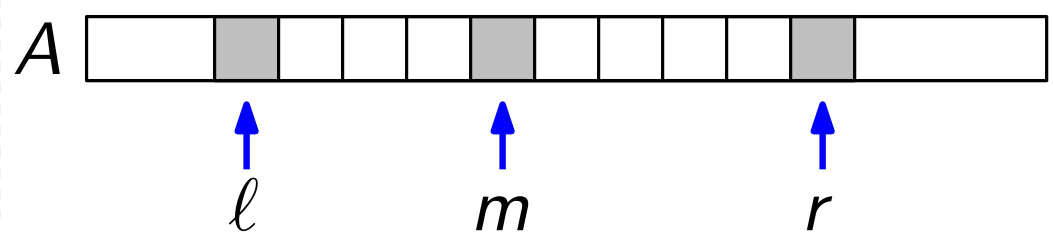
Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)



Kombiniere

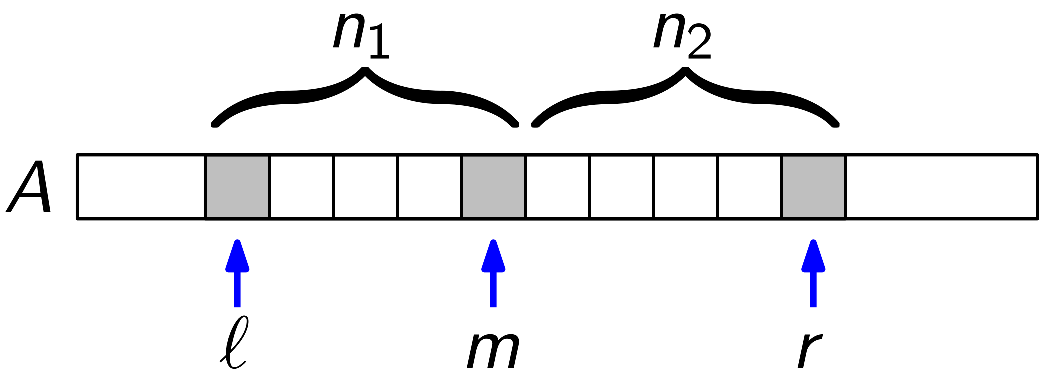
Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

$n_1 = m - \ell + 1;\ \ n_2 = r - m$



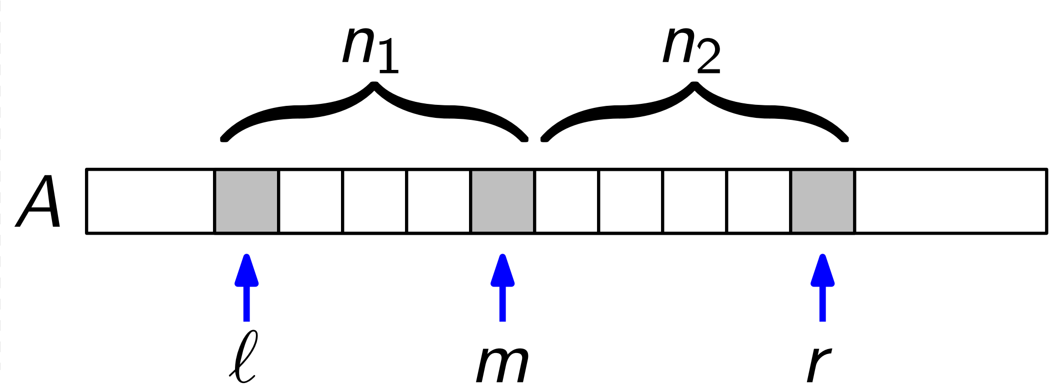
Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)
$n_1 = m - \ell + 1;\ \ n_2 = r - m$



Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)
  $n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$
  $L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$



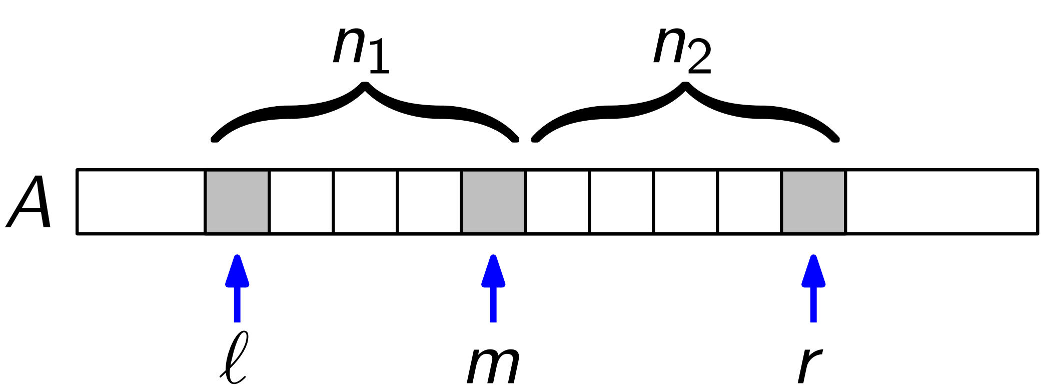
Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

  $n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

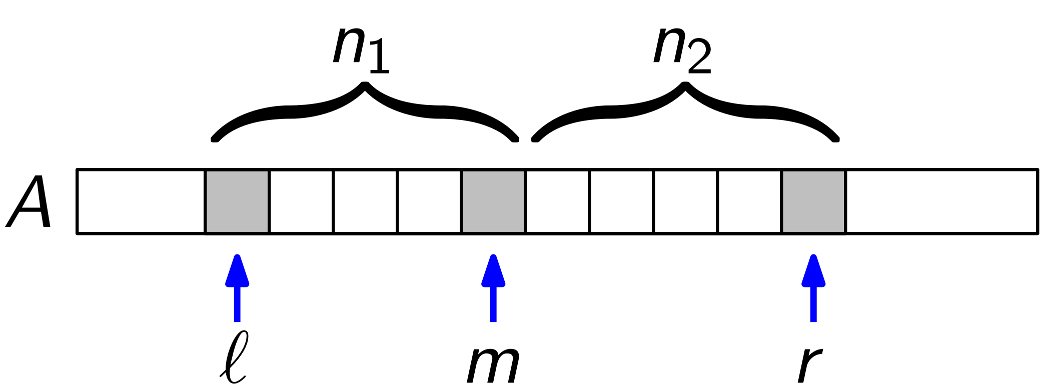
  $L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$

  $L[1..n_1] = A[\ell..m]$



Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)
  $n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$
  $L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$
  $L[1..n_1] = A[\ell..m]$



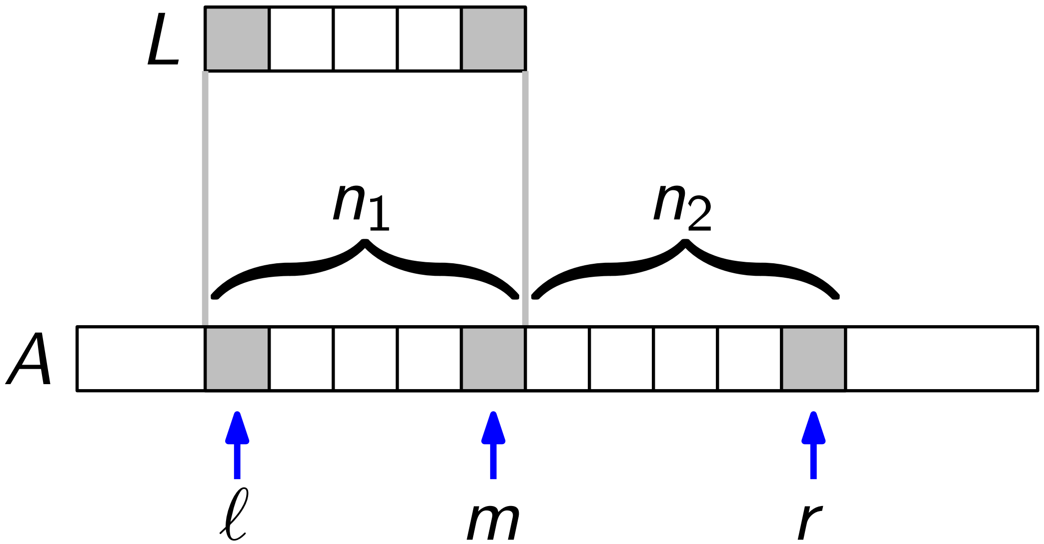
Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

$n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

$L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$

$L[1..n_1] = A[\ell..m]$



Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

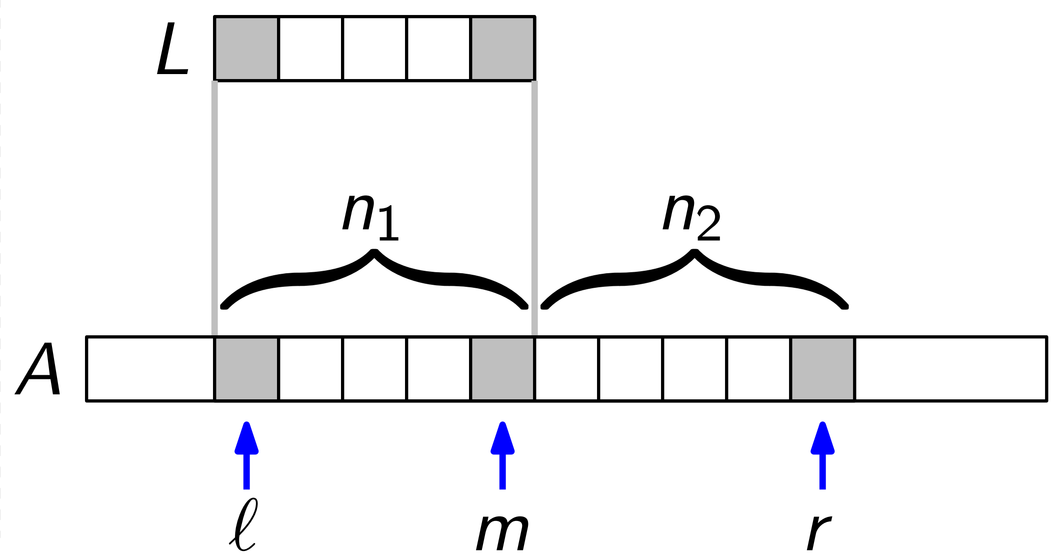
$n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

$L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$

$L[1..n_1] = A[\ell..m]$

for $i = 1$ **to** n_1 **do**

$\quad L[i] = A[(\ell - 1) + i]$



Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

$n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

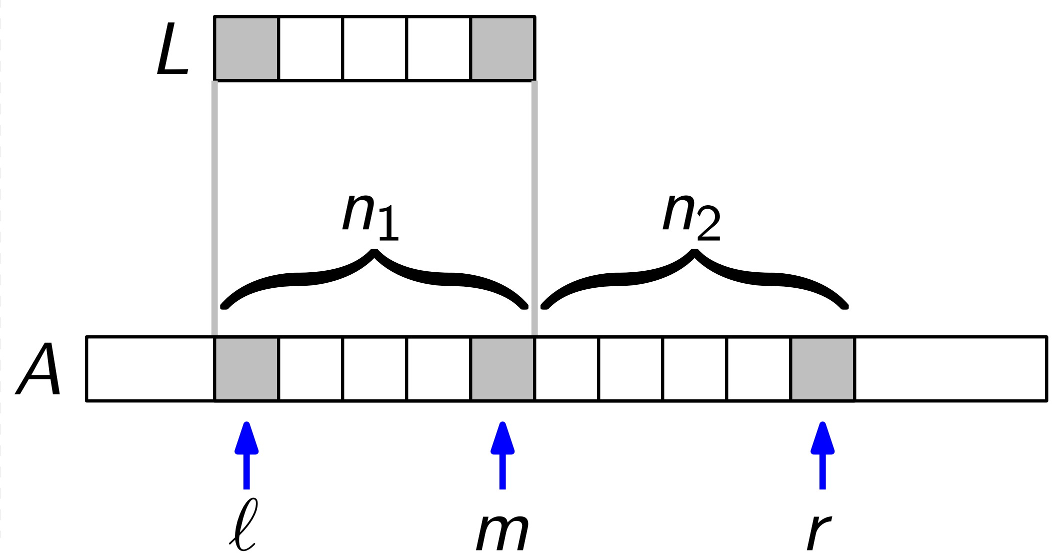
$L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$

$L[1..n_1] = A[\ell..m]$

$R[1..n_2] = A[m + 1..r]$

for $i = 1$ **to** n_1 **do**

$\quad L[i] = A[(\ell - 1) + i]$



Kombiniere

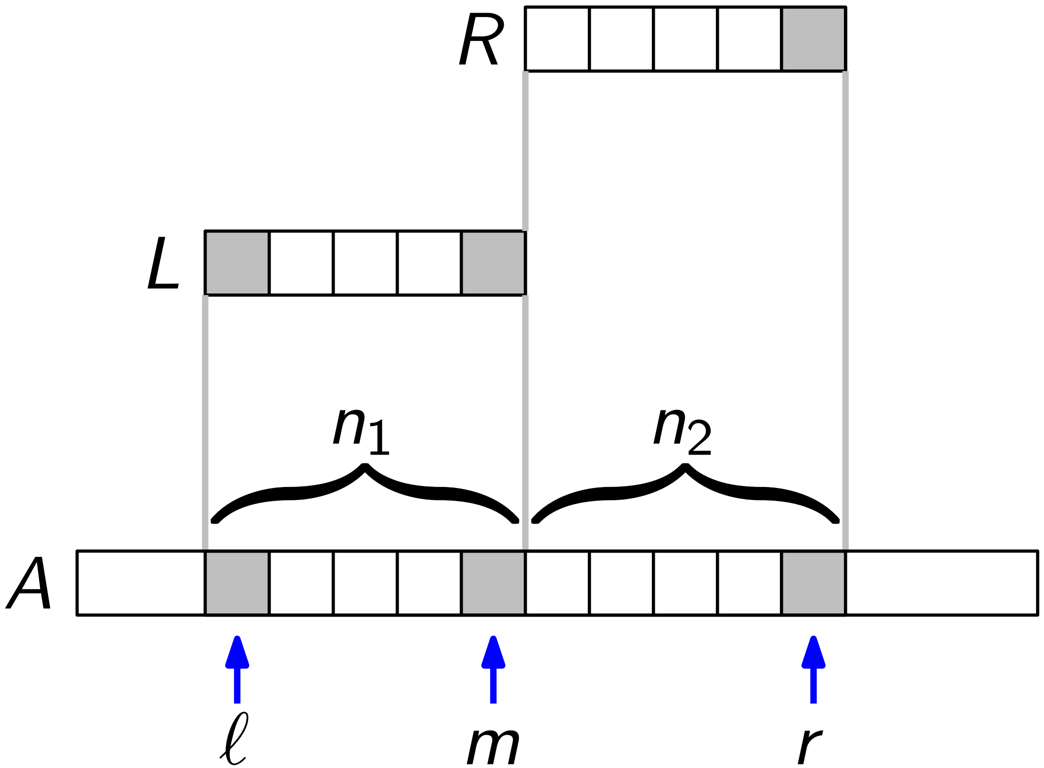
Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

$n_1 = m - \ell + 1;\ \ n_2 = r - m$

$L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$

$L[1..n_1] = A[\ell..m]$

$R[1..n_2] = A[m + 1..r]$



Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

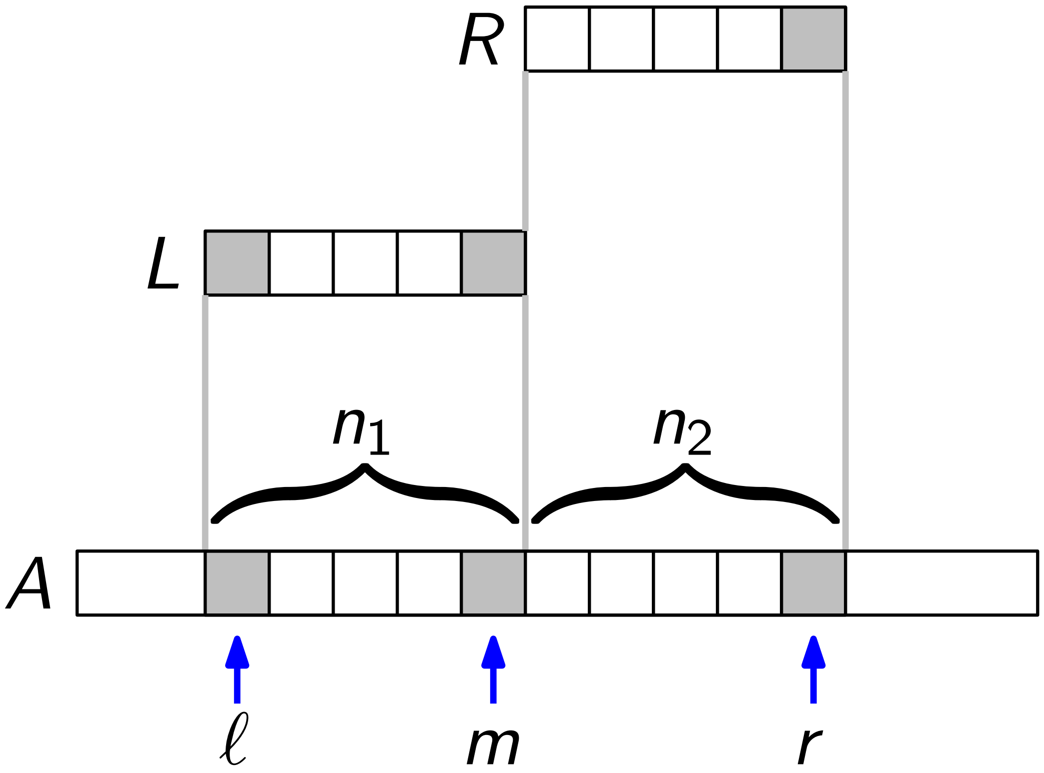
$n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

$L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$

$L[1..n_1] = A[\ell..m]$

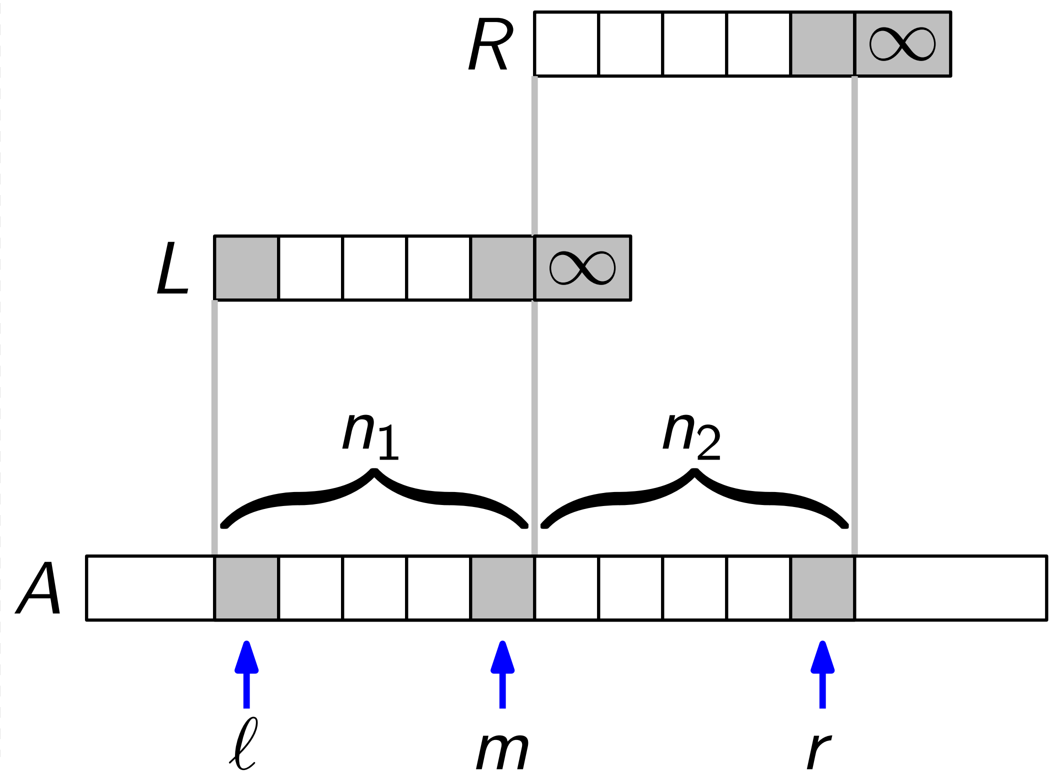
$R[1..n_2] = A[m + 1..r]$

$L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$



Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)
  $n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$
  $L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$
  $L[1..n_1] = A[\ell..m]$
  $R[1..n_2] = A[m + 1..r]$
  $L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$



Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

$n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

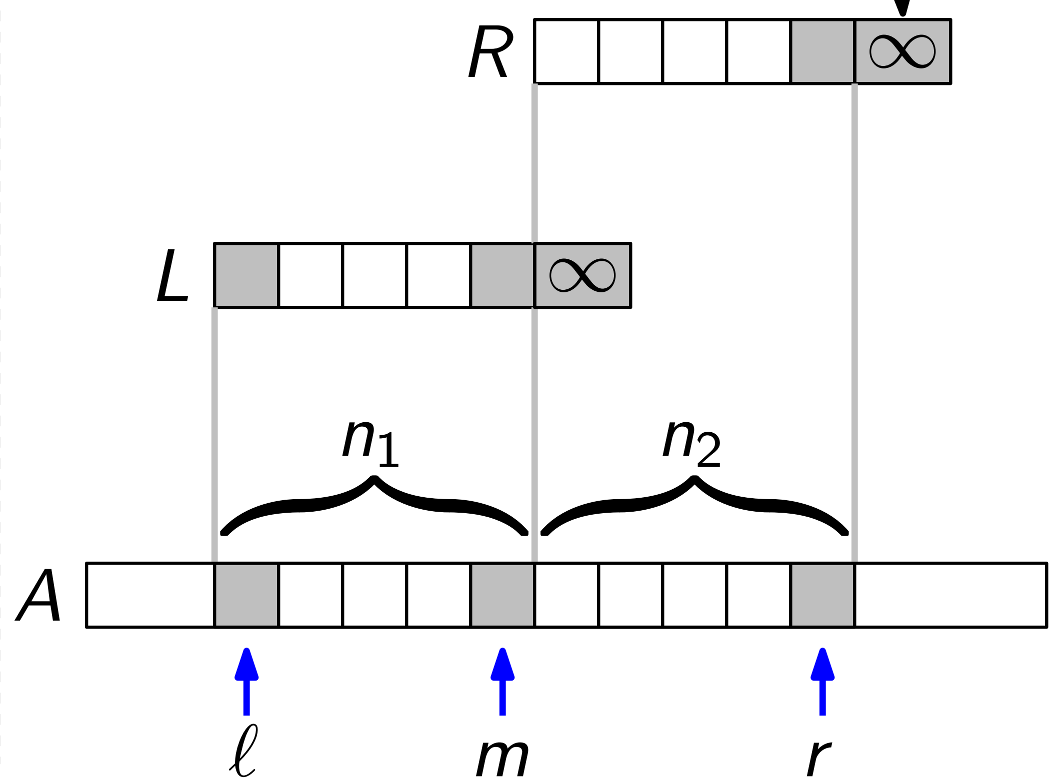
$L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$

$L[1..n_1] = A[\ell..m]$

$R[1..n_2] = A[m + 1..r]$

$L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$

Stopper (engl. *sentinel*)



Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

$n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

$L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$

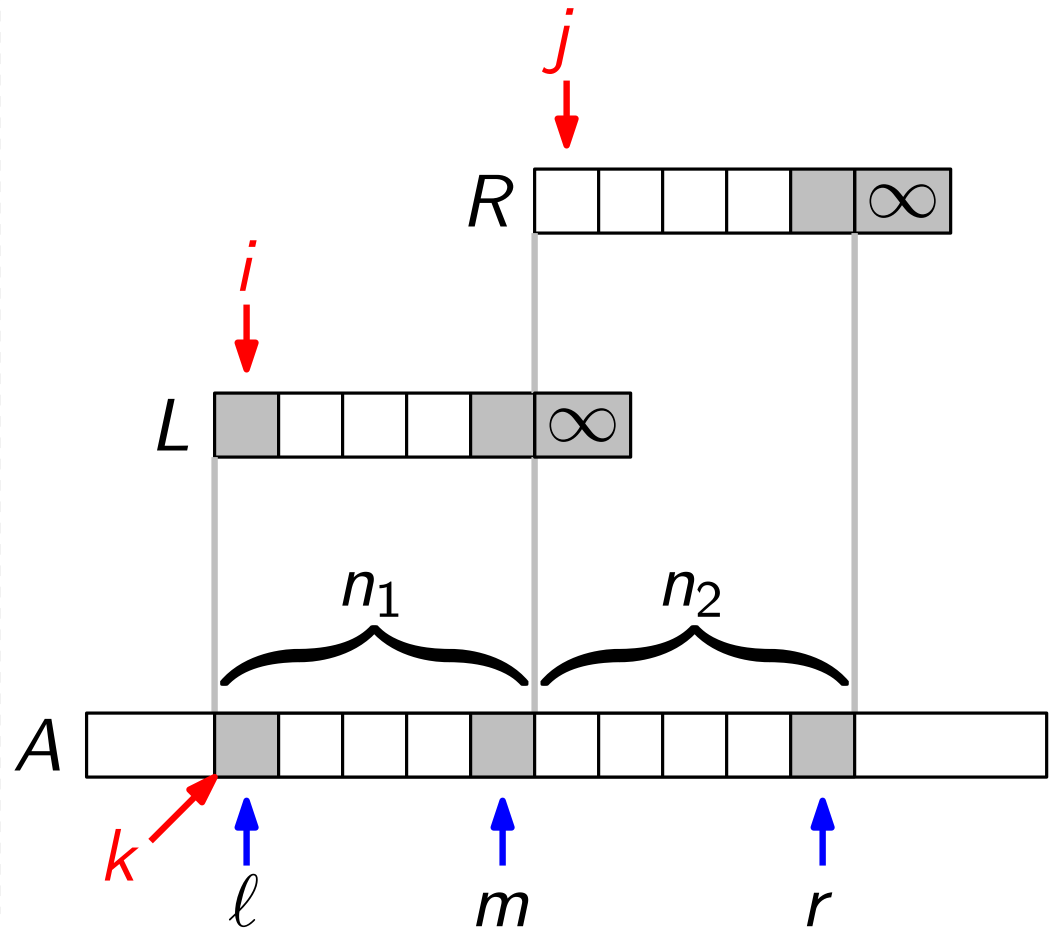
$L[1..n_1] = A[\ell..m]$

$R[1..n_2] = A[m + 1..r]$

$L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$

$i = j = 1$

for $k = \ell$ **to** r **do**



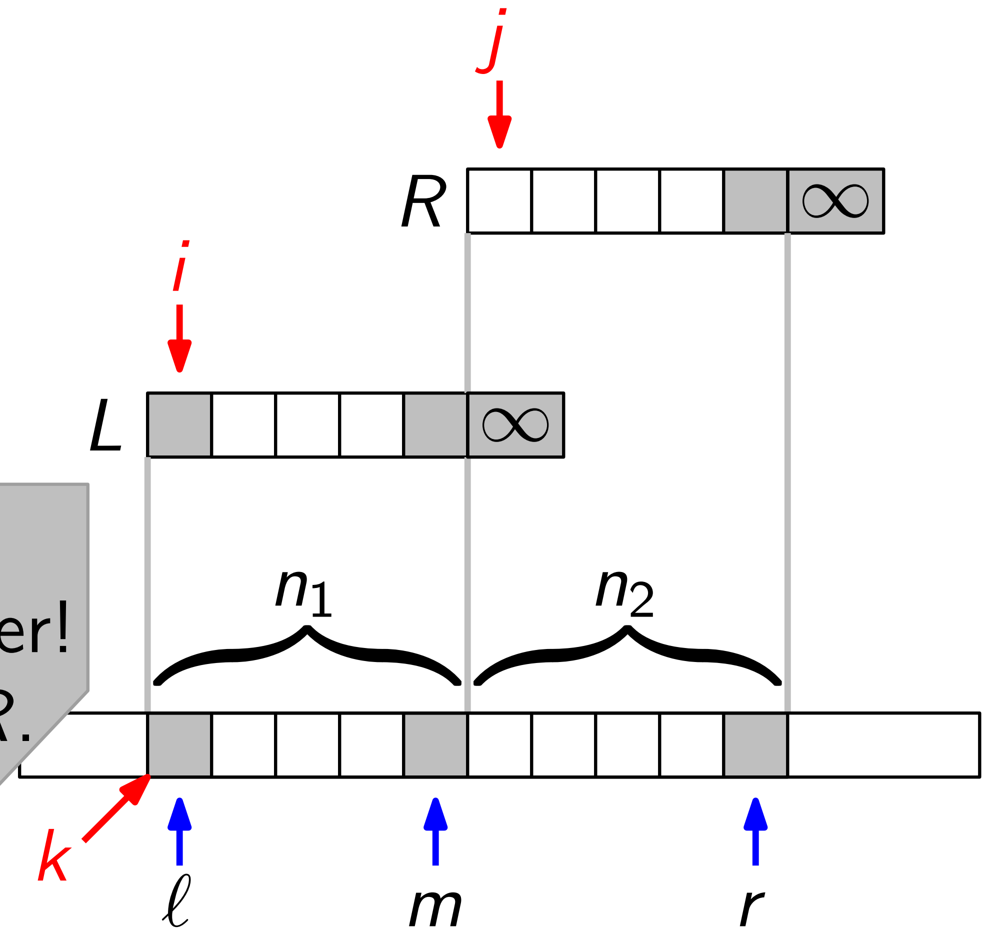
Kombiniere

Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
  $n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$
  $L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$
  $L[1..n_1] = A[\ell..m]$
  $R[1..n_2] = A[m + 1..r]$
  $L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$
  $i = j = 1$
  for $k = \ell$ **to** r **do**

Aufgabe:

Schreiben Sie den Rest der Routine auf ein Stück Papier! Benutzen Sie dazu L und R.

Sie haben 5 Minuten.



Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

$n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

$L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$

$L[1..n_1] = A[\ell..m]$

$R[1..n_2] = A[m + 1..r]$

$L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$

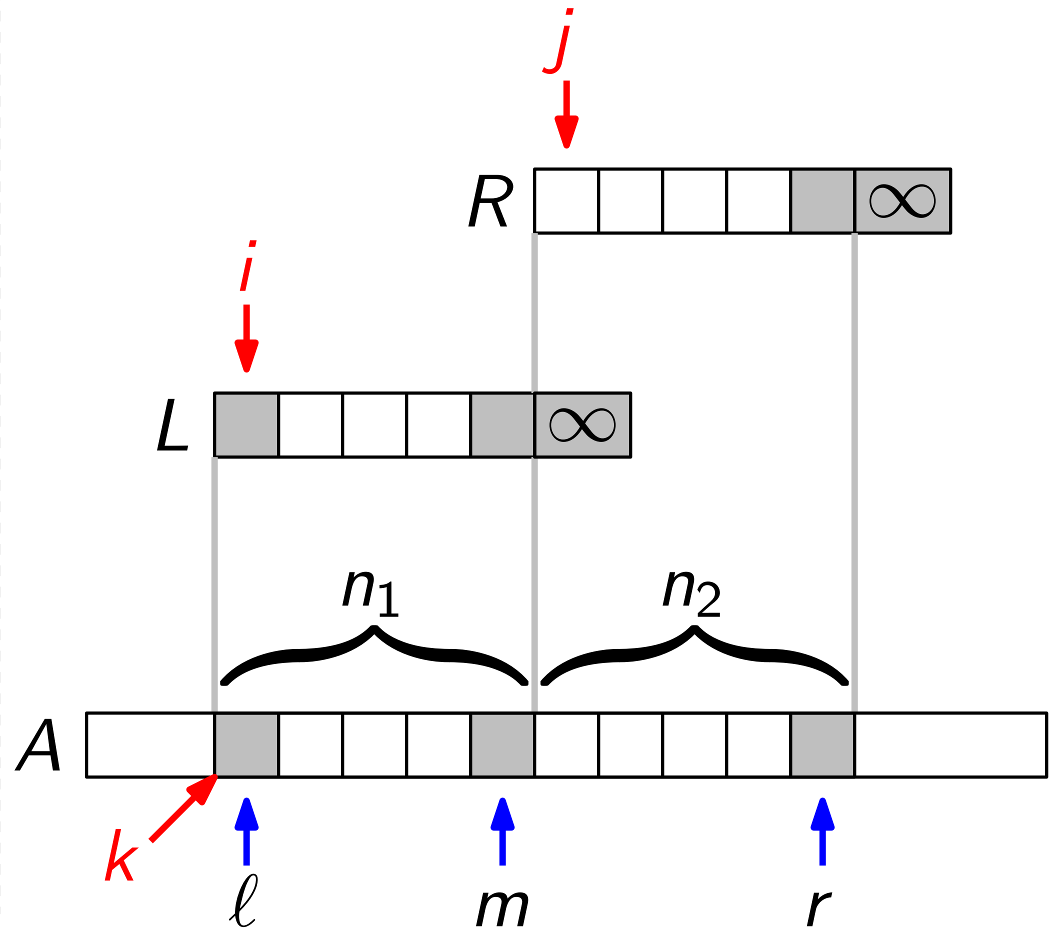
$i = j = 1$

for $k = \ell$ **to** r **do**

  if $L[i] \leq R[j]$ **then**

    $A[k] = L[i]$

    $i = i + 1$



Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

$n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

$L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$

$L[1..n_1] = A[\ell..m]$

$R[1..n_2] = A[m + 1..r]$

$L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$

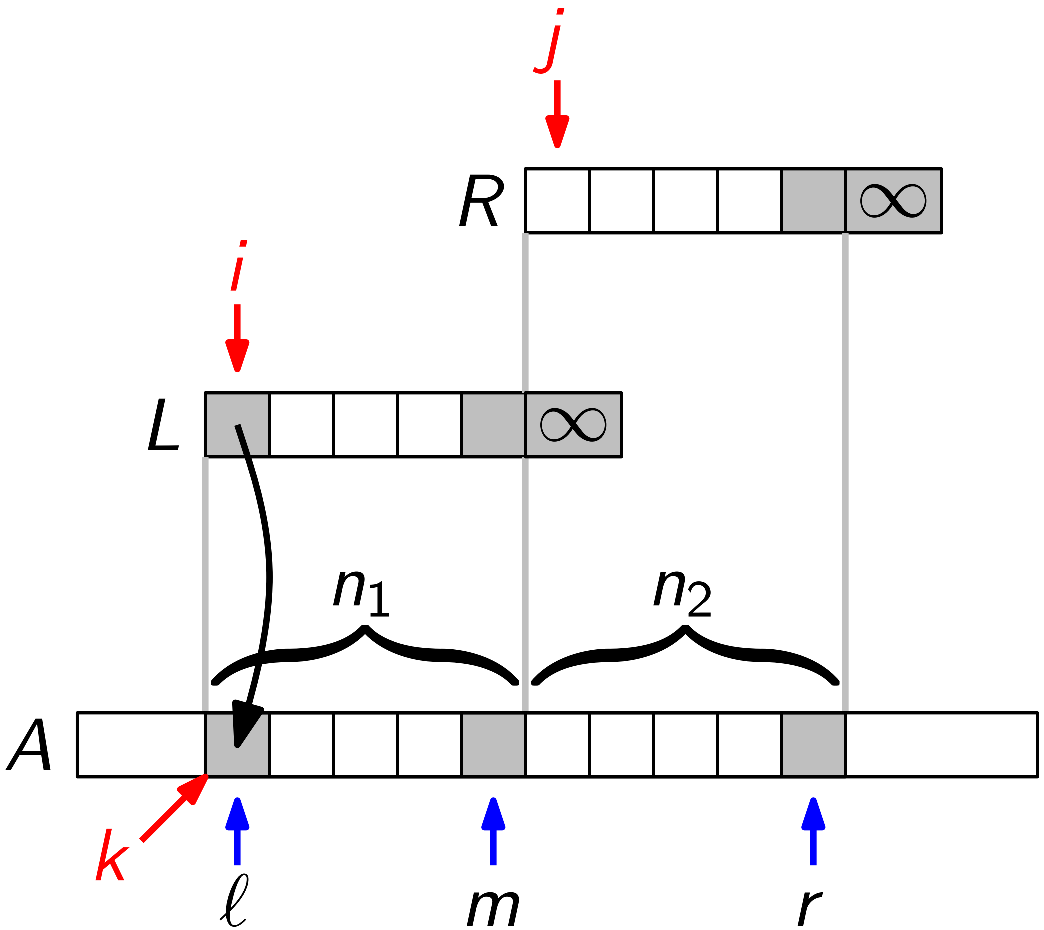
$i = j = 1$

for $k = \ell$ **to** r **do**

  if $L[i] \leq R[j]$ **then**

    $A[k] = L[i]$

    $i = i + 1$



Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

$n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

$L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$

$L[1..n_1] = A[\ell..m]$

$R[1..n_2] = A[m+1..r]$

$L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$

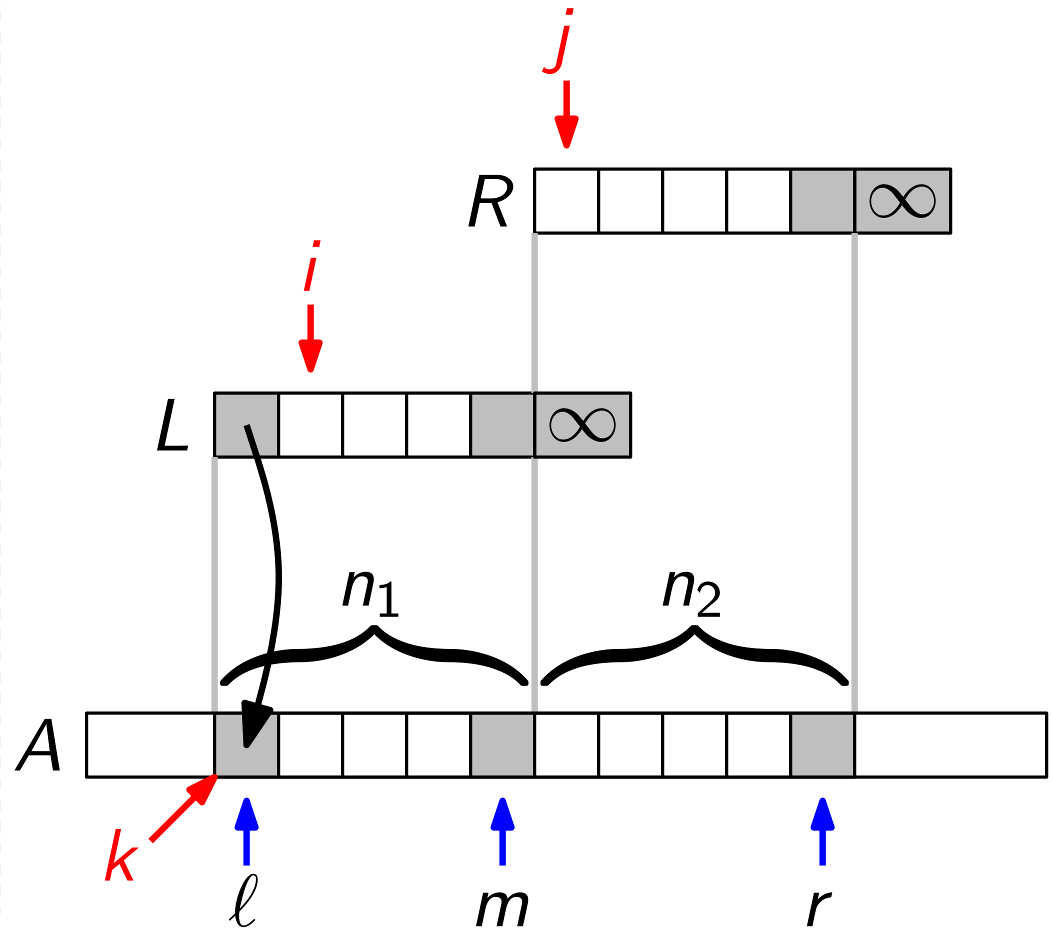
$i = j = 1$

for $k = \ell$ **to** r **do**

  if $L[i] \leq R[j]$ **then**

    $A[k] = L[i]$

    $i = i + 1$



Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

$n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

$L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$

$L[1..n_1] = A[\ell..m]$

$R[1..n_2] = A[m + 1..r]$

$L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$

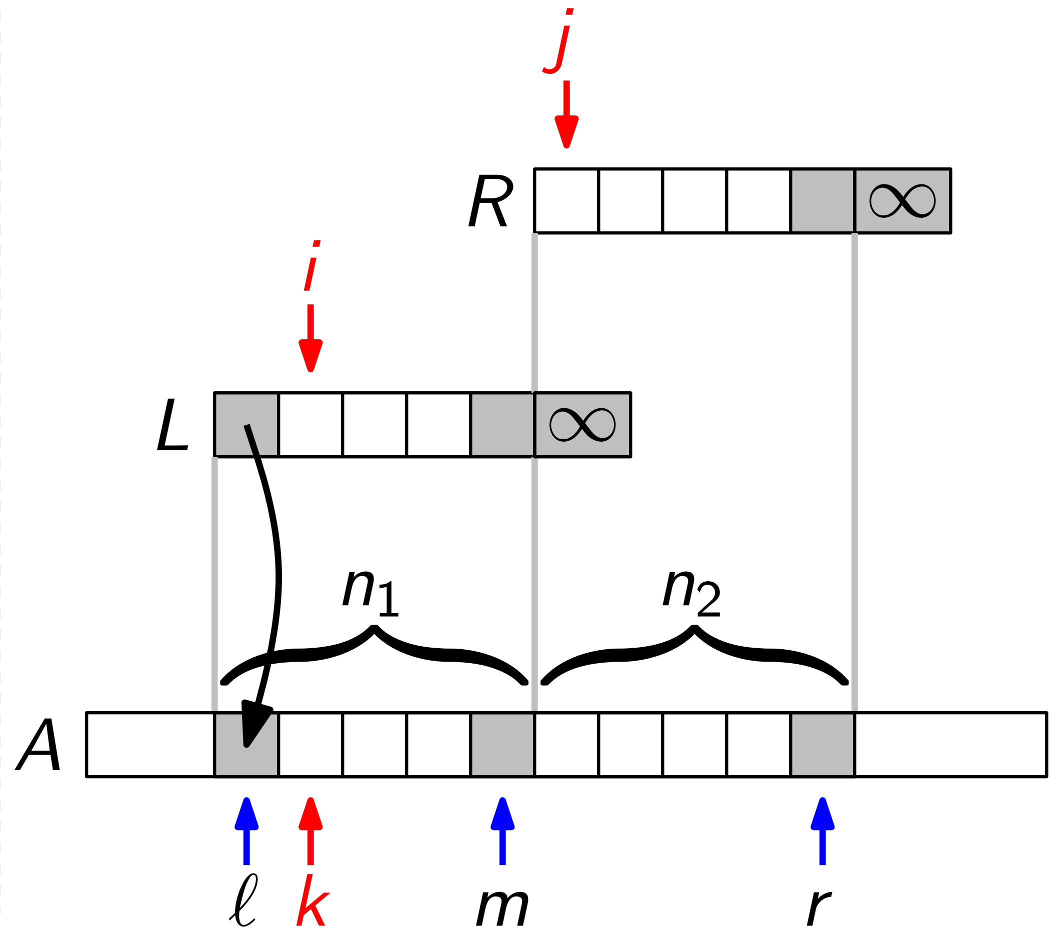
$i = j = 1$

for $k = \ell$ **to** r **do**

  if $L[i] \leq R[j]$ **then**

    $A[k] = L[i]$

    $i = i + 1$



Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

$n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

$L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$

$L[1..n_1] = A[\ell..m]$

$R[1..n_2] = A[m + 1..r]$

$L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$

$i = j = 1$

for $k = \ell$ **to** r **do**

  if $L[i] \leq R[j]$ **then**

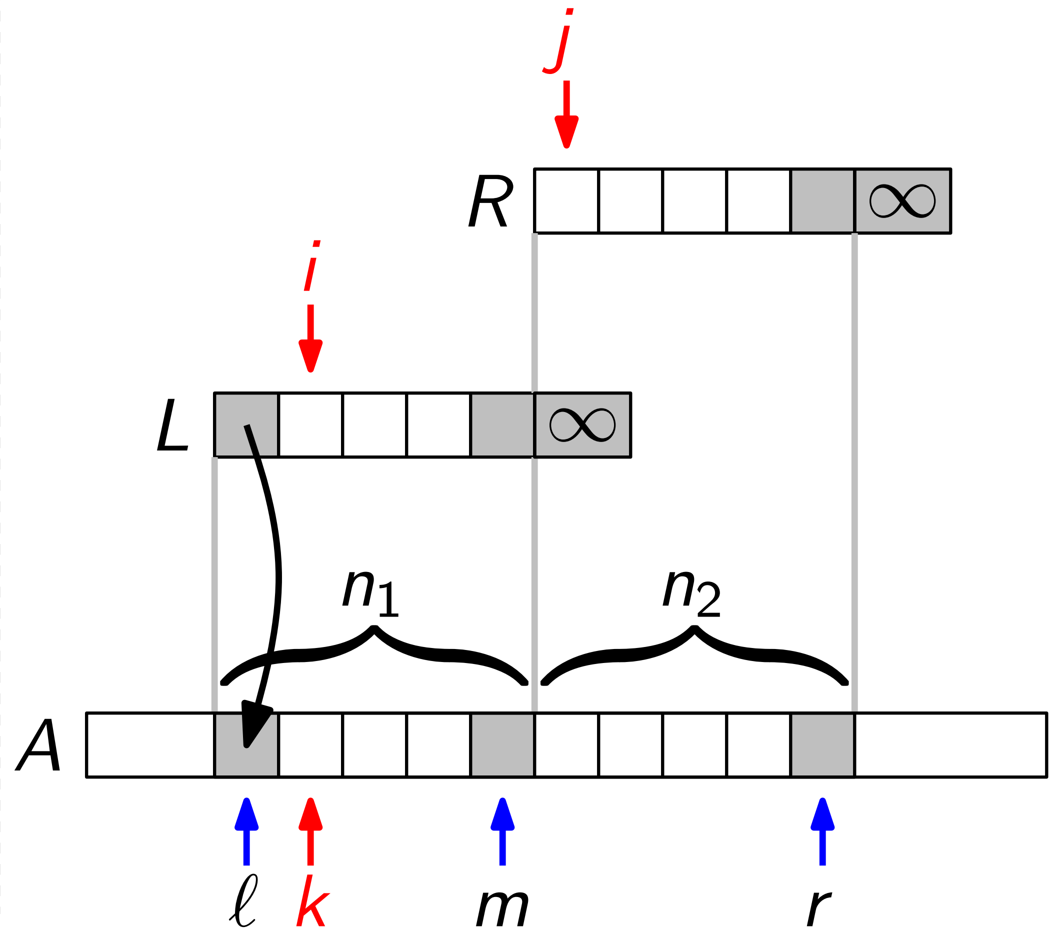
    $A[k] = L[i]$

    $i = i + 1$

  else

    $A[k] = R[j]$

    $j = j + 1$



Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

  $n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

  $L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$

  $L[1..n_1] = A[\ell..m]$

  $R[1..n_2] = A[m + 1..r]$

  $L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$

  $i = j = 1$

  for $k = \ell$ **to** r **do**

    if $L[i] \leq R[j]$ **then**

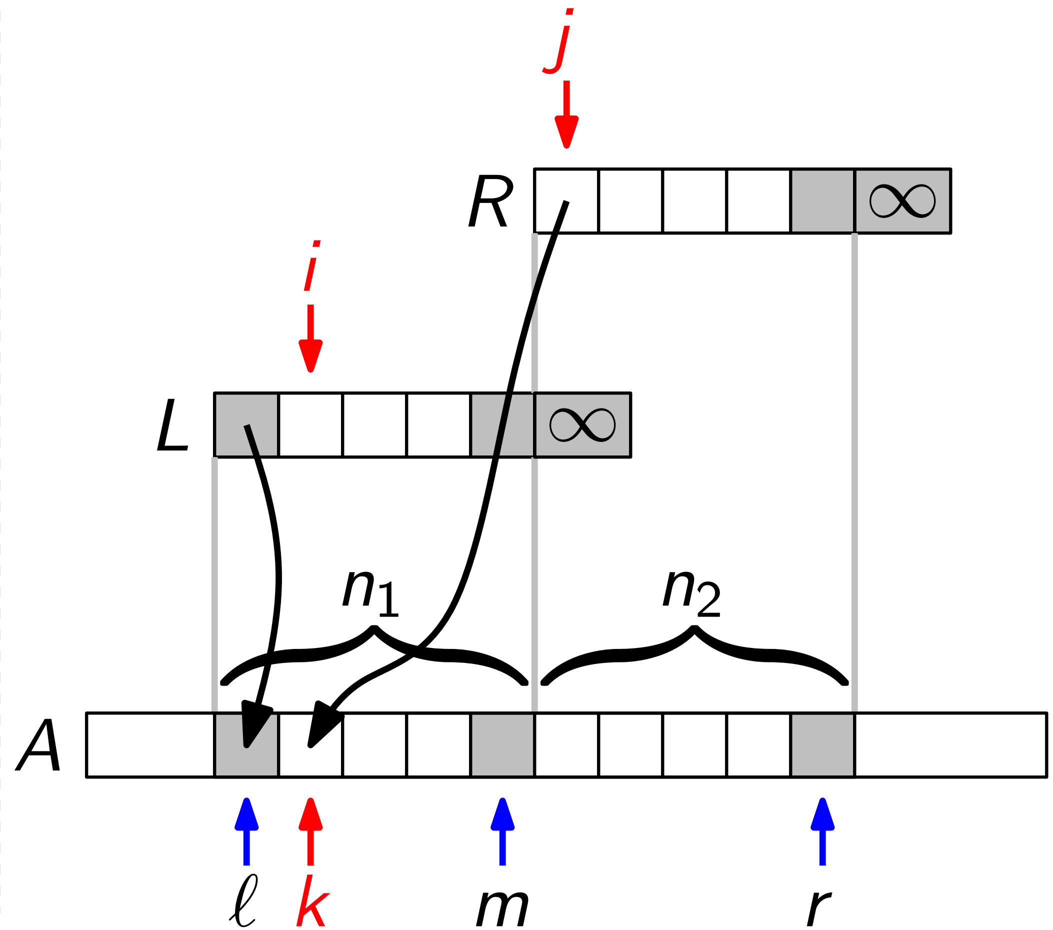
      $A[k] = L[i]$

      $i = i + 1$

    else

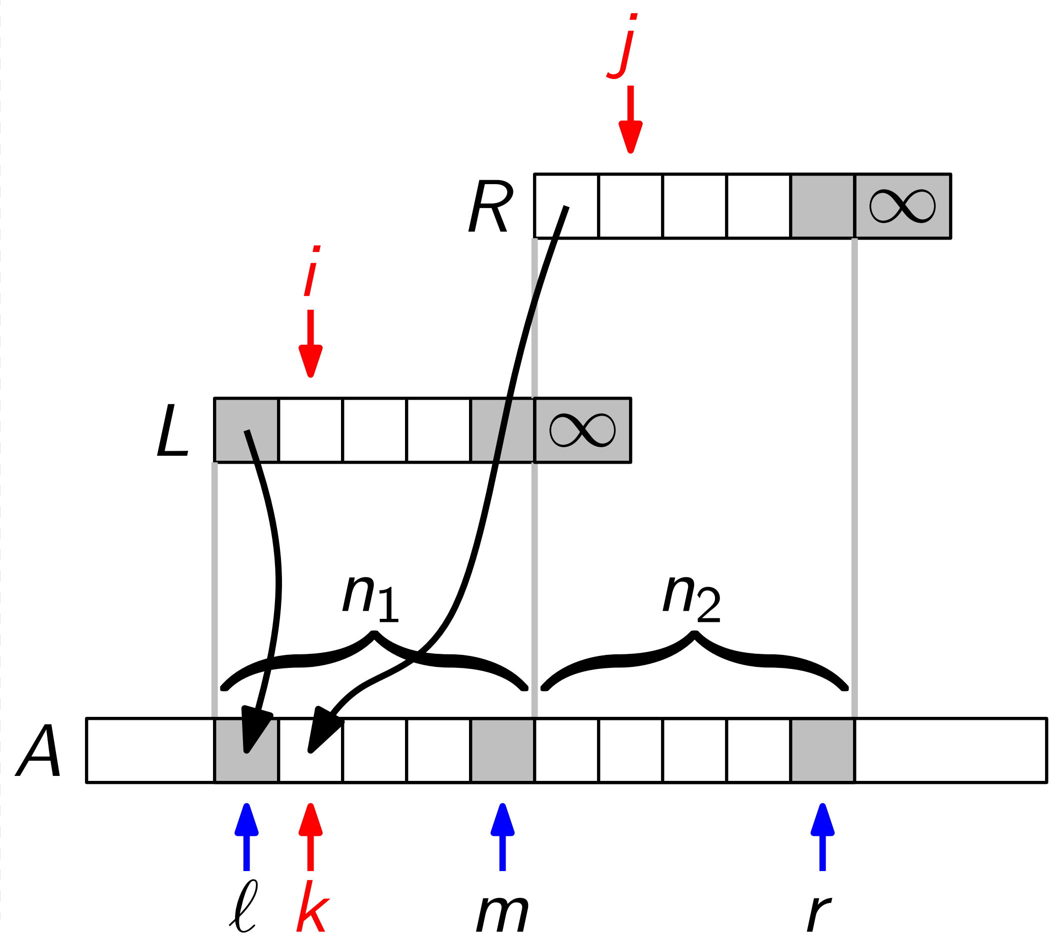
      $A[k] = R[j]$

      $j = j + 1$



Kombiniere


```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
   n₁ = m − ℓ + 1;  n₂ = r − m
   L = new int[1..n₁ + 1]; R = new int[1..n₂ + 1]
   L[1..n₁] = A[ℓ..m]
   R[1..n₂] = A[m + 1..r]
   L[n₁ + 1] = R[n₂ + 1] = ∞
   i = j = 1
   for k = ℓ to r do
       if L[i] ≤ R[j] then
           A[k] = L[i]
           i = i + 1
       else
           A[k] = R[j]
           j = j + 1
```



Kombiniere

Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)

$n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

$L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$

$L[1..n_1] = A[\ell..m]$

$R[1..n_2] = A[m + 1..r]$

$L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$

$i = j = 1$

for $k = \ell$ **to** r **do**

  if $L[i] \leq R[j]$ **then**

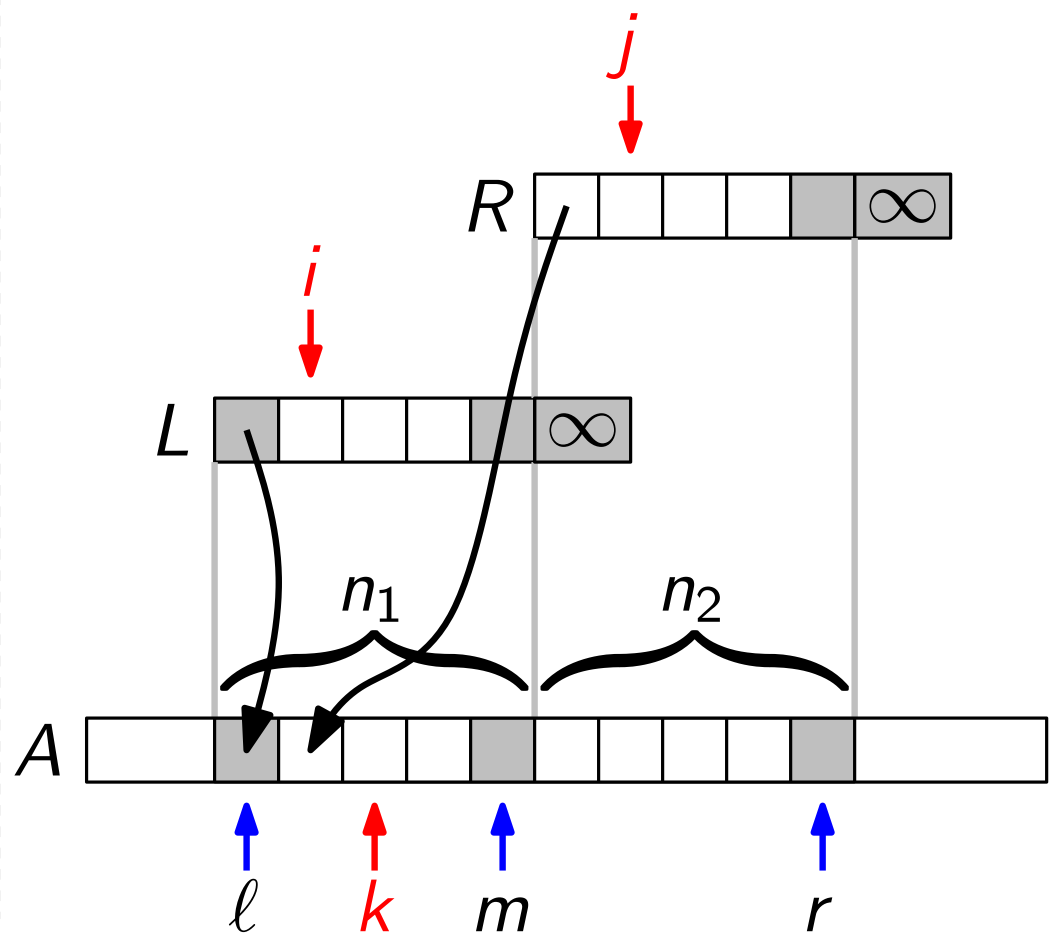
    $A[k] = L[i]$

    $i = i + 1$

  else

    $A[k] = R[j]$

    $j = j + 1$



Kombiniere

Merge(int[ ] A, int ℓ, int m, int r)

  $n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

  $L =$ **new** int$[1..n_1 + 1]$; $R =$ **new** int$[1..n_2 + 1]$

  $L[1..n_1] = A[\ell..m]$

  $R[1..n_2] = A[m + 1..r]$

  $L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$

  $i = j = 1$

  for $k = \ell$ **to** r **do**

    if $L[i] \leq R[j]$ **then**

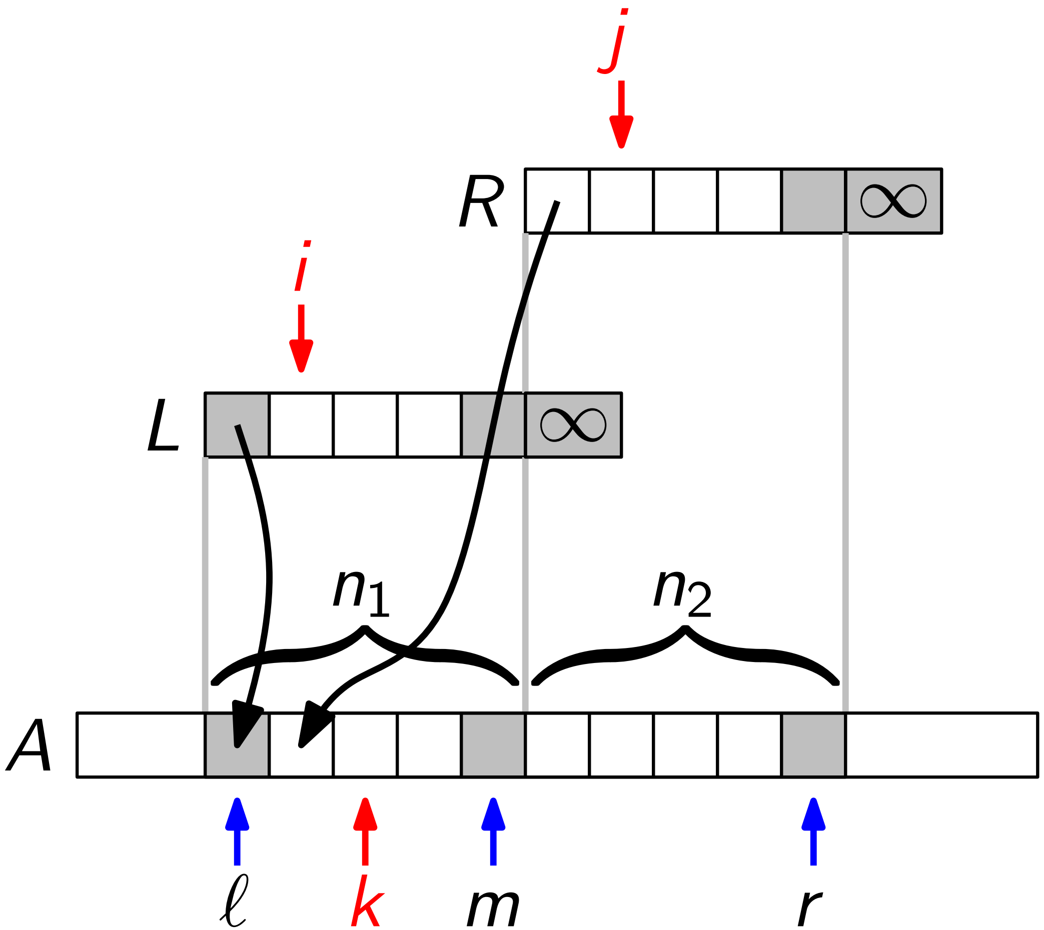
      $A[k] = L[i]$

      $i = i + 1$

    else

      $A[k] = R[j]$

      $j = j + 1$



Aber. . . stimmt das denn alles???

MergeSort – ein Beispiel

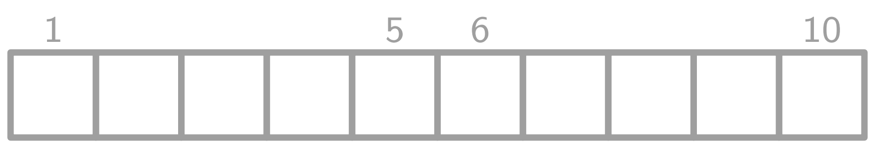
MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

1				5	6				10
8	3	4	0	7	9	1	6	5	2

MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

1				5	6				10
8	3	4	0	7	9	1	6	5	2

MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[ ] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
  $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
  MergeSort(A, ℓ, m)
  MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
  Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

1				5	6				10
8	3	4	0	7	9	1	6	5	2

1				5
8	3	4	0	7

MergeSort – ein Beispiel

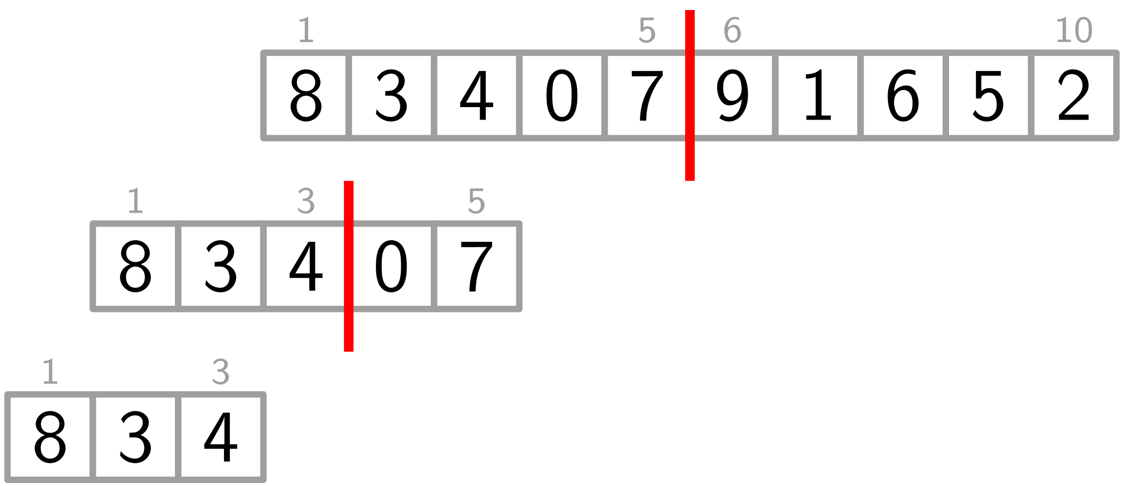
MergeSort(int[ ] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

1				5	6				10
8	3	4	0	7	9	1	6	5	2

1		3		5
8	3	4	0	7

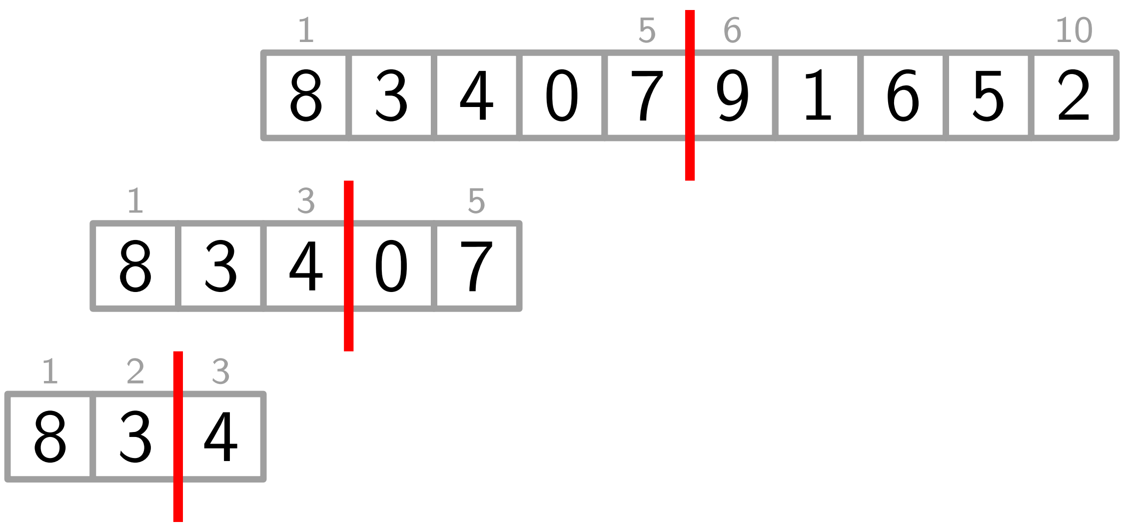
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort$(A, m+1, r)$ } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



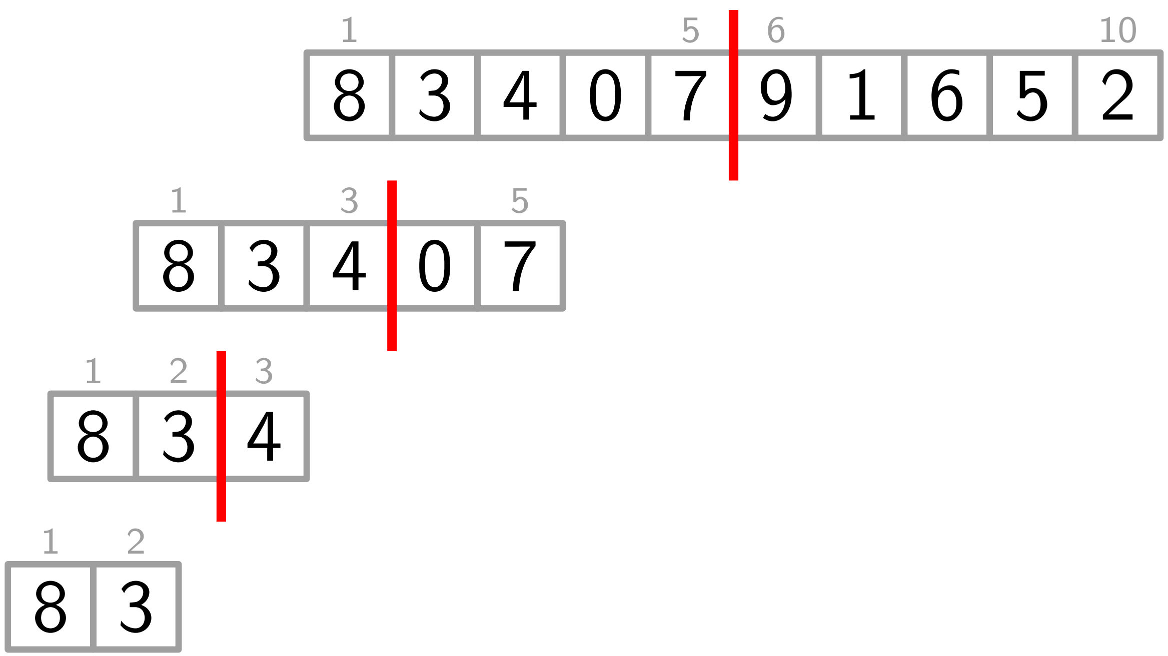
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



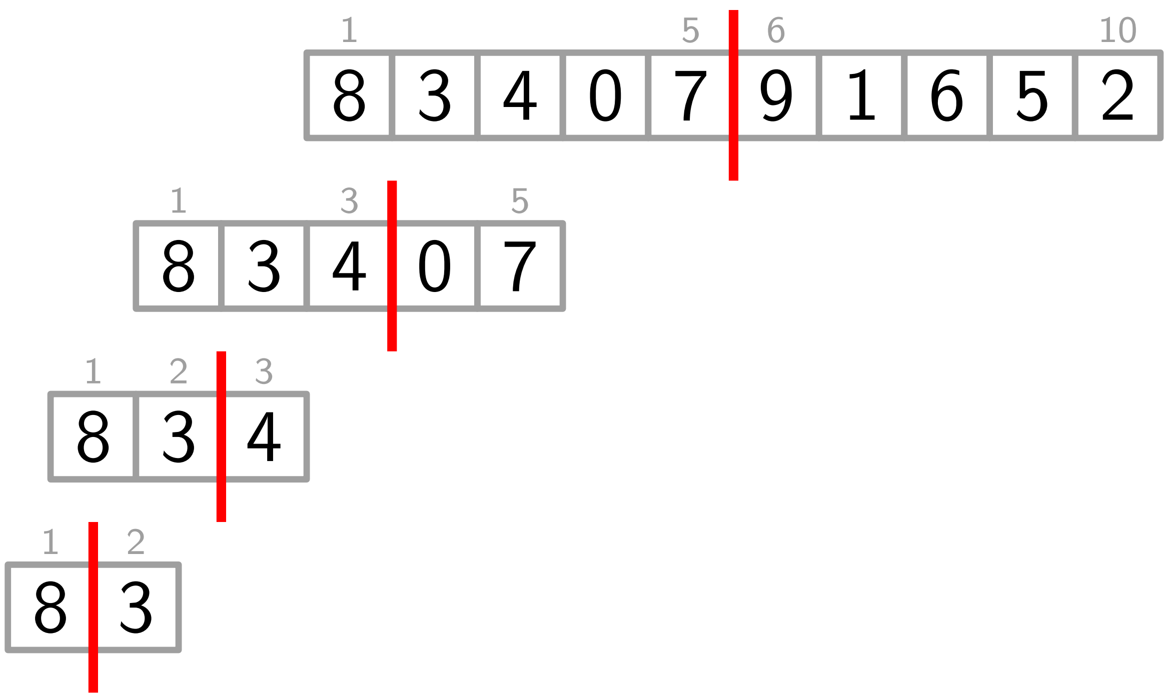
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

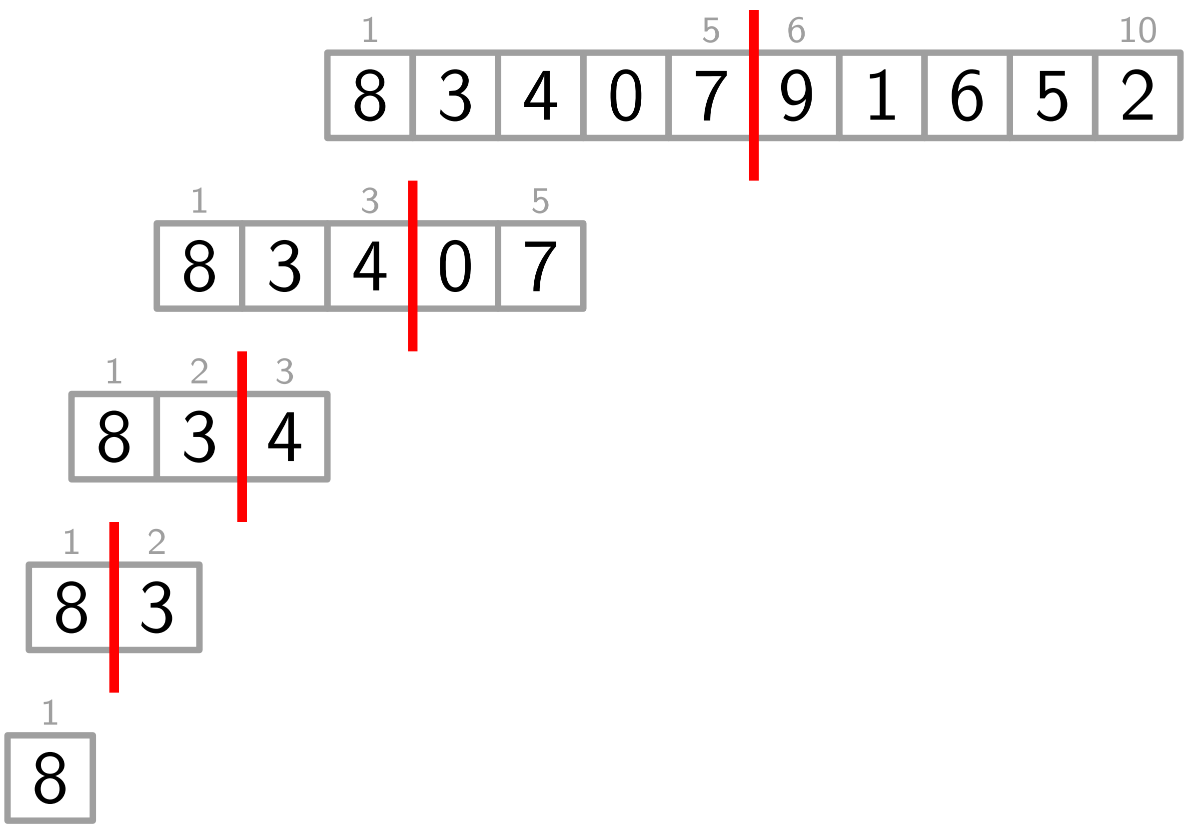


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

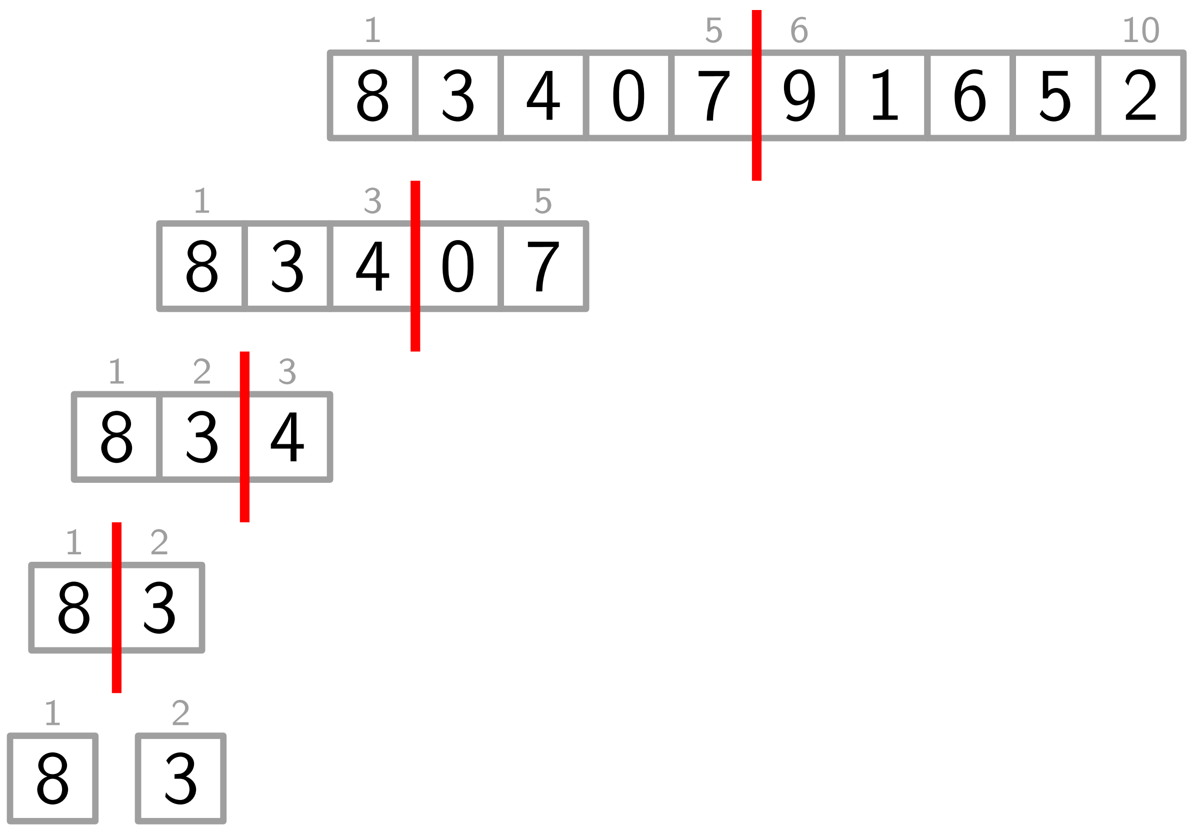
if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

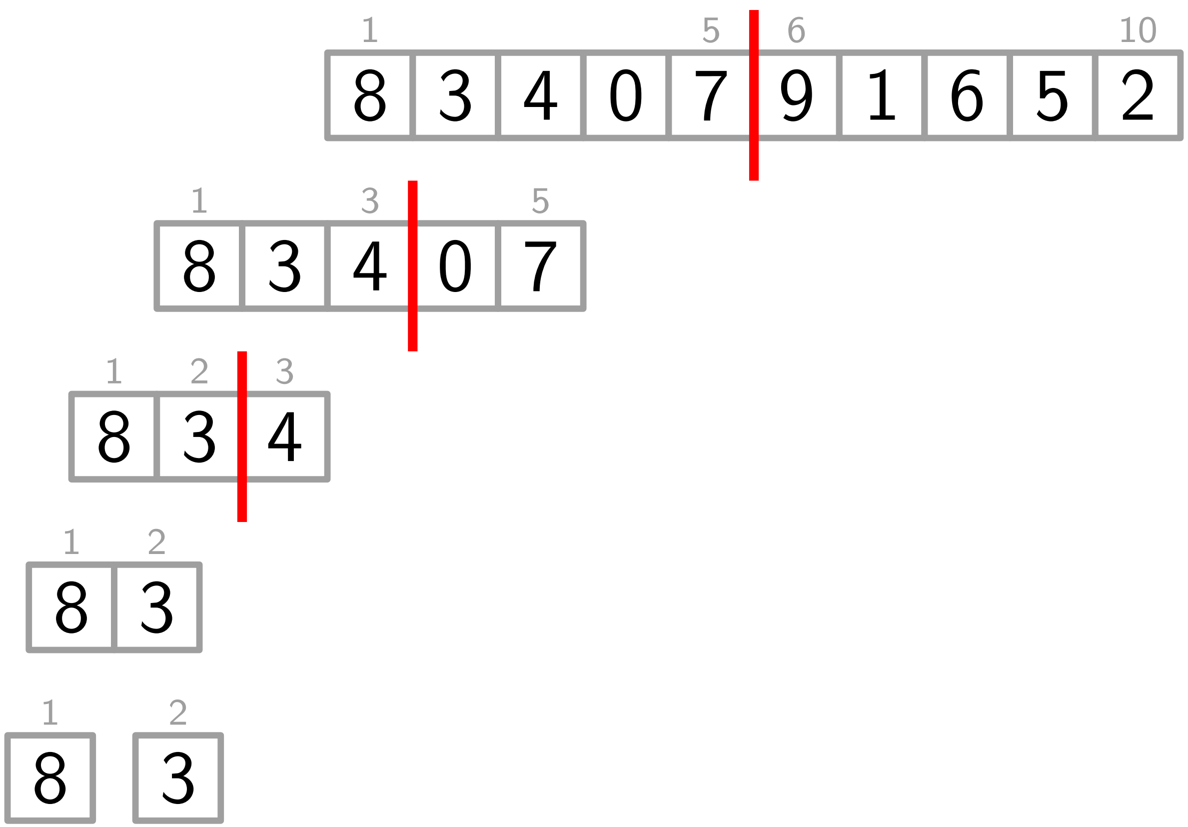


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

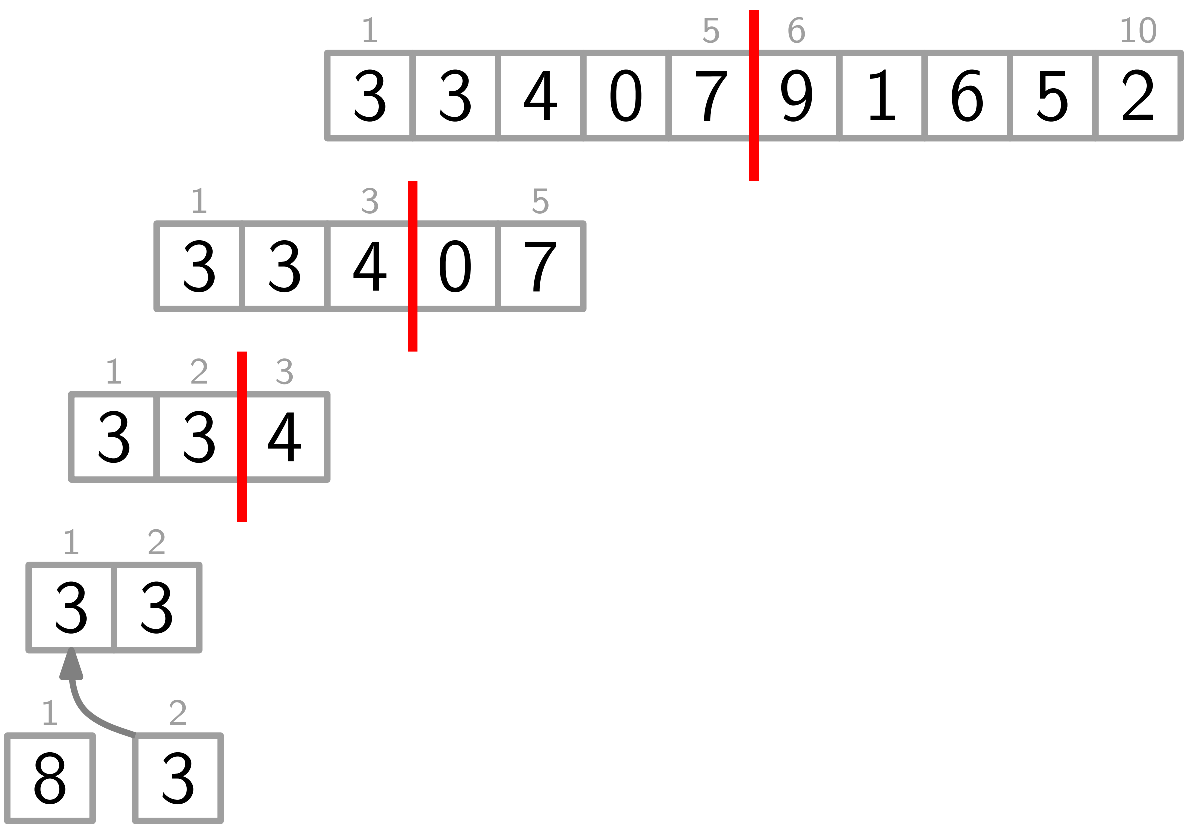
if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



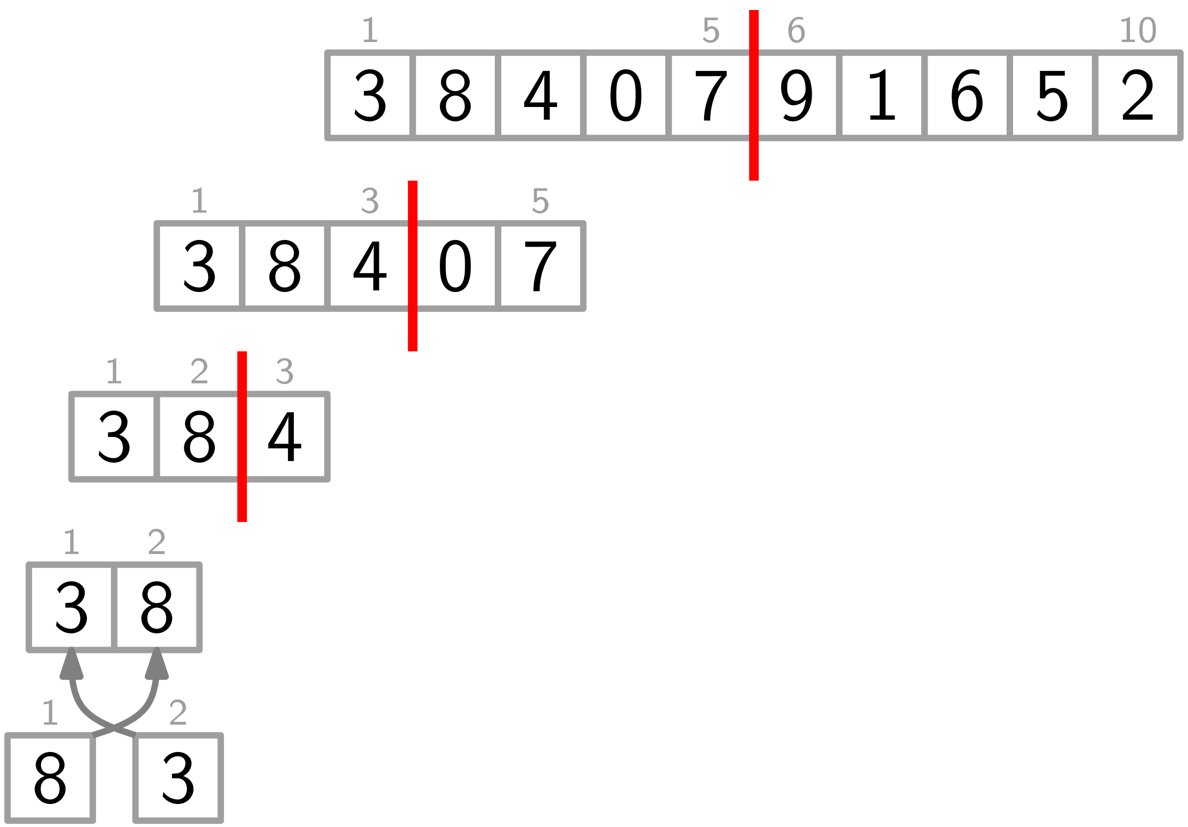
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

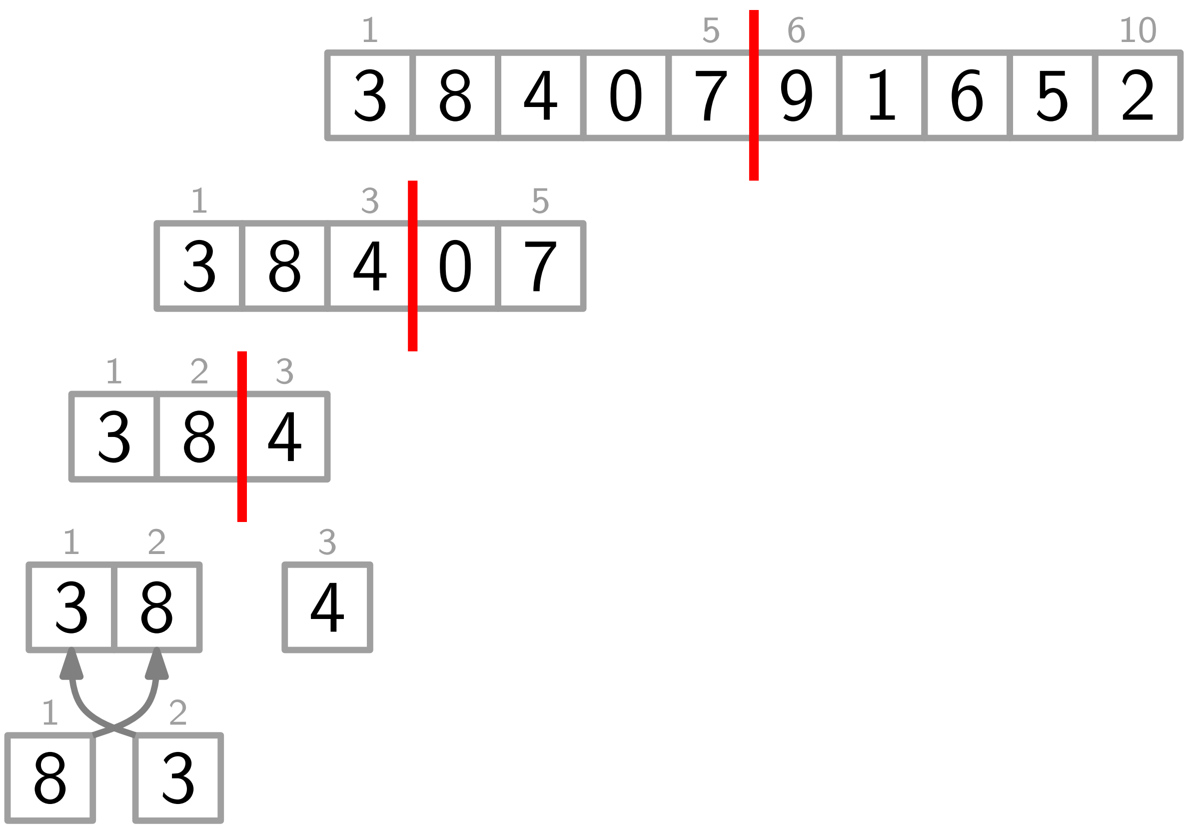


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

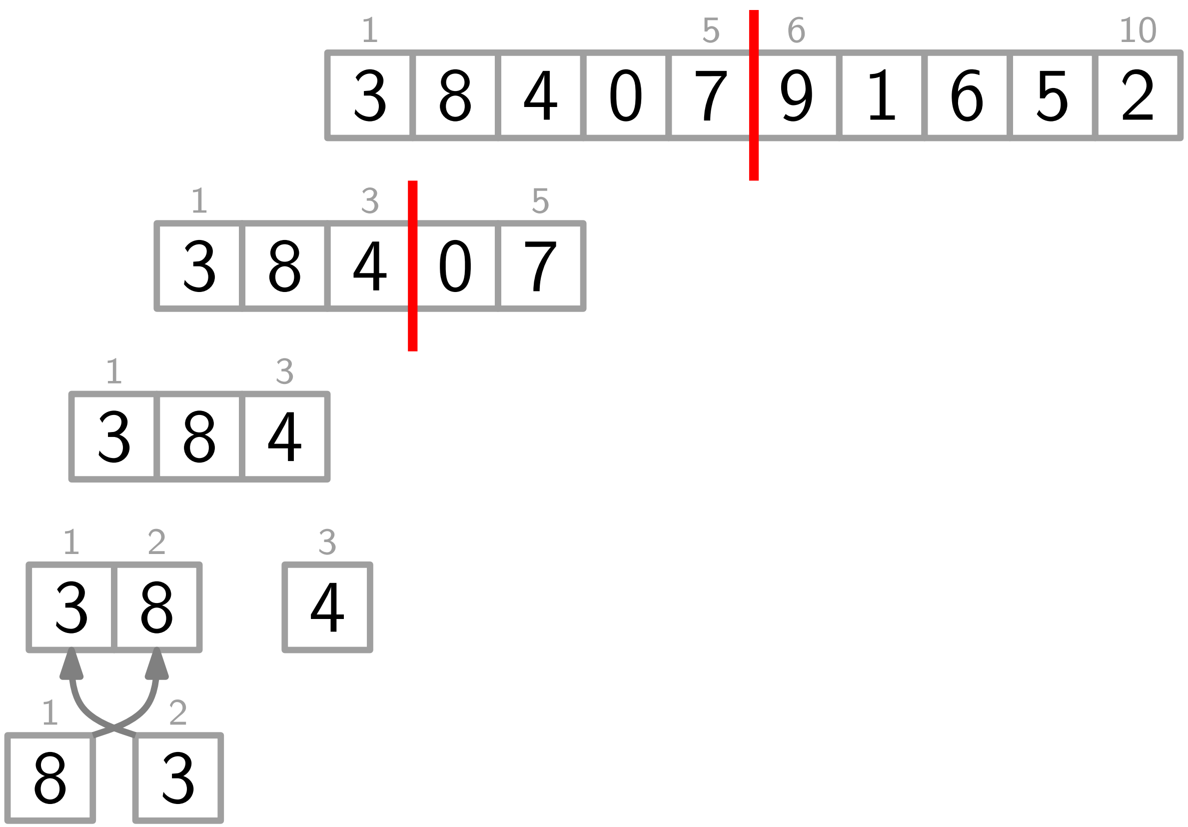
if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



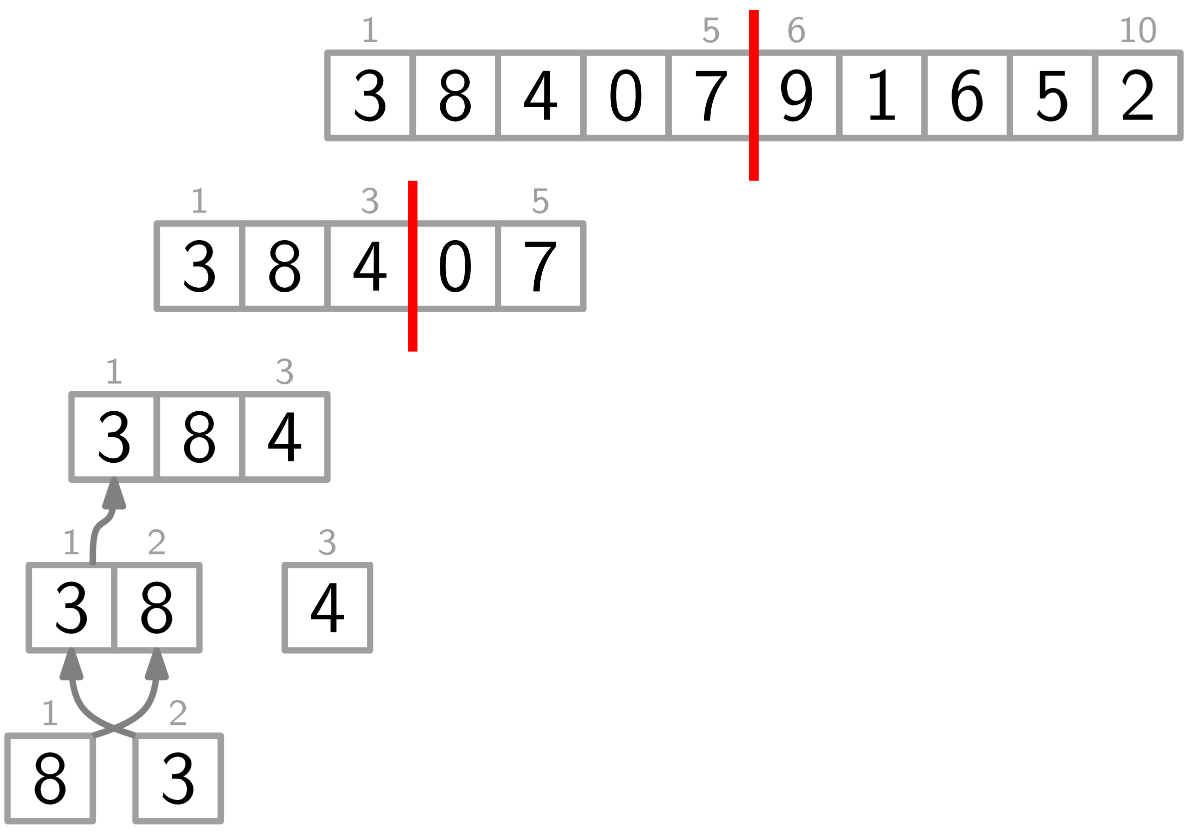
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m) }
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



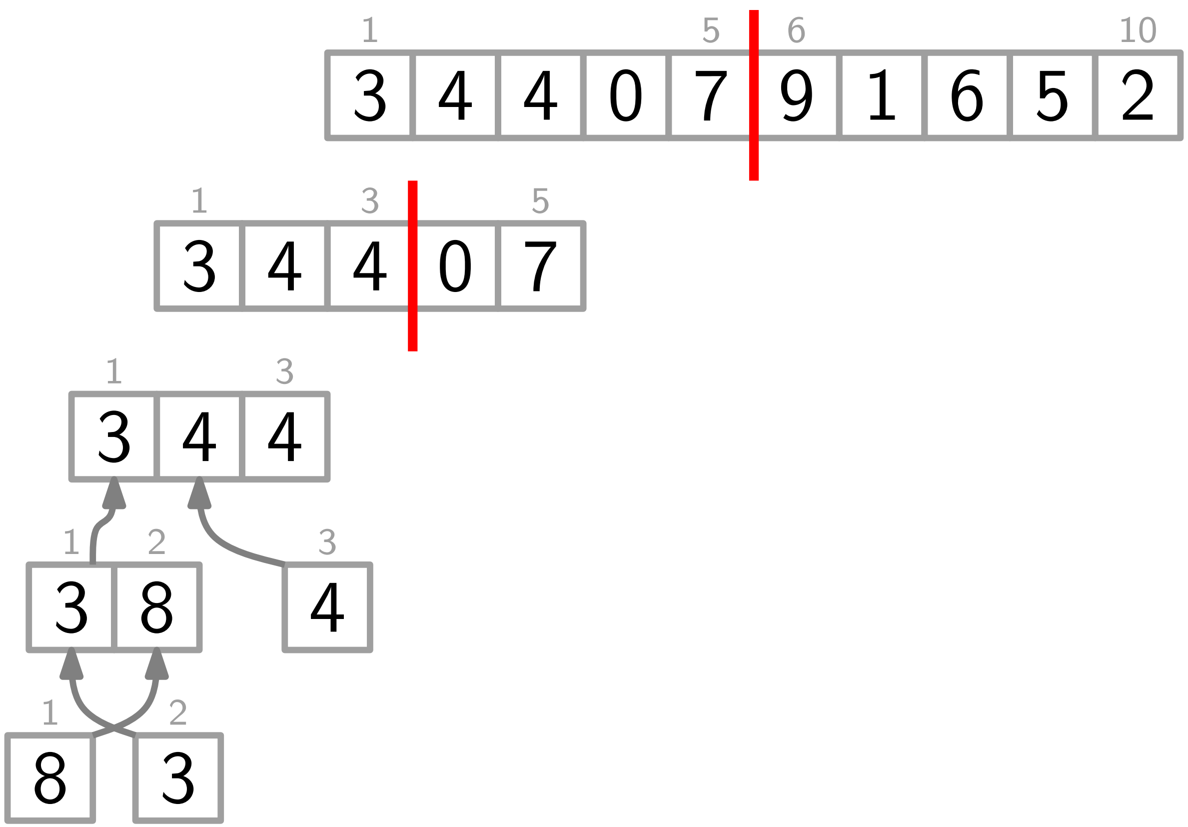
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



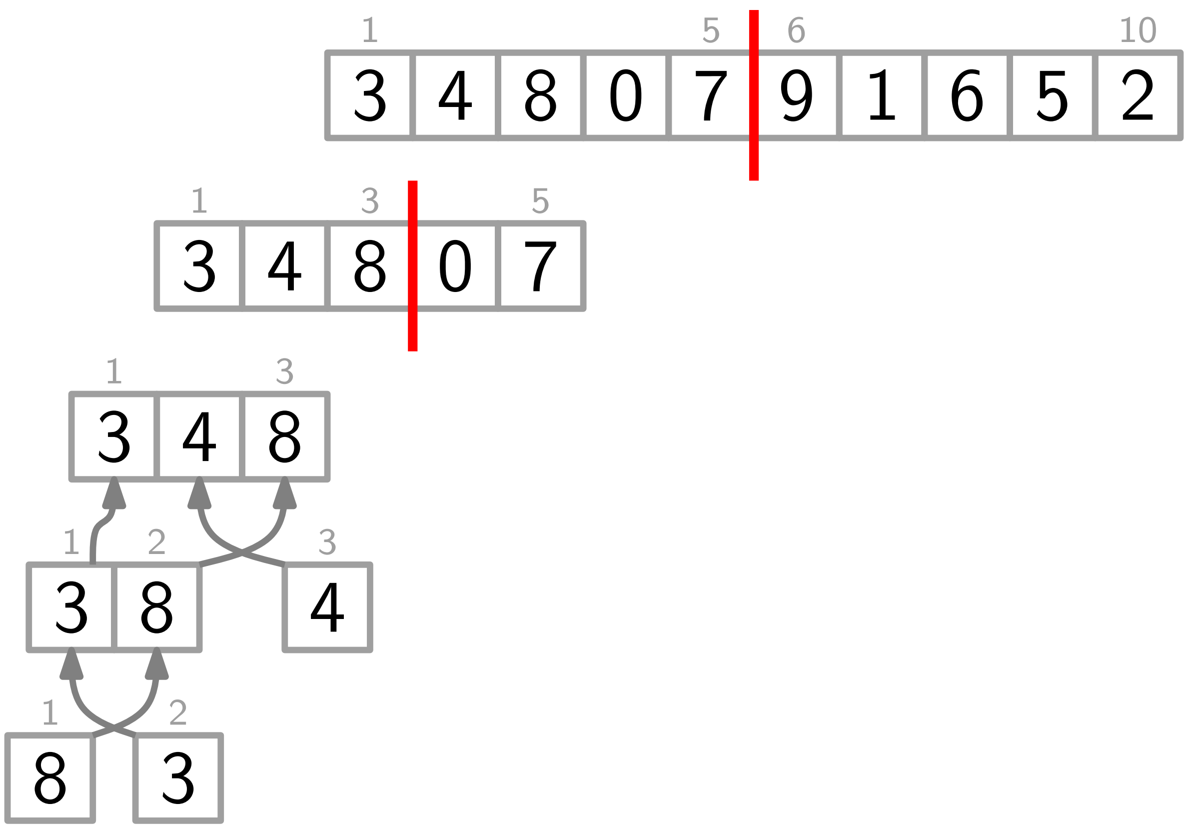
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



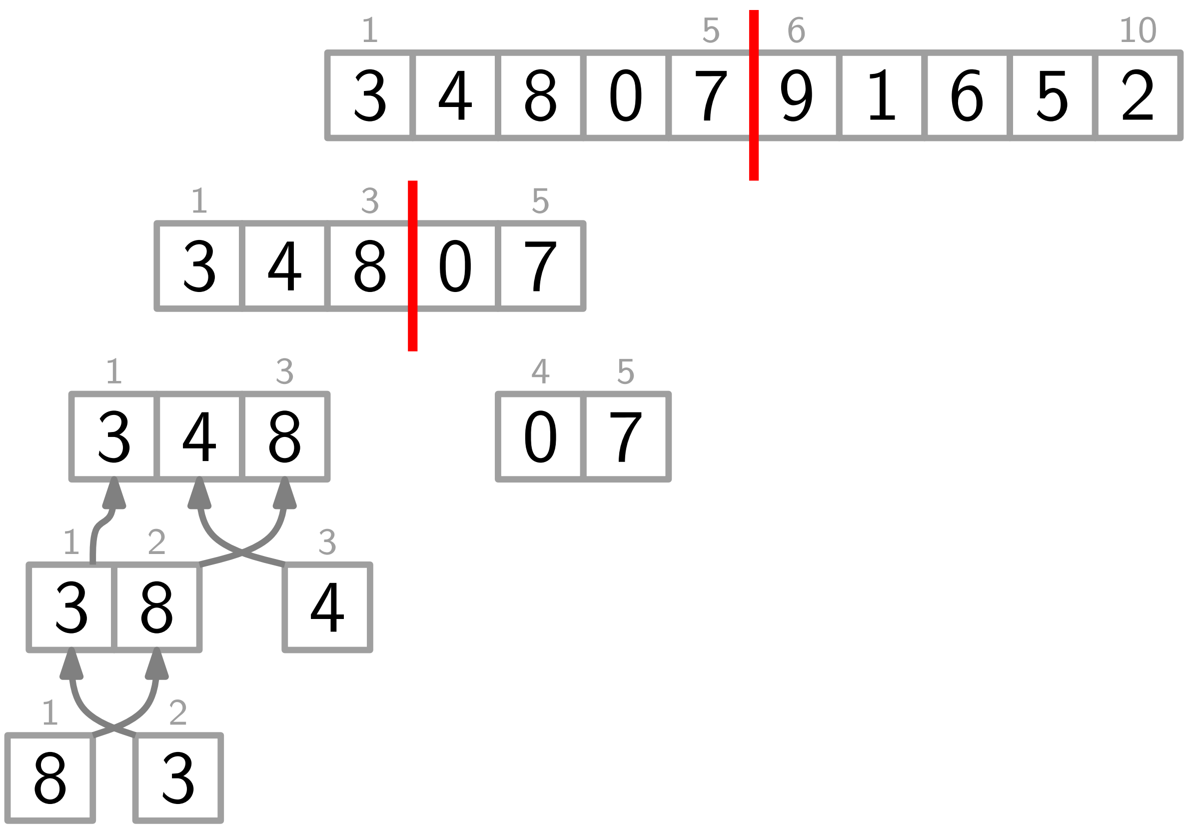
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



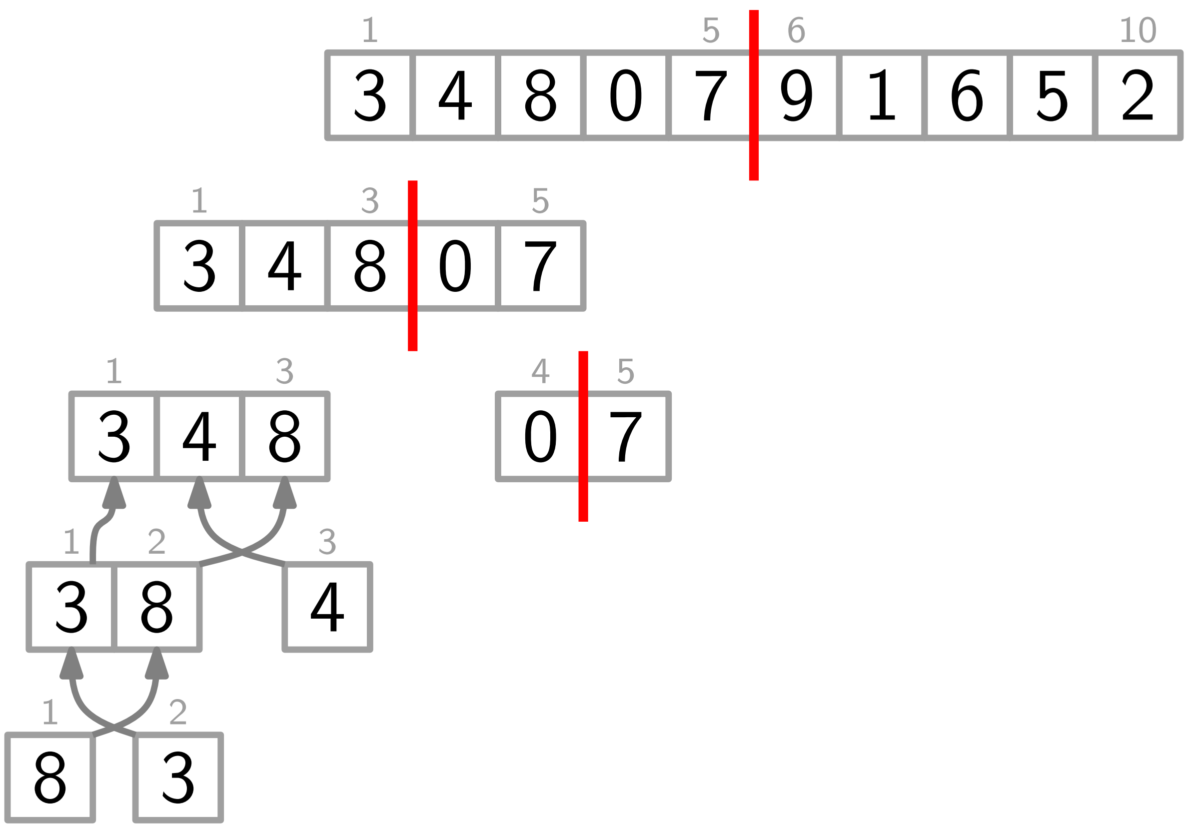
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



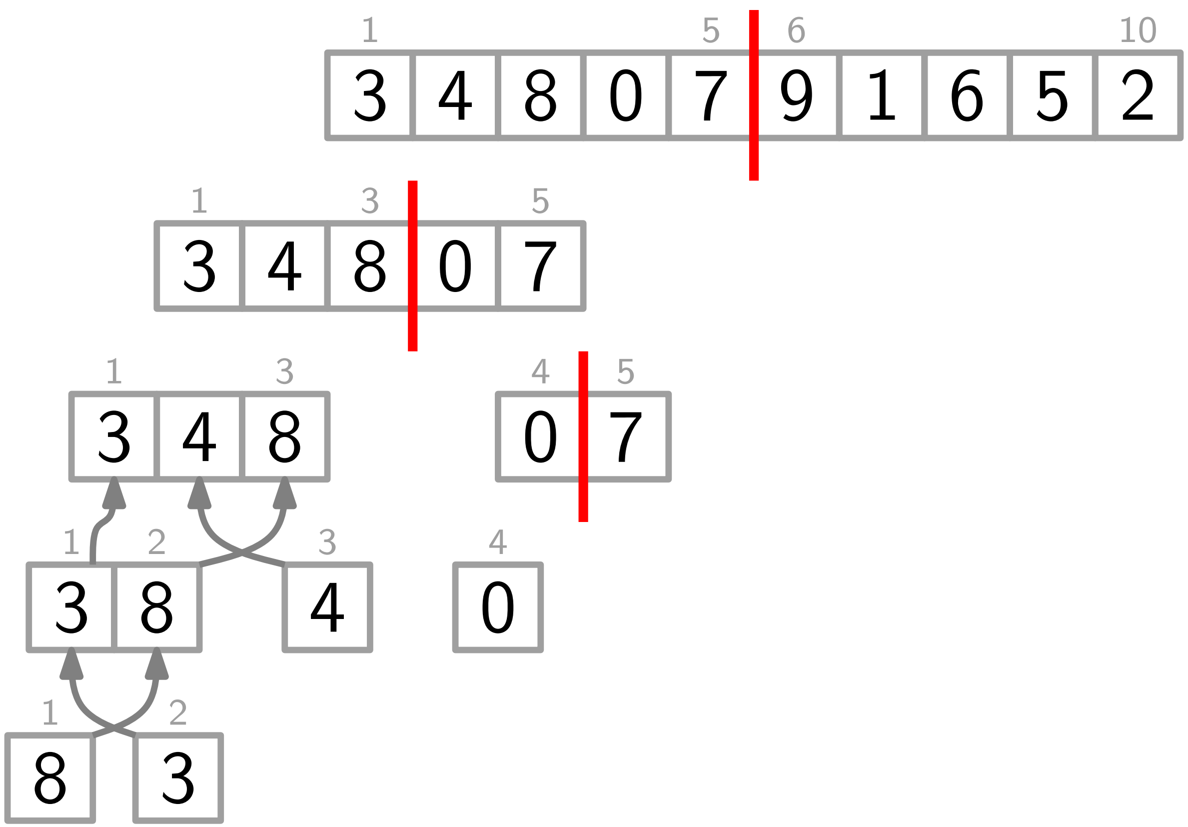
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
  $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
  MergeSort(A, ℓ, m)
  MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
  Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

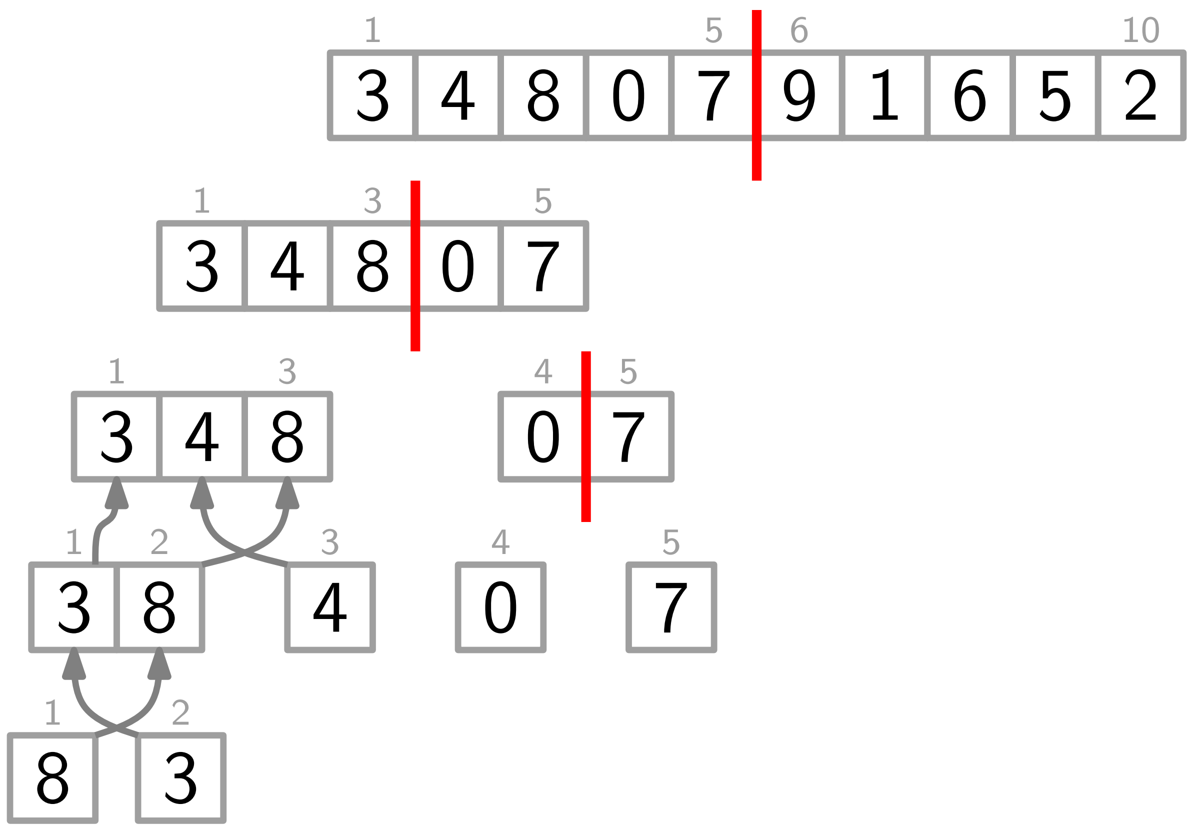


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

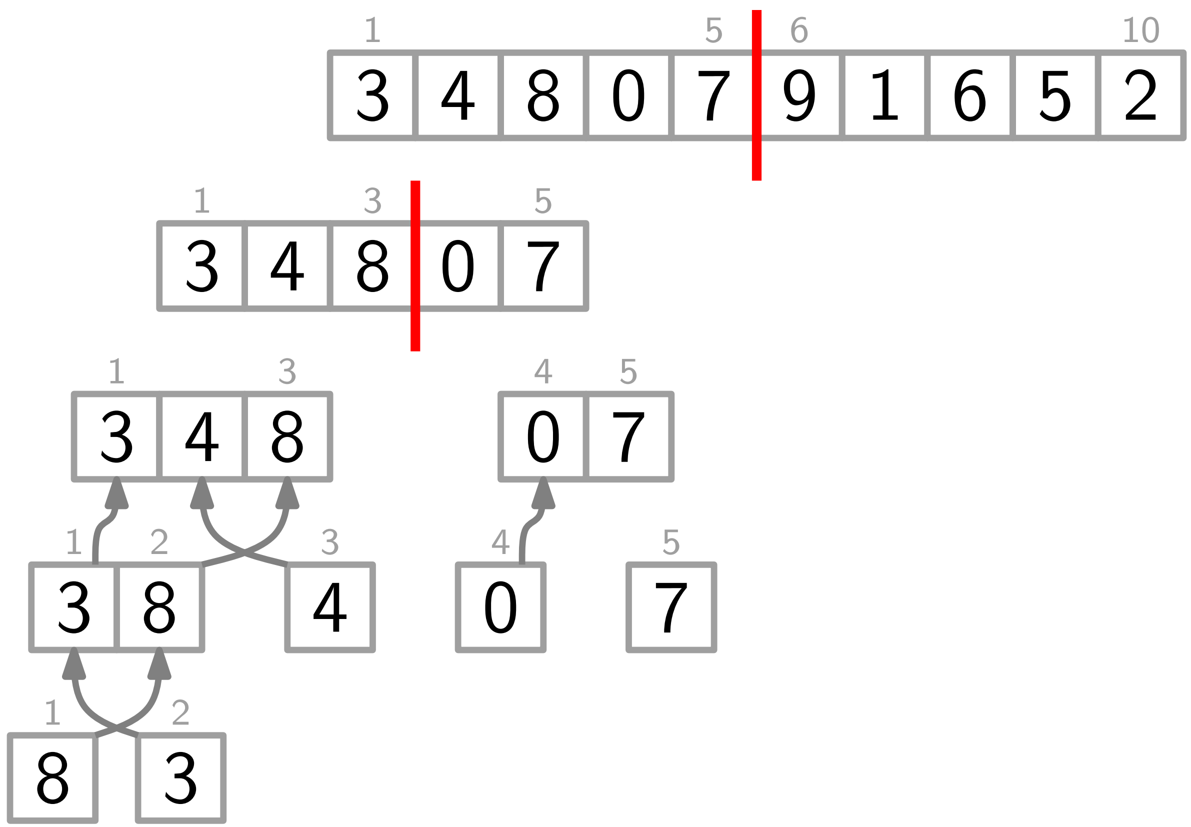


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

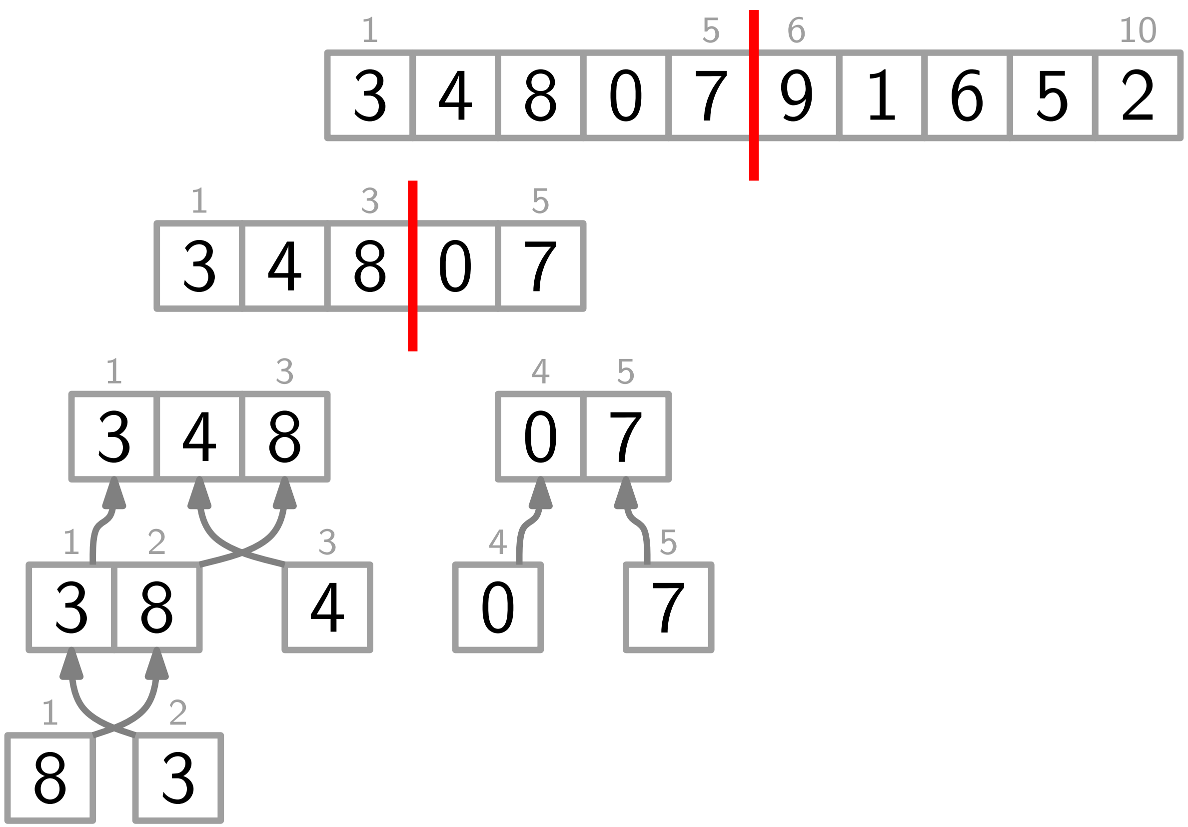
if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m) } herrsche
- MergeSort($A, m+1, r$)
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

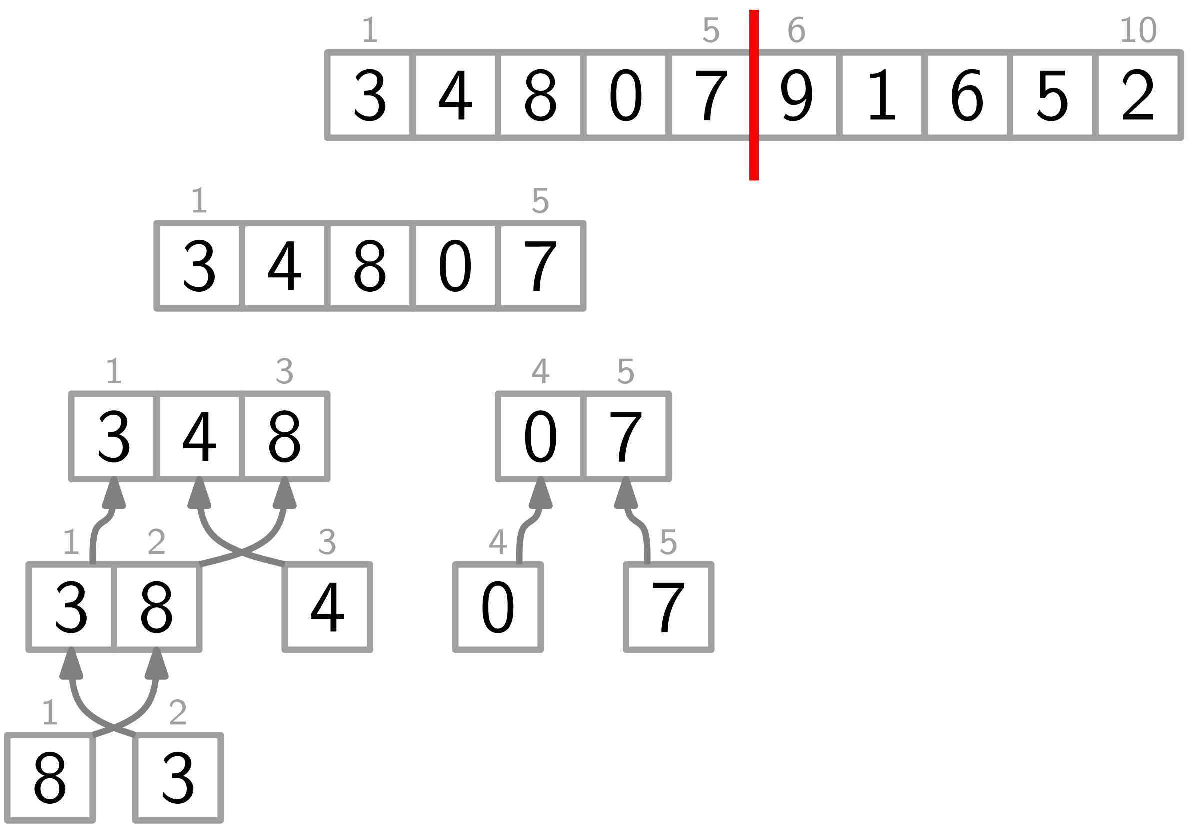


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

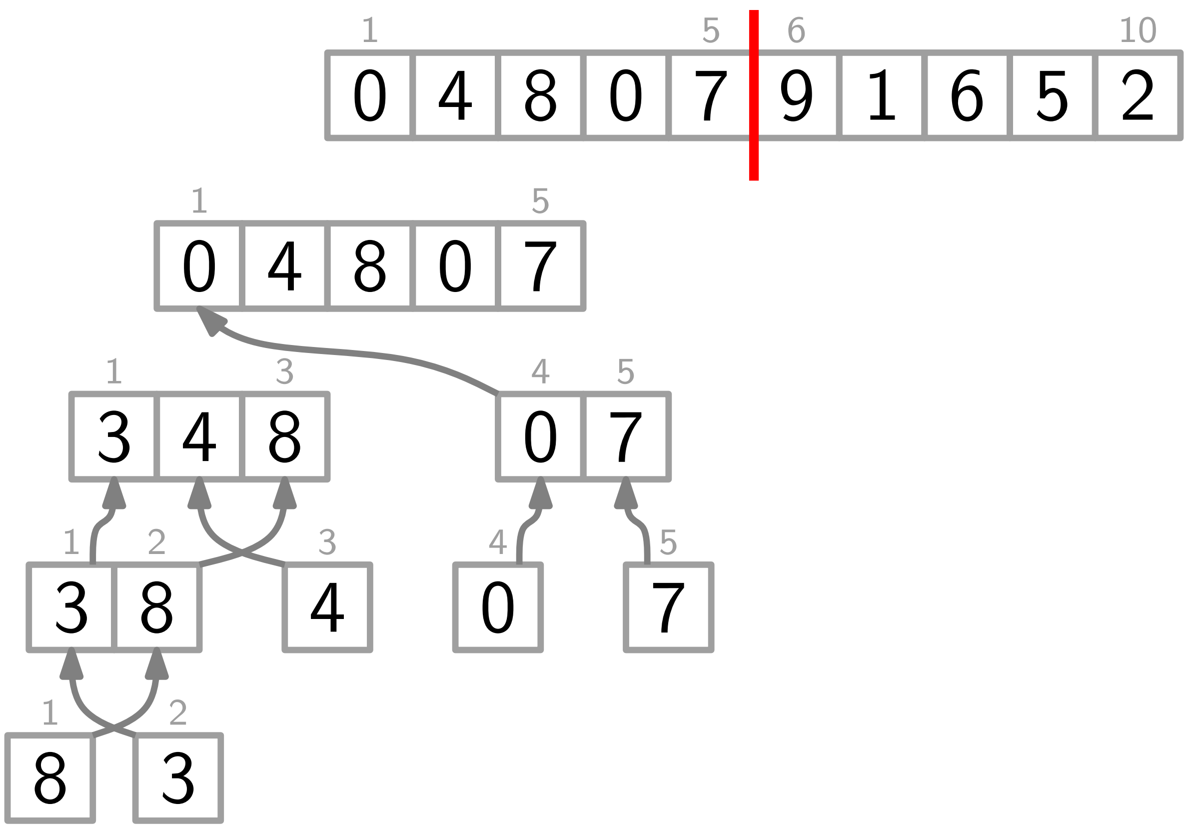
if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



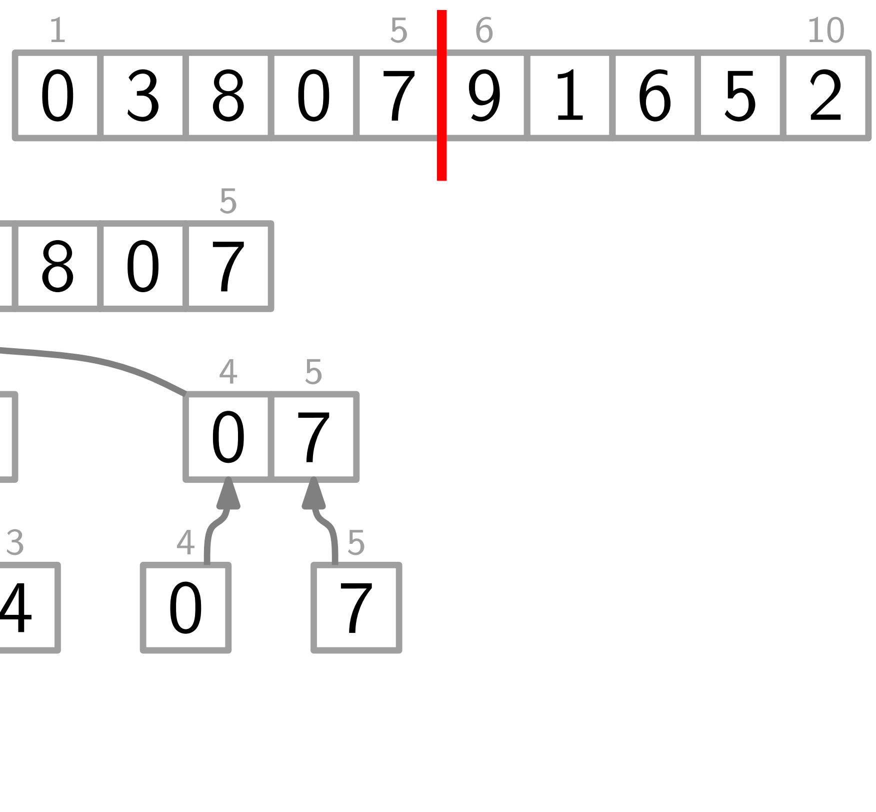
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



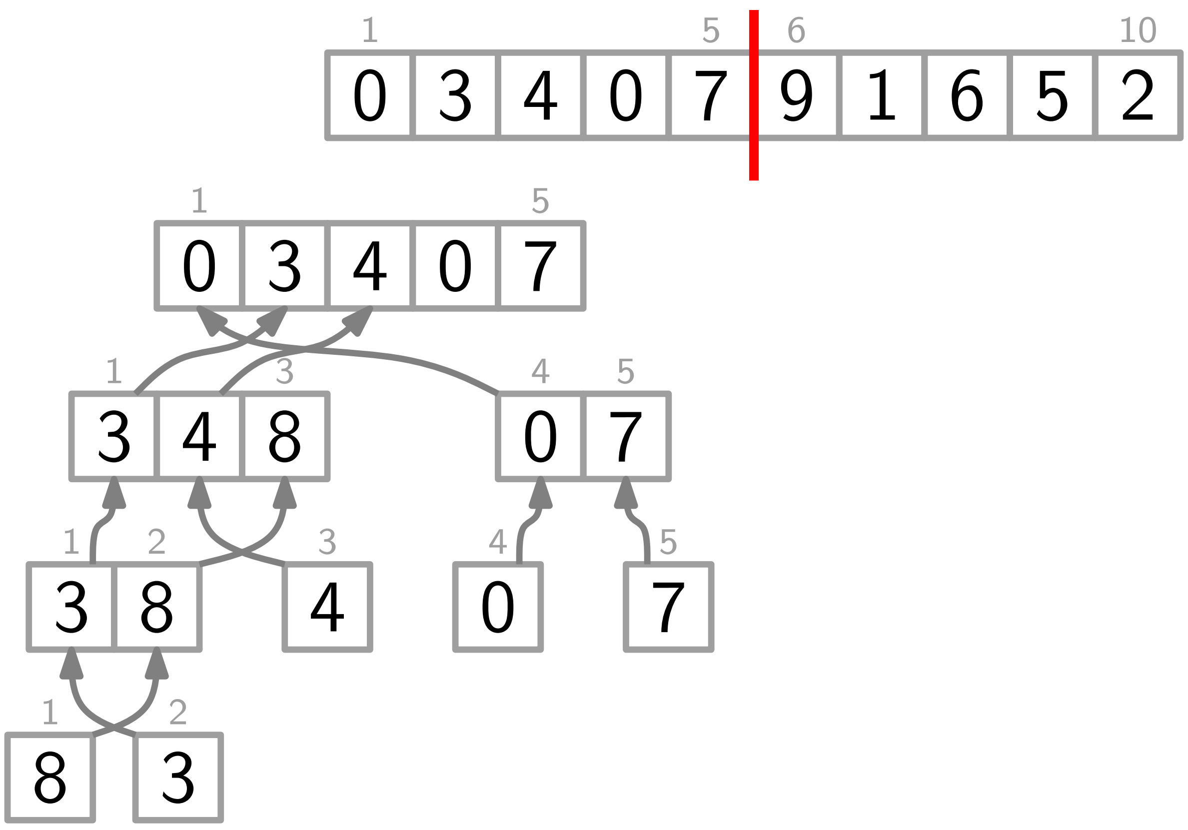
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[ ] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



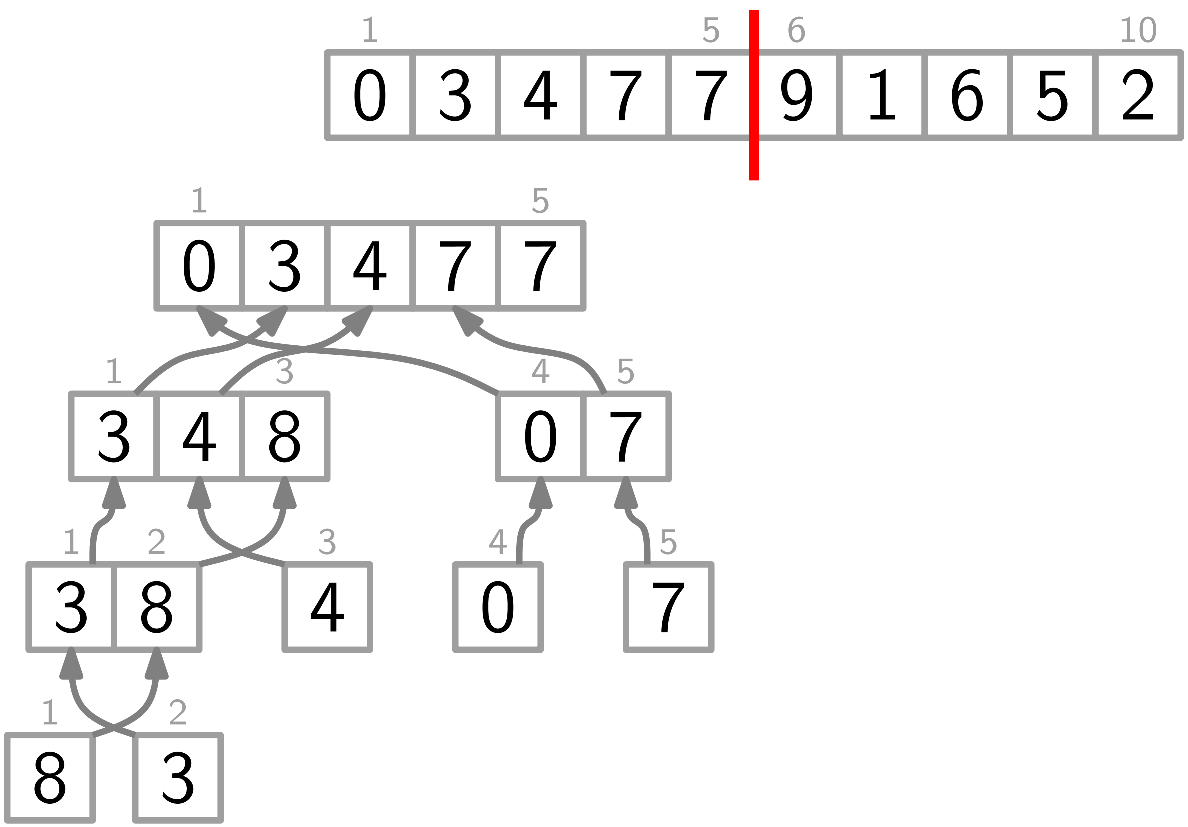
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[ ] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
  $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
  MergeSort(A, ℓ, m)
  MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
  Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

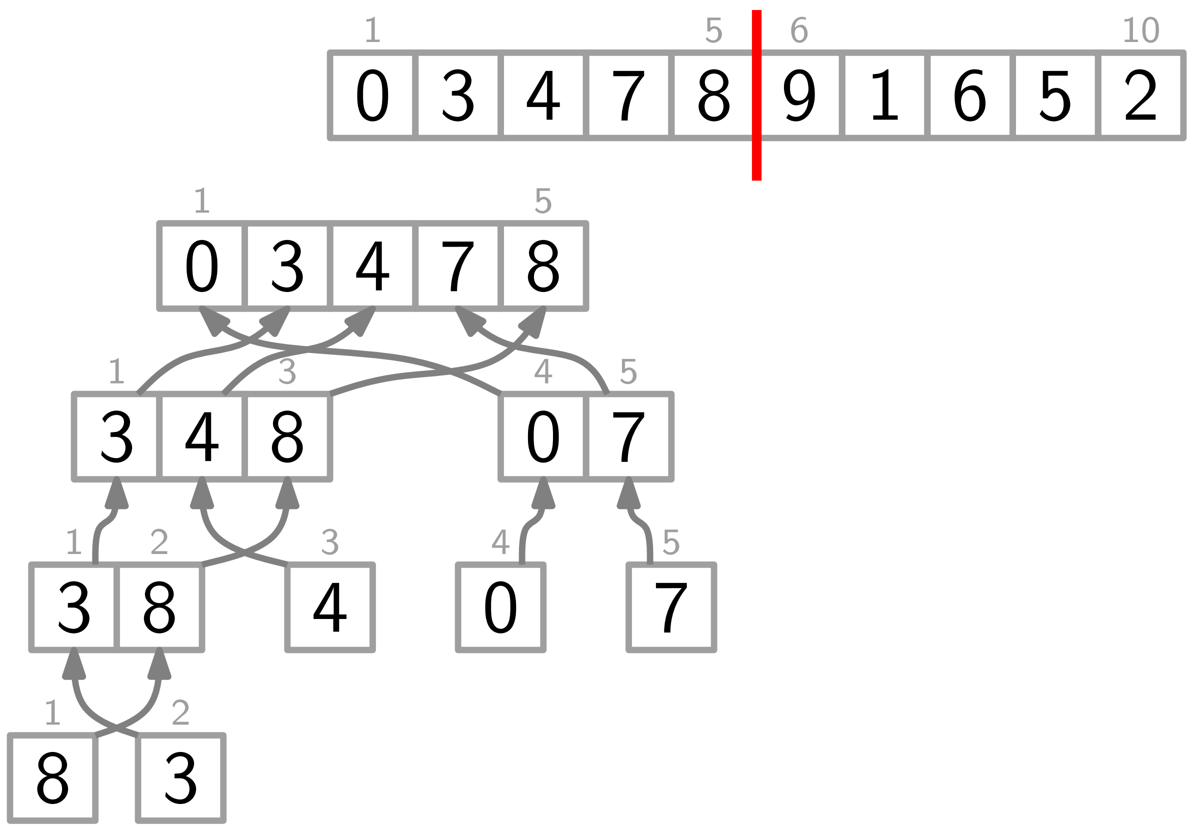


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

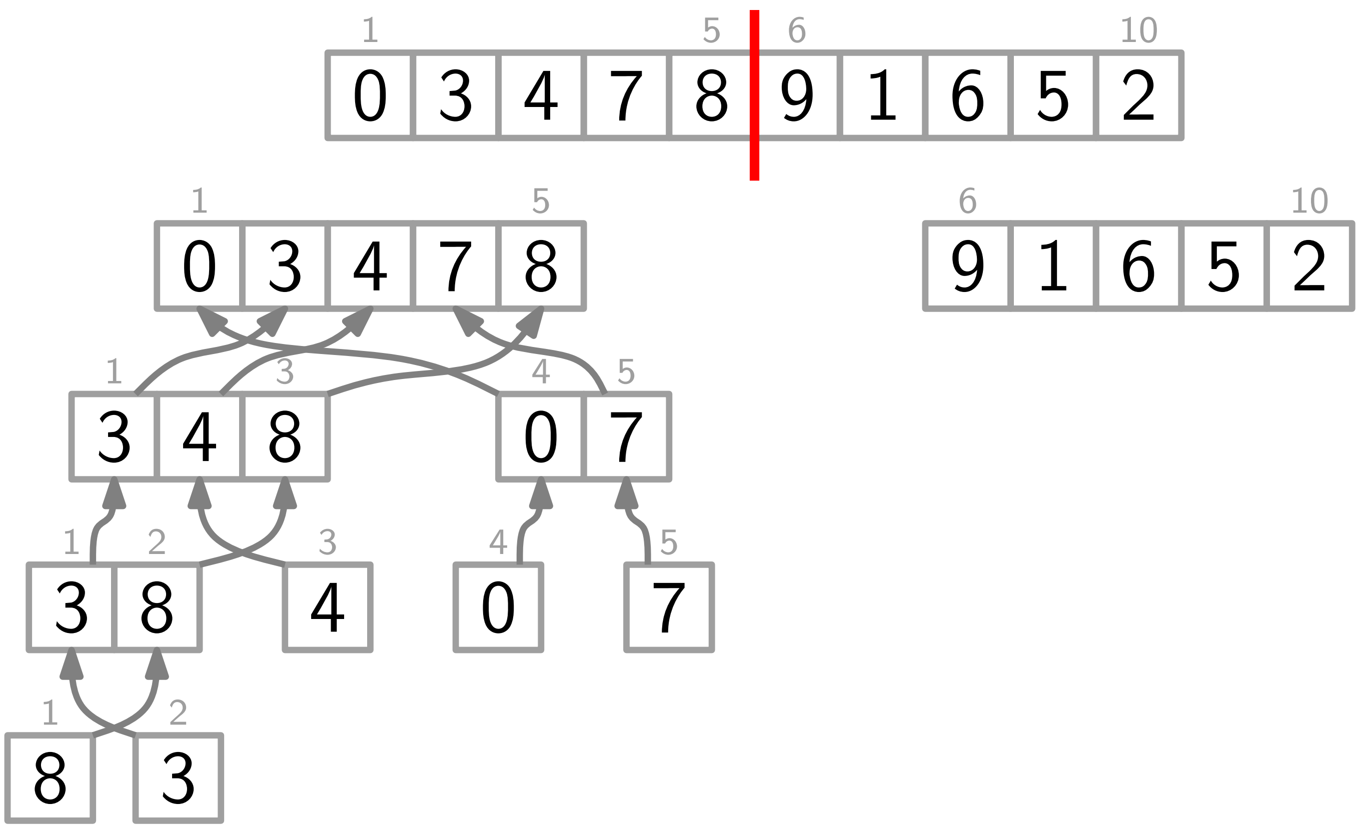
if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

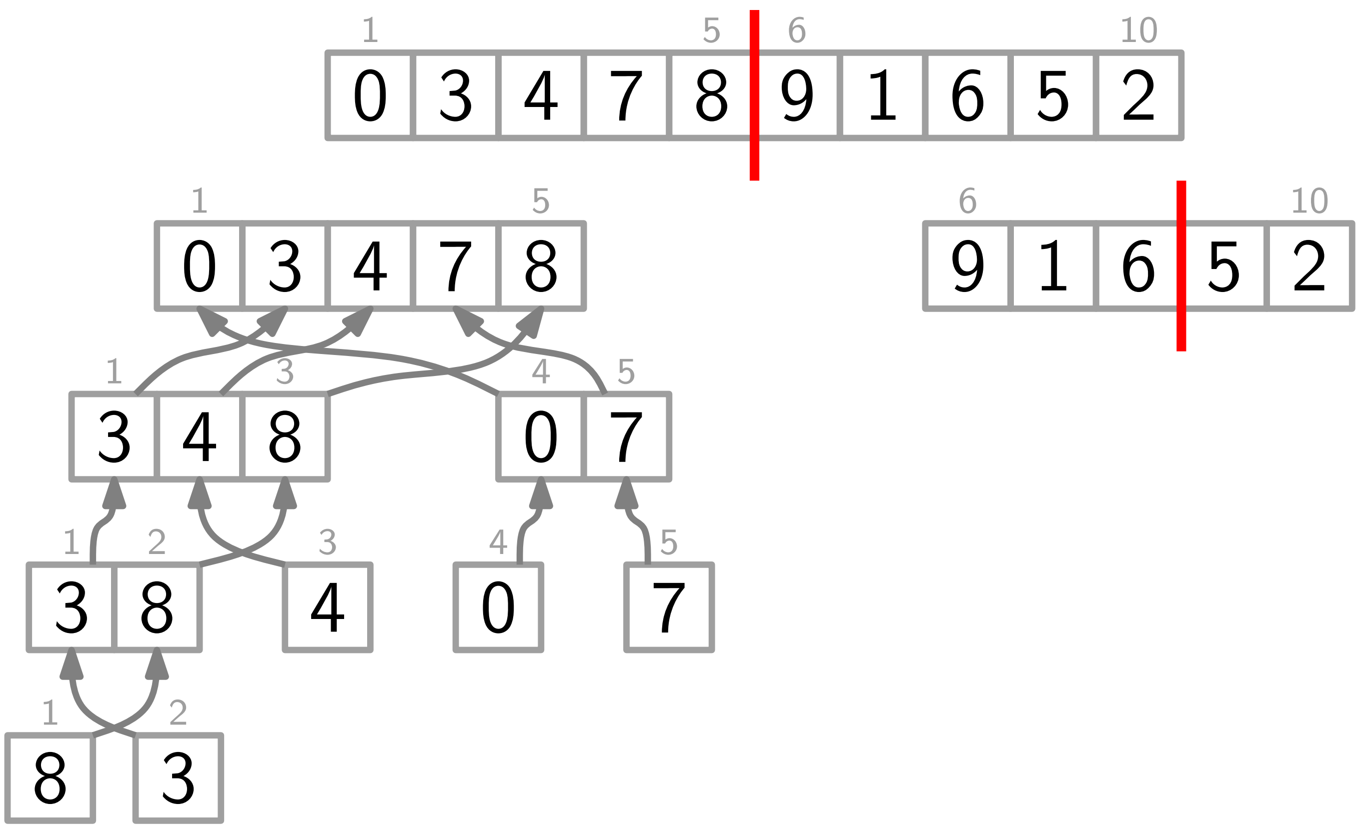


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

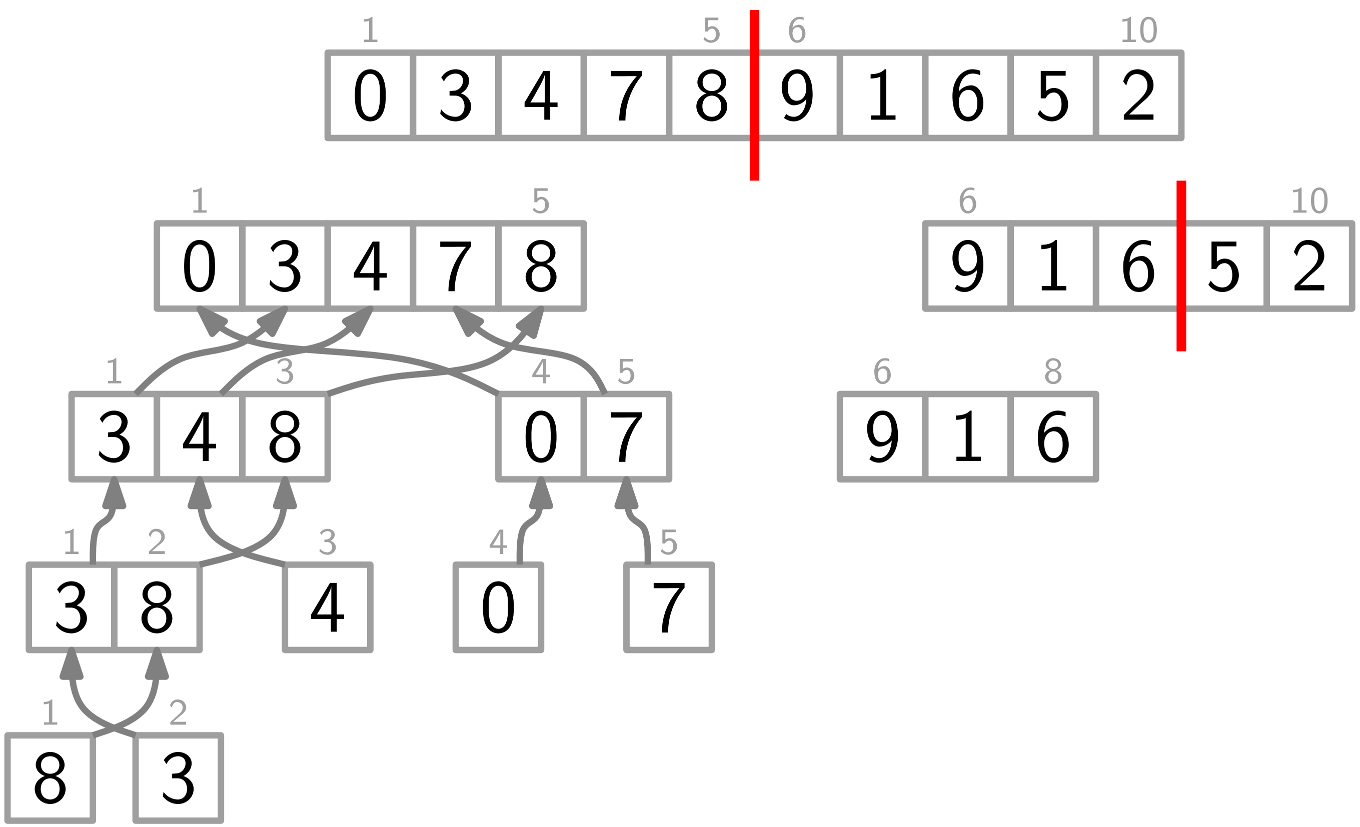


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

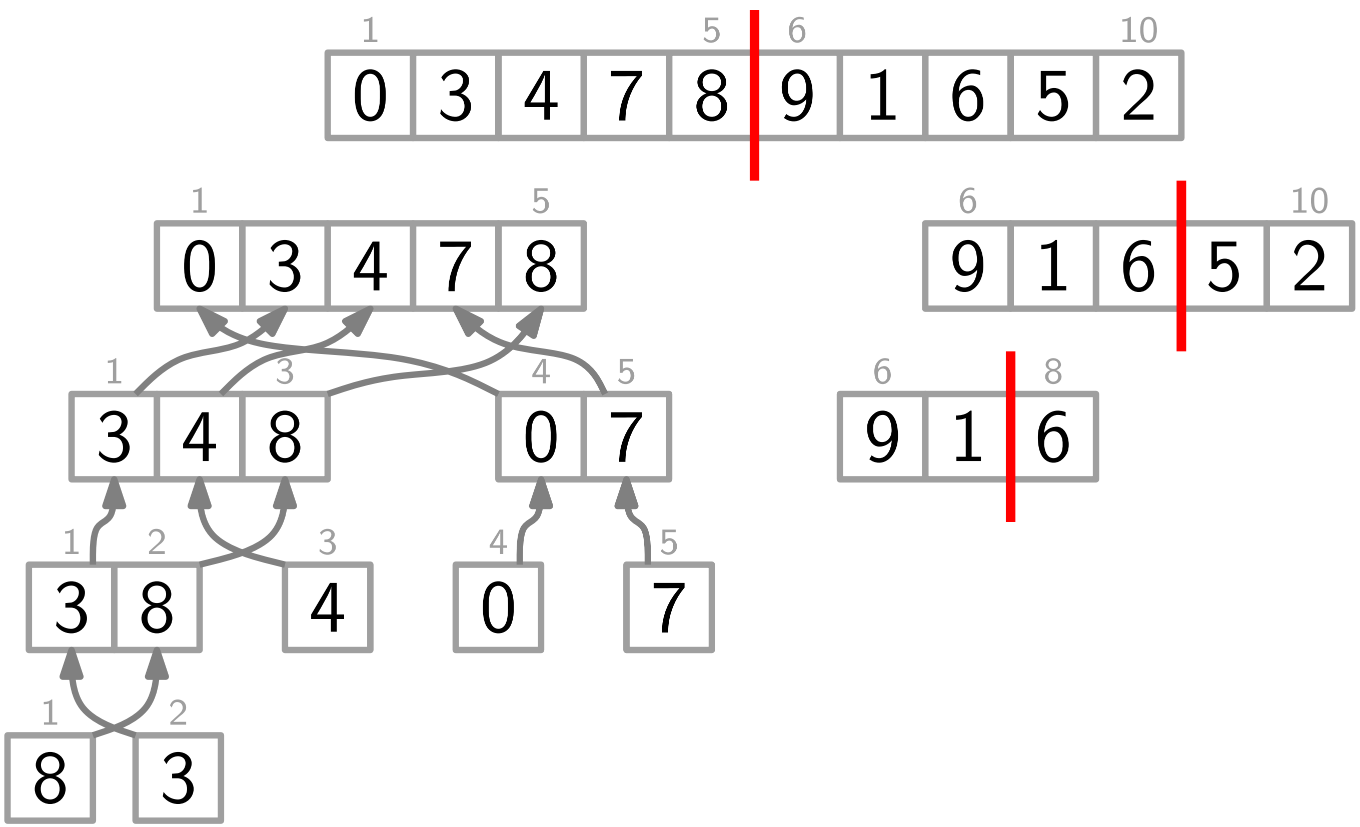
if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



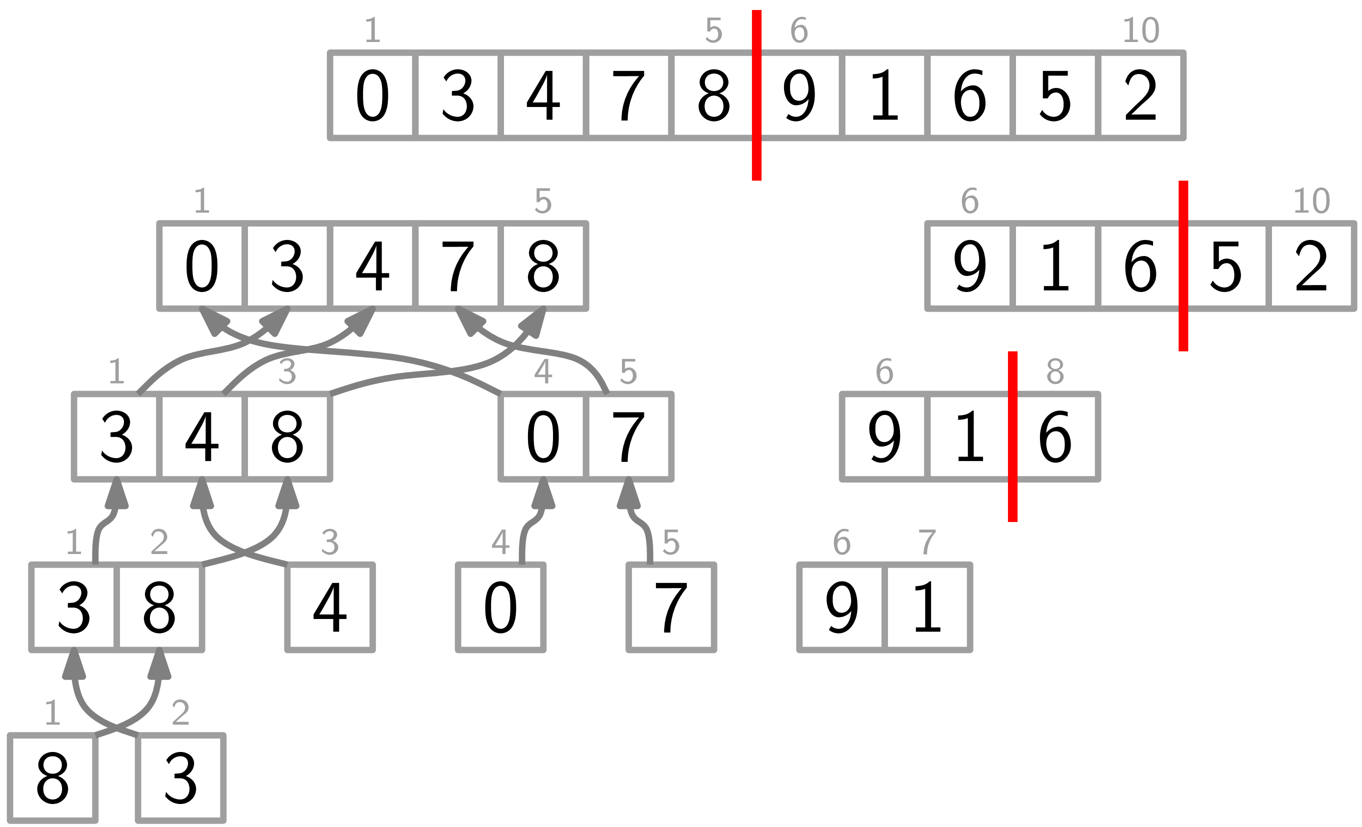
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

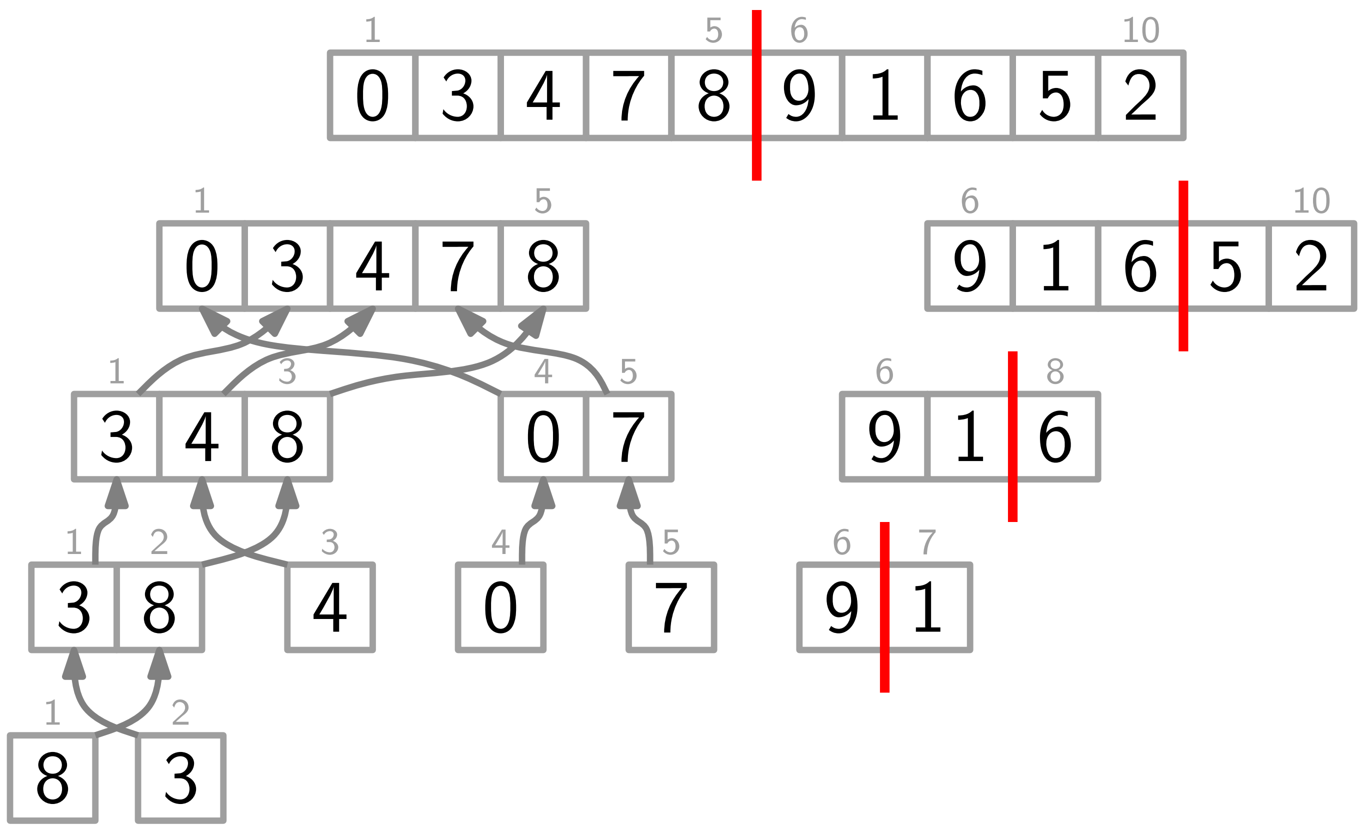


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

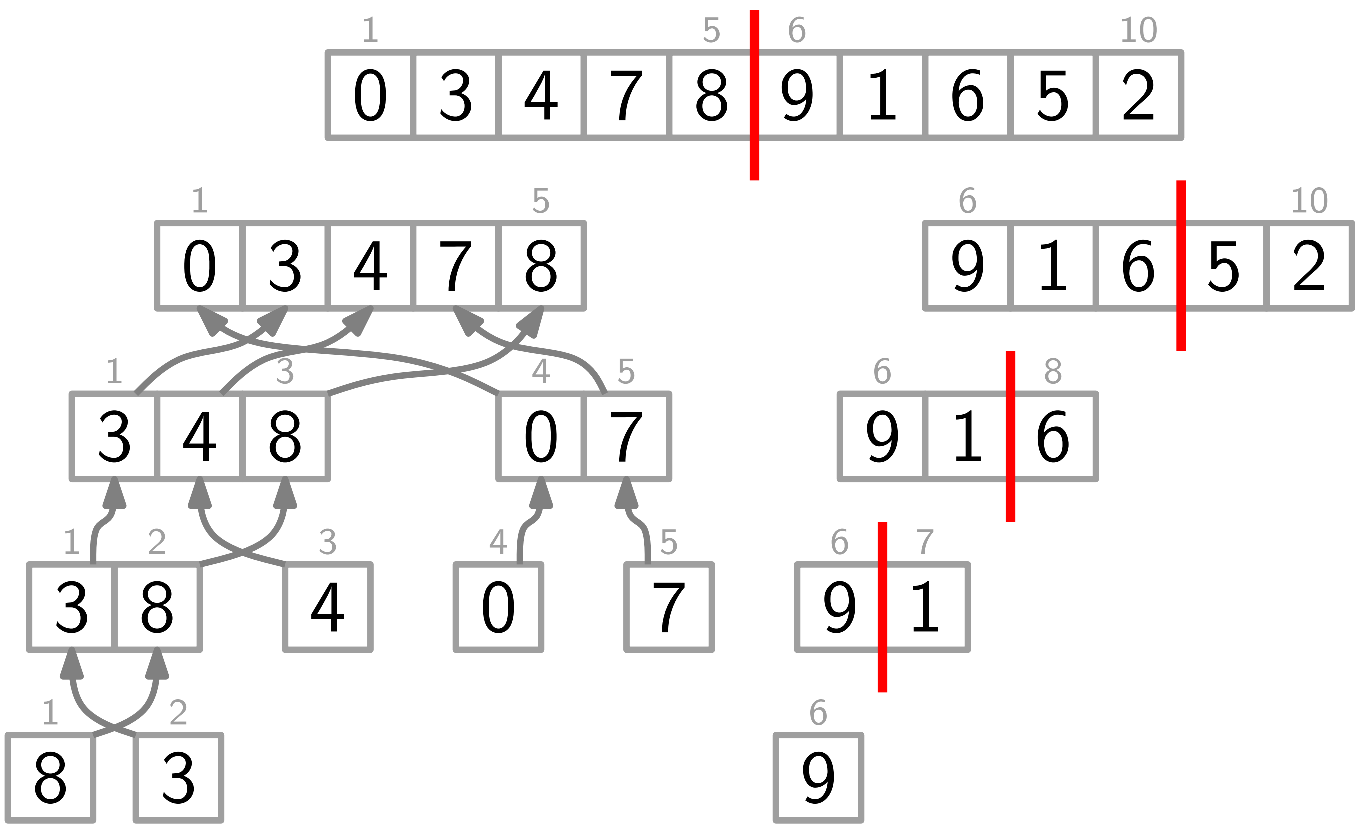
if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
$m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
MergeSort(A, ℓ, m)
MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

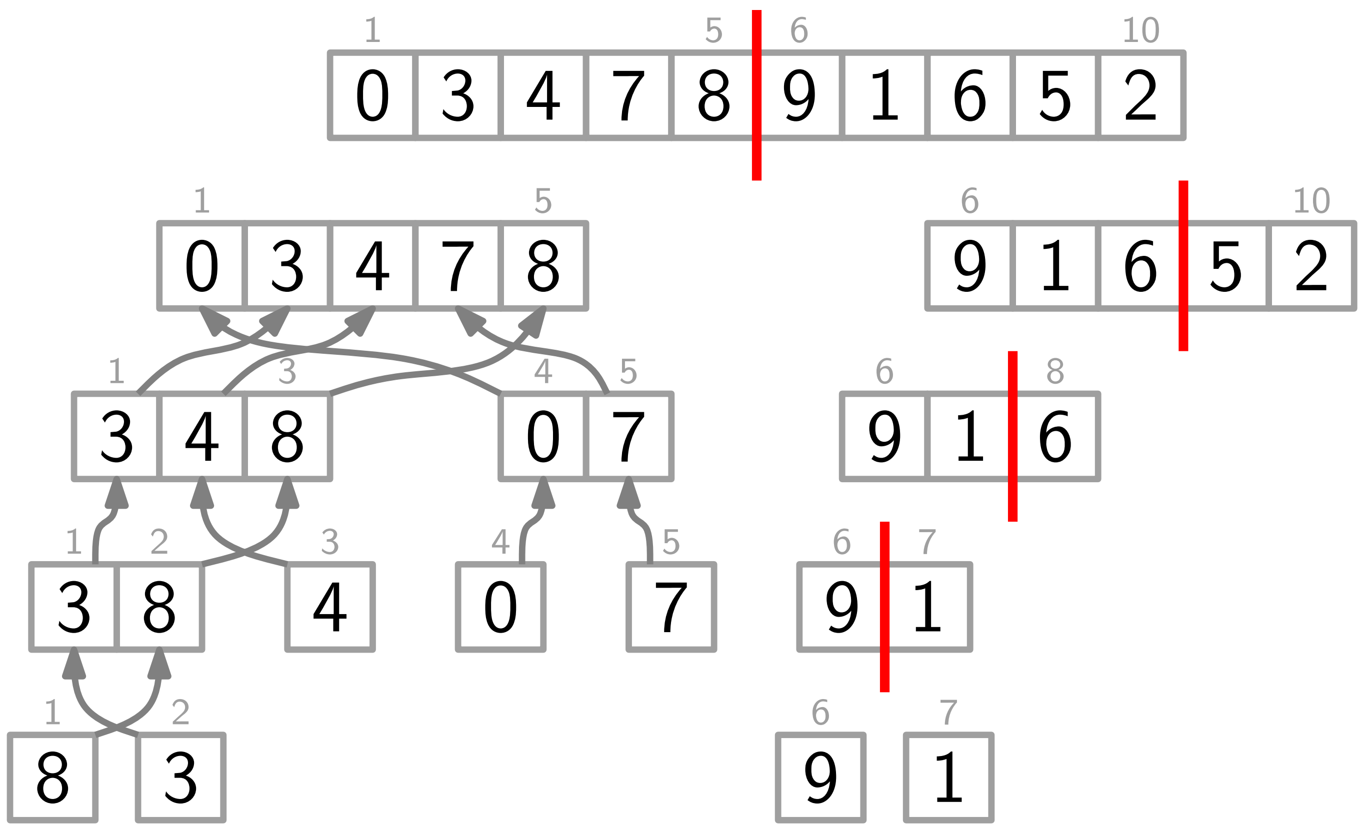


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

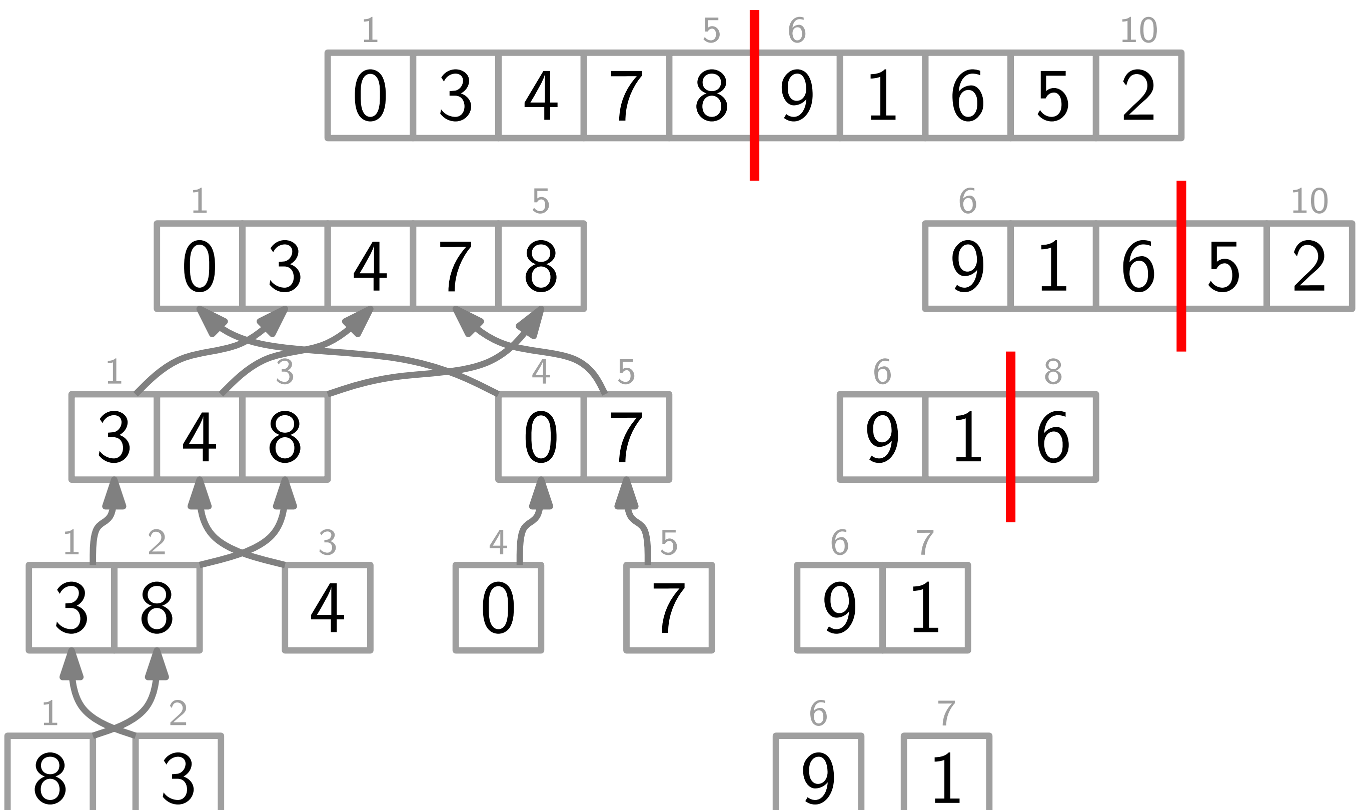
if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m) } herrsche
- MergeSort($A, m + 1, r$)
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



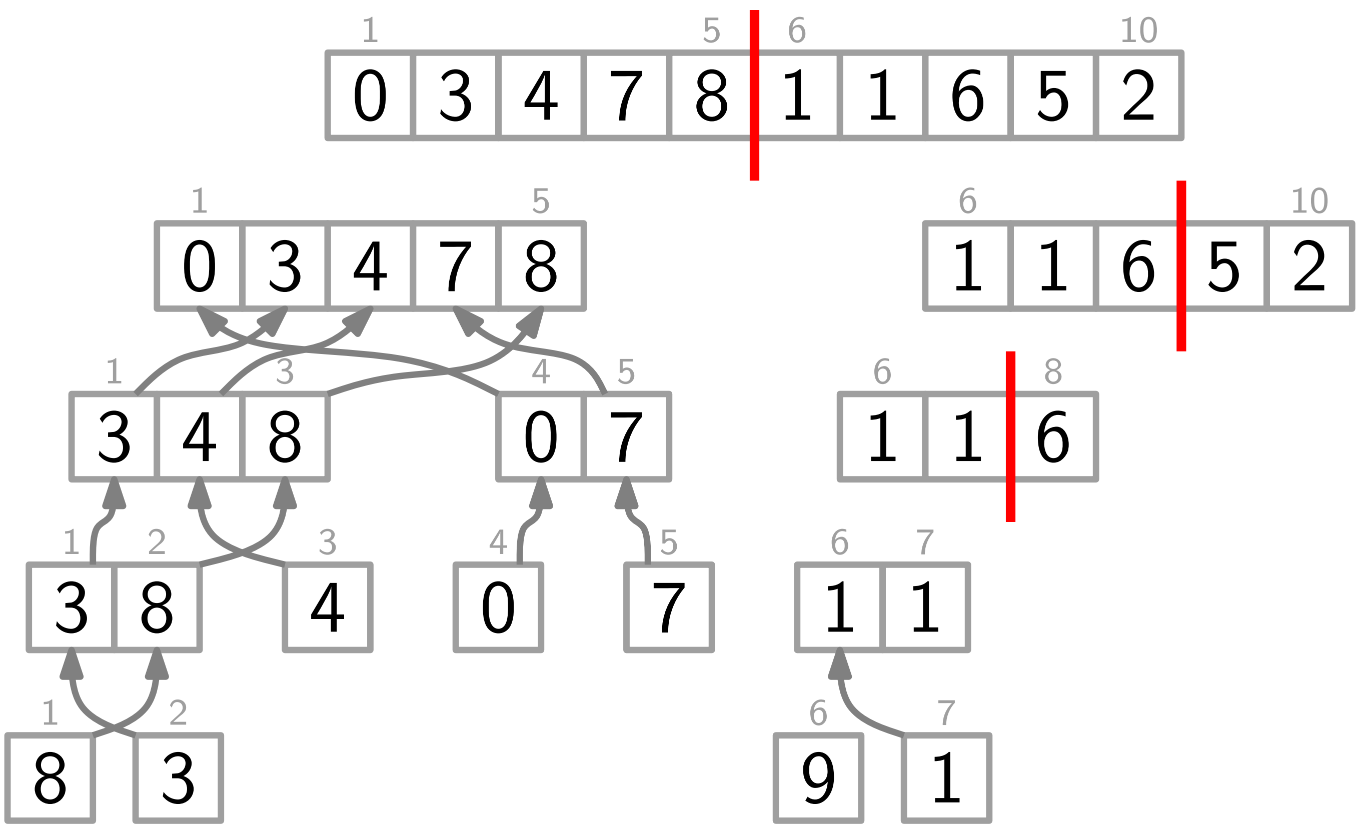
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m) } herrsche
    MergeSort($A, m + 1, r$)
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

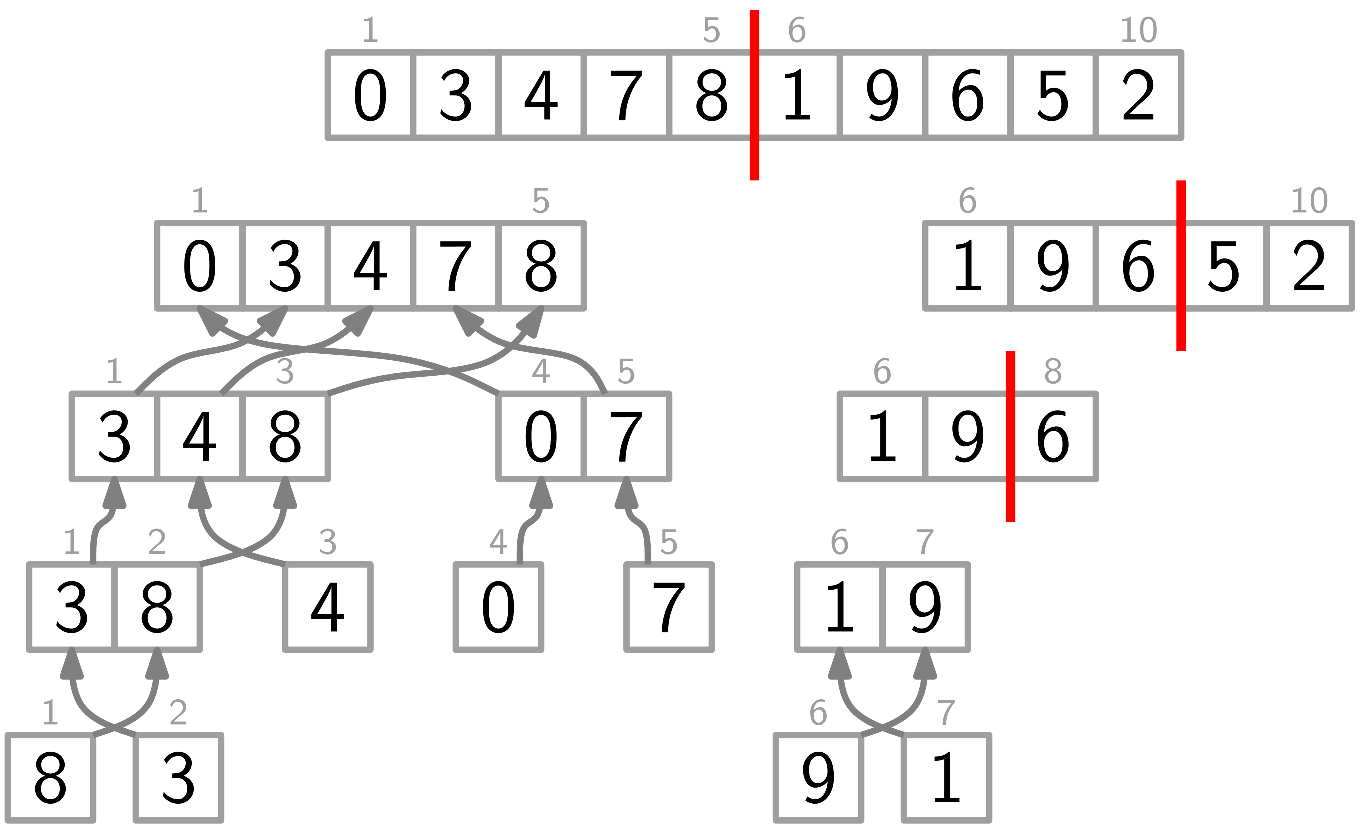


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.\mathit{length}$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

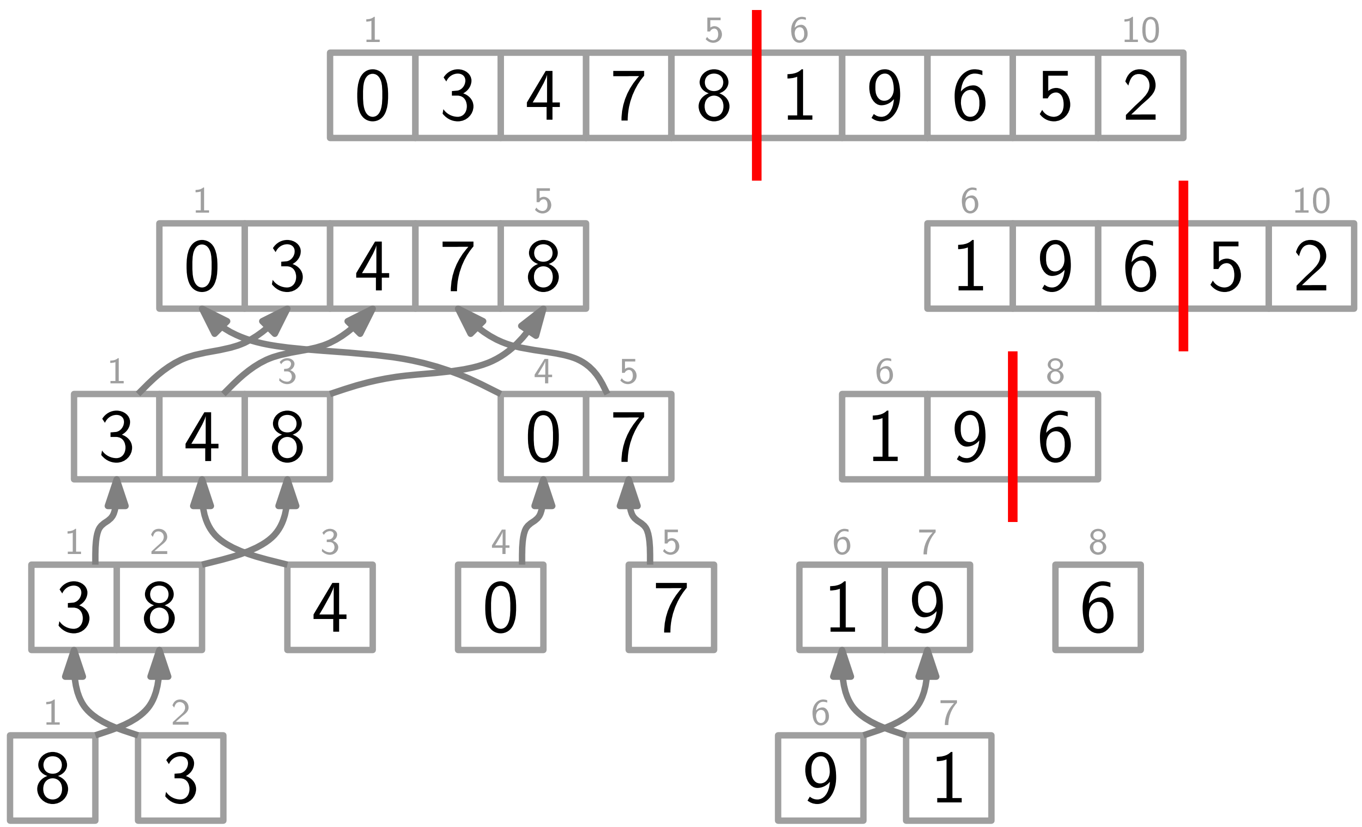
if $\ell < r$ **then**

$m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile

MergeSort(A, ℓ, m)

MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche

Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

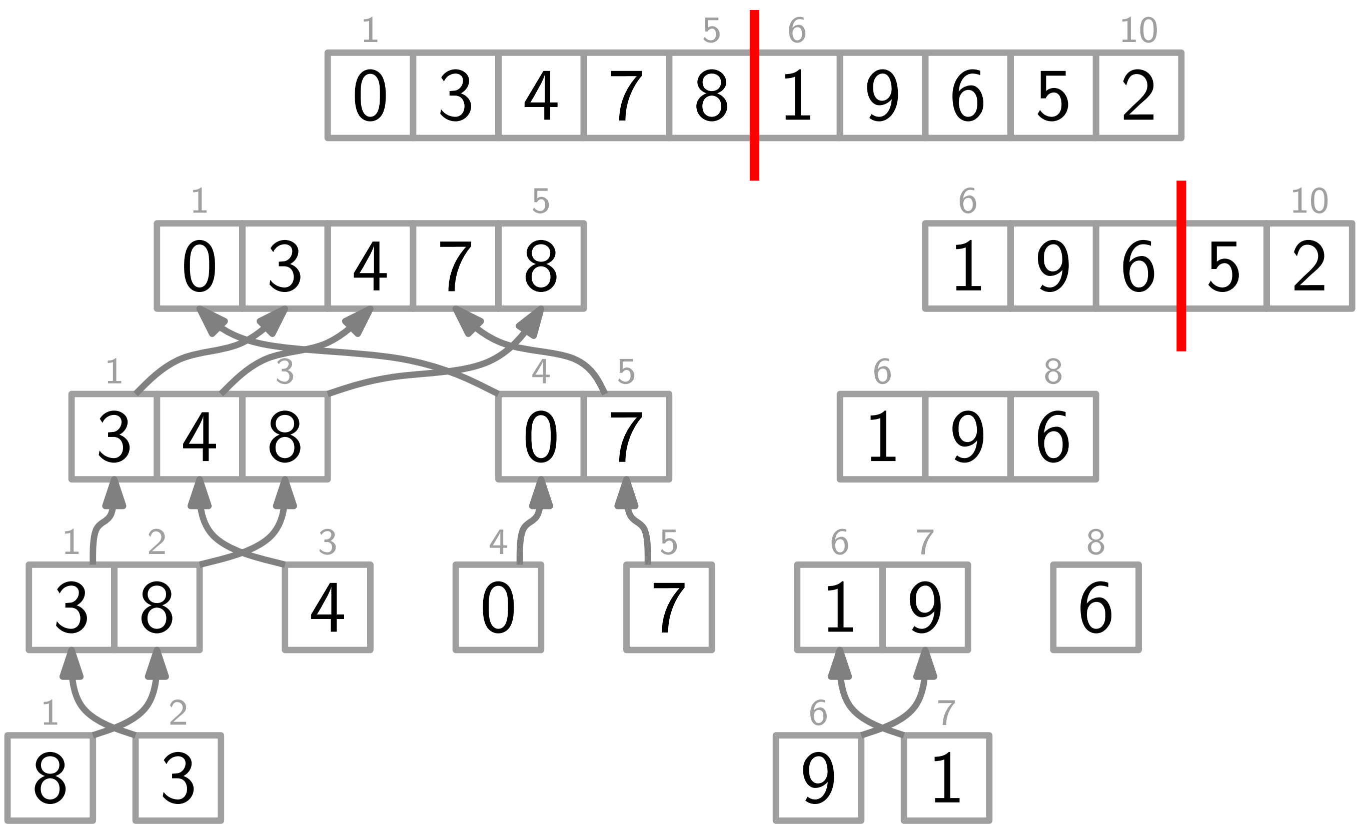


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

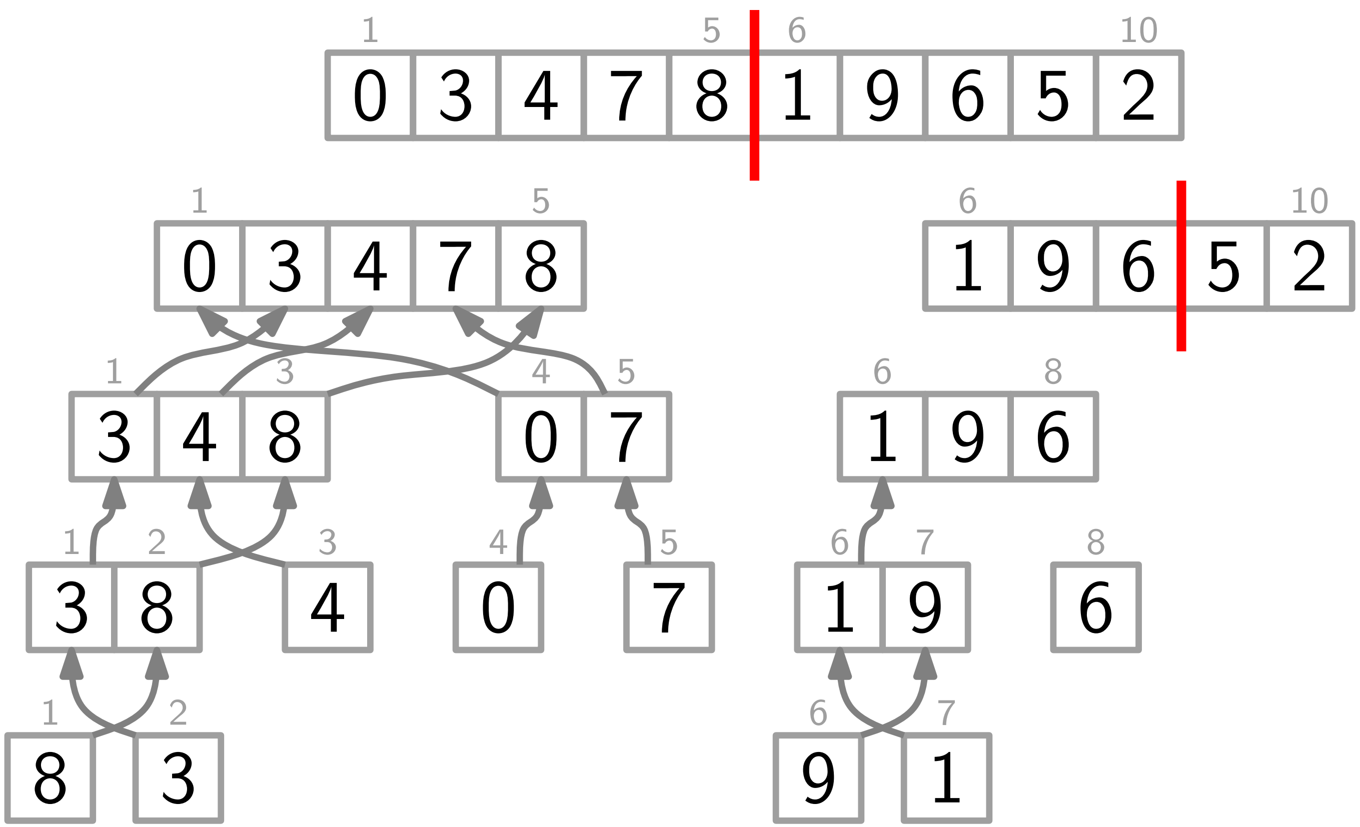
if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m) } herrsche
- MergeSort($A, m+1, r$)
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



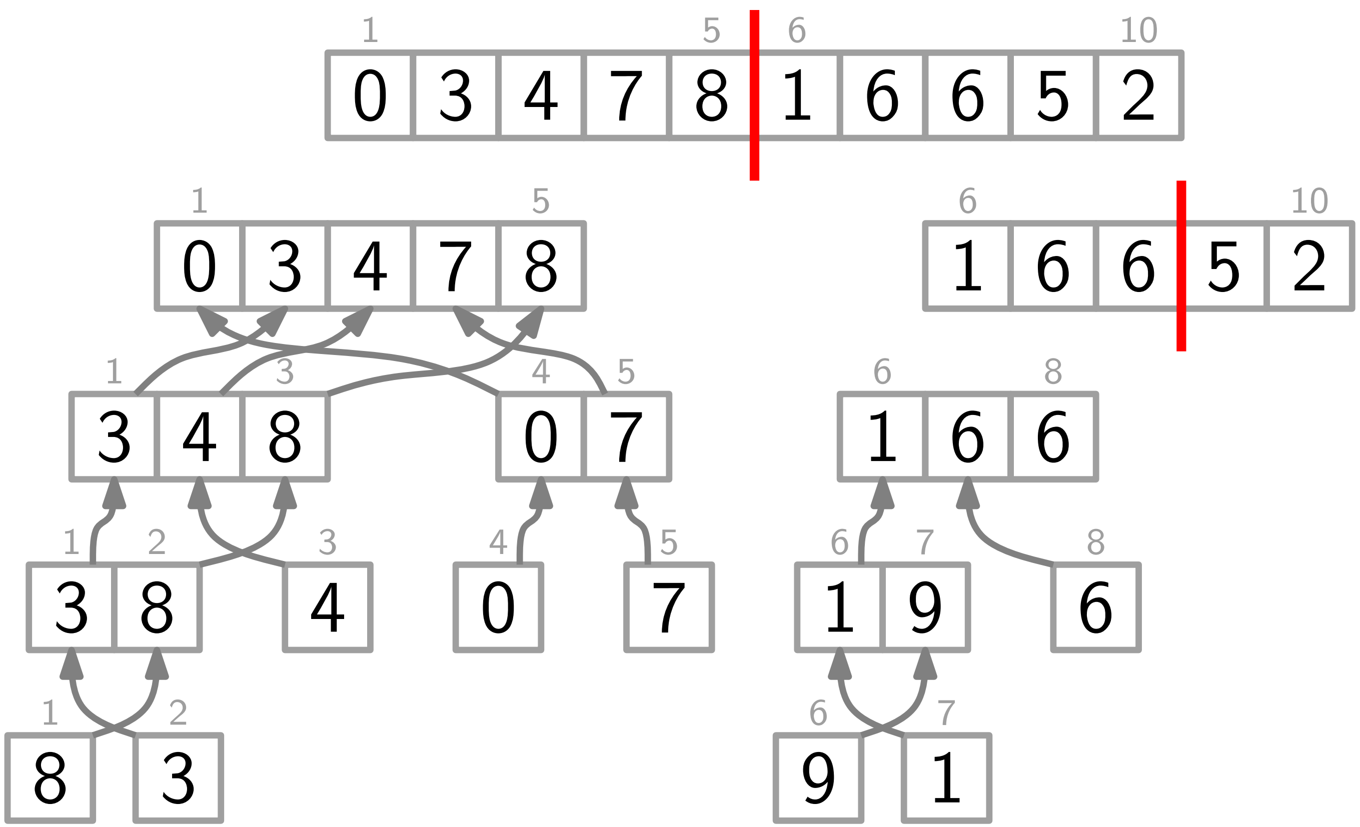
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
$m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
MergeSort(A, ℓ, m)
MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

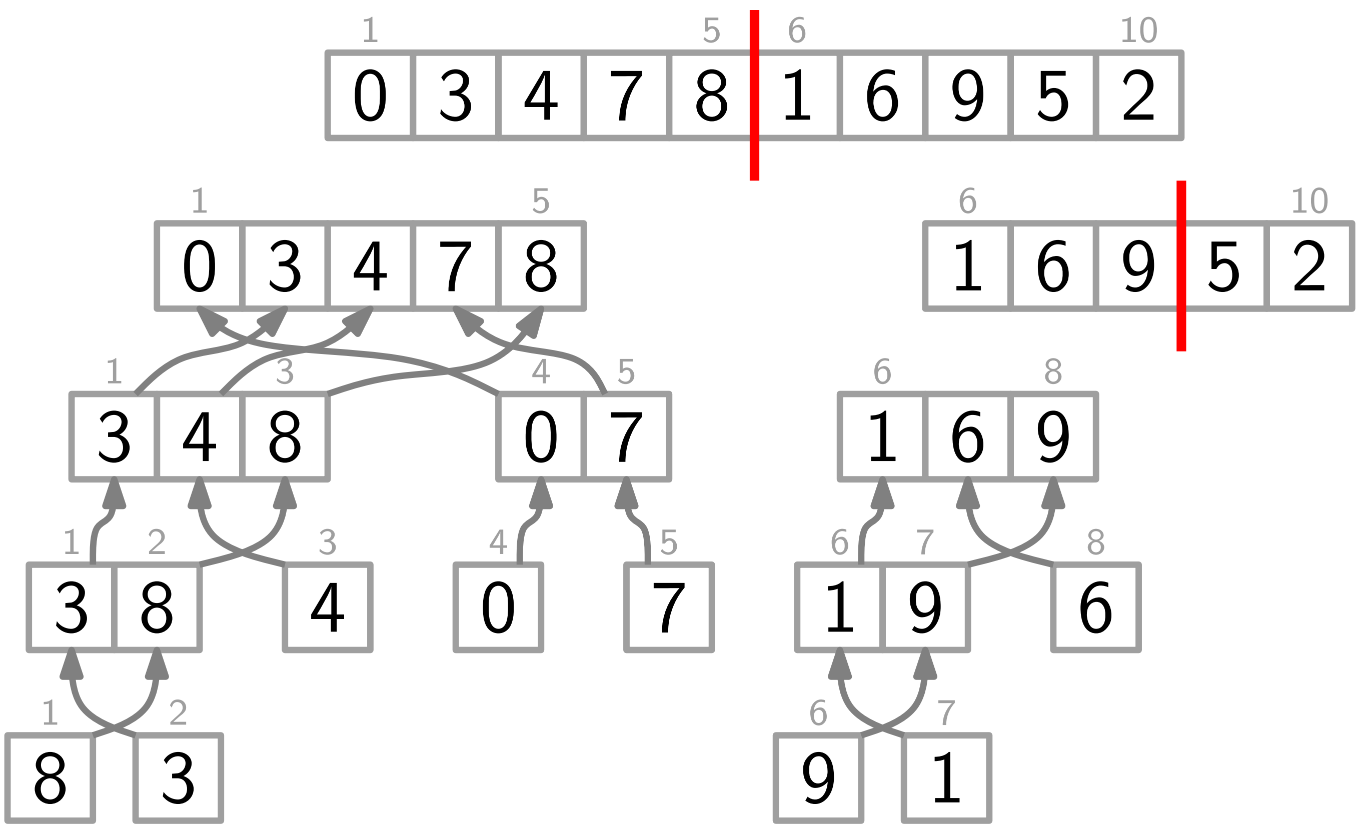


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

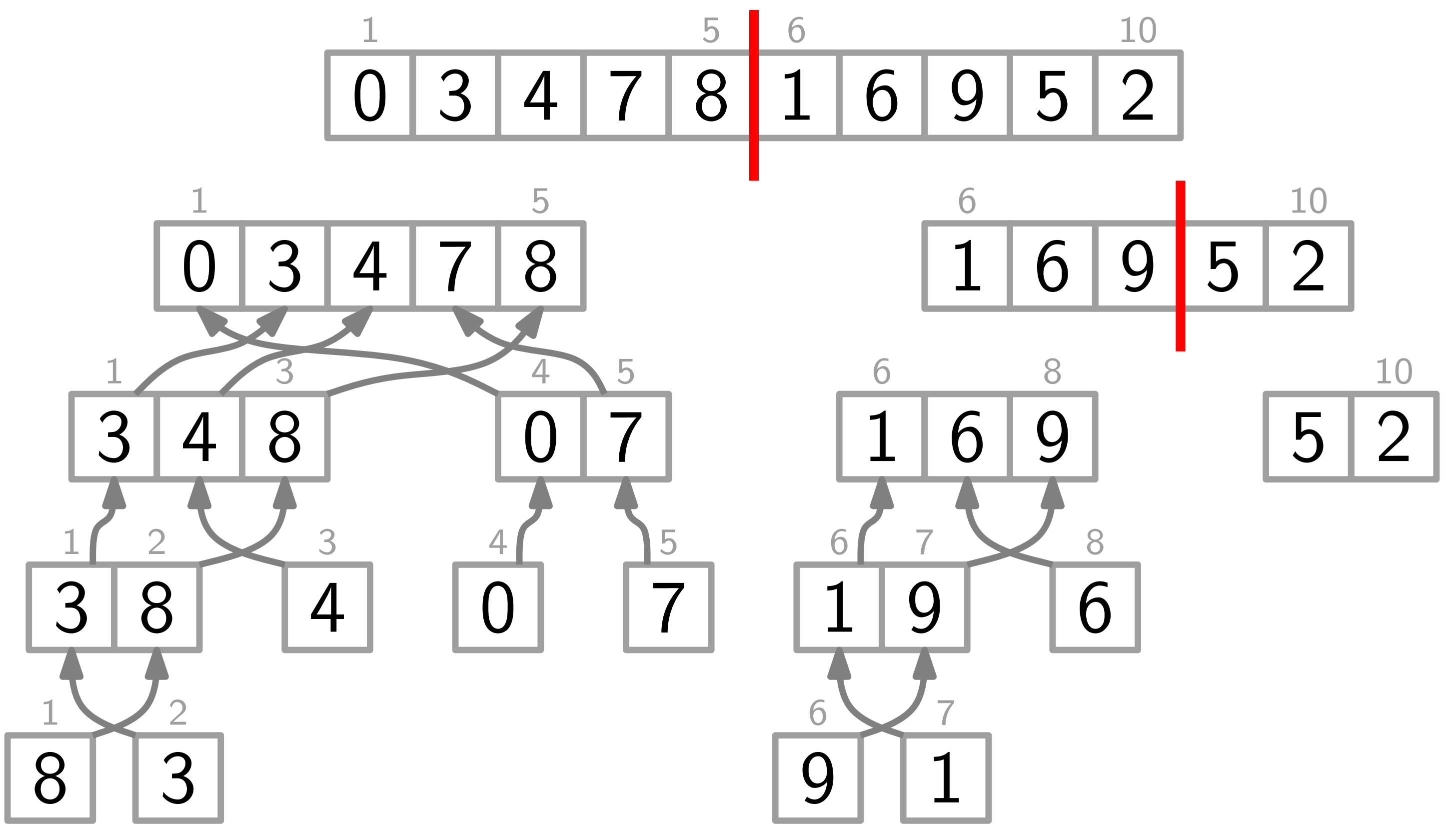
if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



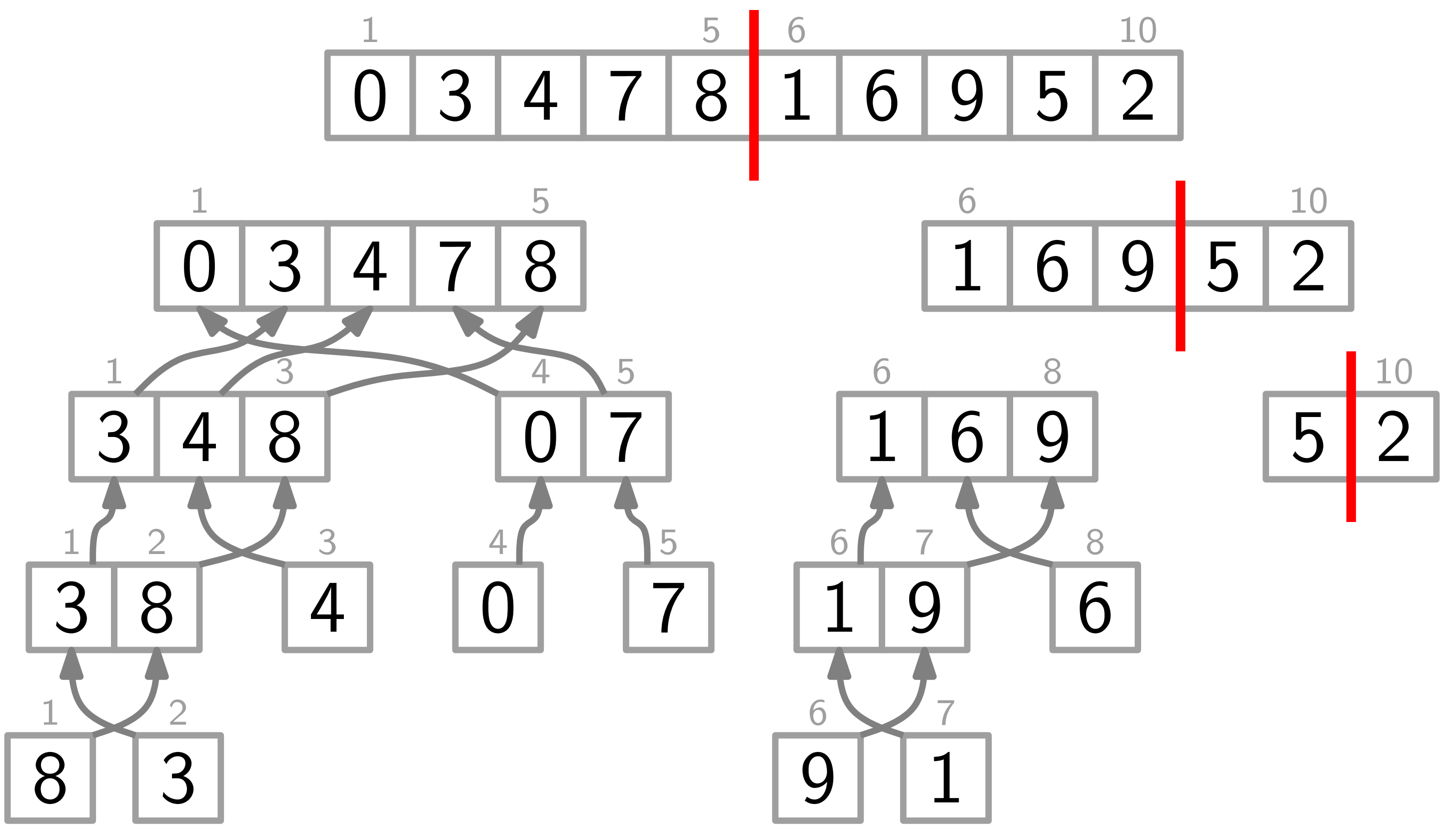
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m) } herrsche
    MergeSort($A, m + 1, r$)
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

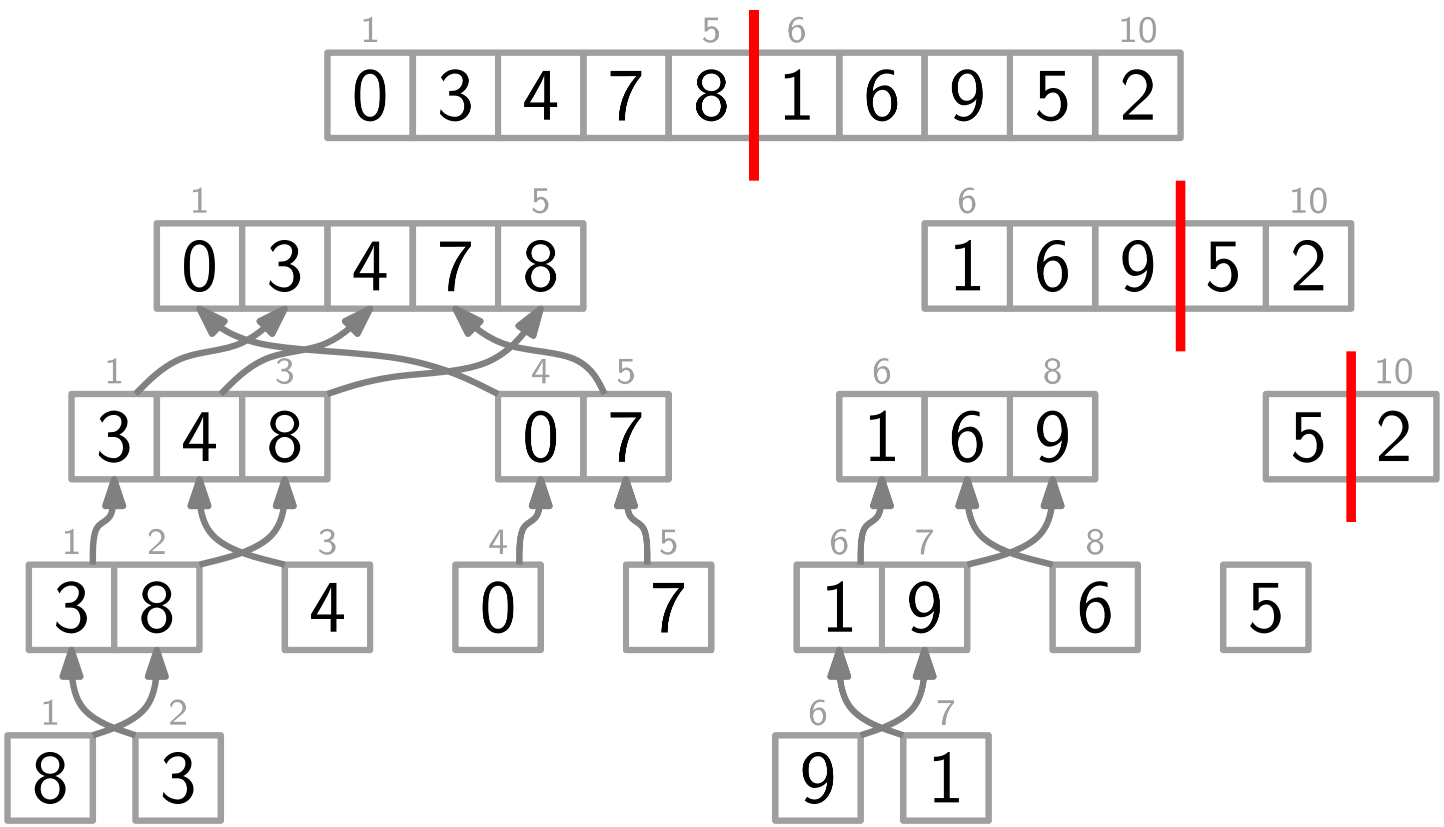


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

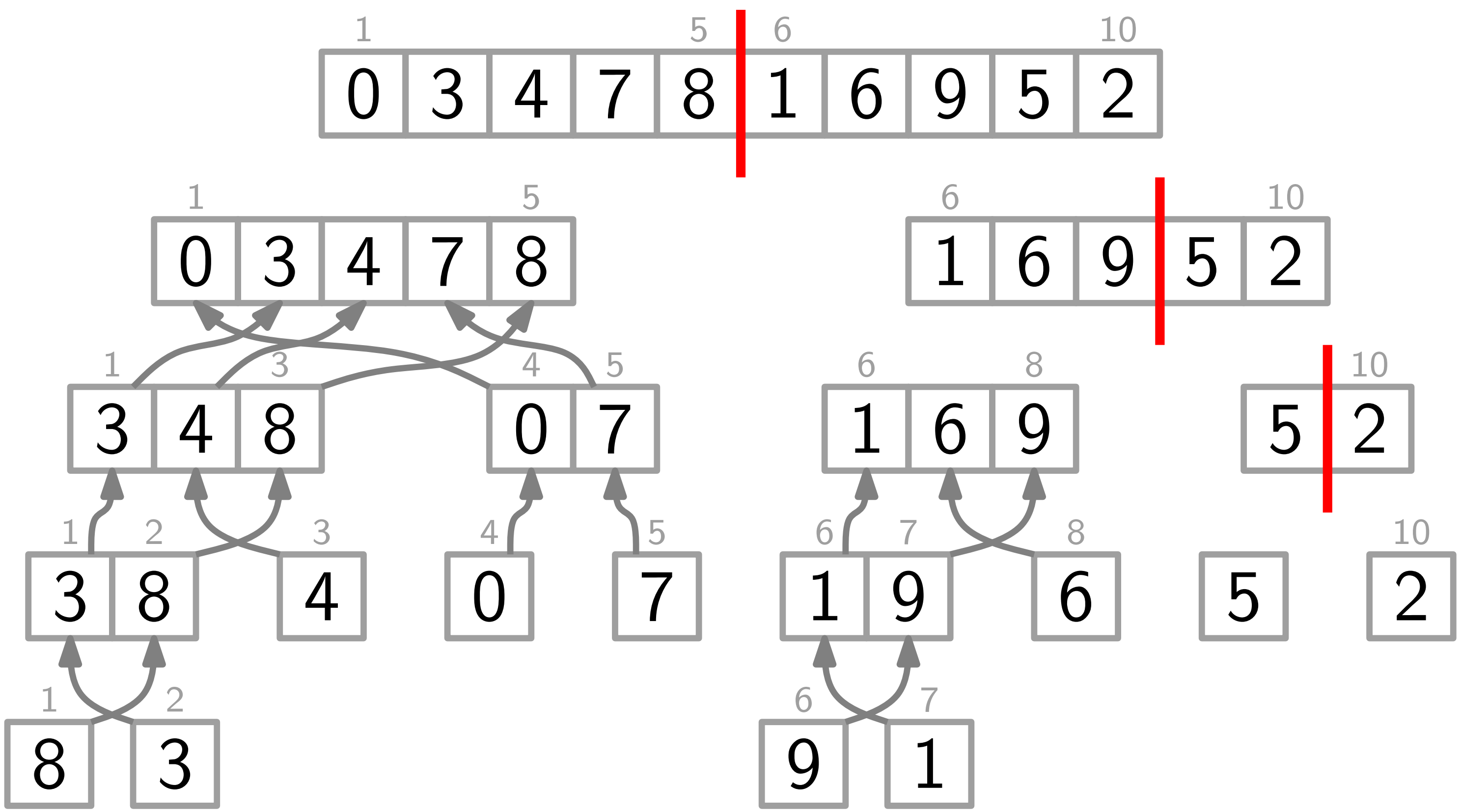
if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m) } herrsche
    MergeSort($A, m + 1, r$)
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

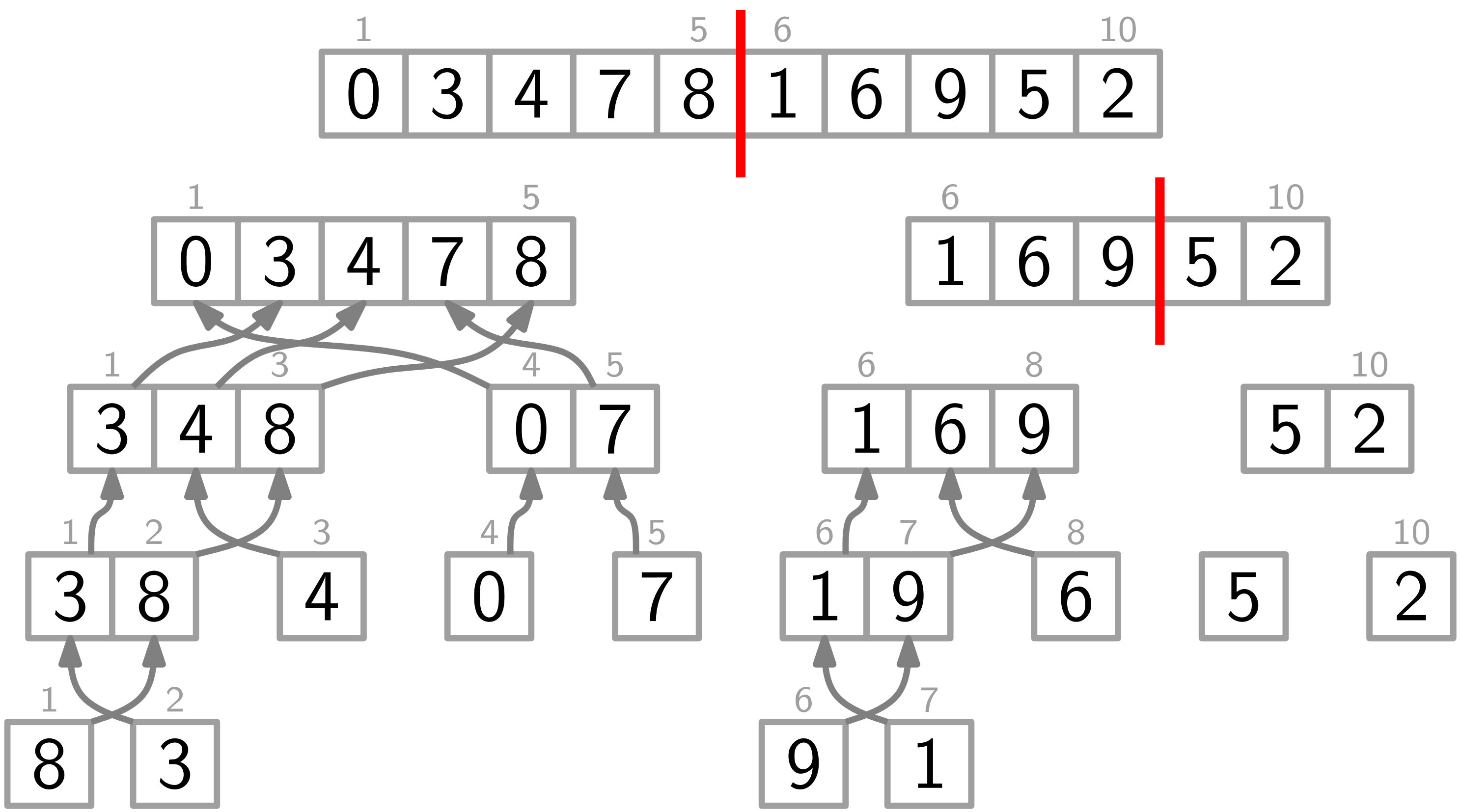
MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

$m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile

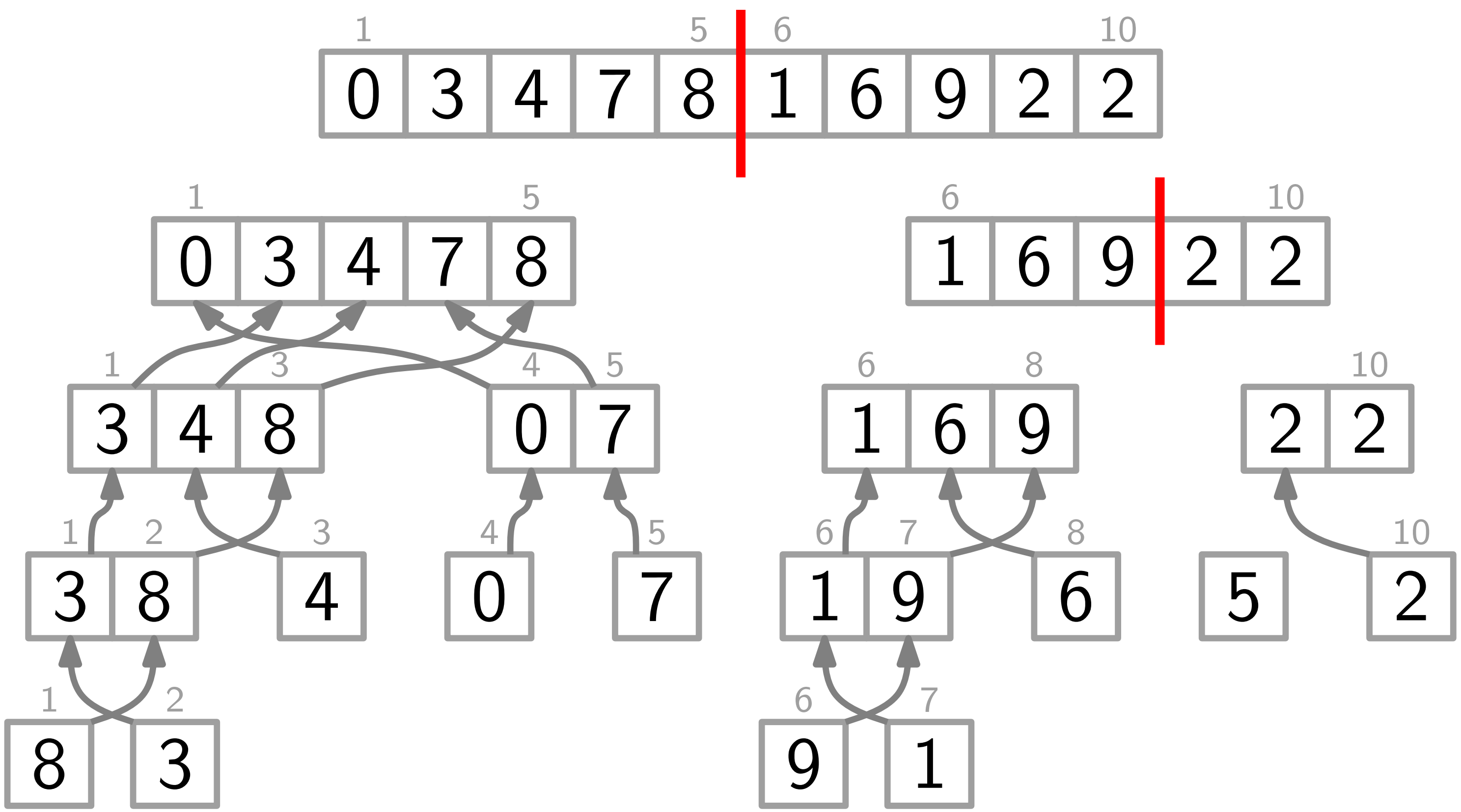
MergeSort(A, ℓ, m)
MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche

Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



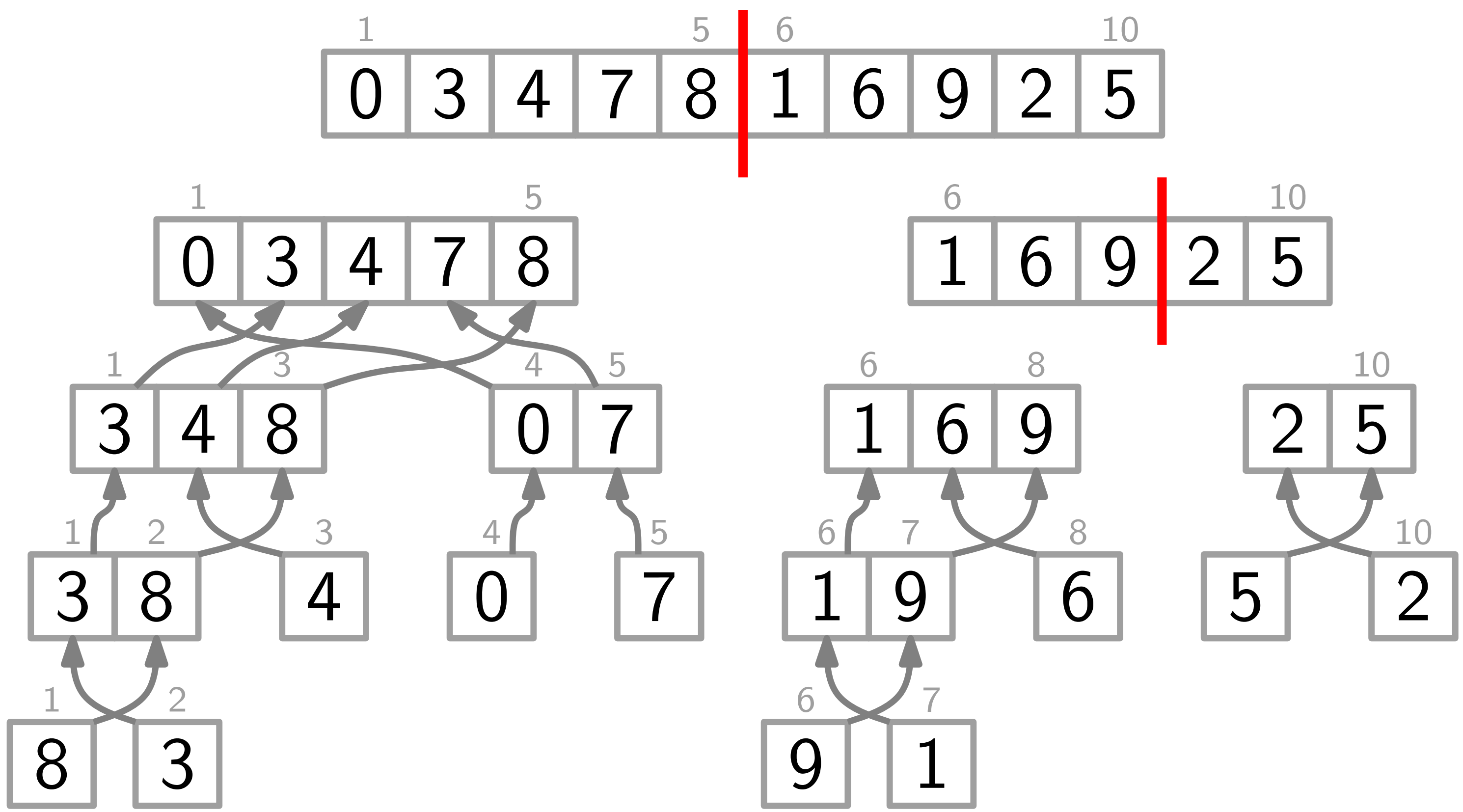
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



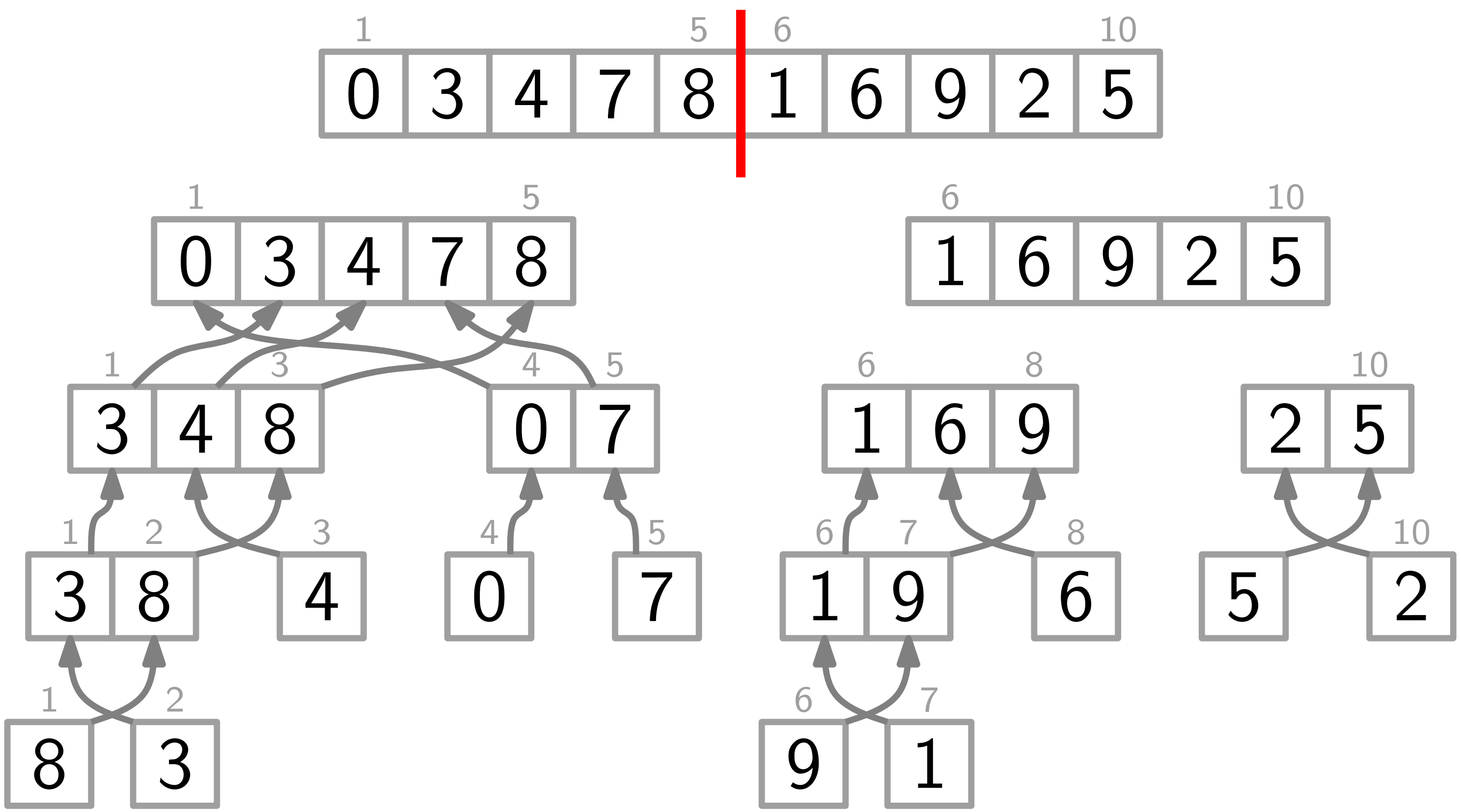
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

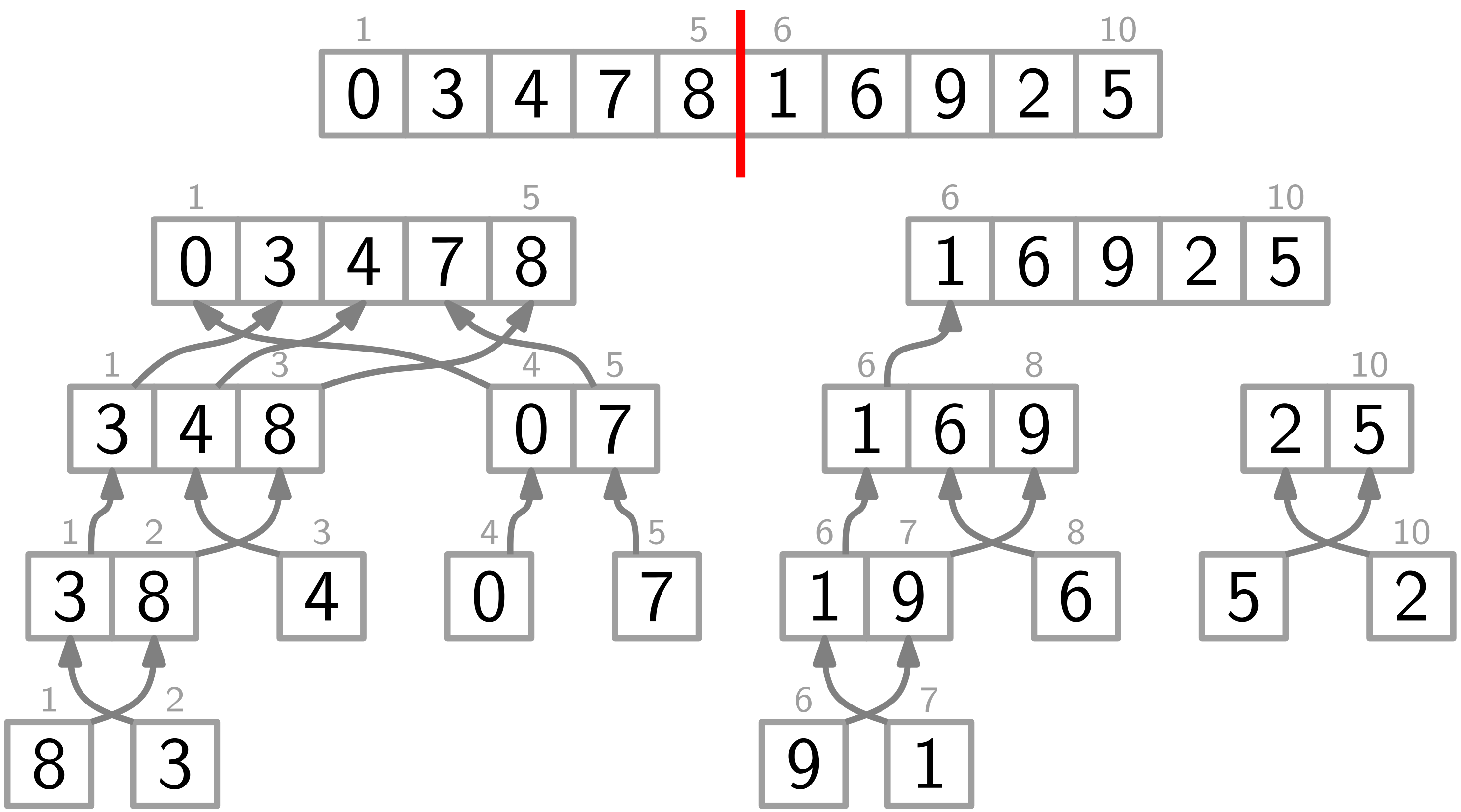
MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

$m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile

MergeSort(A, ℓ, m)
MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche

Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

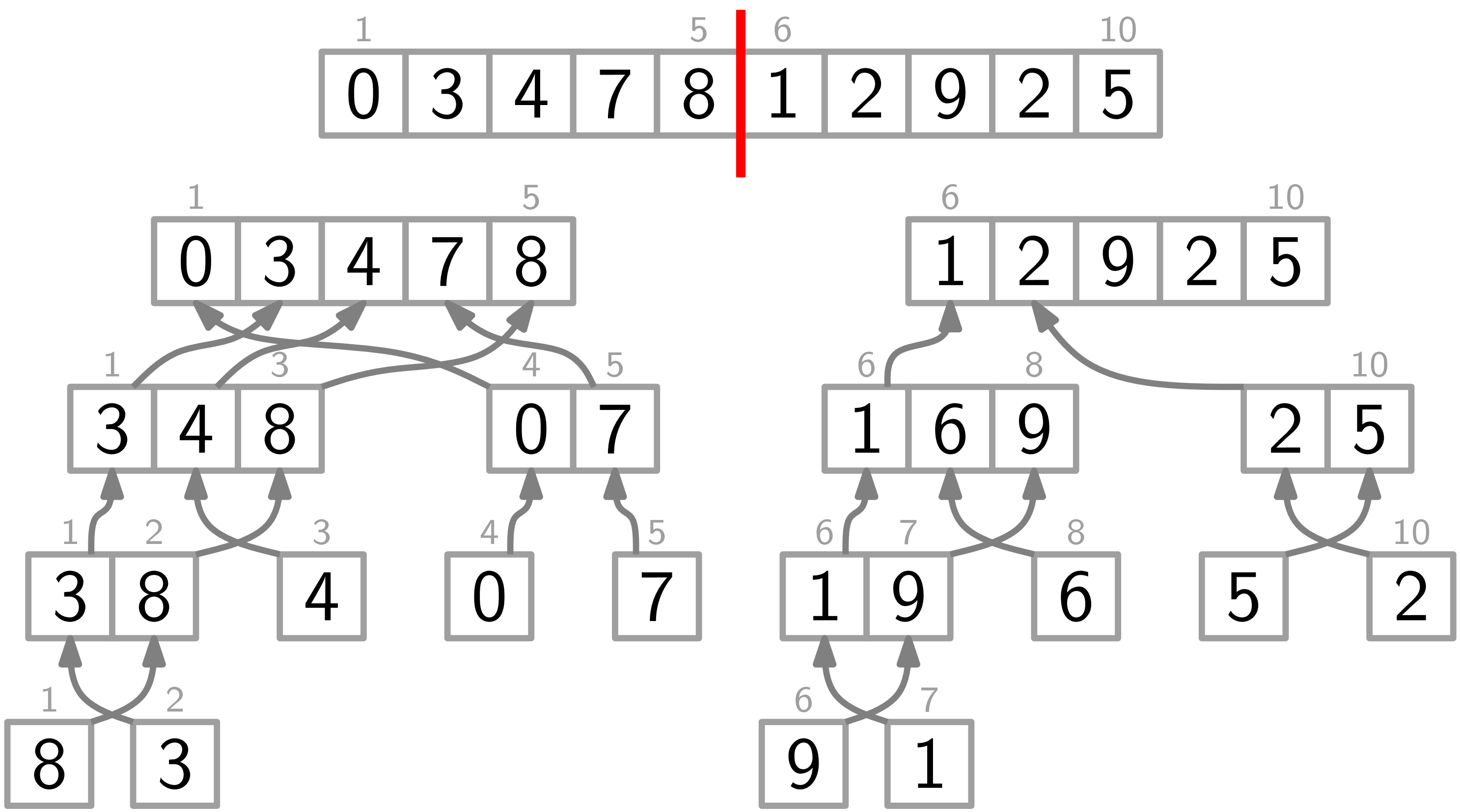


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

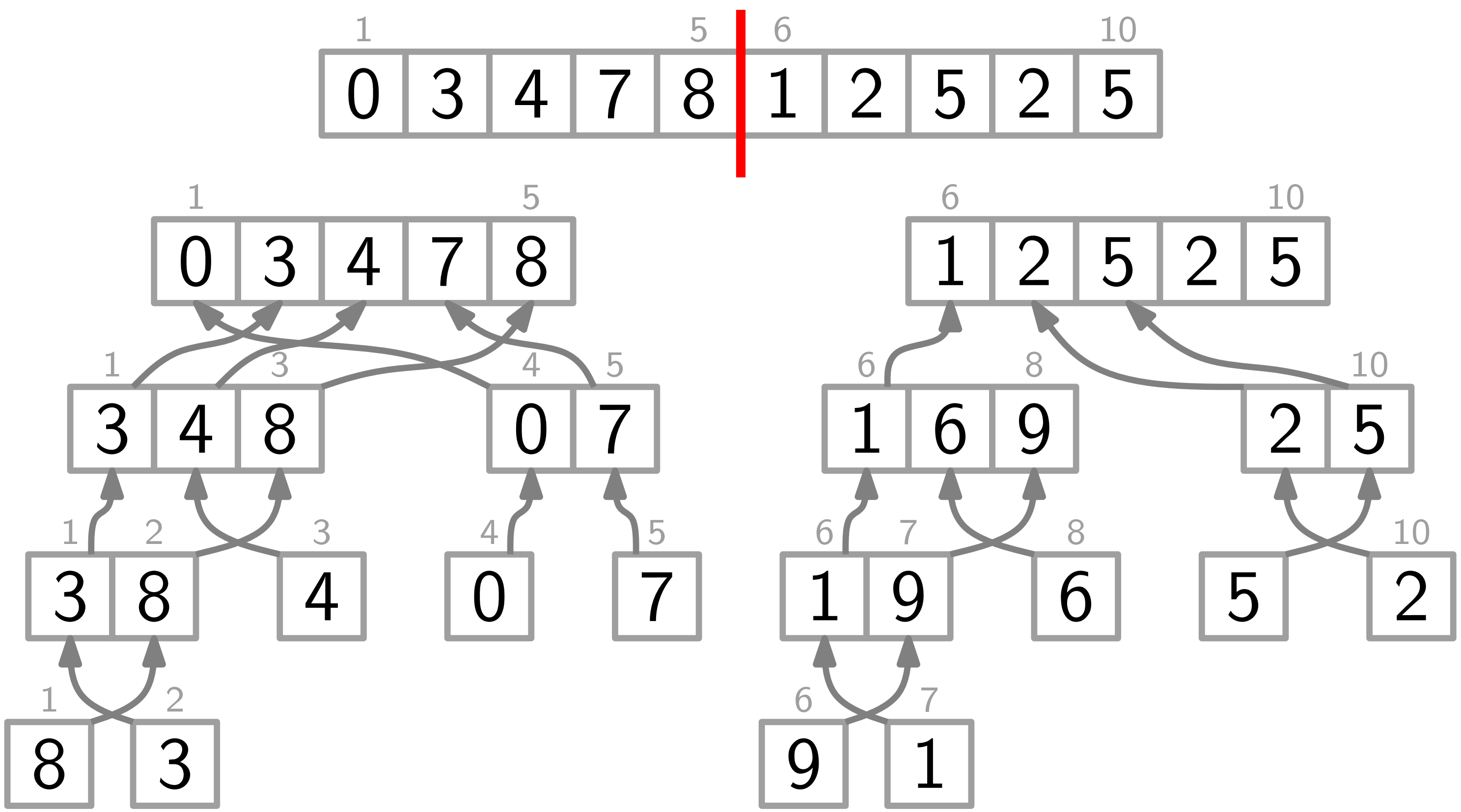
if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m) } herrsche
- MergeSort($A, m + 1, r$)
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



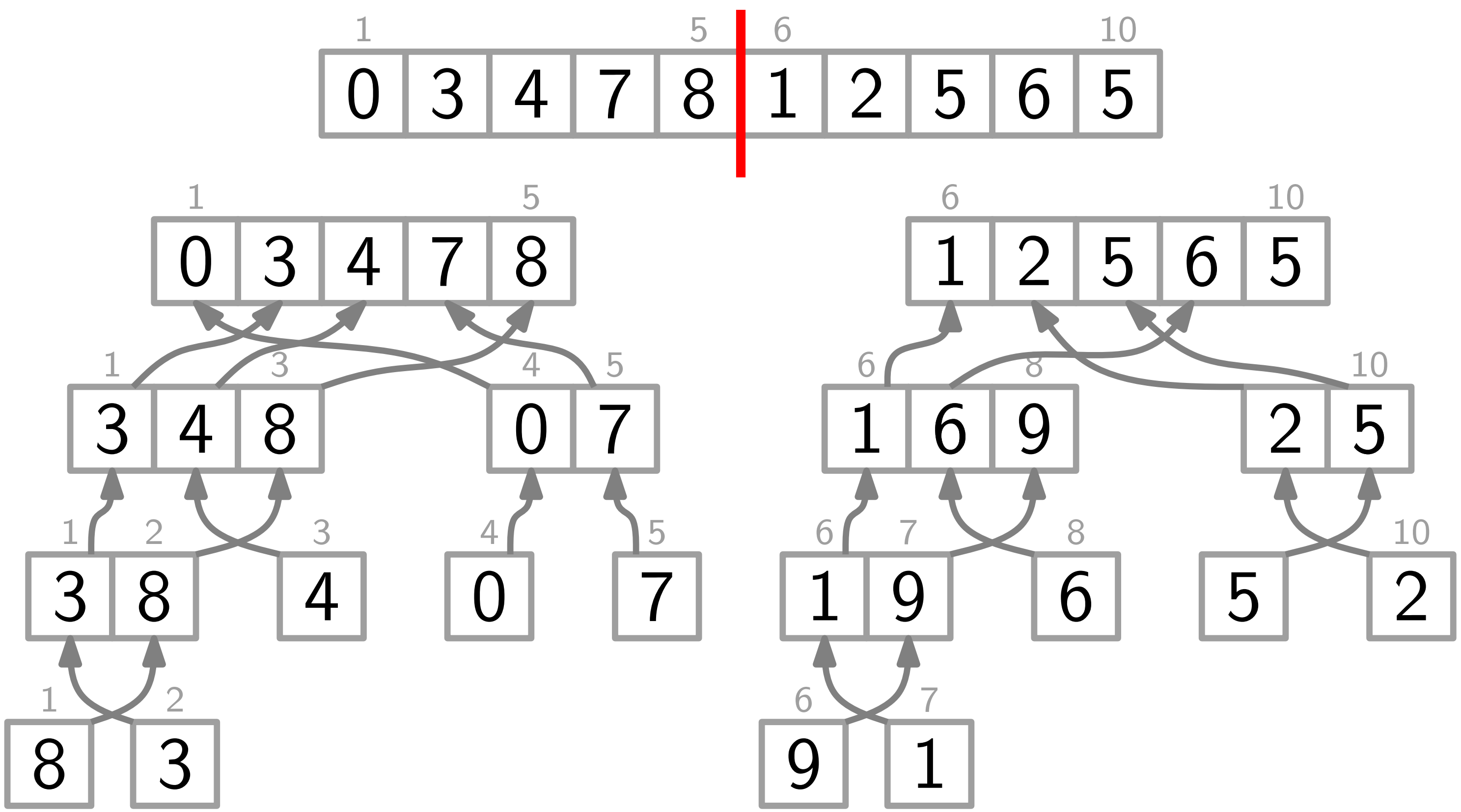
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
 if $\ell < r$ **then**
 $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
 MergeSort(A, ℓ, m) } herrsche
 MergeSort($A, m+1, r$)
 Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
- $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

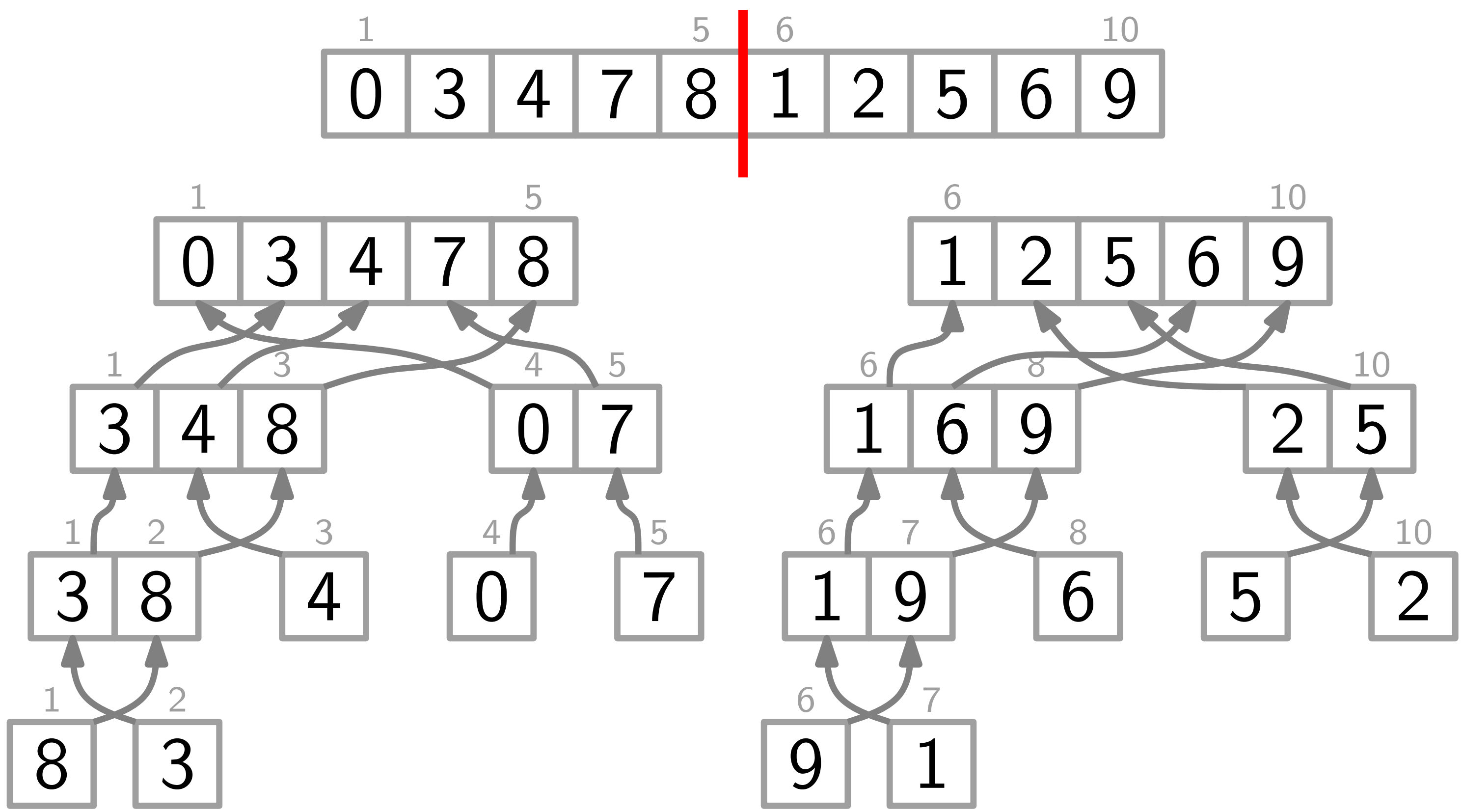


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

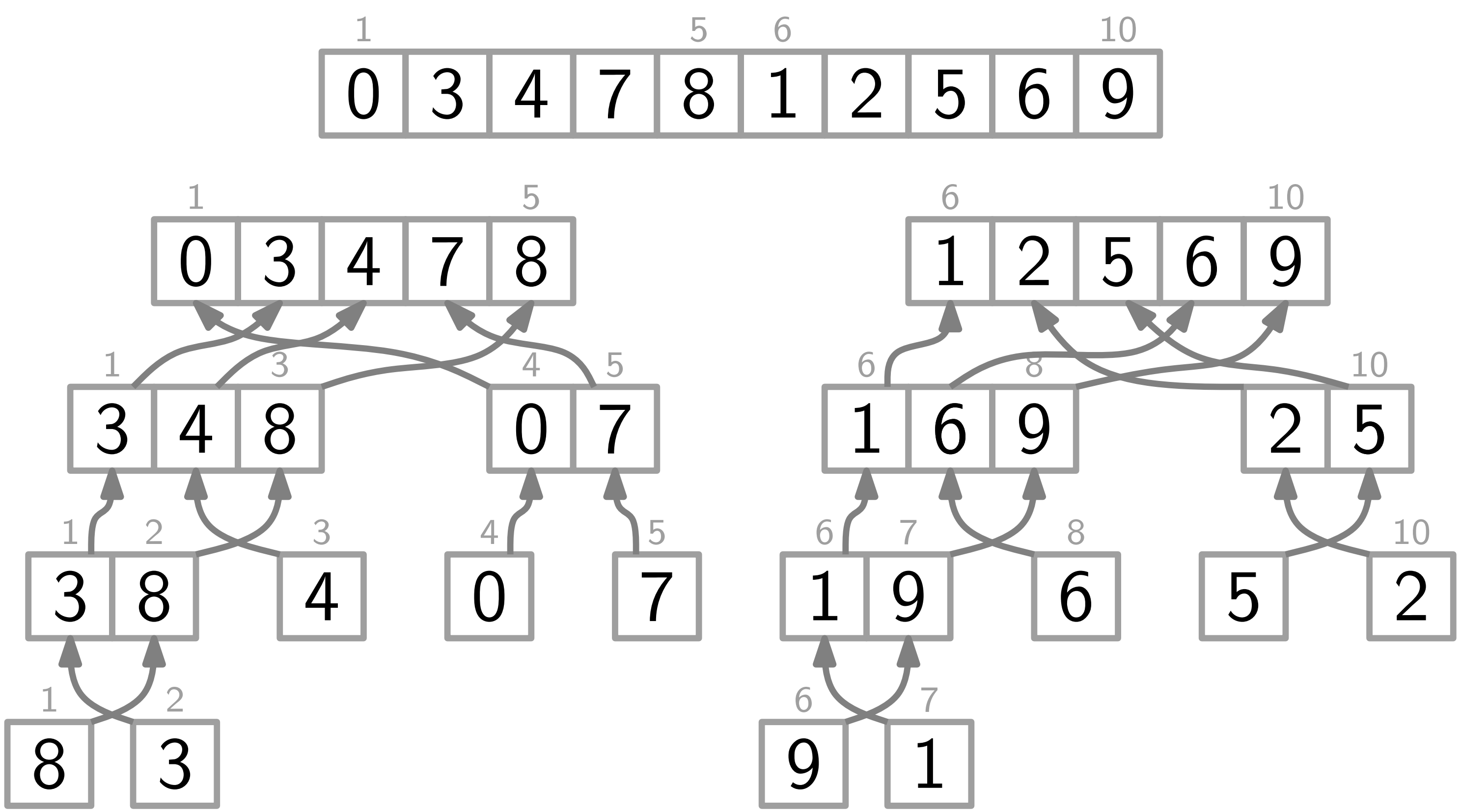
if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

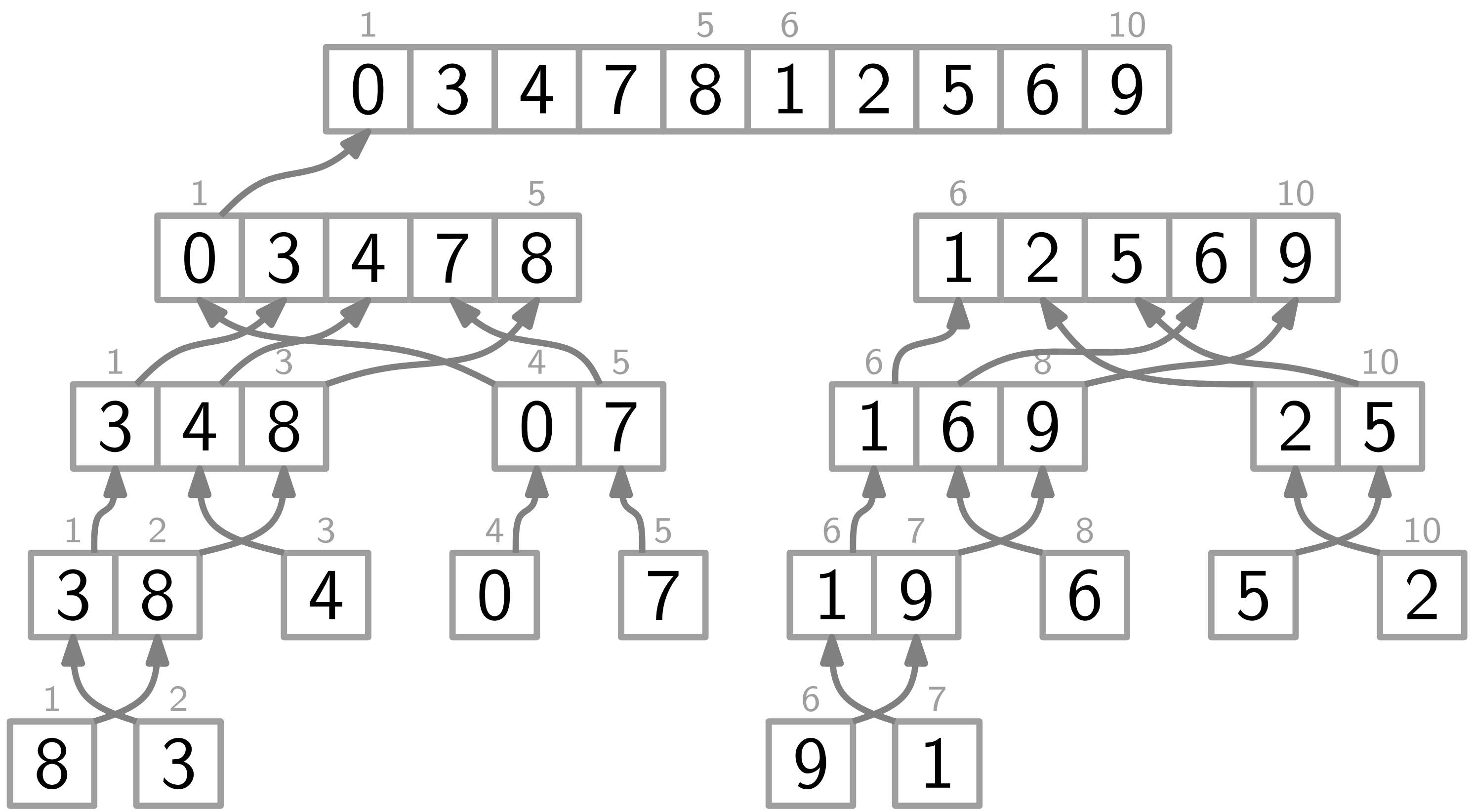
if $\ell < r$ **then**

$m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile

MergeSort(A, ℓ, m)

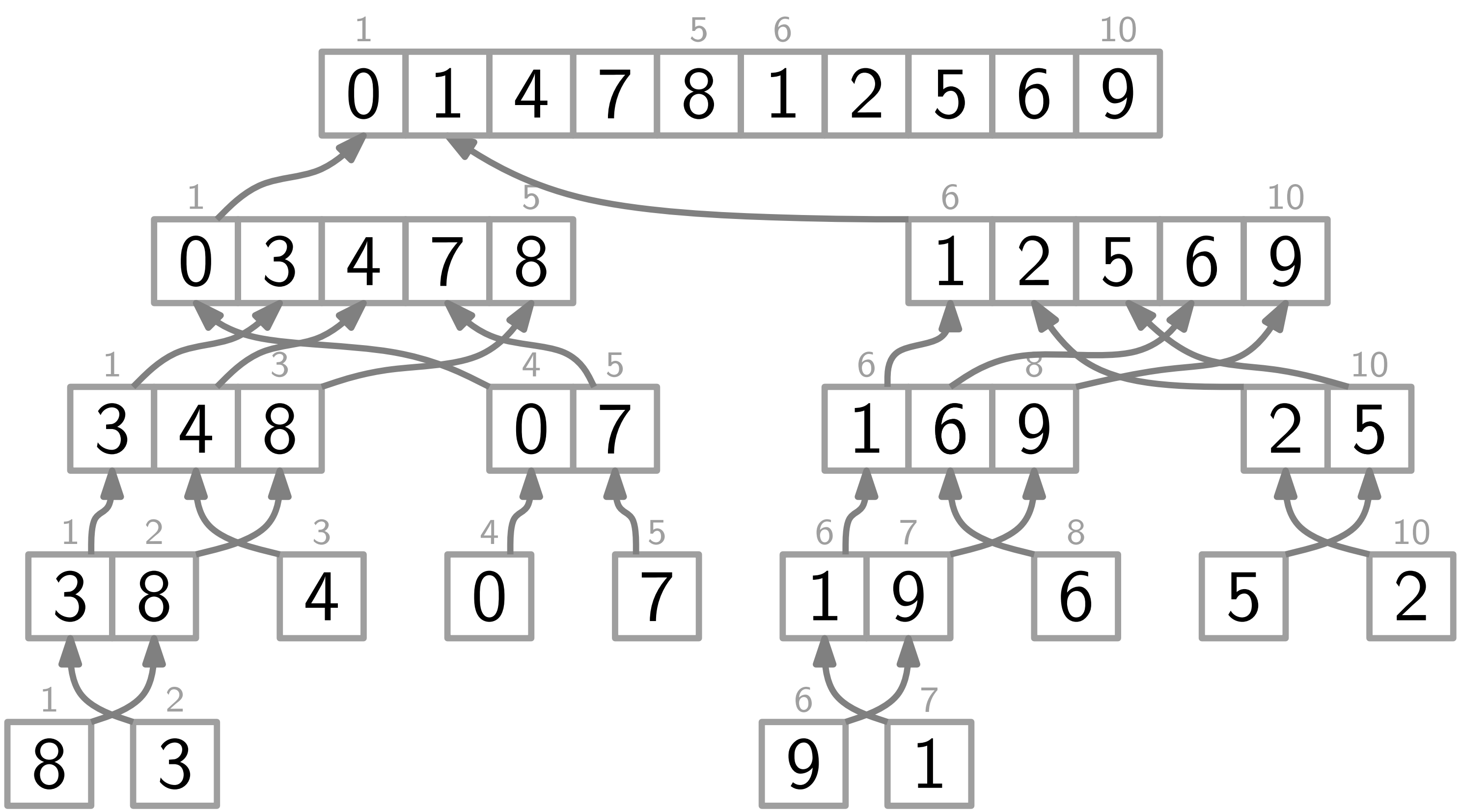
MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche

Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

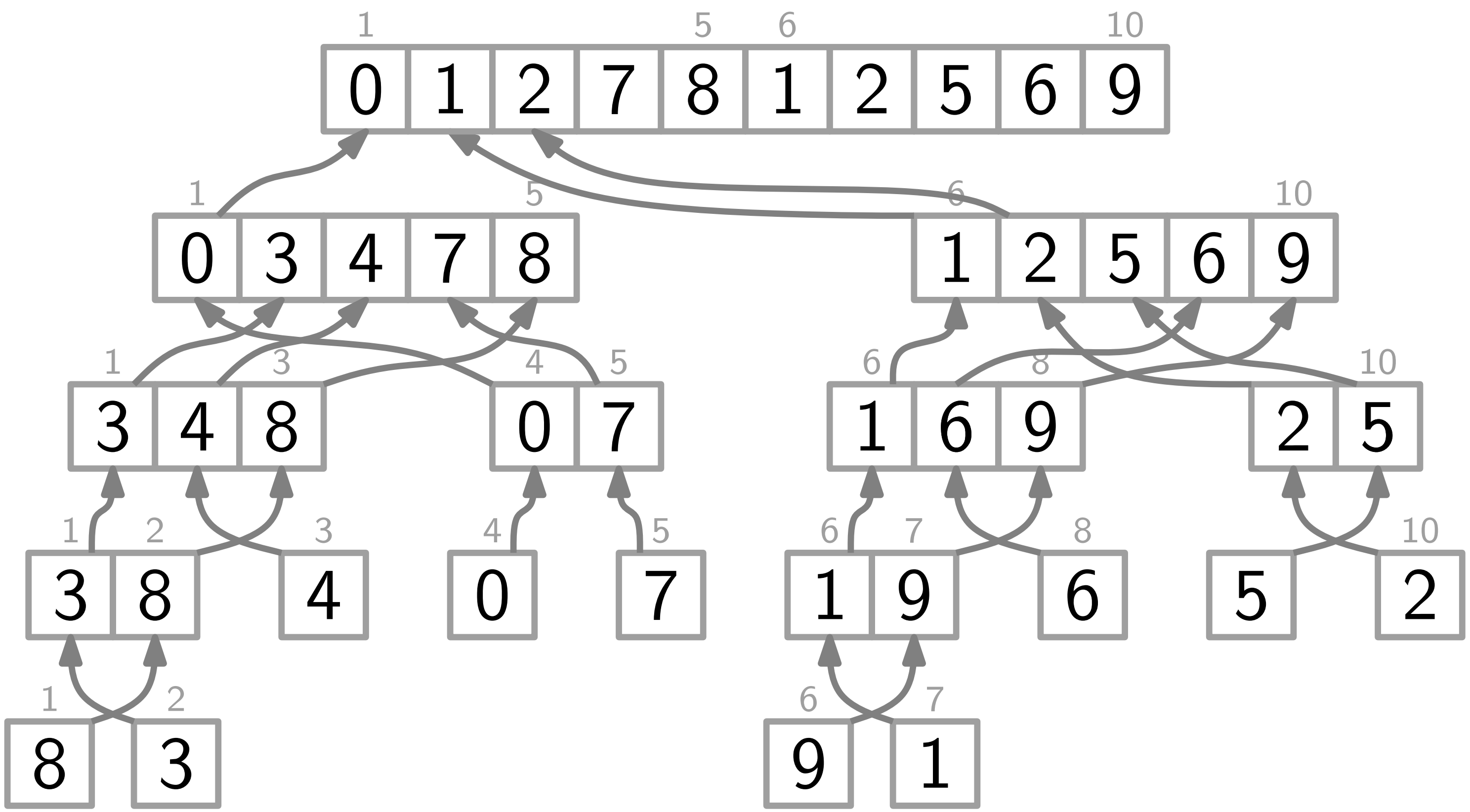
MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

$m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile

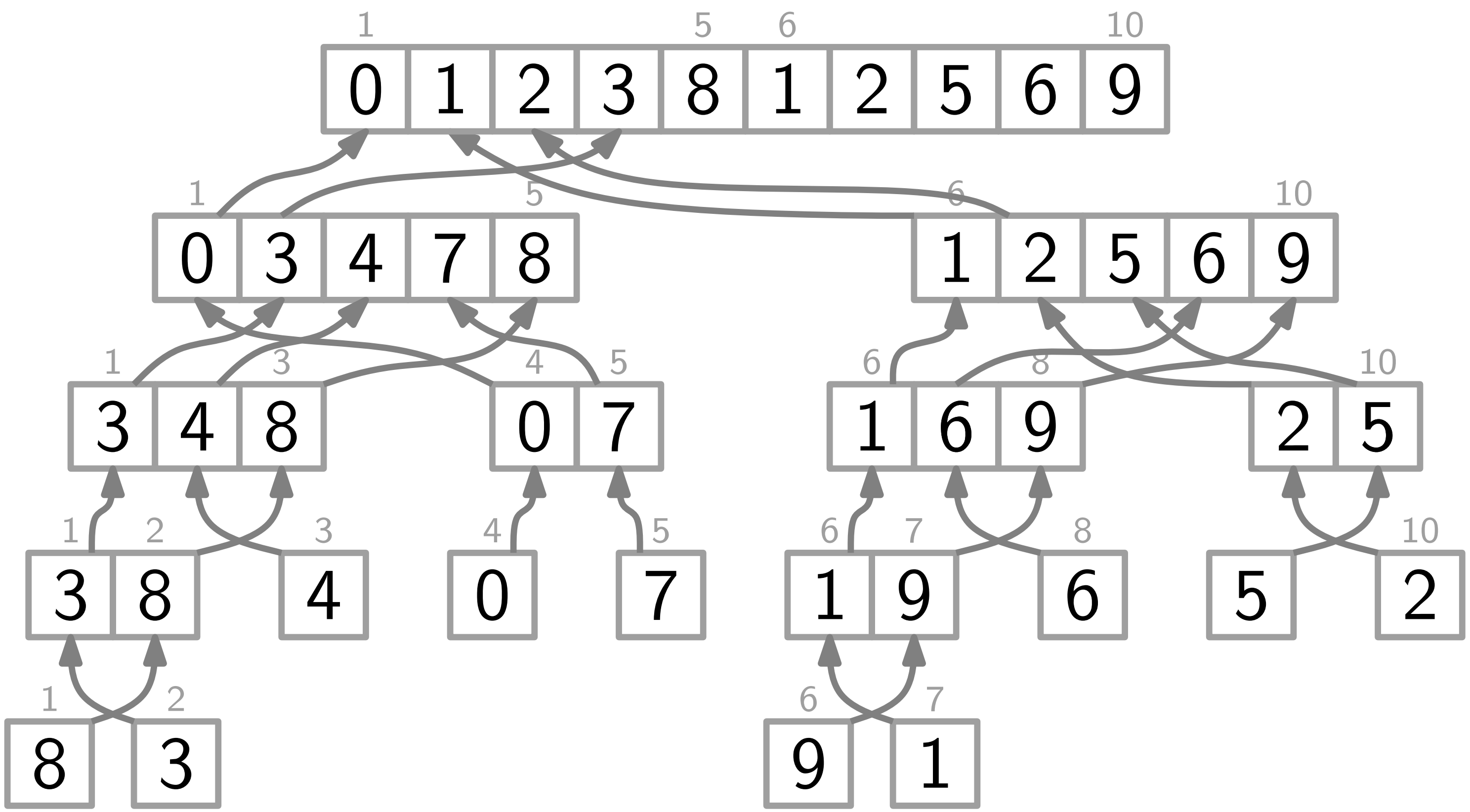
MergeSort(A, ℓ, m)
MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche

Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m) } herrsche
    MergeSort($A, m + 1, r$)
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

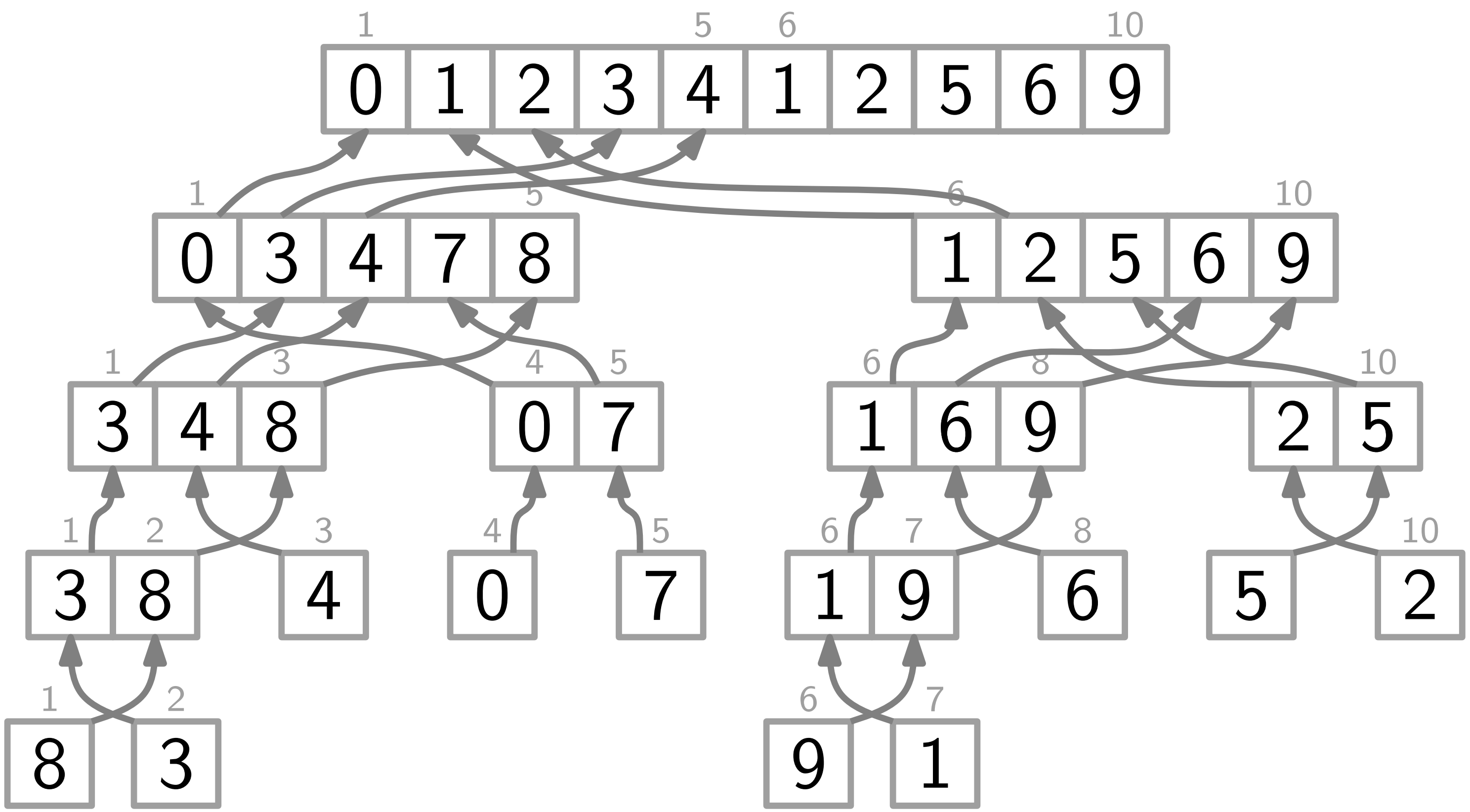


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.\mathit{length}$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

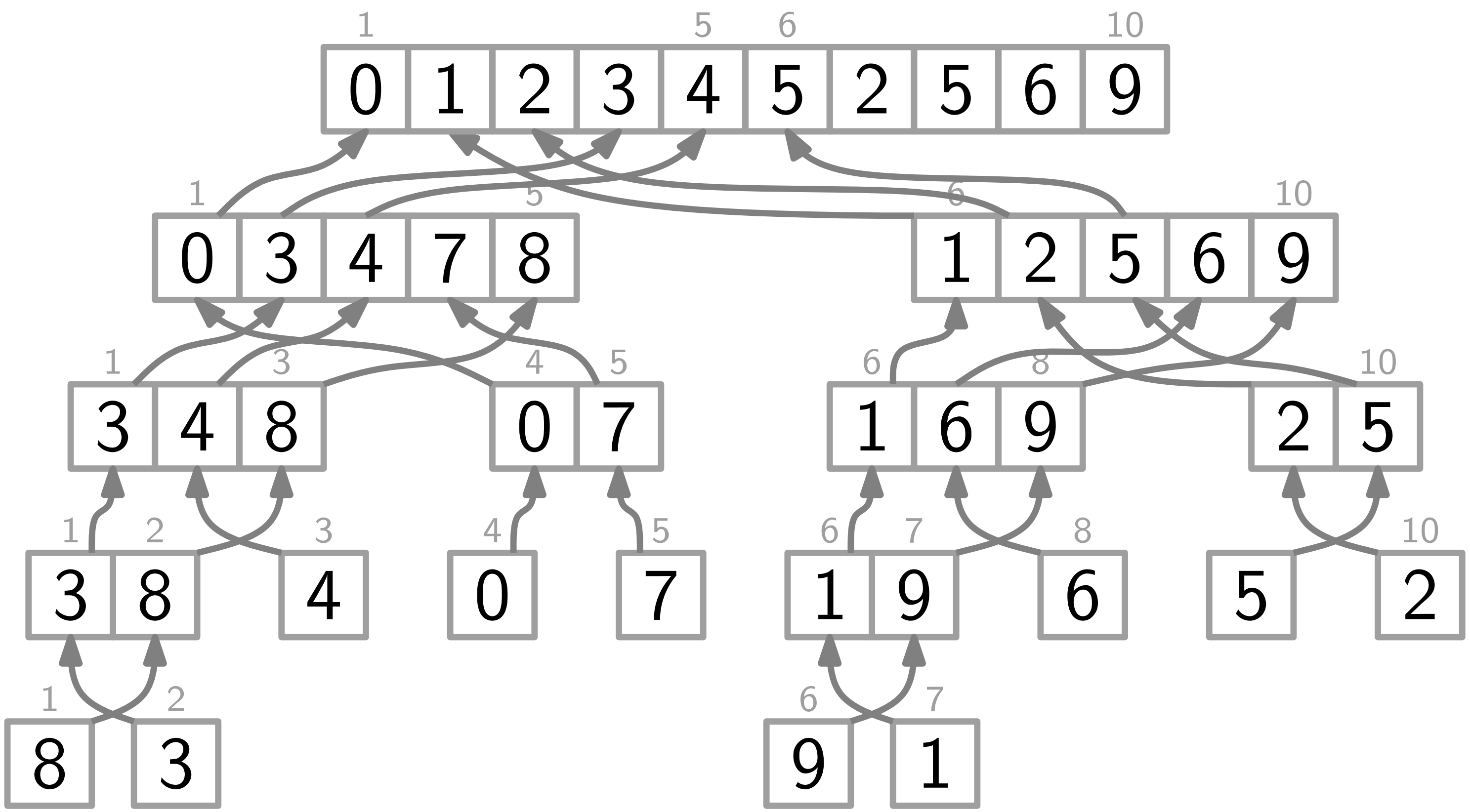


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.\mathit{length}$)

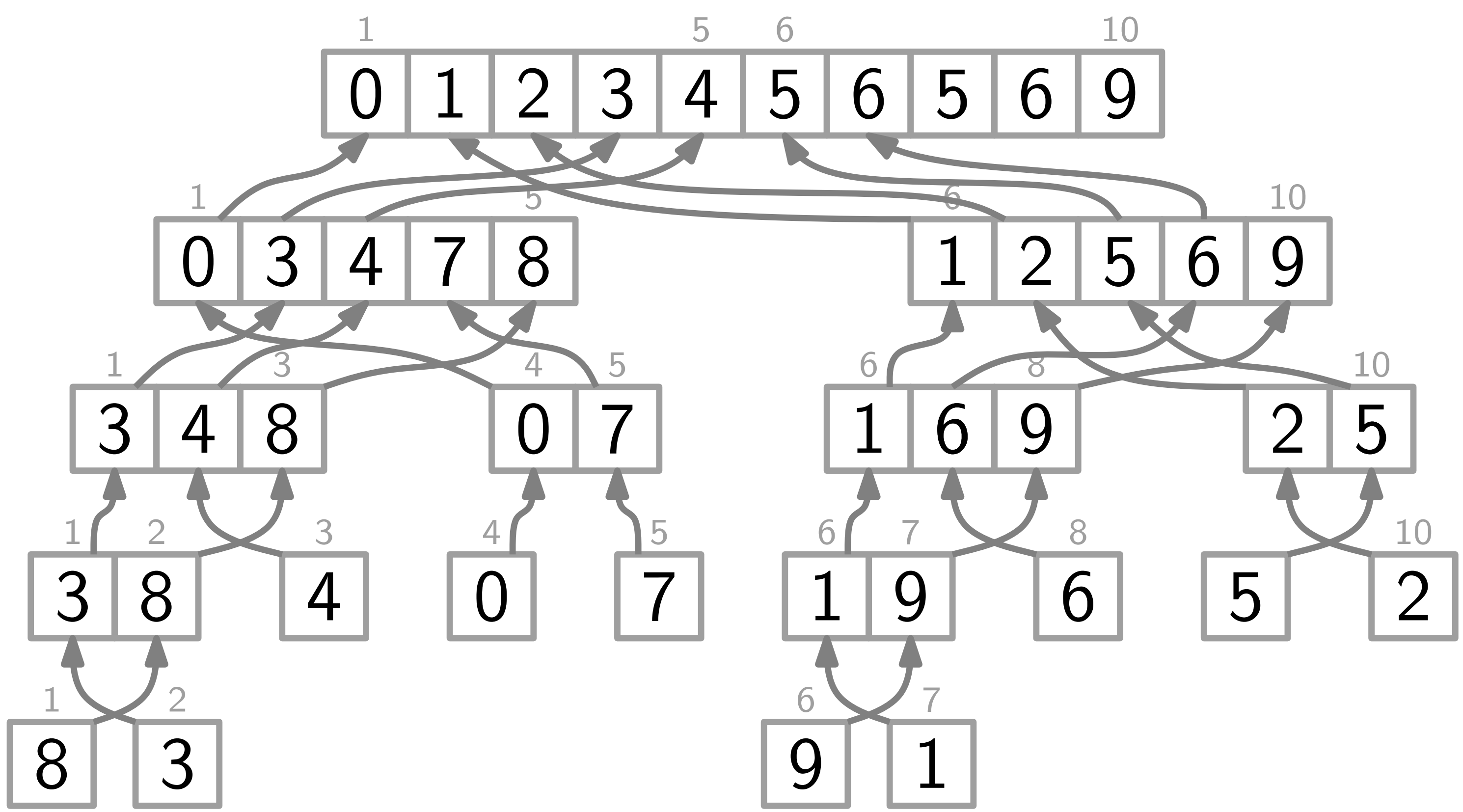
if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

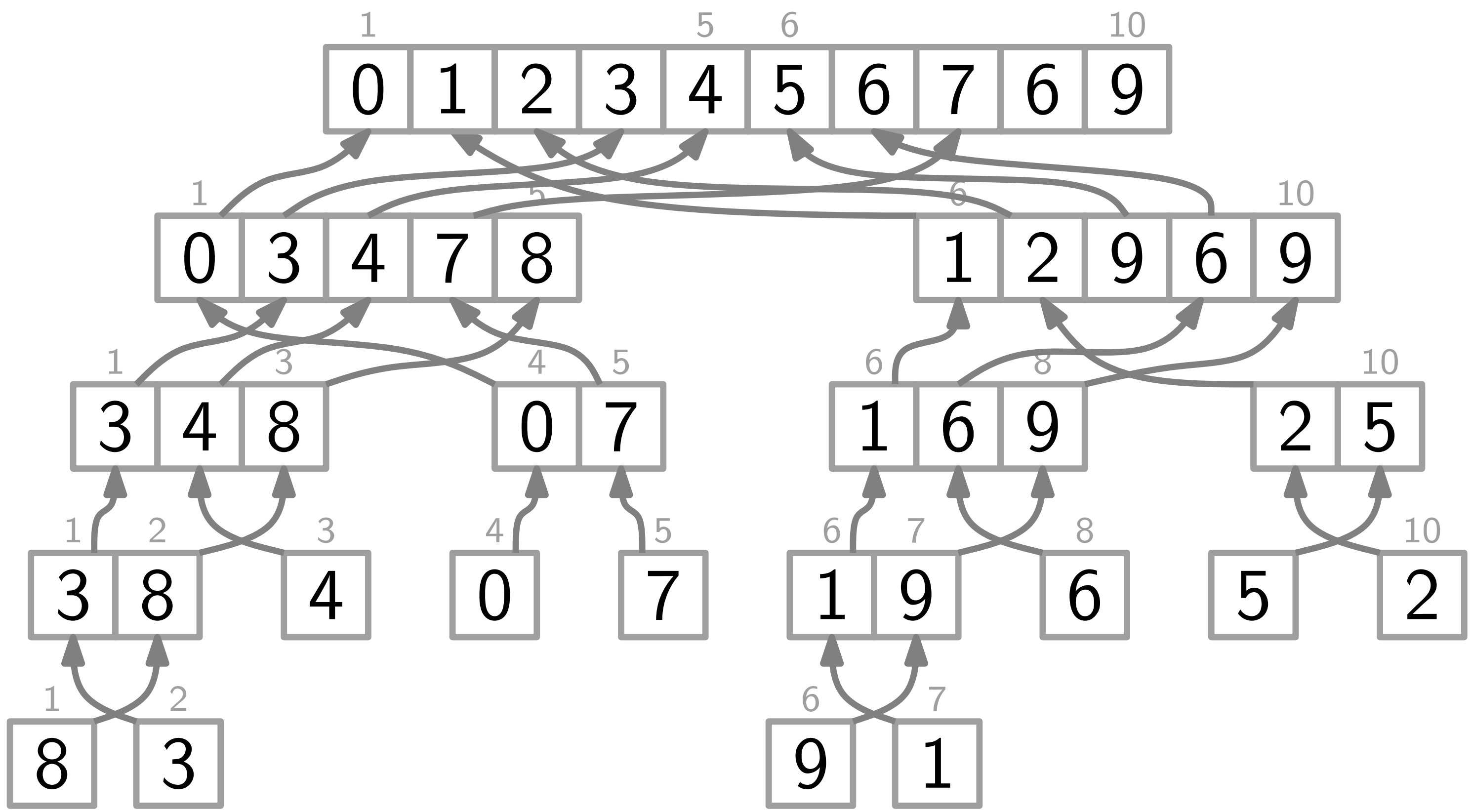


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort$(A, m+1, r)$ } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

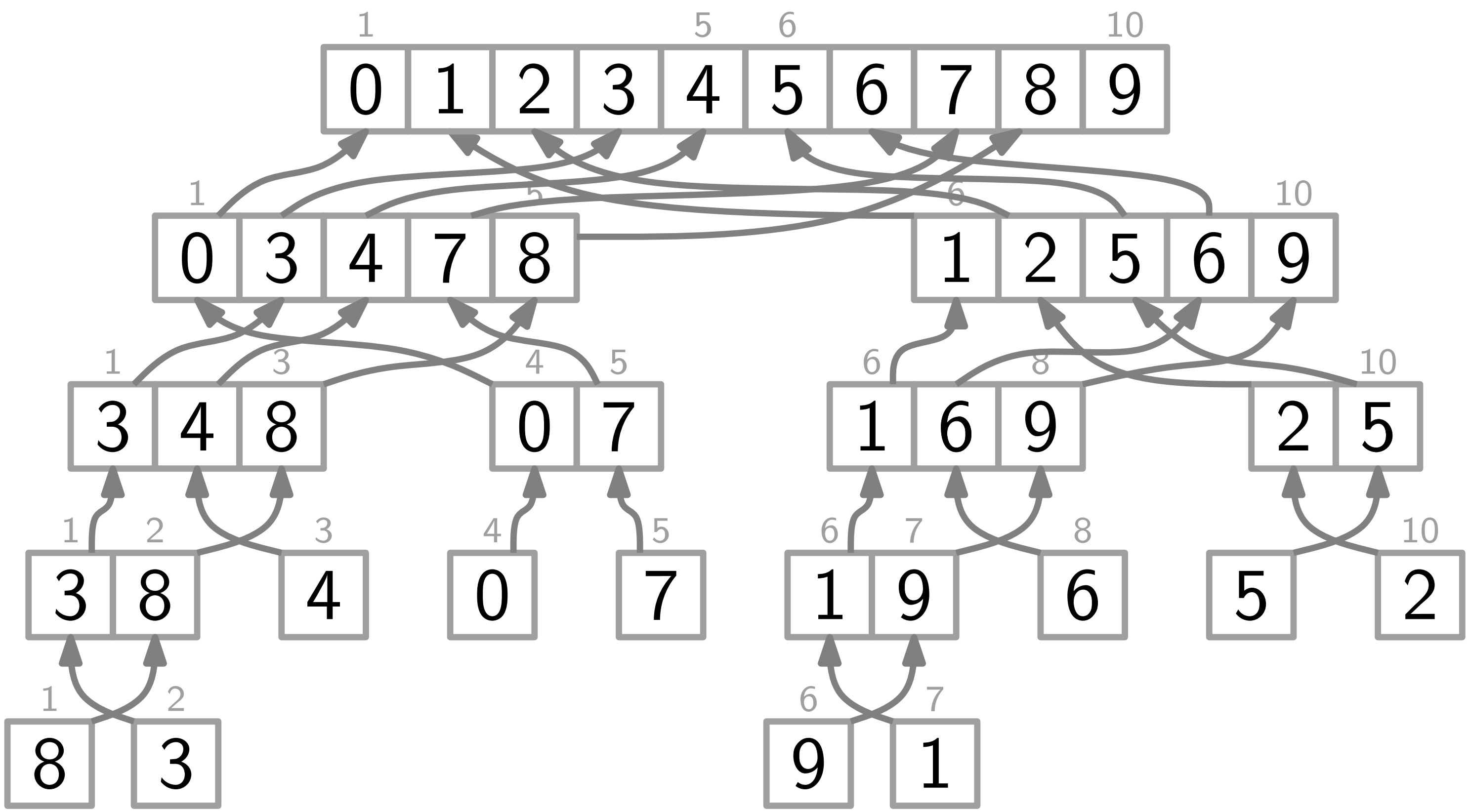


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

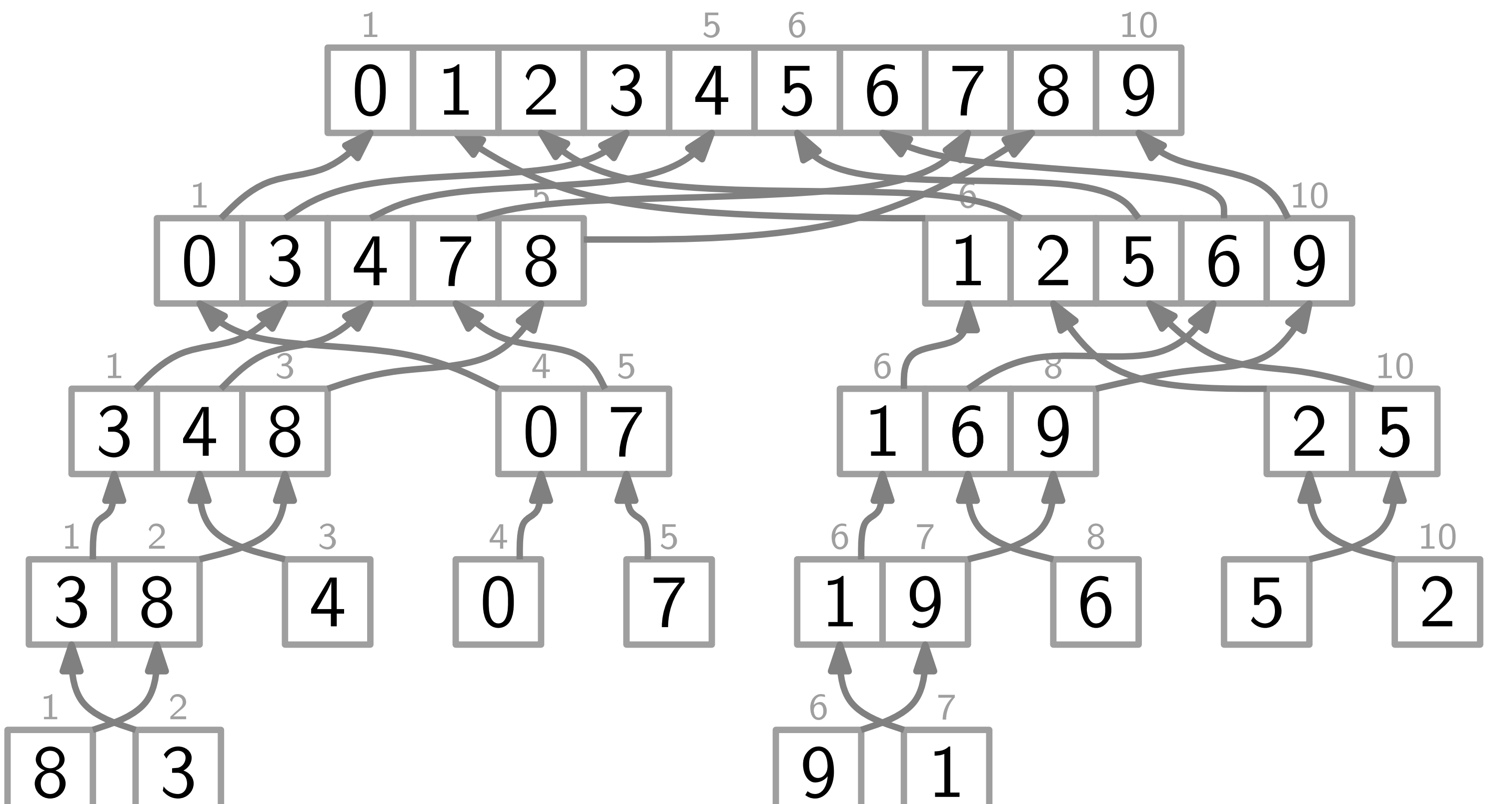


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

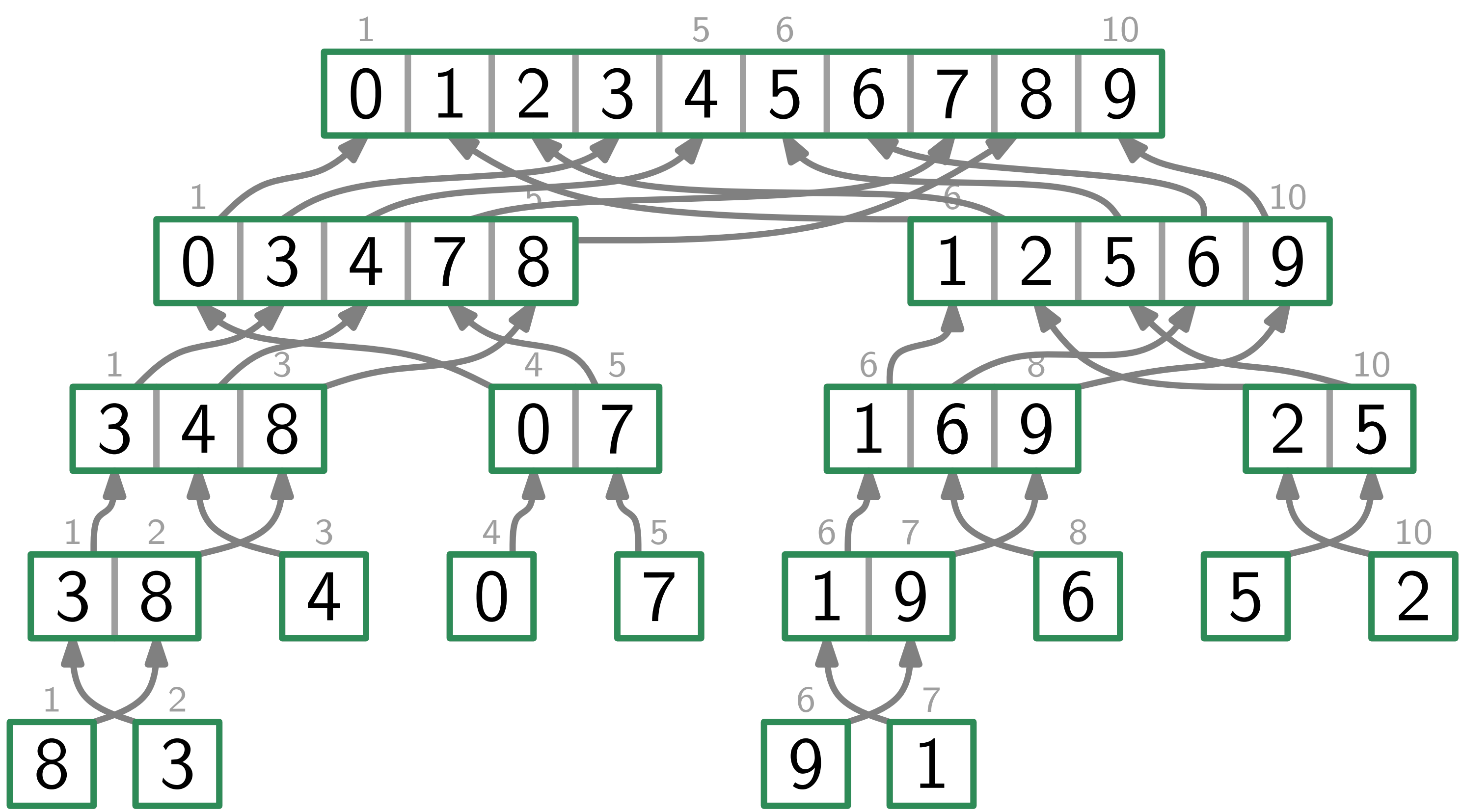


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

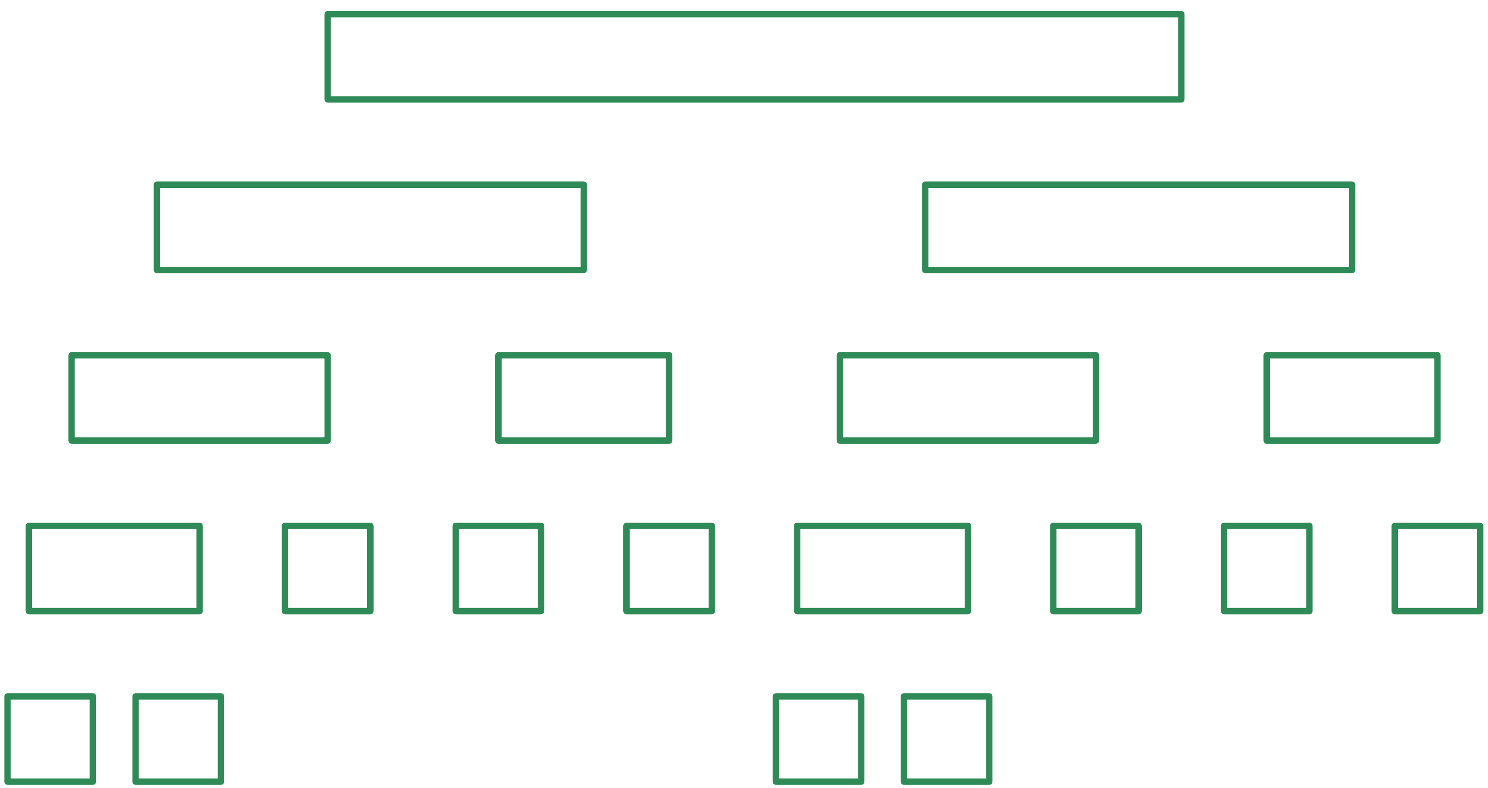


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere



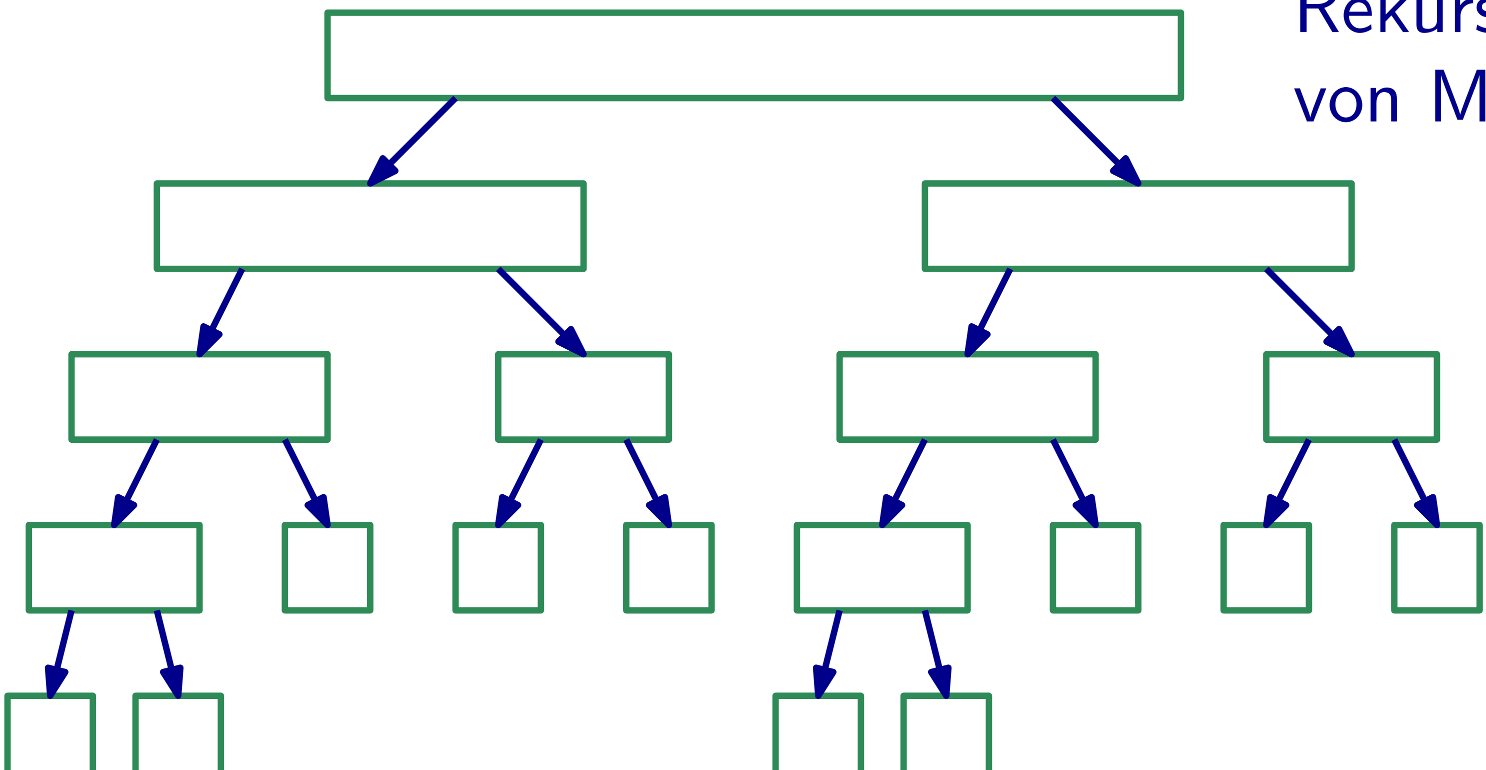
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.\mathit{length}$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort:

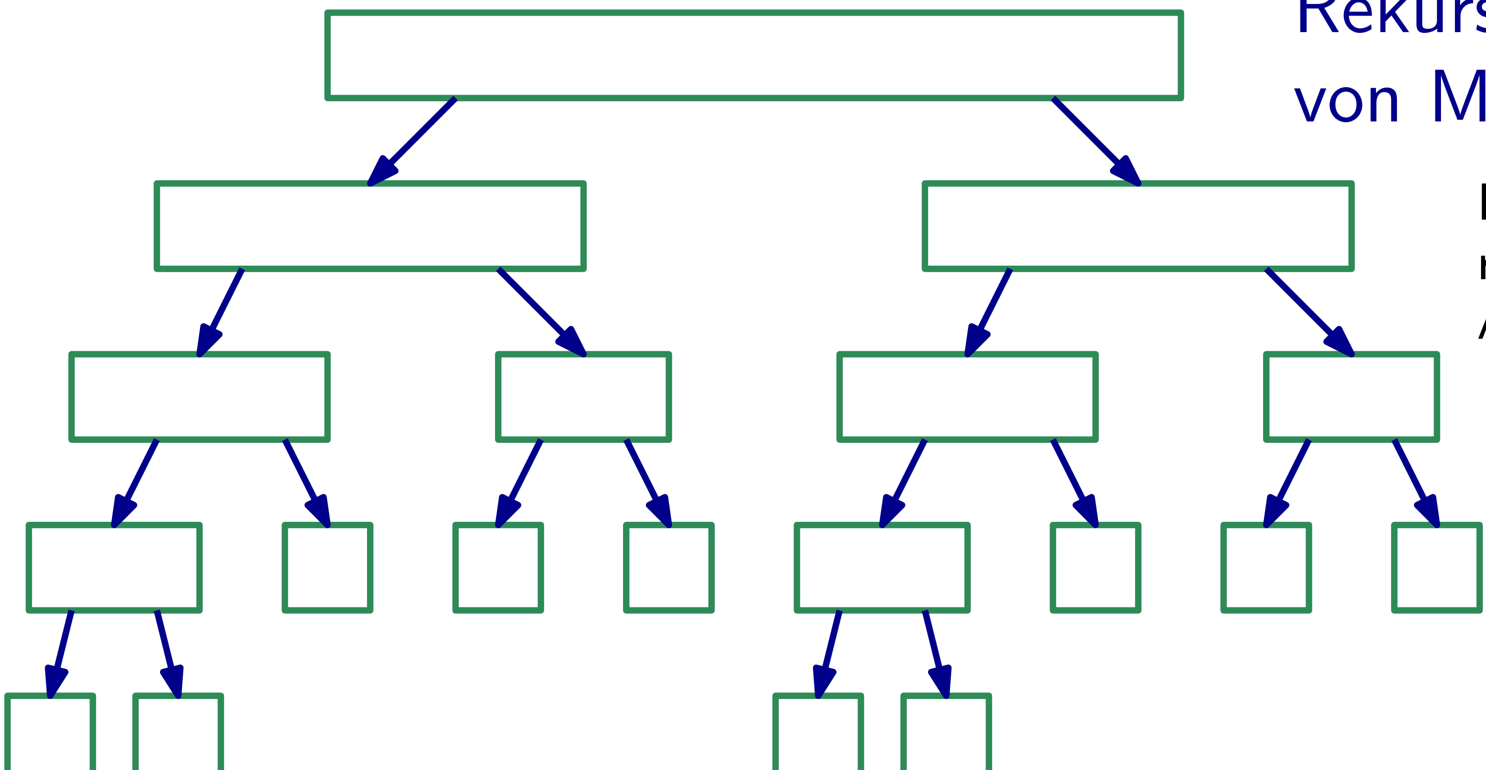


MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort:

Baum der rekursiven Aufrufe



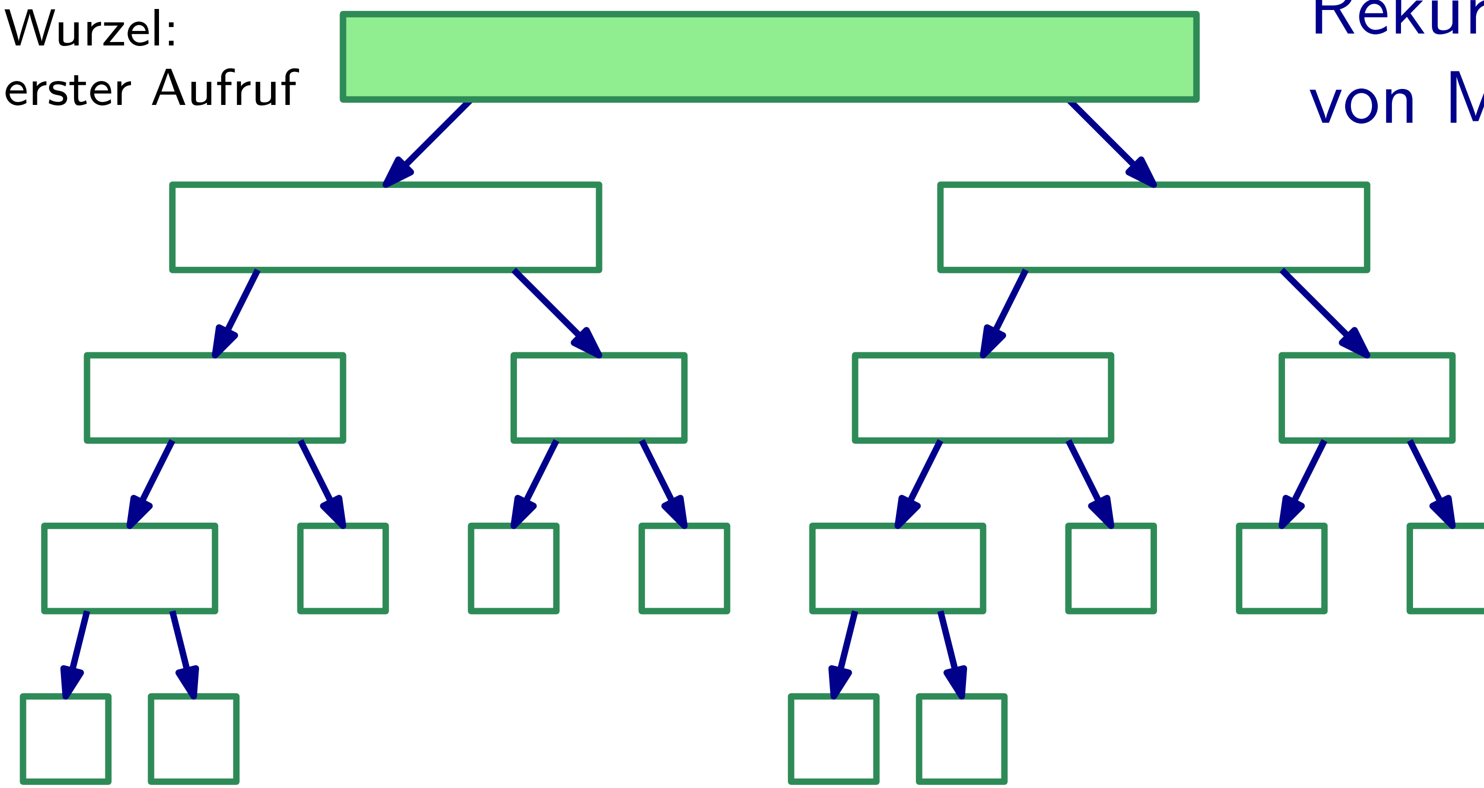
MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Wurzel:
erster Aufruf



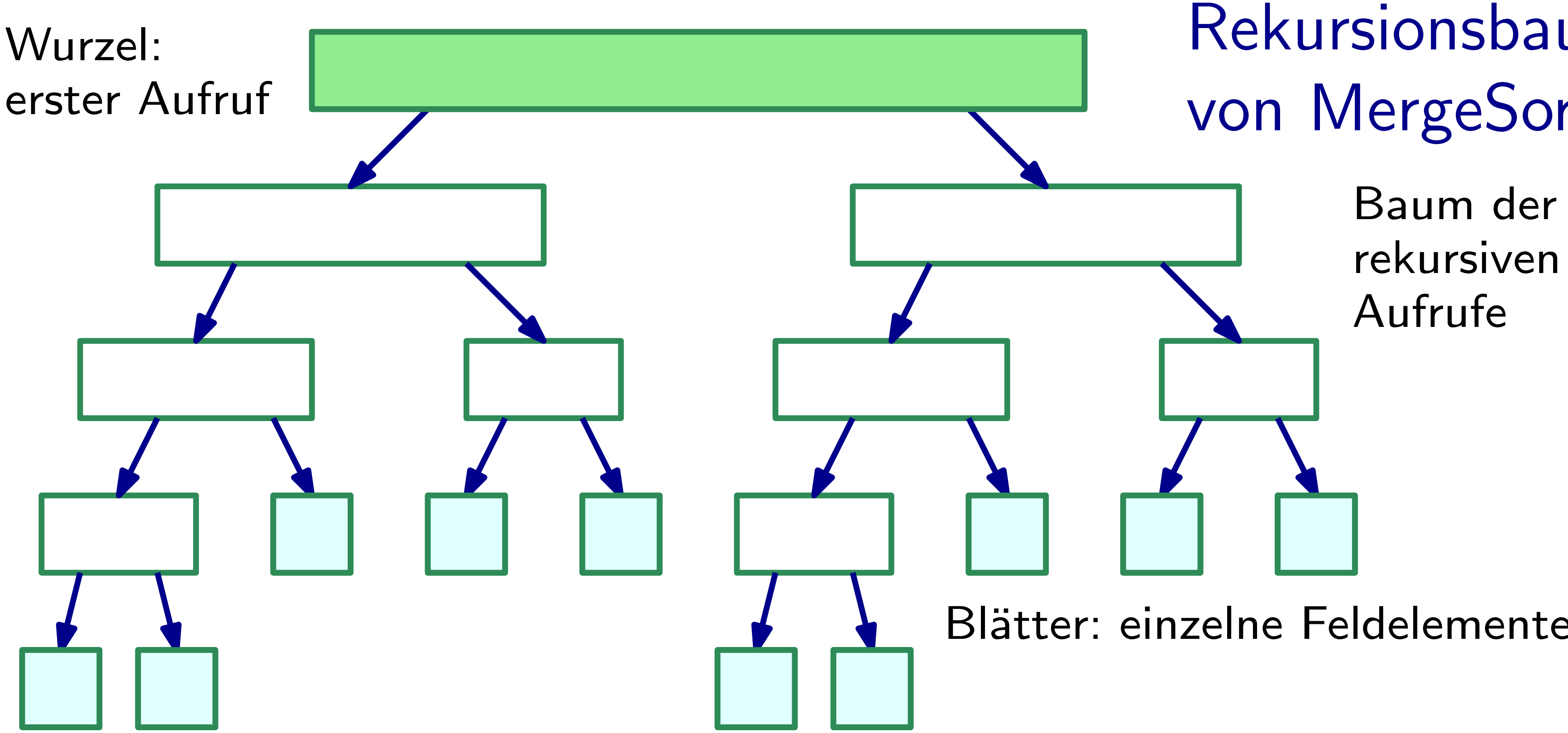
Rekursionsbaum von MergeSort:

Baum der rekursiven Aufrufe

MergeSort – ein Beispiel

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m) } herrsche
    MergeSort($A, m+1, r$)
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Rekursionsbaum von MergeSort:



Korrektheit von Merge

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

Korrektheit von Merge

… nach Schema „F“!

Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
- $n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$
- lege $L[1..n_1 + 1]$ und $R[1..n_2 + 1]$ an
- $L[1..n_1] = A[\ell..m]$
- $R[1..n_2] = A[m + 1..r]$
- $L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$
- $i = j = 1$
- **for** $k = \ell$ **to** r **do**
  - **if** $L[i] \leq R[j]$ **then**
    - $A[k] = L[i]$
    - $i = i + 1$
  - **else**
    - $A[k] = R[j]$
    - $j = j + 1$

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)

$n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

lege $L[1..n_1 + 1]$ und $R[1..n_2 + 1]$ an

$L[1..n_1] = A[\ell..m]$

$R[1..n_2] = A[m + 1..r]$

$L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$

$i = j = 1$

for $k = \ell$ **to** r **do**

  if $L[i] \leq R[j]$ **then**

    $A[k] = L[i]$

    $i = i + 1$

  else

    $A[k] = R[j]$

    $j = j + 1$

Korrektheit von Merge

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

Korrektheit von Merge

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)

  $n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$

  lege $L[1..n_1+1]$ und $R[1..n_2+1]$ an

  $L[1..n_1] = A[\ell..m]$

  $R[1..n_2] = A[m+1..r]$

  $L[n_1+1] = R[n_2+1] = \infty$

  $i = j = 1$

  for $k = \ell$ **to** r **do**

    if $L[i] \leq R[j]$ **then**

      $A[k] = L[i]$

      $i = i + 1$

    else

      $A[k] = R[j]$

      $j = j + 1$

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.

- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

Korrektheit von Merge

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung

- Da beim ersten Schleifendurchlauf $k = \ell$ gilt, enthält $A[\ell..k-1] = \langle\rangle$ die 0 kleinsten Elem. von $L \cup R$.

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F“!

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung

- Da beim ersten Schleifendurchlauf $k = \ell$ gilt, enthält $A[\ell..k-1] = \langle\rangle$ die 0 kleinsten Elem. von $L \cup R$.
- Da $i = j = 1$, sind $L[i]$ und $R[j]$ die kleinsten noch nicht kopierten Elem.

Korrektheit von Merge

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓

- Da beim ersten Schleifendurchlauf $k = \ell$ gilt, enthält $A[\ell..k-1] = \langle\rangle$ die 0 kleinsten Elem. von $L \cup R$.
- Da $i = j = 1$, sind $L[i]$ und $R[j]$ die kleinsten noch nicht kopierten Elem.

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

Korrektheit von Merge

. . . nach Schema „F"!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.

- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F"!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓

2. Aufrechterhaltung

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \leq R[j]$, (b) $R[j] < L[i]$.

Korrektheit von Merge

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then    // Fall (a)
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \leq R[j]$, (b) $R[j] < L[i]$. Betrachte Fall (a).

Korrektheit von Merge

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then    // Fall (a)
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

... nach Schema „F"!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓   2. Aufrechterhaltung

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \leq R[j]$, (b) $R[j] < L[i]$. Betrachte Fall (a).
- Nun gilt:
  (dank INV)

Korrektheit von Merge

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then    // Fall (a)
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓

2. Aufrechterhaltung

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \leq R[j]$, (b) $R[j] < L[i]$. Betrachte Fall (a).
- Nun gilt: – $A[\ell..k]$ enthält die kleinsten $k-\ell+1$ Elem. sortiert

  (dank INV)

Korrektheit von Merge

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then    // Fall (a)
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓

2. Aufrechterhaltung

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \leq R[j]$, (b) $R[j] < L[i]$. Betrachte Fall (a).
- Nun gilt: (dank INV)
  – $A[\ell..k]$ enthält die kleinsten $k-\ell+1$ Elem. sortiert
  – $L[i+1]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then    // Fall (a)
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \leq R[j]$, (b) $R[j] < L[i]$. Betrachte Fall (a).
- Nun gilt: (dank INV)
  – $A[\ell..k]$ enthält die kleinsten $k-\ell+1$ Elem. sortiert
  – $L[i+1]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.

erhöhe i

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F"!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then   // Fall (a)
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓

2. Aufrechterhaltung

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \leq R[j]$, (b) $R[j] < L[i]$. Betrachte Fall (a).
- Nun gilt: (dank INV)
  – $A[\ell..k]$ enthält die kleinsten $k-\ell+1$ Elem. sortiert
  – $L[i+1]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.

erhöhe i $\Rightarrow$

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F“!

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then    // Fall (a)
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓

2. Aufrechterhaltung

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \leq R[j]$, (b) $R[j] < L[i]$. Betrachte Fall (a).
- Nun gilt: (dank INV)
  – $A[\ell..k]$ enthält die kleinsten $k-\ell+1$ Elem. sortiert
  – $L[i+1]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.

erhöhe i $\Rightarrow$ $L[i]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.

Korrektheit von Merge

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then    // Fall (a)
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \le R[j]$, (b) $R[j] < L[i]$. Betrachte Fall (a).
- Nun gilt: (dank INV)
  – $A[\ell..k]$ enthält die kleinsten $k-\ell+1$ Elem. sortiert
  – $L[i+1]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.

erhöhe i $\Rightarrow$ $L[i]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.
erhöhe k

Korrektheit von Merge

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then    // Fall (a)
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

... nach Schema „F"!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓

2. Aufrechterhaltung

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \leq R[j]$, (b) $R[j] < L[i]$. Betrachte Fall (a).
- Nun gilt: (dank INV)
  – $A[\ell..k]$ enthält die kleinsten $k-\ell+1$ Elem. sortiert
  – $L[i+1]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.

erhöhe i $\Rightarrow$ $L[i]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.

erhöhe k $\Rightarrow$

Korrektheit von Merge

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then    // Fall (a)
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

... nach Schema „F"!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \leq R[j]$, (b) $R[j] < L[i]$. Betrachte Fall (a).
- Nun gilt: – $A[\ell..k]$ enthält die kleinsten $k-\ell+1$ Elem. sortiert
  (dank INV) – $L[i+1]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.

erhöhe i $\Rightarrow$ $L[i]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.
erhöhe k $\Rightarrow$ $A[\ell..k-1]$ enthält die kleinsten $k-\ell$ Elem. sortiert

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then    // Fall (a)
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓

2. Aufrechterhaltung

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \leq R[j]$, (b) $R[j] < L[i]$. Betrachte Fall (a).
- Nun gilt: (dank INV)
  – $A[\ell..k]$ enthält die kleinsten $k-\ell+1$ Elem. sortiert
  – $L[i+1]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.

erhöhe i $\Rightarrow$ $L[i]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.
erhöhe k $\Rightarrow$ $A[\ell..k-1]$ enthält die kleinsten $k-\ell$ Elem. sortiert $\Rightarrow$

Korrektheit von Merge

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then    // Fall (a)
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \leq R[j]$, (b) $R[j] < L[i]$. Betrachte Fall (a).
- Nun gilt: (dank INV)
  – $A[\ell..k]$ enthält die kleinsten $k-\ell+1$ Elem. sortiert
  – $L[i+1]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.

erhöhe i $\Rightarrow$ $L[i]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.
erhöhe k $\Rightarrow$ $A[\ell..k-1]$ enthält die kleinsten $k-\ell$ Elem. sortiert

$\Rightarrow$ INV!

Korrektheit von Merge

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then    // Fall (a)
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \leq R[j]$, ✓ (b) $R[j] < L[i]$. Betrachte Fall (a).
- Nun gilt: (dank INV)
  – $A[\ell..k]$ enthält die kleinsten $k-\ell+1$ Elem. sortiert
  – $L[i+1]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.

erhöhe i $\Rightarrow$ $L[i]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.
erhöhe k $\Rightarrow$ $A[\ell..k-1]$ enthält die kleinsten $k-\ell$ Elem. sortiert

$\Rightarrow$ INV!

Korrektheit von Merge

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then        // Fall (a)
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else                       // Fall (b)
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓

2. Aufrechterhaltung

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \leq R[j]$, ✓ (b) $R[j] < L[i]$. Betrachte Fall (a).
- Nun gilt: (dank INV)
  – $A[\ell..k]$ enthält die kleinsten $k-\ell+1$ Elem. sortiert
  – $L[i+1]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.

erhöhe i $\Rightarrow$ $L[i]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.
erhöhe k $\Rightarrow$ $A[\ell..k-1]$ enthält die kleinsten $k-\ell$ Elem. sortiert

$\Rightarrow$ **INV!**

Korrektheit von Merge

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then        // Fall (a)
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else                       // Fall (b)
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

... nach Schema „F"!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung

(Fall (b) symmetrisch.)

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \le R[j]$, ✓ (b) $R[j] < L[i]$. Betrachte Fall (a).
- Nun gilt: (dank INV)
  – $A[\ell..k]$ enthält die kleinsten $k-\ell+1$ Elem. sortiert
  – $L[i+1]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.

erhöhe i $\Rightarrow$ $L[i]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.
erhöhe k $\Rightarrow$ $A[\ell..k-1]$ enthält die kleinsten $k-\ell$ Elem. sortiert

$\Rightarrow$ INV!

Korrektheit von Merge

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then      // Fall (a)
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else                     // Fall (b)
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

... nach Schema „F"!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓

2. Aufrechterhaltung

(Fall (b) symmetrisch.)

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \leq R[j]$, ✓ (b) $R[j] < L[i]$. ✓ Betrachte Fall (a).
- Nun gilt: (dank INV) ✓
  – $A[\ell..k]$ enthält die kleinsten $k-\ell+1$ Elem. sortiert
  – $L[i+1]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.

erhöhe i $\Rightarrow$ $L[i]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.
erhöhe k $\Rightarrow$ $A[\ell..k-1]$ enthält die kleinsten $k-\ell$ Elem. sortiert

$\Rightarrow$ INV!

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then      // Fall (a)
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else                     // Fall (b)
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓

(Fall (b) symmetrisch.)

- Zwei Fälle: (a) $L[i] \leq R[j]$, ✓ (b) $R[j] < L[i]$. ✓ Betrachte Fall (a).
- Nun gilt: (dank INV)
  – $A[\ell..k]$ enthält die kleinsten $k-\ell+1$ Elem. sortiert
  – $L[i+1]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.

erhöhe $i \Rightarrow$ $L[i]$ ist kleinstes noch nicht kopiertes Elem. in L.
erhöhe $k \Rightarrow$ $A[\ell..k-1]$ enthält die kleinsten $k-\ell$ Elem. sortiert $\Rightarrow$ INV!

Korrektheit von Merge

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓

Korrektheit von Merge

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓
2. Aufrechterhaltung ✓
3. Terminierung

Korrektheit von Merge

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung

- Nach Abbruch der for-Schleife gilt $k = r + 1$.

Korrektheit von Merge

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung

- Nach Abbruch der for-Schleife gilt $k = r + 1$.

$\Rightarrow A[\ell..k-1] = A[\ell..r]$ enthält die $r - \ell + 1$ kleinsten Elem. von $L \cup R$ sortiert.

Korrektheit von Merge

. . . nach Schema „F“!

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung

- Nach Abbruch der for-Schleife gilt $k = r + 1$.

$\Rightarrow A[\ell..k-1] = A[\ell..r]$ enthält die $r - \ell + 1$ kleinsten Elem. von $L \cup R$ sortiert.

- $|L \cup R| = n_1 + n_2 + 2$

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung

- Nach Abbruch der for-Schleife gilt $k = r + 1$.

$\Rightarrow A[\ell..k-1] = A[\ell..r]$ enthält die $r - \ell + 1$ kleinsten Elem. von $L \cup R$ sortiert.

- $|L \cup R| = n_1 + n_2 + 2 \; = r - \ell + 3$

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung

- Nach Abbruch der for-Schleife gilt $k = r + 1$.

$\Rightarrow A[\ell..k-1] = A[\ell..r]$ enthält die $r - \ell + 1$ kleinsten Elem. von $L \cup R$ sortiert.

- $|L \cup R| = n_1 + n_2 + 2 \ = \boxed{r - \ell + 3}$

Korrektheit von Merge

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung

- Nach Abbruch der for-Schleife gilt $k = r + 1$.

$\Rightarrow A[\ell..k-1] = A[\ell..r]$ enthält die $\boxed{r - \ell + 1}$ kleinsten Elem. von $L \cup R$ sortiert.

- $|L \cup R| = n_1 + n_2 + 2 \ = \boxed{r - \ell + 3}$

Korrektheit von Merge

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung

- Nach Abbruch der for-Schleife gilt $k = r + 1$.

$\Rightarrow A[\ell..k-1] = A[\ell..r]$ enthält die $\boxed{r-\ell+1}$ kleinsten Elem. von $L \cup R$ sortiert.

+2 Stopper

- $|L \cup R| = n_1 + n_2 + 2 \; = \boxed{r - \ell + 3}$

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F“!

Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
  $n_1 = m - \ell + 1$; $n_2 = r - m$
  lege $L[1..n_1 + 1]$ und $R[1..n_2 + 1]$ an
  $L[1..n_1] = A[\ell..m]$
  $R[1..n_2] = A[m + 1..r]$
  $L[n_1 + 1] = R[n_2 + 1] = \infty$
  $i = j = 1$
  for $k = \ell$ **to** r **do**
    if $L[i] \leq R[j]$ **then**
      $A[k] = L[i]$
      $i = i + 1$
    else
      $A[k] = R[j]$
      $j = j + 1$

0. Schleifeninvariante
- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k - \ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung

- Nach Abbruch der for-Schleife gilt $k = r + 1$.

$\Rightarrow A[\ell..k-1] = A[\ell..r]$ enthält die $\boxed{r - \ell + 1}$ kleinsten Elem. von $L \cup R$ sortiert.

+2 Stopper

- $|L \cup R| = n_1 + n_2 + 2 = \boxed{r - \ell + 3}$, d.h. $A[\ell..r]$ korrekt sort.

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung ✓

- Nach Abbruch der for-Schleife gilt $k = r + 1$.

$\Rightarrow A[\ell..k-1] = A[\ell..r]$ enthält die $r - \ell + 1$ kleinsten Elem. von $L \cup R$ sortiert.

$+2$ Stopper

- $|L \cup R| = n_1 + n_2 + 2 = r - \ell + 3$, d.h. $A[\ell..r]$ korrekt sort.

Korrektheit von Merge

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓
2. Aufrechterhaltung ✓
3. Terminierung ✓

Korrektheit von Merge

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung ✓

Also ist Merge korrekt! q.e.d.

Korrektheit von Merge

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung ✓

Also ist Merge korrekt! q.e.d.

Laufzeit?

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung ✓

Also ist Merge korrekt! q.e.d.

Laufzeit?

Korrektheit von Merge

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓   2. Aufrechterhaltung ✓   3. Terminierung ✓

Also ist Merge korrekt! q.e.d.

Laufzeit? Merge macht genau   Vergleiche.

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung ✓

Also ist Merge korrekt! q.e.d.

Laufzeit? Merge macht genau $r - \ell + 1$ Vergleiche.

Korrektheit von Merge

... nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung ✓

Also ist Merge korrekt! q.e.d.

Laufzeit? Merge macht genau $r - \ell + 1$ Vergleiche.

Und MergeSort?

Korrektheit von Merge

… nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung ✓

Also ist Merge korrekt! q.e.d.

Laufzeit? Merge macht genau $r - \ell + 1$ Vergleiche.

Und MergeSort? Korrekt?

Korrektheit von Merge

. . . nach Schema „F“!

0. Schleifeninvariante

- $A[\ell..k-1]$ enthält die $k-\ell$ kleinsten Elemente von $L \cup R$ *sortiert*.
- $L[i]$ und $R[j]$ sind die kleinsten Elemente in L bzw. R, die noch nicht in A kopiert wurden.

```
Merge(int[] A, int ℓ, int m, int r)
    n1 = m − ℓ + 1;  n2 = r − m
    lege L[1..n1 + 1] und R[1..n2 + 1] an
    L[1..n1] = A[ℓ..m]
    R[1..n2] = A[m + 1..r]
    L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
    i = j = 1
    for k = ℓ to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] = L[i]
            i = i + 1
        else
            A[k] = R[j]
            j = j + 1
```

1. Initialisierung ✓ 2. Aufrechterhaltung ✓ 3. Terminierung ✓

Also ist Merge korrekt! q.e.d.

Laufzeit? Merge macht genau $r-\ell+1$ Vergleiche.

Und MergeSort? Korrekt? Effizient?

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
  $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
  MergeSort(A, ℓ, m)
  MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
  Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Korrekt?

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[ ] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Korrekt?   Welche Beweistechnik?

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[ ] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Korrekt? Welche Beweistechnik? Hm, MergeSort ist *rekursiv. . .*

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Korrekt? Welche Beweistechnik? Hm, MergeSort ist *rekursiv*...

Vollständige Induktion über $n = r - \ell + 1$ ($= A[\ell..r].length$):

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Korrekt? Welche Beweistechnik? Hm, MergeSort ist *rekursiv. . .*

Vollständige Induktion über $n = r - \ell + 1$ ($= A[\ell..r].length$):

$n = 1$: *Induktionsanfang*

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Korrekt? Welche Beweistechnik? Hm, MergeSort ist *rekursiv. . .*

Vollständige Induktion über $n = r - \ell + 1$ $(= A[\ell..r].length)$:

$n = 1$: *Induktionsanfang*

Dann ist $\ell = r$.

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
  $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
  MergeSort(A, ℓ, m)
  MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
  Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Korrekt? Welche Beweistechnik? Hm, MergeSort ist *rekursiv. . .*

Vollständige Induktion über $n = r - \ell + 1$ $(= A[\ell..r].length)$:

$n = 1$: *Induktionsanfang*

Dann ist $\ell = r$.

$\Rightarrow$ if-Block wird nicht betreten.

Korrektheit von Mergesort

```
MergeSort(int[] A, int ℓ = 1, int r = A.length)
  if ℓ < r then
  |   m = ⌊(ℓ + r)/2⌋               } teile
  |   MergeSort(A, ℓ, m)            } herrsche
  |   MergeSort(A, m + 1, r)        }
  |_  Merge(A, ℓ, m, r)             } kombiniere
```

Korrekt? Welche Beweistechnik? Hm, MergeSort ist *rekursiv*...

Vollständige Induktion über $n = r - \ell + 1$ $(= A[\ell..r].length)$:

$n = 1$: *Induktionsanfang*

Dann ist $\ell = r$.

$\Rightarrow$ if-Block wird nicht betreten.

D.h. nichts passiert.

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

Korrekt? Welche Beweistechnik? Hm, MergeSort ist *rekursiv*...

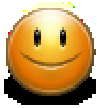
Vollständige Induktion über $n = r - \ell + 1$ $(= A[\ell..r].length)$:

$n = 1$: *Induktionsanfang*

Dann ist $\ell = r$.

$\Rightarrow$ if-Block wird nicht betreten.

D.h. nichts passiert.

OK, da $A[\ell..\ell]$ schon sortiert. 

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

$n > 1$: *Induktionsschritt*

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[ ] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

$n > 1$: *Induktionsschritt*

Induktionsannahme: MergeSort korrekt für Felder d. Länge $< n$.

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[ ] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

$n > 1$: *Induktionsschritt*

Induktionsannahme: MergeSort korrekt für Felder d. Länge $< n$.

Wegen $n > 1$ ist $\ell < r$.

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
  $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
  MergeSort(A, ℓ, m)
  MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
  Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

$n > 1$: *Induktionsschritt*

Induktionsannahme: MergeSort korrekt für Felder d. Länge $< n$.

Wegen $n > 1$ ist $\ell < r$. $\Rightarrow$ if-Block wird betreten.

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
$m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
MergeSort(A, ℓ, m)
MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

$n > 1$: *Induktionsschritt*

Induktionsannahme: MergeSort korrekt für Felder d. Länge $< n$.

Wegen $n > 1$ ist $\ell < r$. $\Rightarrow$ if-Block wird betreten.

Nach Wahl von m gilt $\ell \leq m < r$.

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m) } herrsche
    MergeSort($A, m + 1, r$)
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

$n > 1$: *Induktionsschritt*

Induktionsannahme: MergeSort korrekt für Felder d. Länge $< n$.

Wegen $n > 1$ ist $\ell < r$. $\Rightarrow$ if-Block wird betreten.

Nach Wahl von m gilt $\ell \leq m < r$.

$\Rightarrow$ $A[\ell..m]$ und $A[m + 1..r]$ sind *kürzer* als $A[\ell..r]$.

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
  if $\ell < r$ **then**
    $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)
    MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
    Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

$n > 1$: *Induktionsschritt*

Induktionsannahme: MergeSort korrekt für Felder d. Länge $< n$.

Wegen $n > 1$ ist $\ell < r$. $\Rightarrow$ if-Block wird betreten.

Nach Wahl von m gilt $\ell \leq m < r$.

$\Rightarrow A[\ell..m]$ und $A[m + 1..r]$ sind *kürzer* als $A[\ell..r]$.

$\underset{\text{I.A.}}{\Rightarrow}$

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
- $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m) } herrsche
- MergeSort($A, m+1, r$)
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

$n > 1$: *Induktionsschritt*

Induktionsannahme: MergeSort korrekt für Felder d. Länge $< n$.

Wegen $n > 1$ ist $\ell < r$. $\Rightarrow$ if-Block wird betreten.

Nach Wahl von m gilt $\ell \leq m < r$.

$\Rightarrow A[\ell..m]$ und $A[m+1..r]$ sind *kürzer* als $A[\ell..r]$.

$\underset{\text{I.A.}}{\Rightarrow}$ MergeSort(A, ℓ, m) ist korrekt und

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
  $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
  MergeSort(A, ℓ, m)
  MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
  Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

$n > 1$: *Induktionsschritt*

Induktionsannahme: MergeSort korrekt für Felder d. Länge $< n$.

Wegen $n > 1$ ist $\ell < r$. $\Rightarrow$ if-Block wird betreten.

Nach Wahl von m gilt $\ell \leq m < r$.

$\Rightarrow$ $A[\ell..m]$ und $A[m + 1..r]$ sind *kürzer* als $A[\ell..r]$.

$\underset{\text{I.A.}}{\Rightarrow}$ MergeSort(A, ℓ, m) ist korrekt und
MergeSort($A, m + 1, r$) ist korrekt.

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
  $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
  MergeSort(A, ℓ, m)
  MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
  Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

$n > 1$: *Induktionsschritt*

Induktionsannahme: MergeSort korrekt für Felder d. Länge $< n$.

Wegen $n > 1$ ist $\ell < r$. $\Rightarrow$ if-Block wird betreten.

Nach Wahl von m gilt $\ell \leq m < r$.

$\Rightarrow$ $A[\ell..m]$ und $A[m + 1..r]$ sind *kürzer* als $A[\ell..r]$.

$\underset{\text{I.A.}}{\Rightarrow}$ MergeSort(A, ℓ, m) ist korrekt und
MergeSort($A, m + 1, r$) ist korrekt.

Schon bewiesen:

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)
if $\ell < r$ **then**
$m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
MergeSort(A, ℓ, m)
MergeSort($A, m+1, r$) } herrsche
Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

$n > 1$: *Induktionsschritt*

Induktionsannahme: MergeSort korrekt für Felder d. Länge $< n$.

Wegen $n > 1$ ist $\ell < r$. $\Rightarrow$ if-Block wird betreten.

Nach Wahl von m gilt $\ell \leq m < r$.

$\Rightarrow$ $A[\ell..m]$ und $A[m+1..r]$ sind *kürzer* als $A[\ell..r]$.

$\underset{\text{I.A.}}{\Rightarrow}$ MergeSort(A, ℓ, m) ist korrekt und
MergeSort($A, m+1, r$) ist korrekt.

Schon bewiesen: Merge ist korrekt.

Korrektheit von Mergesort

MergeSort(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**

- $m = \lfloor(\ell + r)/2\rfloor$ } teile
- MergeSort(A, ℓ, m)
- MergeSort($A, m + 1, r$) } herrsche
- Merge(A, ℓ, m, r) } kombiniere

$n > 1$: *Induktionsschritt*

Induktionsannahme: MergeSort korrekt für Felder d. Länge $< n$.

Wegen $n > 1$ ist $\ell < r$. $\Rightarrow$ if-Block wird betreten.

Nach Wahl von m gilt $\ell \leq m < r$.

$\Rightarrow$ $A[\ell..m]$ und $A[m + 1..r]$ sind *kürzer* als $A[\ell..r]$.

$\underset{\text{I.A.}}{\Rightarrow}$ MergeSort(A, ℓ, m) ist korrekt und MergeSort($A, m + 1, r$) ist korrekt.

Schon bewiesen: Merge ist korrekt.

} MergeSort(A, ℓ, r) ist korrekt, d.h. MS für Felder d. Länge n. $\square$

Übersicht

Techniken für Korrektheitsbeweise

- iterative Algorithmen (à la InsertionSort, Factorial, Merge)

- rekursive Algorithmen (à la MergeSort)

Übersicht

Techniken für Korrektheitsbeweise

- iterative Algorithmen (à la InsertionSort, Factorial, Merge)

  per *Schleifeninvariante* (Schema „F“)

- rekursive Algorithmen (à la MergeSort)

Übersicht

Techniken für Korrektheitsbeweise

- iterative Algorithmen (à la InsertionSort, Factorial, Merge)

  per *Schleifeninvariante* (Schema „F“)

- rekursive Algorithmen (à la MergeSort)

  per *Induktion*