

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2022

4. Vorlesung

Flussalgorithmen

Aufgabe

Indeed, it's an LP!

Gegeben ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$ und Kantenkapazitäten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie eine Methode an, die einen **maximalen s - t -Fluss f** konstruiert, also eine Funktion $f: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, die

– den Fluss erhält, d.h. für jeden Knoten $v \notin \{s, t\}$ sicherstellt:

$$\text{Nettozufluss}_f(v) = \sum_{u: v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) = 0,$$

– zulässig ist, d.h. für jede Kante e garantiert:

Konstante

$$0 \leq f(e) \leq c(e),$$

$|V| - 2 + |E|$ lineare Beschränkungen!

– maximal ist, d.h. unter allen zulässigen s - t -Flüssen

$$|f| = \text{Nettozufluss}_f(t) \text{ maximiert.}$$

lineare Zielfunktion!

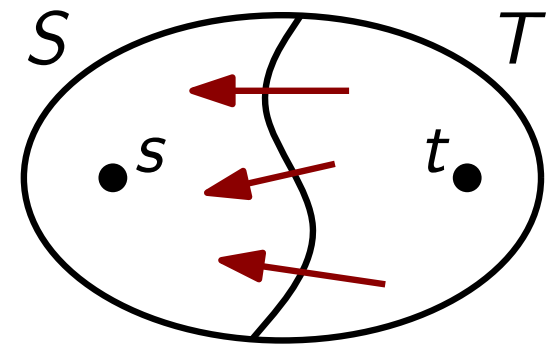
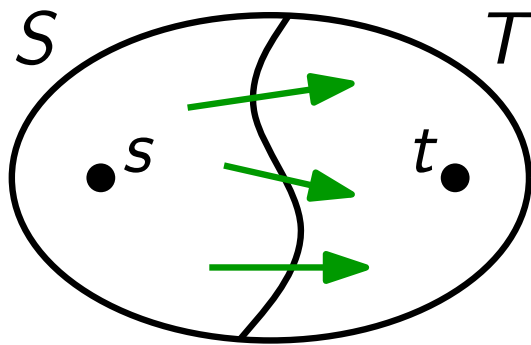
Flussalgorithmen

Kann man maximale Flüsse (= Spezialfall eines LPs) auch mit maßgeschneiderten kombinatorischen Algorithmen berechnen?

Hoffnung: Das könnte schneller gehen –
und strukturelle Einsichten liefern.

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie

Def. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$.
 Eine Zerlegung (S, T) von V ist ein s - t -Schnitt,
 falls $s \in S, t \in T$.

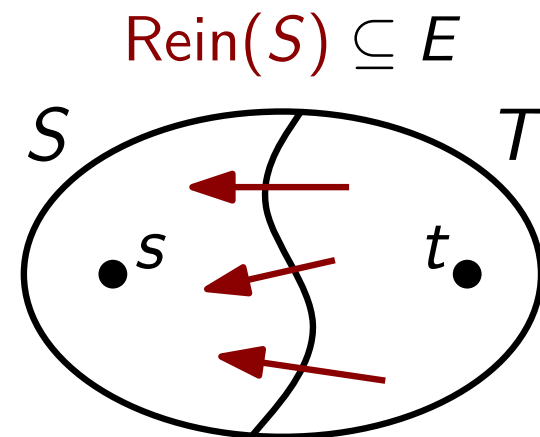
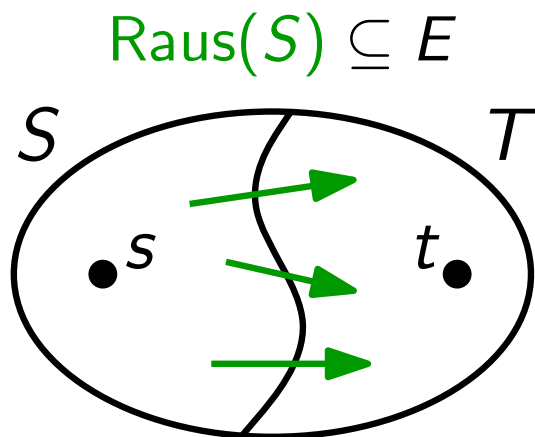


$$\begin{aligned} \text{Raus}(S) &= \{uv \in E \mid u \in S, v \in T\} \\ \{uv \in E \mid u \in T, v \in S\} &= \text{Rein}(S) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Zufluss}_f(S) &= f(\text{Rein}(S)) \\ \text{Abfluss}_f(S) &= f(\text{Raus}(S)) \end{aligned} \right\} \text{minus} \quad =: \text{Nettozufluss}_f(S)$$

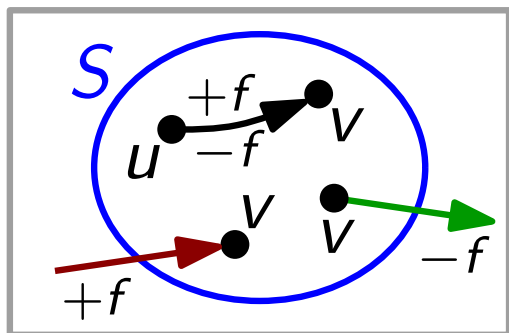
Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$



Lem.¹ Sei $G = (V, E)$ Graph, $S \subseteq V$ und $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Dann:
 $\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v)$.

Beweis. $\sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v) = \sum_{v \in S} (\text{Zufluss}_f(v) - \text{Abfluss}_f(v))$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{v \in S} \left(\sum_{u: v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) \right) \\
 &= \sum_{e \in \text{Rein}(S)} f(e) - \sum_{e \in \text{Raus}(S)} f(e) = \text{Nettozufluss}_f(S) \quad \square
 \end{aligned}$$

Noch mehr Schnitte

Lemma¹. Sei $G = (V, E)$ Graph, $S \subseteq V$ und $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Dann:

$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Lemma². G Graph, $s, t \in V$, f s - t -Fluss, (S, T) s - t -Schnitt.
 Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T)$.

Beweis. $|f| \stackrel{\text{Def.}}{=} \text{Nettozufluss}_f(t)$
 $= \sum_{v \in T} \text{Nettozufluss}_f(v)$
 da $\text{Nettozufluss}_f(v) = 0$ für alle $v \neq s, t$
 $\Rightarrow \text{Nettozufluss}_f(T)$ □

Kapazität von Schnitten

Lemma². G Graph, $s, t \in V$, f s - t -Fluss, (S, T) s - t -Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

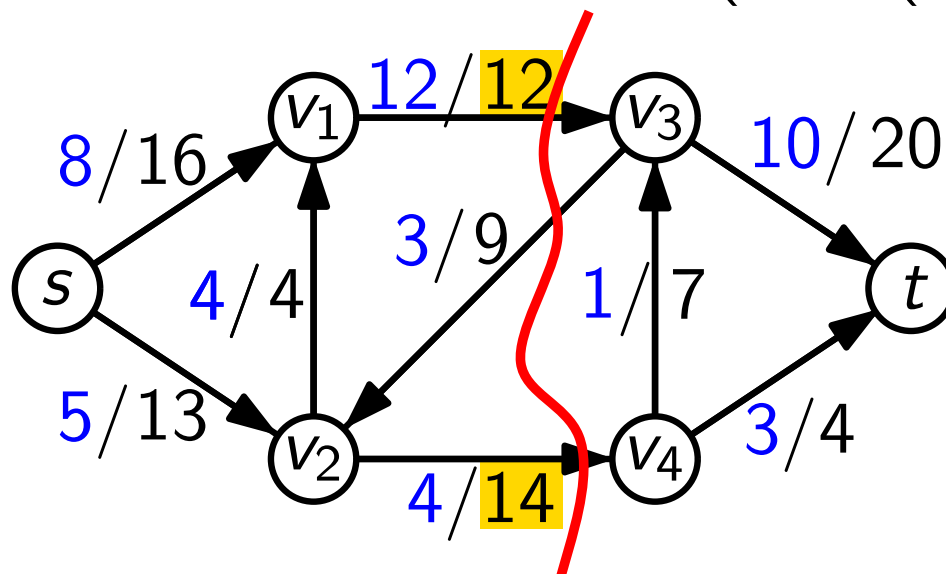
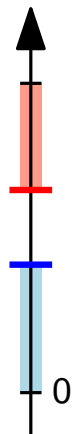
Def. G Graph mit Kap. $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, (S, T) s - t -Schnitt.
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die *Kapazität* von (S, T) .

Lemma³. f zuläss. s - t -Fluss, (S, T) s - t -Schnitt $\Rightarrow |f| \leq c(S)$.

Beweis. $|f| = \text{Nettoabfluss}_f(S) = f(\text{Raus}(S)) - f(\text{Rein}(S))$
 $\leq f(\text{Raus}(S)) \leq c(\text{Raus}(S)) = c(S)$ \square

Speziell:

$$\min_S c(S) \geq \max_f |f|$$



Korollar.

Wenn $|f| = c(S)$
 $\Rightarrow f$ max.,
 (S, T) min. !!



Residualnetz

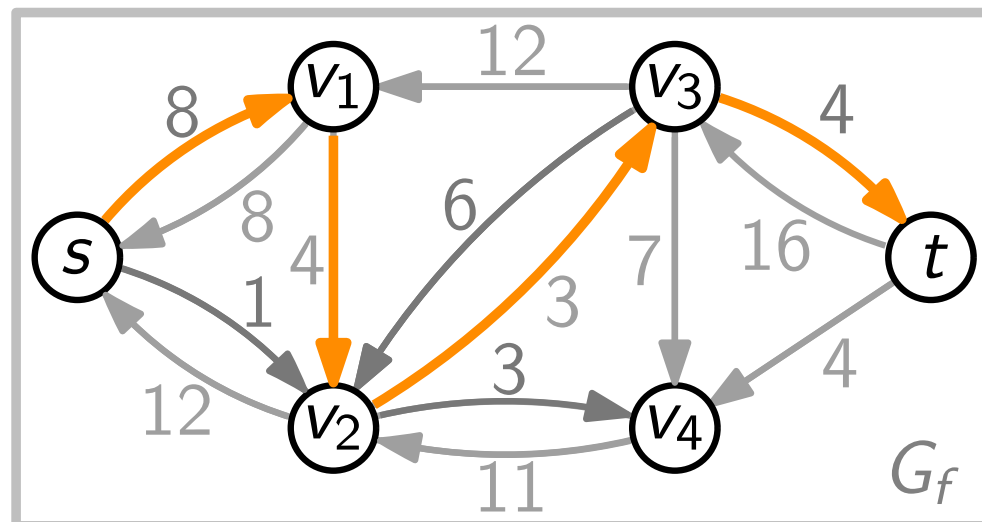
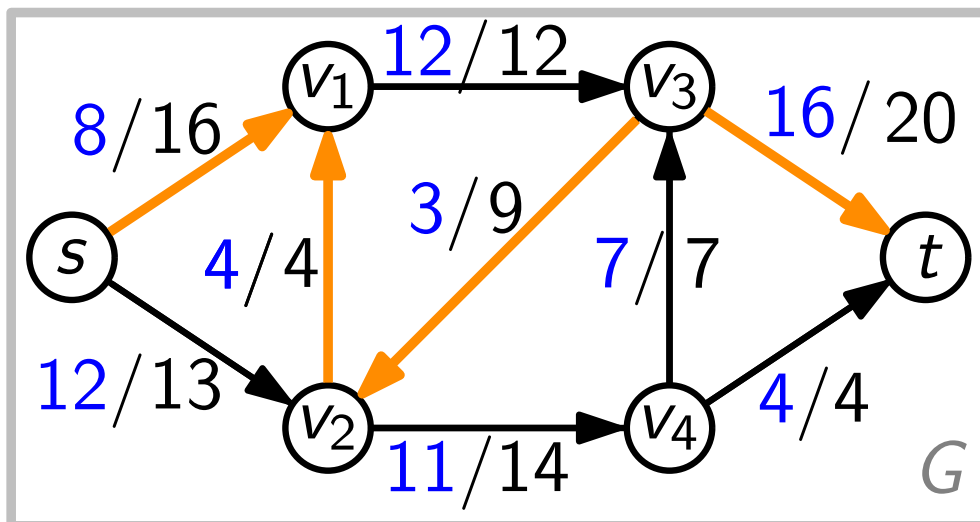
Beob. Falls es einen s - t -Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

Aber: Falls es **keinen** solchen s - t -Weg gibt, so ist f **nicht** unbedingt maximal.

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$

Residualkapazitäten



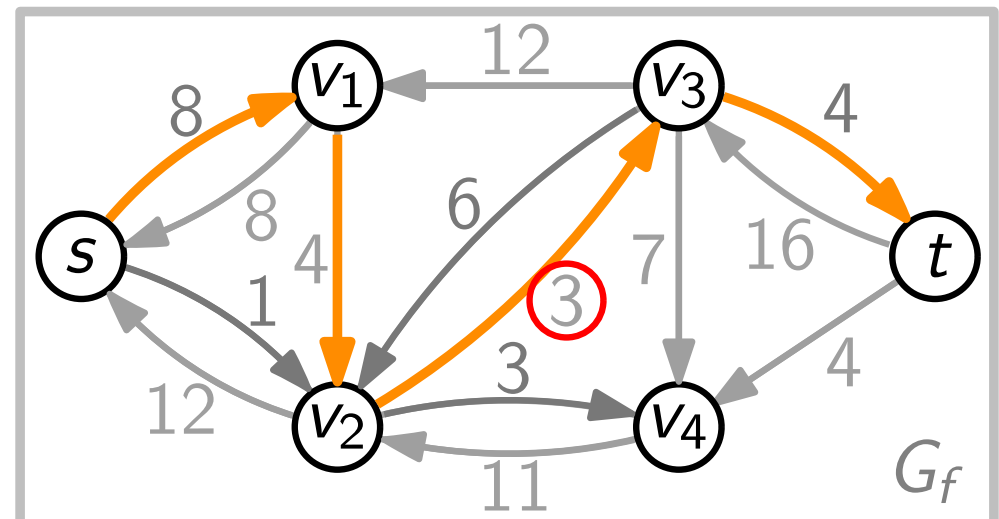
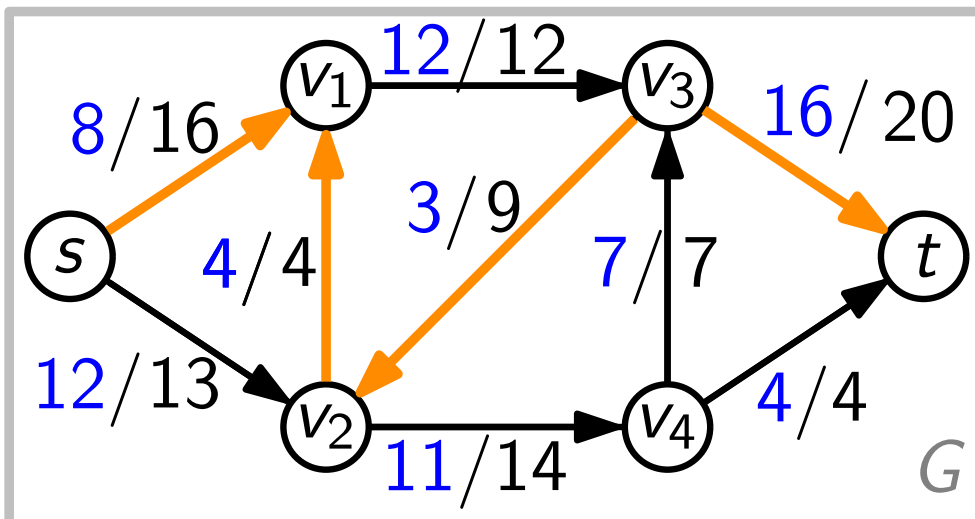
Flussvergrößernde Wege

Def. Ein s - t -Weg W in G_f heißt *flussvergrößernder Weg* für f . Die Residualkapazität von W ist

$$\Delta_W := \min_{e \in W} c_f(e),$$

Satz. (vom flussvergrößernden Weg).
Ein zulässiger s - t -Fluss f in G ist maximal \Leftrightarrow
es gibt keinen flussvergrößernden Weg in G_f .

(Wir beweisen ihn nicht; er folgt direkt aus dem nächsten Satz.)



Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz.

Sei f ein zulässiger s - t -Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$.

Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G .
2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.
3. Es gibt einen s - t -Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

Kurz:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s\text{-}t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S, T) \text{ } s\text{-}t\text{-Schnitt}} c(S)$$

Beweis.

(1) \Rightarrow (2):

Ang. G_f enthält augmentierenden Weg.

Aber dann könnte f erhöht werden.

Widerspruch zu $|f|$ maximal.

(3) \Rightarrow (1): Korollar $\Rightarrow |f|$ maximal.

Erinnerung:

Korollar.

$$|f| = c(S)$$



f maximal

Zu zeigen:

2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.



3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

(2) \Rightarrow (3): Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f .

\Rightarrow In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \text{ nicht erreichbar}\} \end{array} \right\}$ ist s - t -Schnitt.

Sei $e = uv \in \text{Raus}(S)$.

$\Rightarrow f(e) = c(e)$, sonst wäre v von s in G_f erreichbar.

$\stackrel{\Sigma}{\Rightarrow} f(\text{Raus}(S)) = c(\text{Raus}(S))$

Nun sei $e = uv \in \text{Rein}(S) \Rightarrow f(e) = 0$

$\stackrel{\Sigma}{\Rightarrow} f(\text{Rein}(S)) = 0$

Also: $c(S) \stackrel{\text{Def.}}{=} c(\text{Raus}(S)) = f(\text{Raus}(S)) - f(\text{Rein}(S))$
 $= \text{Nettoabfluss}_f(S) \stackrel{\text{Lem. 2}}{=} |f|$ □

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s , Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**

└ $f_{uv} = 0$

} Initialisierung mit Null-Fluss

while G_f enthält s - t -Weg W **do**

└ $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$

} Residualkapazität von W

Schreiben Sie Ihren eigenen Code, der bei Abbruch der **while**-Schleife in f einen maximalen Fluss liefert.

return f

} Rückgabe eines max. Flusses

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s , Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**

└ $f_{uv} = 0$

} Initialisierung mit Null-Fluss

while G_f enthält s - t -Weg W **do**

└ $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$

} Residualkapazität von W

foreach $uv \in W$ **do**

└ **if** $uv \in E$ **then**

└ $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$

else

└ $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$

} Flussvergrößerung entlang W

return f

} Rückgabe eines max. Flusses

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s , Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**

└ $f_{uv} = 0$

while G_f enthält s - t -Weg W **do**

┌ $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$

foreach $uv \in W$ **do**

┌ **if** $uv \in E$ **then**

└ $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$

else

└ $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$

return f

Berechnung von s - t -Wegen

– Breitensuche } $O(E)$ Zeit
– Tiefensuche }

Anz. Schleifendurchläufe

– in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert

– max. $|f^*|$ Durchläufe, wobei f^* ein max. Fluss

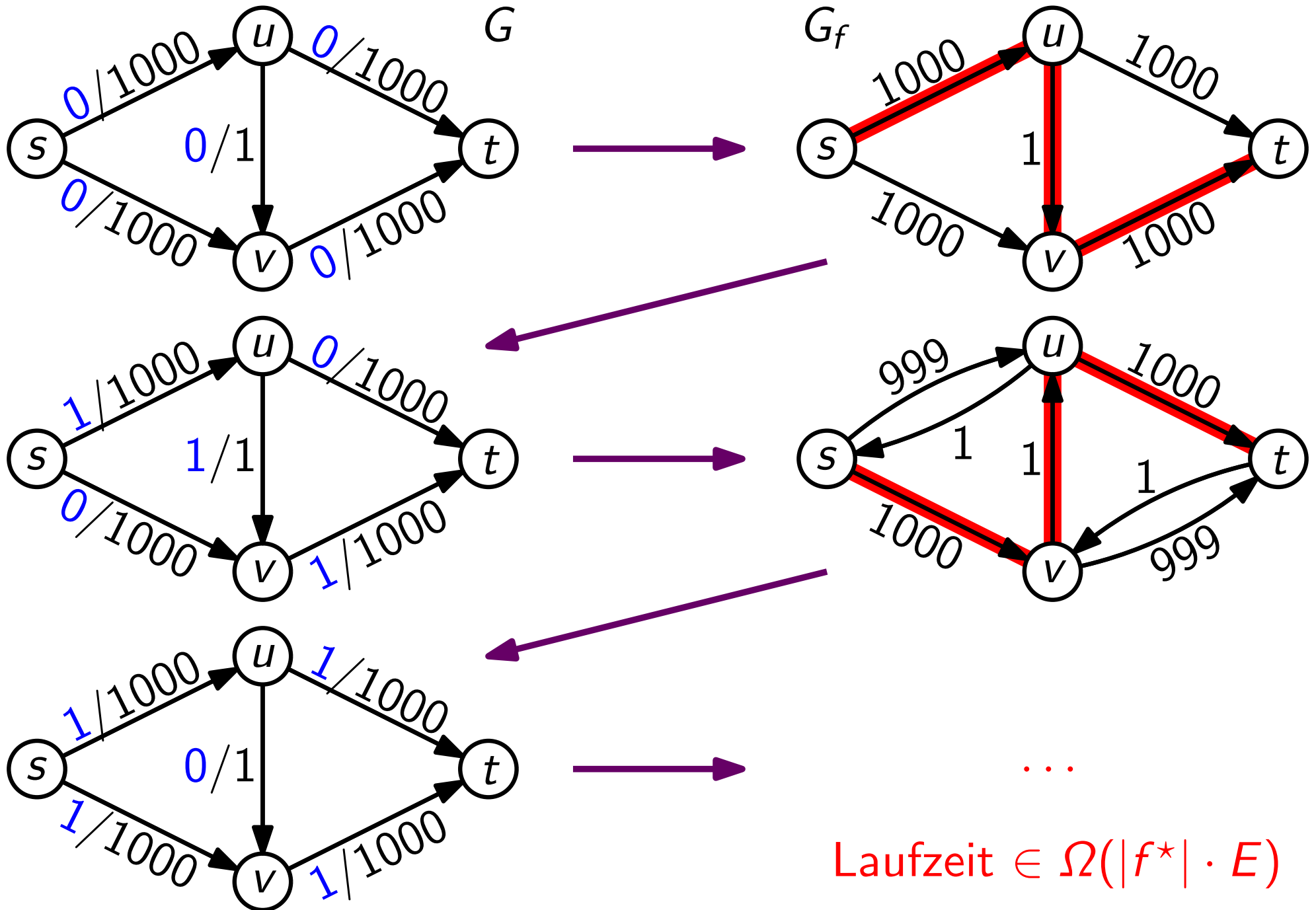
Korrektheit?

Folgt aus Max-Flow-
Min-Cut-Theorem

Laufzeit?

1. $c: E \rightarrow \mathbb{N}$: $O(|f^*| \cdot E)$
2. $\mathbb{Q}_{>0}$: erweitern...
3. $\mathbb{R}_{>0}$: problematisch!

Beispiel



Der Algorithmus von Edmonds & Karp

EdmondsKarp

~~FordFulkerson~~(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s , Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**

└ $f_{uv} = 0$

while G_f enthält s - t -Weg **do**

└ $W =$ kürzester s - t -Weg in G_f

└ $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$

└ **foreach** $uv \in W$ **do**

└└ **if** $uv \in E$ **then**

└└└ $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$

└└ **else**

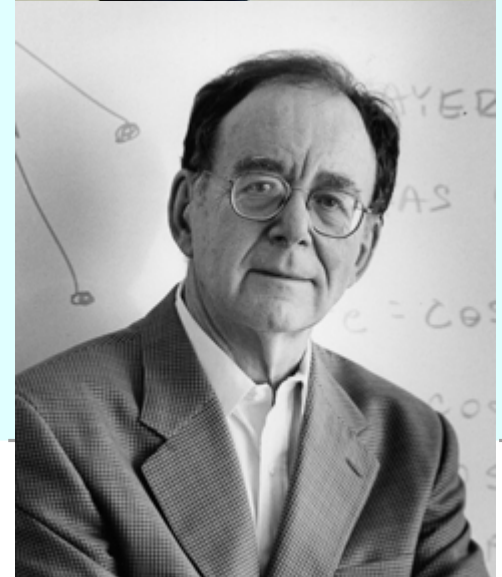
└└└ $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$

return f

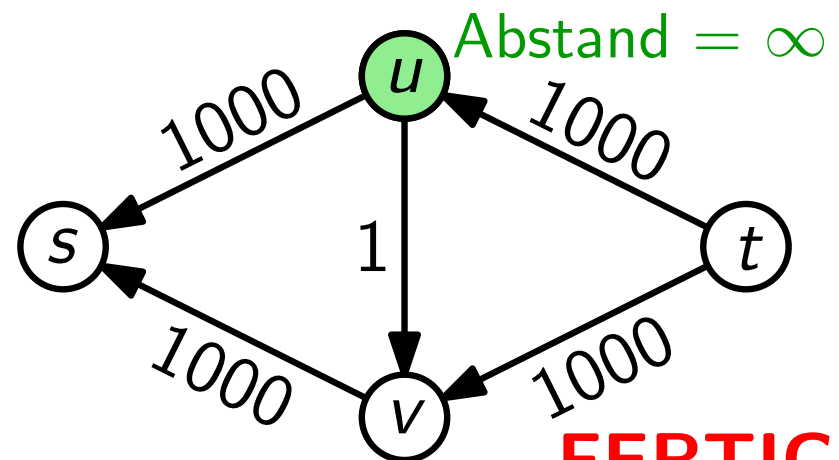
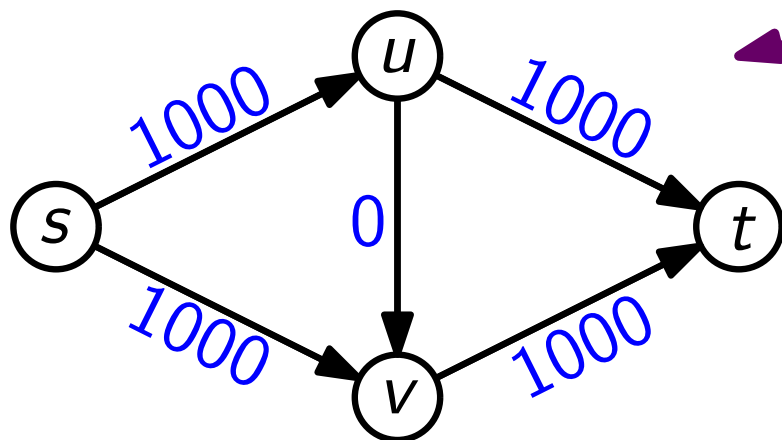
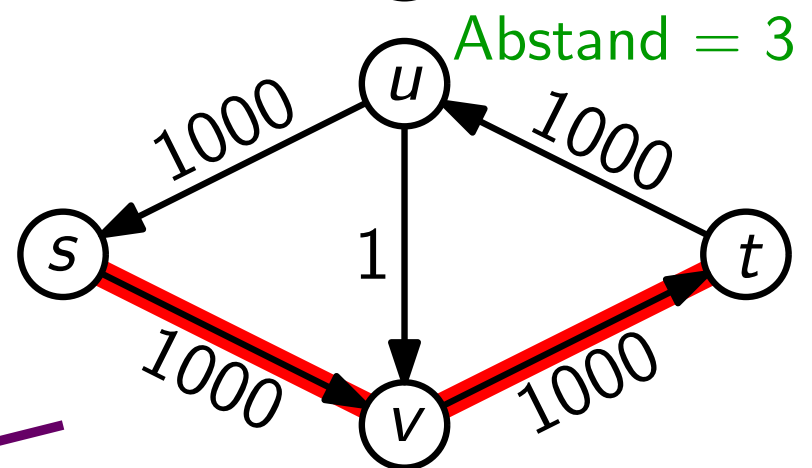
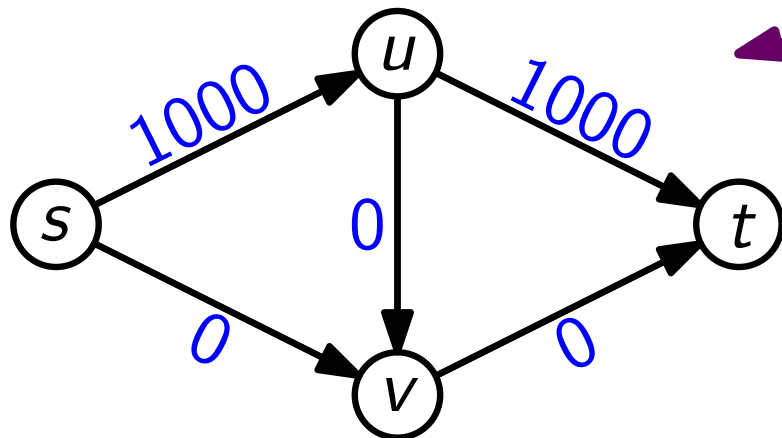
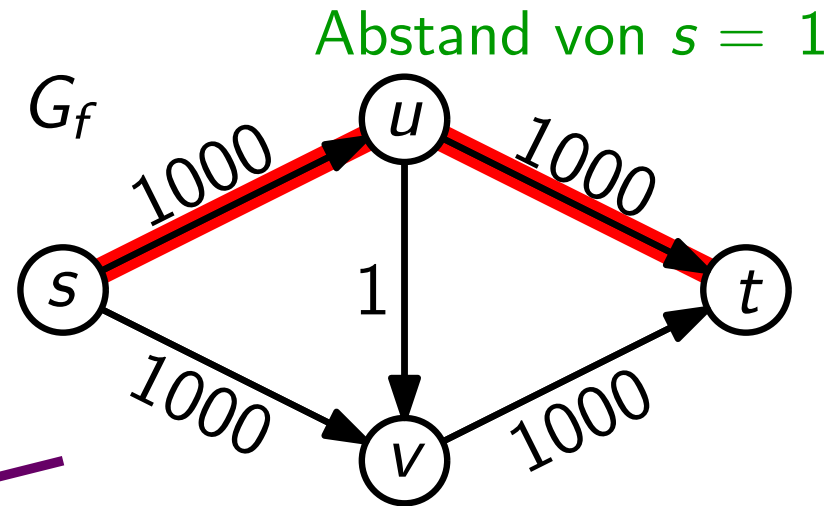
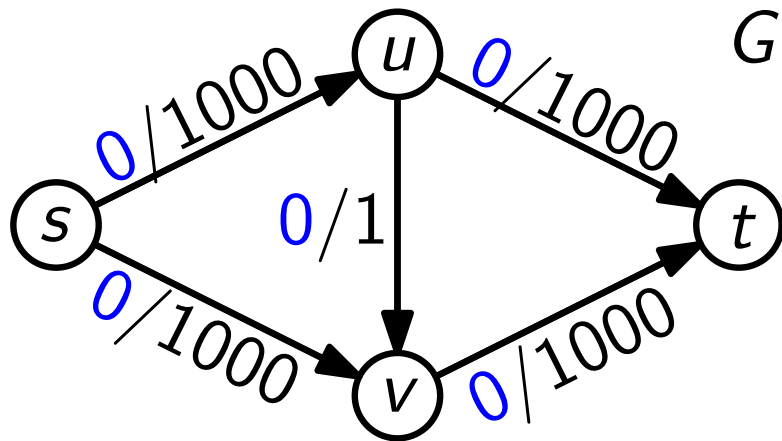
Jack R. Edmonds
*1934



Richard M. Karp
*1935 Boston, MA



Beispiel



FERTIG!

Kürzeste Wege machen effiziente Algorithmen!

Def. Sei $\delta_f(u, v)$ die Länge (= Anz. Kanten) eines kürzesten u - v -Wegs in G_f .

Lemma. Während $\text{EdmondsKarp}(G, s, t)$ gilt für jeden Knoten $v \in V$, dass $\delta_f(s, v)$ mit jeder Flussvergrößerung monoton zunimmt.

Beweis. Annahme: es gibt einen Knoten v derart, dass $\delta_f(s, v)$ bei einer Vergrößerung von f *abnimmt*.

Sei f der Fluss *vor* der Vergrößerung;
sei f' der Fluss *nach* der Vergrößerung.

„kleinster Schurke“

Ab jetzt sei v unter den Knoten mit $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$ einer mit *minimalem* Wert von $\delta_{f'}(s, v)$.

Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s - v -Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W .

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s, v) = \delta_{f'}(s, u) + 1$. [Eig. kürzester Wege]

Nach Wahl von v gilt: $\delta_{f'}(s, u) \geq \delta_f(s, u)$

[u ist kein Schurke;
Abstand nimmt *nicht* ab.]

Beh. $uv \notin E_f$

Beweis. Angenommen $uv \in E_f \Rightarrow \delta_f(s, v) \leq \delta_f(s, u) + 1$
 $\leq \delta_{f'}(s, u) + 1$
 $= \delta_{f'}(s, v)$



Widerspruch zur Annahme, dass $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$. \triangle

Aber wie können wir $uv \notin E_f$ und $uv \in E_{f'}$ erklären??

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

\rightsquigarrow Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$vu \notin E_f$ bedeutet $f(vu) = 0$.

$vu \in E_{f'}$ bedeutet $f'(vu) > 0$.

\rightsquigarrow Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

Der Fluss wird in beiden Fällen **entlang vu vergrößert**.

Da EdmondsKarp entlang kürzester Wege vergrößert, muss v Vorgänger von u auf einem kürzesten s - u -Weg in G_f sein.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta_f(s, v) &= \overset{[u \text{ kein Schurke}]}{\delta_f(s, u) - 1} \leq \overset{[u \text{ liegt auf } W \text{ vor } v]}{\delta_{f'}(s, u) - 1} = \delta_{f'}(s, v) - 2 \\ &< \delta_{f'}(s, v). \quad \text{Widerspr. zur Ann. } \delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v). \end{aligned}$$

□

Anzahl Flusserhöhungen & Laufzeit

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Korollar. Der Edmonds-Karp-Algorithmus läuft in $O(VE^2)$ Zeit.

Beweis. Jede der $O(VE)$ Flussvergrößerungen benötigt $O(E)$ Zeit bei Anwendung von Breitensuche. \square

Beweis (Satz)

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis. Sei f der aktuelle Fluss in G .

Algorithmus vergrößere entlang kürzestem s - t -Weg W in G_f .

Kante uv auf W heißt *kritisch* in G_f , wenn $c_f(uv) = \Delta_W$.

Zeige: Jede Kante kann höchstens $O(V)$ mal kritisch sein.

$\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) + 1$, da uv auf kürzestem Weg W in G_f .

Nach Flussvergrößerung entlang W verschwindet uv aus G_f .

Die Kante uv erscheint erst wieder im Residualgraphen,

nachdem Fluss entlang vu vergrößert wurde $\Rightarrow vu \in E_{f'}$

(f' = Fluss nach Vergrößerung)

Fortsetzung Beweis

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis (Forts.)

Da vu auf kürzestem flussvergrößerndem Weg in $G_{f'}$ liegt, gilt

$$\begin{aligned} \delta_{f'}(s, u) &= \delta_{f'}(s, v) + 1 && \text{voriges Lemma} \\ uv \text{ auf } W \text{ in } G_f &\geq \delta_f(s, v) + 1 \\ &= \delta_f(s, u) + 1 + 1. \end{aligned}$$

Also steigt $\delta_{\square}(s, u)$ bei jeder Flusserhöhung um ≥ 2 .

Kürzeste Wege sind *einfach*, d.h. besuchen jeden Knoten $\leq 1 \times$.

$\Rightarrow \delta_{\square}(s, u) < |V|$, solange u von s erreicht werden kann.

\Rightarrow Die Kante uv kann nur $O(V)$ mal kritisch sein. \square

Kurze Geschichte der Berechnung max. Flüsse

<i>Methode</i>	<i>Laufzeit $O(\cdot)$</i>	<i>Autoren</i>
Allgemeine gerichtete Graphen		
shortest resid. s - t path	VE^2	Dinic '70, Ed. & Karp '72
push relabel	V^2E	Goldberg '87
relabel to front	V^3	Goldberg & Tarjan '88
	$VE \log(V^2/E + 2)$	— " —
blocking flow	$\min(V^{2/3}, E^{1/2}) \cdot E \cdot$ $\cdot \log(V^2/E + 2) \cdot \log C,$	Goldberg & Rao '98 wobei $C = \sum_{e \in E} c(e)$
new	VE	Orlin '13
s-t-planare Graphen		
shortest path in dual	V	Hassin '81 + Henzinger et al. '97
Planare Graphen		
leftmost resid. s - t path	$V \log V$	Borradaile & Klein '06
+ vertex capacities	$V \log V$	Kaplan & Nussbaum '09