



Julius-Maximilians-

**UNIVERSITÄT  
WÜRZBURG**

Lehrstuhl für

**INFORMATIK I**

Algorithmen & Komplexität



Institut für Informatik

# Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2022

3. Vorlesung, Teil B

## Dynamische Programmierung – Das Rucksackproblem

# Das DP von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge  $V$ , Abstände  $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ )

**for**  $i = 2$  **to**  $n$  **do**

  └  $\text{OPT}[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

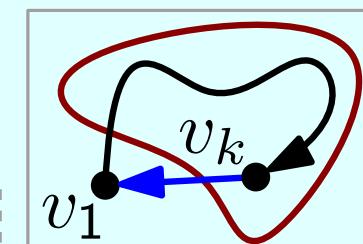
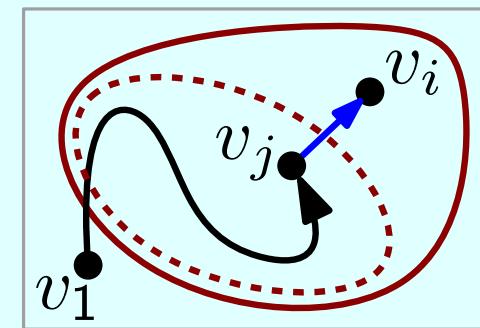
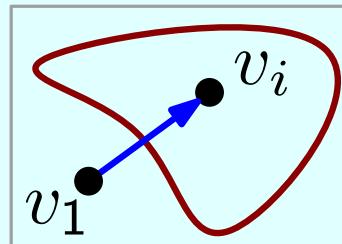
**for**  $j = 2$  **to**  $n - 1$  **do**

**foreach**  $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$  mit  $|W| = j$  **do**

**foreach**  $v_i \in W$  **do**

      └  $\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$

**return**  $\min_{k \neq 1} \text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1)$



# Das DP von Bellman & Held-Karp

`BellmanHeldKarp(Knotenmenge  $V$ , Abstände  $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ )`

**for**  $i = 2$  **to**  $n$  **do**

  └  $\text{OPT}[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

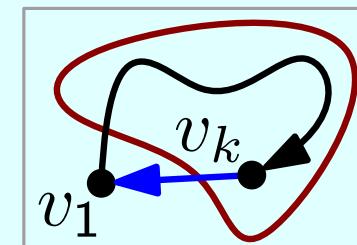
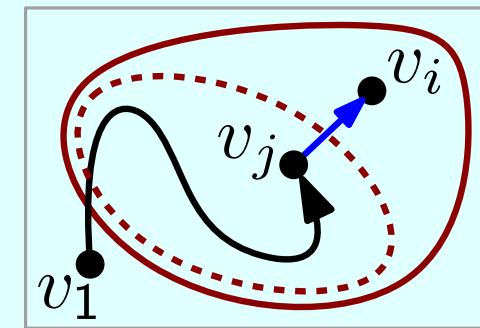
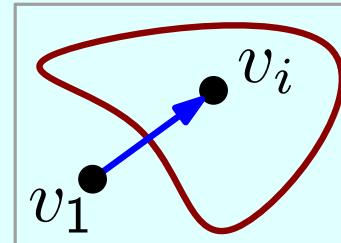
**for**  $j = 2$  **to**  $n - 1$  **do**

**foreach**  $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$  mit  $|W| = j$  **do**

**foreach**  $v_i \in W$  **do**

      └  $\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$

**return**  $\min_{k \neq 1} \text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1)$



Wie viele Paare  $(W, v_i)$  mit  $v_i \in W$  gibt's?

**Speicher:** (= Größe der DP-Tabelle)

# Das DP von Bellman & Held-Karp

`BellmanHeldKarp(Knotenmenge  $V$ , Abstände  $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ )`

**for**  $i = 2$  **to**  $n$  **do**

  └  $\text{OPT}[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

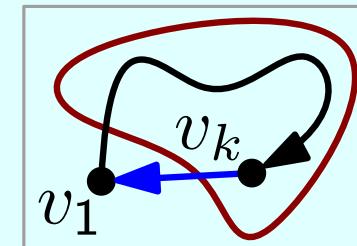
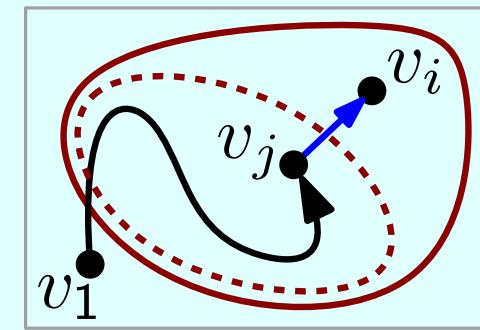
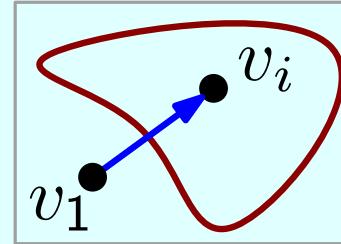
**for**  $j = 2$  **to**  $n - 1$  **do**

**foreach**  $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$  mit  $|W| = j$  **do**

**foreach**  $v_i \in W$  **do**

      └  $\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$

**return**  $\min_{k \neq 1} \text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1)$



Wie viele Paare  $(W, v_i)$  mit  $v_i \in W$  gibt's?  $\leq n \cdot 2^{n-1}$

**Speicher:** (= Größe der DP-Tabelle)

$O(n \cdot 2^n)$

# Das Rucksack-Problem

**Gegeben:** Menge  $U$  von Objekten und für jedes  $i \in U$ :

# Das Rucksack-Problem

**Gegeben:** Menge  $U$  von Objekten und für jedes  $i \in U$ :

- ein Gewicht  $w_i \in \mathbb{Q}^+$ ,
- ein Wert  $v_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

# Das Rucksack-Problem

**Gegeben:** Menge  $U$  von Objekten und für jedes  $i \in U$ :

- ein Gewicht  $w_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

- ein Wert  $v_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

außerdem eine Gewichtsschranke  $W > 0$ .

# Das Rucksack-Problem

**Gegeben:** Menge  $U$  von Objekten und für jedes  $i \in U$ :

- ein Gewicht  $w_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

- ein Wert  $v_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

außerdem eine Gewichtsschranke  $W > 0$ .

**Gesucht:** Teilmenge  $R$  von  $U$ , so dass

# Das Rucksack-Problem

**Gegeben:** Menge  $U$  von Objekten und für jedes  $i \in U$ :

- ein Gewicht  $w_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

- ein Wert  $v_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

außerdem eine Gewichtsschranke  $W > 0$ .

**Gesucht:** Teilmenge  $R$  von  $U$ , so dass

- das Gewicht der Objekte in  $R$  höchstens  $W$  ist:

# Das Rucksack-Problem

**Gegeben:** Menge  $U$  von Objekten und für jedes  $i \in U$ :

- ein Gewicht  $w_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

- ein Wert  $v_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

außerdem eine Gewichtsschranke  $W > 0$ .

**Gesucht:** Teilmenge  $R$  von  $U$ , so dass

- das Gewicht der Objekte in  $R$  höchstens  $W$  ist:

$$\sum_{i \in R} w_i \leq W$$

# Das Rucksack-Problem

**Gegeben:** Menge  $U$  von Objekten und für jedes  $i \in U$ :

- ein Gewicht  $w_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

- ein Wert  $v_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

außerdem eine Gewichtsschranke  $W > 0$ .

**Gesucht:** Teilmenge  $R$  von  $U$ , so dass

- das Gewicht der Objekte in  $R$  höchstens  $W$  ist:

$$\sum_{i \in R} w_i \leq W$$

- der Gesamtwert der Objekte in  $R$  maximal ist:

# Das Rucksack-Problem

**Gegeben:** Menge  $U$  von Objekten und für jedes  $i \in U$ :

- ein Gewicht  $w_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

- ein Wert  $v_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

außerdem eine Gewichtsschranke  $W > 0$ .

**Gesucht:** Teilmenge  $R$  von  $U$ , so dass

- das Gewicht der Objekte in  $R$  höchstens  $W$  ist:

$$\sum_{i \in R} w_i \leq W$$

- der Gesamtwert der Objekte in  $R$  maximal ist:

$$\sum_{i \in R} v_i \text{ max!}$$

# Das Rucksack-Problem

**Gegeben:** Menge  $U$  von Objekten und für jedes  $i \in U$ :

- ein Gewicht  $w_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

- ein Wert  $v_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

außerdem eine Gewichtsschranke  $W > 0$ .

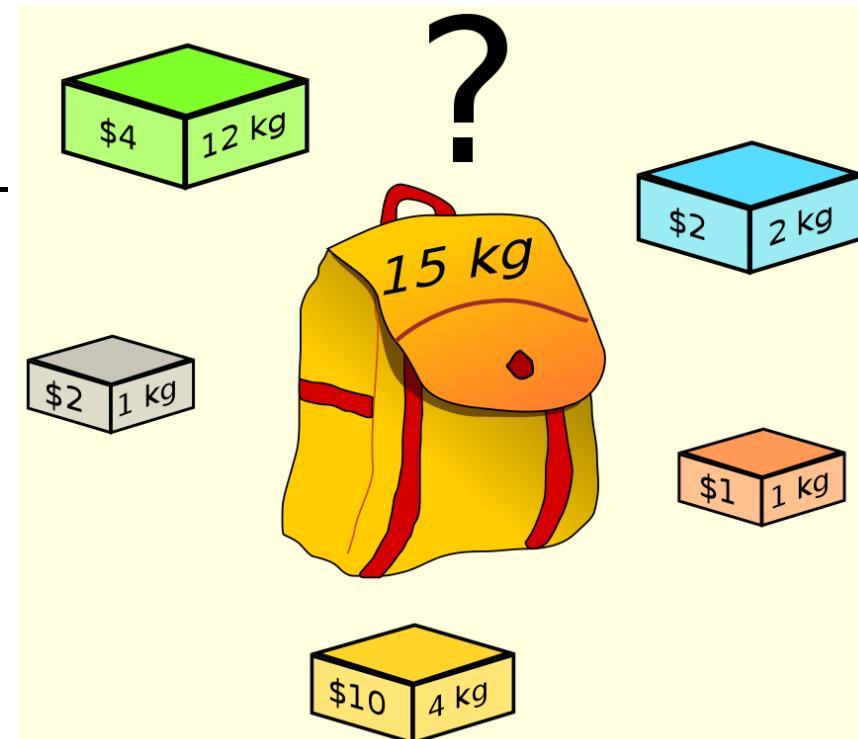
**Gesucht:** Teilmenge  $R$  von  $U$ , so dass

- das Gewicht der Objekte in  $R$  höchstens  $W$  ist:

$$\sum_{i \in R} w_i \leq W$$

- der Gesamtwert der Objekte in  $R$  maximal ist:

$$\sum_{i \in R} v_i \text{ max!}$$



# Bad News

**Satz.** Das Rucksack-Problem ist NP-schwer.

# Bad News

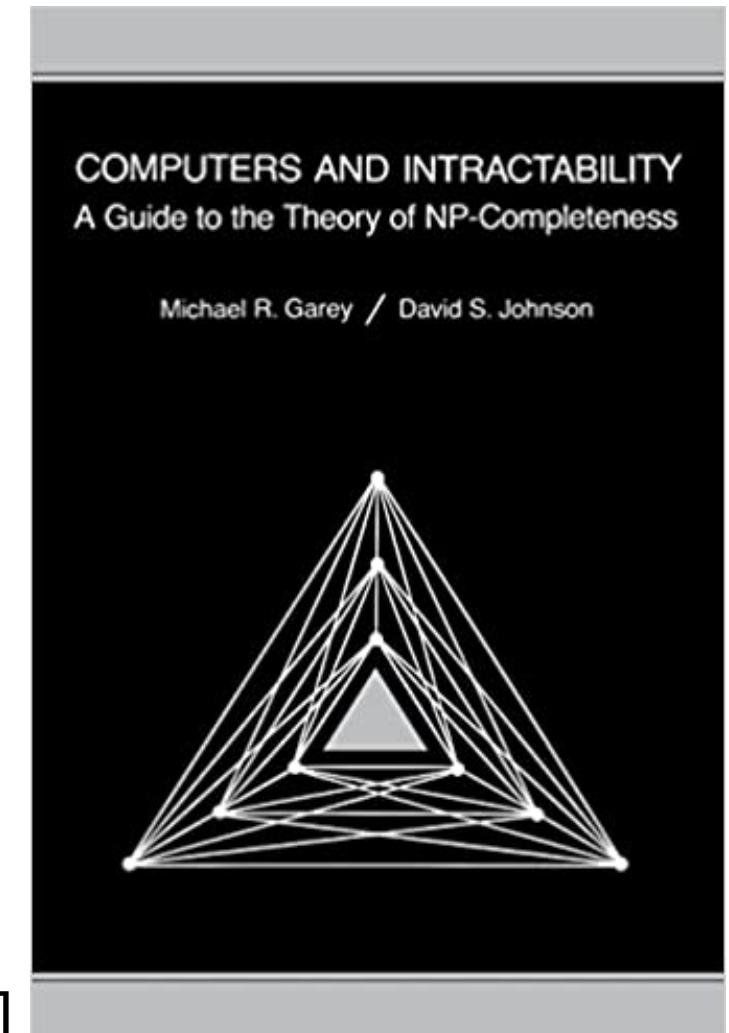
**Satz.** Das Rucksack-Problem ist NP-schwer.

*Beweis.*

# Bad News

**Satz.** Das Rucksack-Problem ist NP-schwer.

*Beweis.* Durch Reduktion vom Problem ...



[siehe Buch von Garey & Johnson]

# Was tun?

Was tun? – Mach das Problem leichter!

# Was tun? – Mach das Problem leichter!

**Gegeben:** Menge  $U$  von Objekten und für jedes  $i \in U$ :

- ein Gewicht  $w_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

- ein Wert  $v_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

außerdem eine Gewichtsschranke  $W > 0$ .

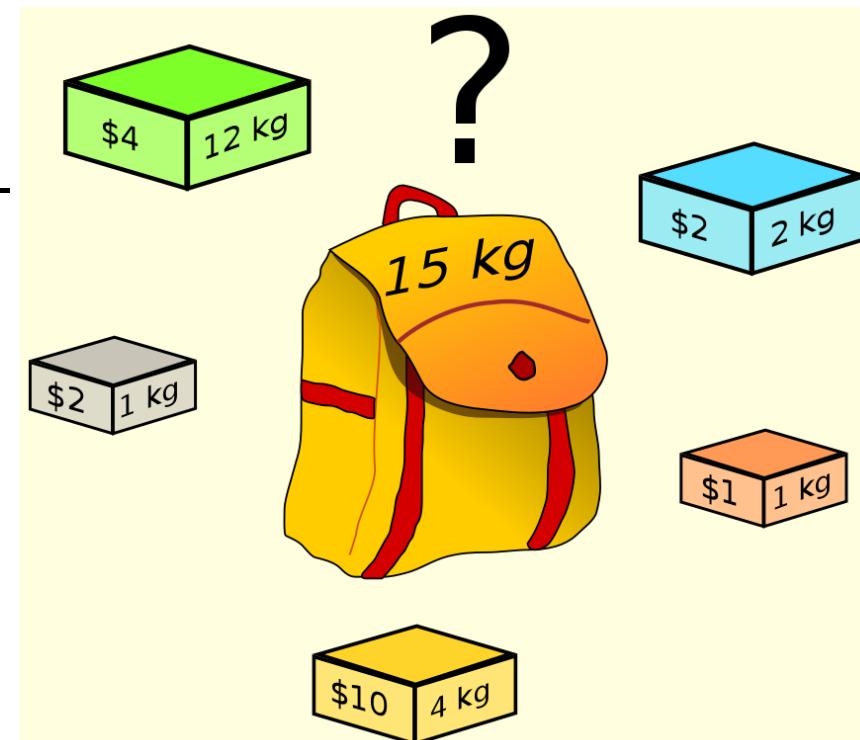
**Gesucht:** Teilmenge  $R$  von  $U$ , so dass

- das Gewicht der Objekte in  $R$  höchstens  $W$  ist:

$$\sum_{i \in R} w_i \leq W$$

- der Gesamtwert der Objekte in  $R$  maximal ist:

$$\sum_{i \in R} v_i \text{ max!}$$



# Was tun? – Mach das Problem leichter!

**Gegeben:** Menge  $U$  von Objekten und für jedes  $i \in U$ :

- ein Gewicht  $w_i \in \mathbb{Q}^+$ ,  $\mathbb{N}$
- ein Wert  $v_i \in \mathbb{Q}^+$ ,

außerdem eine Gewichtsschranke  $W > 0$ .

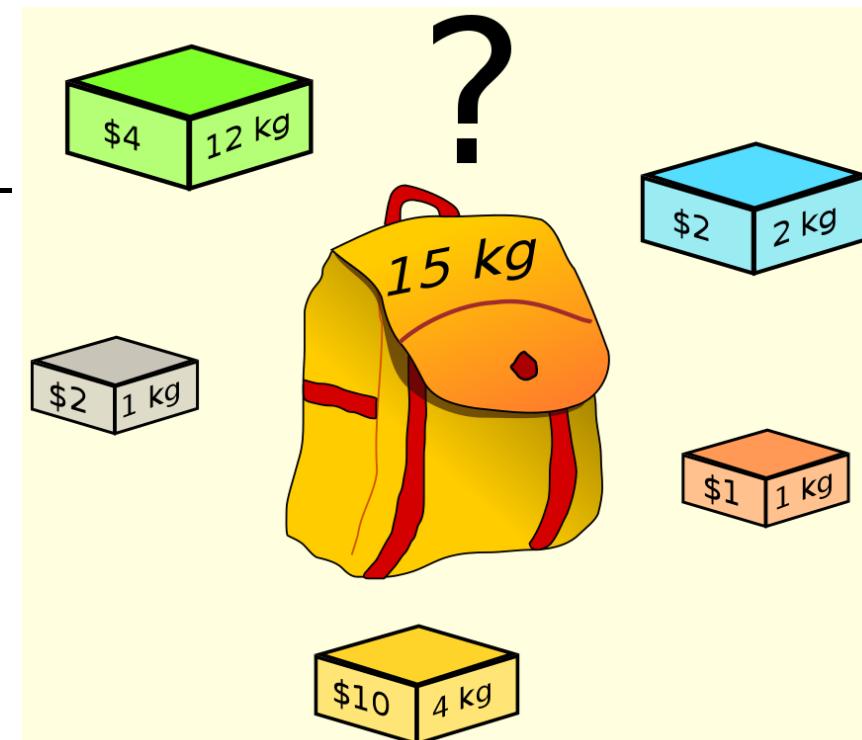
**Gesucht:** Teilmenge  $R$  von  $U$ , so dass

- das Gewicht der Objekte in  $R$  höchstens  $W$  ist:

$$\sum_{i \in R} w_i \leq W$$

- der Gesamtwert der Objekte in  $R$  maximal ist:

$$\sum_{i \in R} v_i \text{ max!}$$



# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte.

# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte. O.B.d.A. sei  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ .

# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte. O.B.d.A. sei  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sei  $w \in \{1, \dots, W\}$  und  $1 \leq i \leq n$ .

# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte. O.B.d.A. sei  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sei  $w \in \{1, \dots, W\}$  und  $1 \leq i \leq n$ .

**Idee:** Def.  $f(i, w) :=$

# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte. O.B.d.A. sei  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sei  $w \in \{1, \dots, W\}$  und  $1 \leq i \leq n$ .

**Idee:** Def.  $f(i, w) :=$  maximaler Wert von  $\sum_{i \in R} v_i$ , wobei

# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte. O.B.d.A. sei  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sei  $w \in \{1, \dots, W\}$  und  $1 \leq i \leq n$ .

**Idee:** Def.  $f(i, w) :=$  maximaler Wert von  $\sum_{i \in R} v_i$ , wobei  
 $R \subseteq \{1, 2, \dots, i\}$  und  $\sum_{i \in R} w_i \leq w$ .

# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte. O.B.d.A. sei  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sei  $w \in \{1, \dots, W\}$  und  $1 \leq i \leq n$ .

**Idee:** Def.  $f(i, w) :=$  maximaler Wert von  $\sum_{i \in R} v_i$ , wobei  
 $R \subseteq \{1, 2, \dots, i\}$  und  $\sum_{i \in R} w_i \leq w$ .

Dann suchen wir  $f(\quad)$ .

# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte. O.B.d.A. sei  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sei  $w \in \{1, \dots, W\}$  und  $1 \leq i \leq n$ .

**Idee:** Def.  $f(i, w) :=$  maximaler Wert von  $\sum_{i \in R} v_i$ , wobei  
 $R \subseteq \{1, 2, \dots, i\}$  und  $\sum_{i \in R} w_i \leq w$ .

Dann suchen wir  $f(n, W)$ .

# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte. O.B.d.A. sei  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sei  $w \in \{1, \dots, W\}$  und  $1 \leq i \leq n$ .

**Idee:** Def.  $f(i, w) :=$  maximaler Wert von  $\sum_{i \in R} v_i$ , wobei  
 $R \subseteq \{1, 2, \dots, i\}$  und  $\sum_{i \in R} w_i \leq w$ .

Dann suchen wir  $f(n, W)$ .

**Berechnung.**

$$f(1, w) =$$

# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte. O.B.d.A. sei  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sei  $w \in \{1, \dots, W\}$  und  $1 \leq i \leq n$ .

**Idee:** Def.  $f(i, w) :=$  maximaler Wert von  $\sum_{i \in R} v_i$ , wobei  
 $R \subseteq \{1, 2, \dots, i\}$  und  $\sum_{i \in R} w_i \leq w$ .

Dann suchen wir  $f(n, W)$ .

$$f(1, w) = \begin{cases} v_1 & \text{if } w \geq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

**Berechnung.**

# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte. O.B.d.A. sei  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sei  $w \in \{1, \dots, W\}$  und  $1 \leq i \leq n$ .

**Idee:** Def.  $f(i, w) :=$  maximaler Wert von  $\sum_{i \in R} v_i$ , wobei  
 $R \subseteq \{1, 2, \dots, i\}$  und  $\sum_{i \in R} w_i \leq w$ .

Dann suchen wir  $f(n, W)$ .

$$f(1, w) = \begin{cases} v_1 & \text{falls } w_1 \leq w, \\ & \vdots \end{cases}$$

**Berechnung.**

# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte. O.B.d.A. sei  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sei  $w \in \{1, \dots, W\}$  und  $1 \leq i \leq n$ .

**Idee:** Def.  $f(i, w) :=$  maximaler Wert von  $\sum_{i \in R} v_i$ , wobei  
 $R \subseteq \{1, 2, \dots, i\}$  und  $\sum_{i \in R} w_i \leq w$ .

Dann suchen wir  $f(n, W)$ .

$$f(1, w) = \begin{cases} v_1 & \text{falls } w_1 \leq w, \\ & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Berechnung.**

# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte. O.B.d.A. sei  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sei  $w \in \{1, \dots, W\}$  und  $1 \leq i \leq n$ .

**Idee:** Def.  $f(i, w) :=$  maximaler Wert von  $\sum_{i \in R} v_i$ , wobei  
 $R \subseteq \{1, 2, \dots, i\}$  und  $\sum_{i \in R} w_i \leq w$ .

Dann suchen wir  $f(n, W)$ .

$$f(1, w) = \begin{cases} v_1 & \text{falls } w_1 \leq w, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Berechnung.**

# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte. O.B.d.A. sei  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sei  $w \in \{1, \dots, W\}$  und  $1 \leq i \leq n$ .

**Idee:** Def.  $f(i, w) :=$  maximaler Wert von  $\sum_{i \in R} v_i$ , wobei  
 $R \subseteq \{1, 2, \dots, i\}$  und  $\sum_{i \in R} w_i \leq w$ .

Dann suchen wir  $f(n, W)$ .

$$f(1, w) = \begin{cases} v_1 & \text{falls } w_1 \leq w, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Berechnung.**

und für  $2 \leq i \leq n$ :

$$f(i, w) =$$

# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte. O.B.d.A. sei  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sei  $w \in \{1, \dots, W\}$  und  $1 \leq i \leq n$ .

**Idee:** Def.  $f(i, w) :=$  maximaler Wert von  $\sum_{i \in R} v_i$ , wobei  
 $R \subseteq \{1, 2, \dots, i\}$  und  $\sum_{i \in R} w_i \leq w$ .

Dann suchen wir  $f(n, W)$ .

$$f(1, w) = \begin{cases} v_1 & \text{falls } w_1 \leq w, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Berechnung.**

und für  $2 \leq i \leq n$ :

$$f(i, w) = \begin{cases} & \text{if } w_i \leq w, \\ & \text{else.} \end{cases}$$

# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte. O.B.d.A. sei  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sei  $w \in \{1, \dots, W\}$  und  $1 \leq i \leq n$ .

**Idee:** Def.  $f(i, w) :=$  maximaler Wert von  $\sum_{i \in R} v_i$ , wobei  
 $R \subseteq \{1, 2, \dots, i\}$  und  $\sum_{i \in R} w_i \leq w$ .

Dann suchen wir  $f(n, W)$ .

$$f(1, w) = \begin{cases} v_1 & \text{falls } w_1 \leq w, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Berechnung.**

und für  $2 \leq i \leq n$ :

$$f(i, w) = \begin{cases} f(i - 1, w) & \text{if } w_i \leq w, \\ f(i - 1, w + w_i) & \text{else.} \end{cases}$$

# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte. O.B.d.A. sei  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sei  $w \in \{1, \dots, W\}$  und  $1 \leq i \leq n$ .

**Idee:** Def.  $f(i, w) :=$  maximaler Wert von  $\sum_{i \in R} v_i$ , wobei  
 $R \subseteq \{1, 2, \dots, i\}$  und  $\sum_{i \in R} w_i \leq w$ .

Dann suchen wir  $f(n, W)$ .

$$f(1, w) = \begin{cases} v_1 & \text{falls } w_1 \leq w, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Berechnung.**

und für  $2 \leq i \leq n$ :

$$f(i, w) = \begin{cases} v_i + f(i - 1, w - w_i) & \text{if } w_i \leq w, \\ f(i - 1, w) & \text{else.} \end{cases}$$

# Rekursive Definition

Sei  $n$  die Anzahl der Objekte. O.B.d.A. sei  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sei  $w \in \{1, \dots, W\}$  und  $1 \leq i \leq n$ .

**Idee:** Def.  $f(i, w) :=$  maximaler Wert von  $\sum_{i \in R} v_i$ , wobei  
 $R \subseteq \{1, 2, \dots, i\}$  und  $\sum_{i \in R} w_i \leq w$ .

Dann suchen wir  $f(n, W)$ .

$$f(1, w) = \begin{cases} v_1 & \text{falls } w_1 \leq w, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Berechnung.**

und für  $2 \leq i \leq n$ :

$$f(i, w) = \begin{cases} \max\{v_i + f(i - 1, w - w_i), f(i - 1, w)\} & \text{if } w_i \leq w, \\ f(i - 1, w) & \text{else.} \end{cases}$$

# Dynamisches Programm

Probieren Sie selbst, die Einträge der DP-Tabelle  $f[i, w]$  in der richtigen Reihenfolge zu befüllen!

# Ausblick

Master-Vorlesung „Advanced Algorithms“

Spannendes Video (30') von Thomas van Dijk zu praktischen Aspekten der Implementierung eines Algorithmus für das Rucksack-Problem:

<https://go.uniwue.de/algoprac4>