Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2021/22
25. Vorlesung

Leichte Kreise in Graphen

Prof. Dr. Alexander Wolff

Lehrstuhl für Informatik I

Kürzeste Kreise

– Gewichteter und ungewichteter Fall

– Gerichteter und ungerichteter Fall

Z.B. für einen ungewichteten und ungerichteten Graphen G:

Für einen Knoten v liefert BFS(G, v) – bis zur ersten Nicht-Baumkante – einen kürzesten Kreis C_v durch v.

Der kürzeste der Kreise in der Menge $\{C_v \mid v \in V\}$ ist ein kürzester Kreis in G.

Laufzeit: $O(V^2)$ – Warum??

Minimales durchschnittliches Kantengewicht

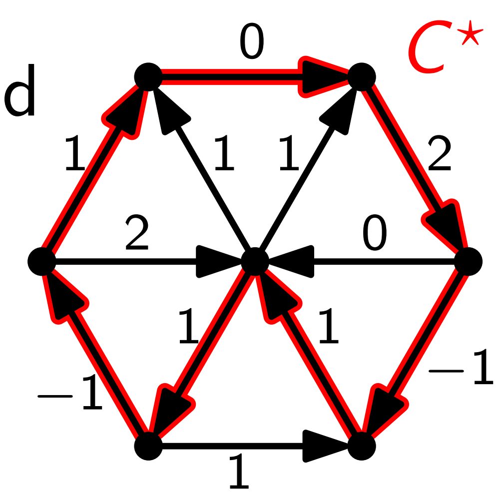
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w\colon E \to \mathbb{R}$. Sei $n = |V|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

$\mu^\star = \mu(C^\star) = \frac{3}{7}$



Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^\star = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis $C^\star$ mit $\mu(C^\star) = \mu^\star$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

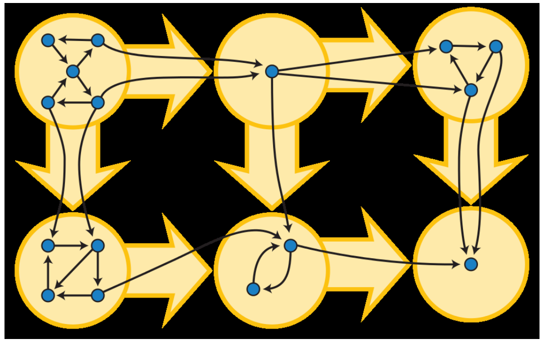
MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph G, w)
- $\mu_{\min} = \infty$
- **foreach** $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$ **do**
  - $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} w(e_i)$
  - **if** $\mu < \mu_{\min}$ **then**
    - $\mu_{\min} = \mu$
    - $C' = C$
- **return** C'

Laufzeit? *Mindestens exponentiell in* $|V|$ *:-(*
höchstens exponentiell in $|E|$

Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G *stark zusammenhängend* ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u-v-Weg.

Ansonsten zerlegen wir G in seine starken Zusammenhangs-komponenten (wie?*) und betrachten jede separat.



Sei s ein beliebiger Knoten von G.

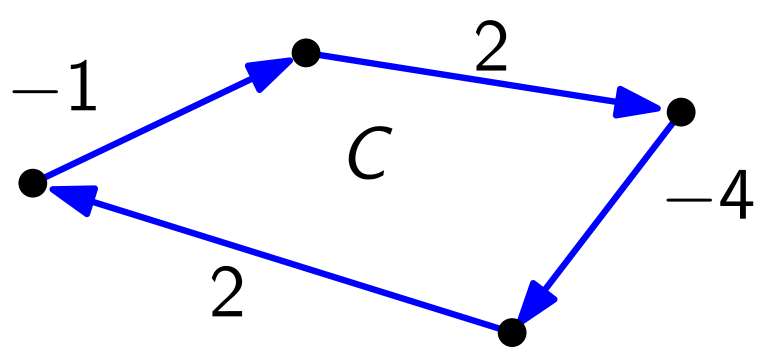
Sei $\delta(s, v)$ das Gewicht eines kürzesten (leichtesten) s-v-Wegs.

Für $k = 0, \ldots, n-1$ sei $\delta_k(s, v)$ das Gewicht eines kürzesten s-v-Wegs, der aus *genau* k Kanten besteht (sonst ∞).

*) Im Prinzip durch ein oder zwei Tiefensuchen (siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component)

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^\star = 0$, dann gilt:
1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und ✓
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \le k \le n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v. ✓



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.
   $\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^\star < 0$ ↯
2. Betrachte s-v-Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.
   $\Rightarrow \pi$ enthält Kreis C. Aber $w(C) \geq 0$. $\Rightarrow w(\pi \setminus C) \leq w(\pi)$
   $\Rightarrow$ Es gibt einen kürzesten s-v-Weg mit $\leq n - 1$ Kanten.

Schritt II

Falls $\mu^\star = 0$, dann gilt:
– G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
– $\delta(s, v) = \min_{0 \le k \le n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v. (*)

Zeige: Falls $\mu^\star = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \ge 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \ge \delta(s, v)$

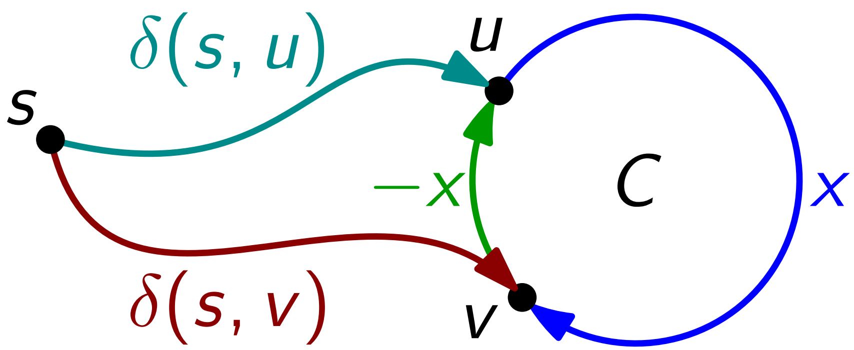
Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Also gilt $\delta_n(s, v) \ge \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

$\Rightarrow \max_{0 \le k \le n-1} \delta_n(s, v) - \delta_k(s, v) \ge 0 \underset{n-k>0}{\Rightarrow}$ Beh. $\square$

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C.
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C.



$w(C) = 0$

Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Angenommen, es gälte $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$.

$\Rightarrow \quad \delta(s, v) - x < \delta(s, u)$ ↯ zur Def. von δ. $\square$

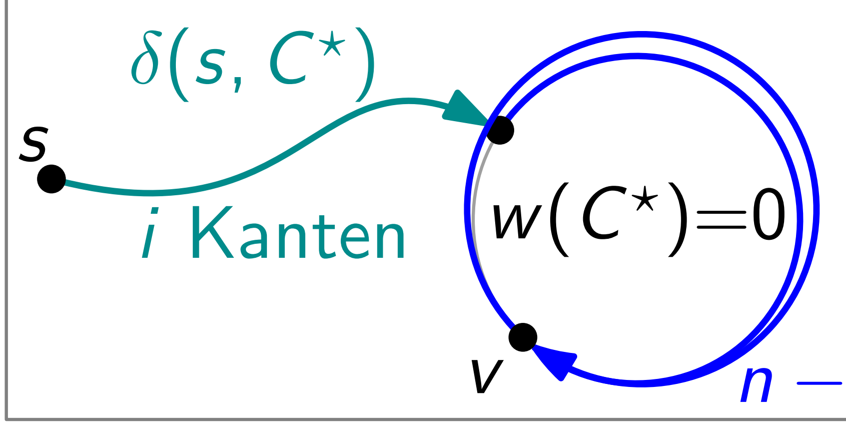
Schritt IV

Falls $\mu^\star = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} \ge 0.$$

Zeige:
Falls $\mu^\star = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis $C^\star$, so dass

$$\max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} = 0.$$



Bestimme $v \in C^\star$: gehe von s aus n Kanten

Schritt III für *dieses* v:
$\Rightarrow \delta_n(s,v) = \delta(s,v)$.
$\Rightarrow \delta_n(s,v) \le \delta_k(s,v)$!!
Aber für welches k gilt
$\delta_n(s,v) = \delta_k(s,v)$?
z.B. $k = n - |C^\star|$, denn $w(C^\star) = 0$ und $|C^\star| \le n$.

Schritt V

Falls $\mu^\star = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} \ge 0.$$

Falls $\mu^\star = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis $C^\star$, so dass

$$\max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} = 0.$$

Zeige:
Falls $\mu^\star = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} = \mathbf{0}.$$

Klar...

Schritt VI

Falls $\mu^\star = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt $\mu^\star$ um t.

Schritt VI

Falls $\mu^\star = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} = 0.$$

Zeige:
Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt $\mu^\star$ um t.

Zeige damit, dass

$$\mu^\star \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \le k \le n-1} \underbrace{\frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k}}.$$

Zeige: Steigt *auch* um t, wenn alle Gew. um t erhöht werden.

Schritt VI

Falls $\mu^\star = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} = 0.$$

Zeige:
Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt $\mu^\star$ um t.

Zeige damit, dass

$$\mu^\star \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \le k \le n-1} \underbrace{\frac{\overbrace{\overbrace{\delta_n(s,v)}^{+nt} - \overbrace{\delta_k(s,v)}^{+kt}}^{+\frac{nt-kt}{n-k} = +t}}{n-k}}.$$

Zeige: Steigt *auch* um t, wenn alle Gew. um t erhöht werden. ✓

Schritt VI

Falls $\mu^\star = 0$, dann

$$\left.\min_{v\in V}\ \max_{0\le k\le n-1} \frac{\delta_n(s,v)-\delta_k(s,v)}{n-k} = 0.\right\}\ (**)$$

Zeige:
Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt $\mu^\star$ um t.

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^\star} \overset{?!}{=} \boxed{\min_{v\in V}\ \max_{0\le k\le n-1} \frac{\overbrace{\underbrace{\overbrace{\delta_n(s,v)}^{+nt}-\overbrace{\delta_k(s,v)}^{+kt}}}^{+\frac{nt-kt}{n-k}=+t}}{n-k}} =: \beta(t)$$

Zeige: Steigt *auch* um t, wenn alle Gew. um t erhöht werden. ✓

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t mit $\alpha(-\mu^\star) \underset{(**)}{=} \beta(-\mu^\star)$ und Steigung 1 $\Rightarrow \alpha \equiv \beta$. □

Schritt VII

[Karp, 1978]

Es gilt

$$\mu^\star \overset{(***)}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k}.$$

Satz. Ein Kreis $C^\star$ mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^\star) = \mu^\star$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der $\mu^\star$ in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s,s) = 0$ und, für $v \in V \setminus \{s\}$, setze $\delta_0(s,v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$ und $v \in V$, berechne in $O(\text{indeg } v)$ Zeit

$$\delta_k(s,v) = \min_{u\colon uv \in E} \delta_{k-1}(s,u) + w(u,v).$$

Dies benötigt insg. $O(VE)$ Zeit.

Das ist ein kleines dynamisches Programm! :-)

- Berechne $\mu^\star$ nach (***) in $O(V^2)$ Zeit. $\square$