

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2021/22

25. Vorlesung

Leichte Kreise in Graphen

Kürzeste Kreise

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Kürzeste Kreise

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Z.B. für einen ungewichteten und ungerichteten Graphen G :

Kürzeste Kreise

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Z.B. für einen ungewichteten und ungerichteten Graphen G :

Für einen Knoten v liefert $\text{BFS}(G, v)$ – bis zur ersten Nicht-Baumkante – einen kürzesten Kreis C_v durch v .

Kürzeste Kreise

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Z.B. für einen ungewichteten und ungerichteten Graphen G :

Für einen Knoten v liefert $\text{BFS}(G, v)$ – bis zur ersten Nicht-Baumkante – einen kürzesten Kreis C_v durch v .

Der kürzeste der Kreise in der Menge $\{C_v \mid v \in V\}$ ist ein kürzester Kreis in G .

Kürzeste Kreise

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Z.B. für einen ungewichteten und ungerichteten Graphen G :

Für einen Knoten v liefert $\text{BFS}(G, v)$ – bis zur ersten Nicht-Baumkante – einen kürzesten Kreis C_v durch v .

Der kürzeste der Kreise in der Menge $\{C_v \mid v \in V\}$ ist ein kürzester Kreis in G .

Laufzeit:

Kürzeste Kreise

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Z.B. für einen ungewichteten und ungerichteten Graphen G :

Für einen Knoten v liefert $\text{BFS}(G, v)$ – bis zur ersten Nicht-Baumkante – einen kürzesten Kreis C_v durch v .

Der kürzeste der Kreise in der Menge $\{C_v \mid v \in V\}$ ist ein kürzester Kreis in G .

Laufzeit: $O(V^2)$

Kürzeste Kreise

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Z.B. für einen ungewichteten und ungerichteten Graphen G :

Für einen Knoten v liefert $\text{BFS}(G, v)$ – bis zur ersten Nicht-Baumkante – einen kürzesten Kreis C_v durch v .

Der kürzeste der Kreise in der Menge $\{C_v \mid v \in V\}$ ist ein kürzester Kreis in G .

Laufzeit: $O(V^2)$ – Warum??

Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E \rightarrow \mathbb{R}$.

Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V|$.

Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).

Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

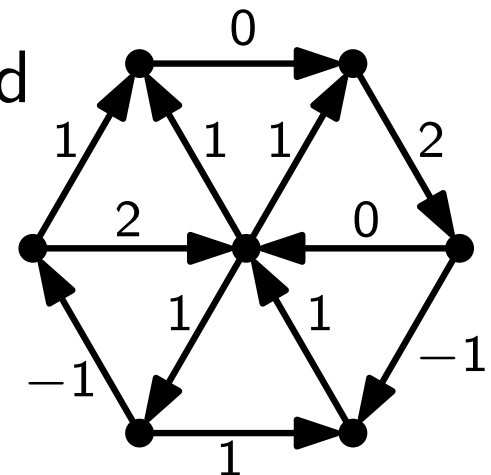
$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

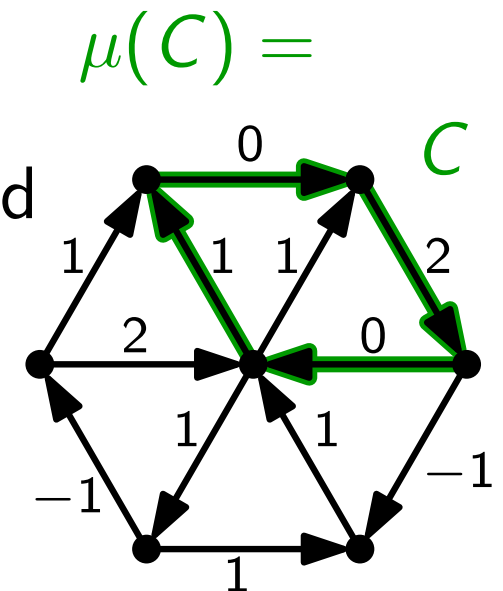
$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

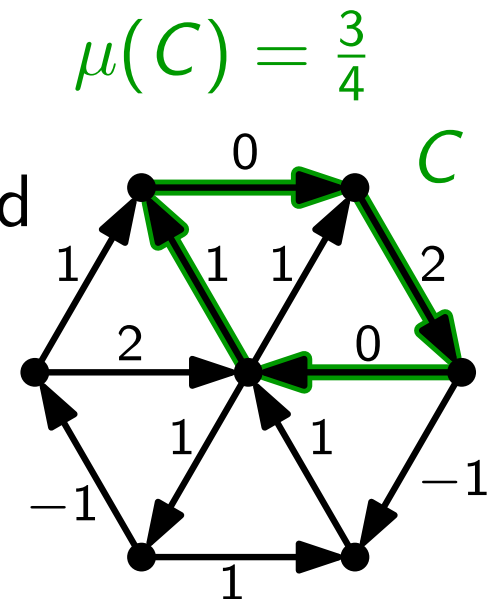
$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

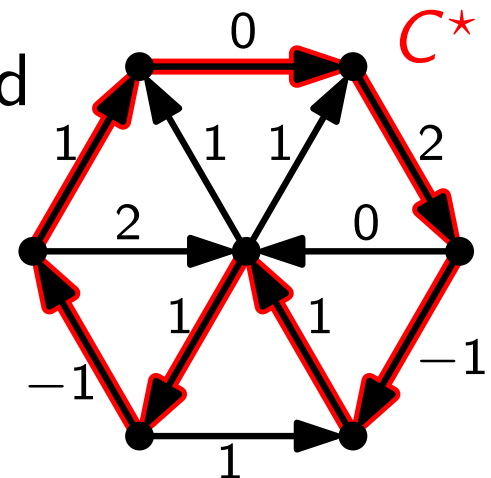
$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

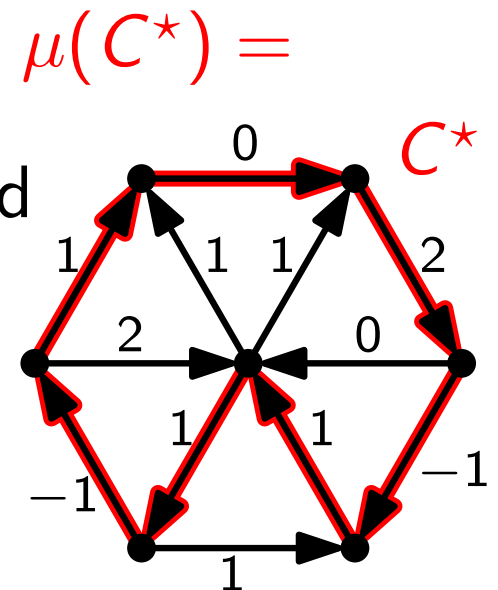
$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

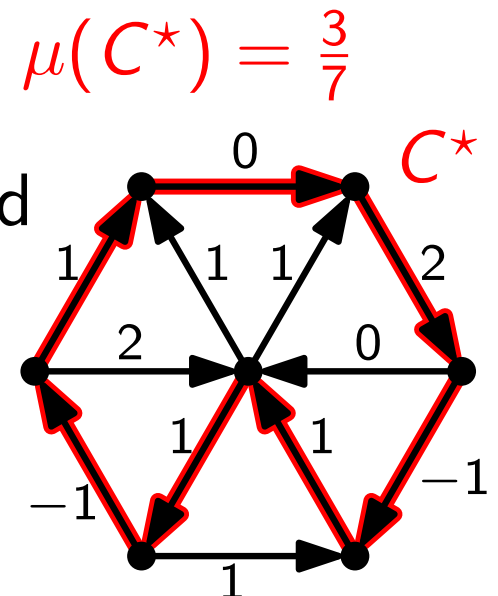
$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

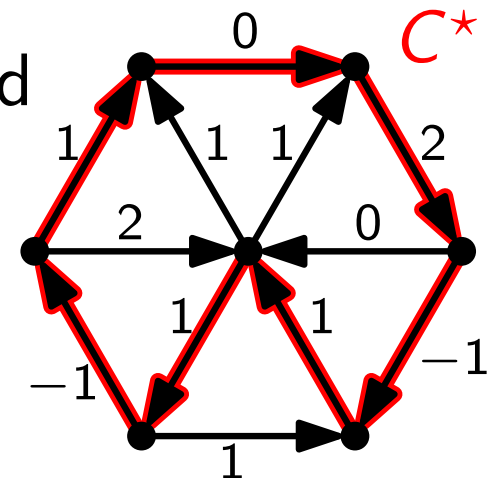
sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

$$\mu^* = \mu(C^*) = \frac{3}{7}$$

Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```
MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph G, w)
```

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```
MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph  $G$ ,  $w$ )
```

```
   $\mu_{\min} = \infty$ 
```

```
  foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
```

```
    |
```

```
  return  $C'$ 
```

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph G , w)

$\mu_{\min} = \infty$

foreach $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$ **do**

$\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$

if $\mu < \mu_{\min}$ **then**

$\mu_{\min} = \mu$

$C' = C$

return C'

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```

MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph  $G$ ,  $w$ )
   $\mu_{\min} = \infty$ 
  foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
     $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$ 
    if  $\mu < \mu_{\min}$  then
       $\mu_{\min} = \mu$ 
       $C' = C$ 
  return  $C'$ 

```

Laufzeit?

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```

MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph  $G$ ,  $w$ )
   $\mu_{\min} = \infty$ 
  foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
     $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$ 
    if  $\mu < \mu_{\min}$  then
       $\mu_{\min} = \mu$ 
       $C' = C$ 
  return  $C'$ 

```

Laufzeit? *Mindestens exponentiell in $|V|$:-)*

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```

MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph  $G$ ,  $w$ )
   $\mu_{\min} = \infty$ 
  foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
     $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$ 
    if  $\mu < \mu_{\min}$  then
       $\mu_{\min} = \mu$ 
       $C' = C$ 
  return  $C'$ 

```

Laufzeit? *Mindestens exponentiell in $|V|$:-(
höchstens exponentiell*

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```

MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph  $G$ ,  $w$ )
   $\mu_{\min} = \infty$ 
  foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
     $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$ 
    if  $\mu < \mu_{\min}$  then
       $\mu_{\min} = \mu$ 
       $C' = C$ 
  return  $C'$ 

```

Laufzeit? *Mindestens exponentiell in $|V|$:-(
höchstens exponentiell in $|E|$*

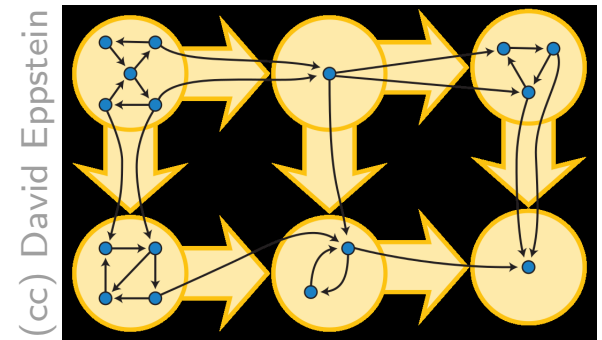
Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G *stark zusammenhängend* ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G *stark zusammenhängend* ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

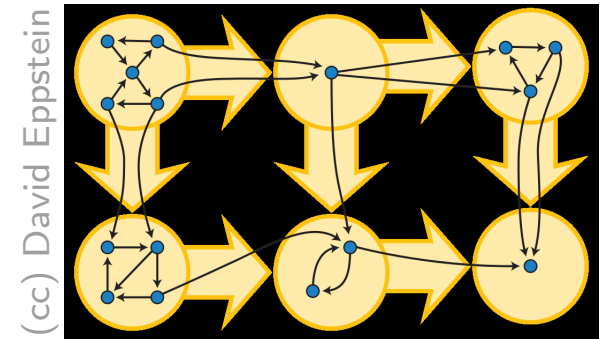
Ansonsten zerlegen wir G in seine starken Zusammenhangskomponenten (wie?) und betrachten jede separat.



Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G *stark zusammenhängend* ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

Ansonsten zerlegen wir G in seine starken Zusammenhangskomponenten (wie?*) und betrachten jede separat.



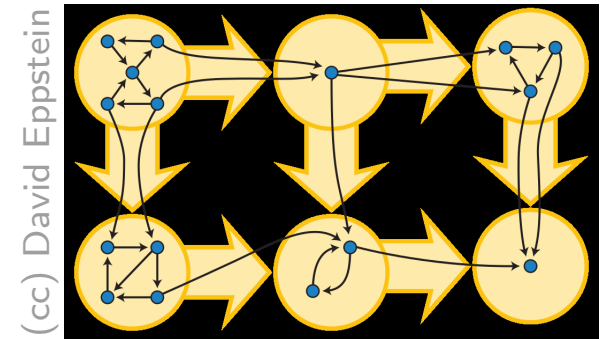
*) Im Prinzip durch ein oder zwei Tiefensuchen (siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component)

Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G *stark zusammenhängend* ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

Ansonsten zerlegen wir G in seine starken Zusammenhangskomponenten (wie?*) und betrachten jede separat.

Sei s ein beliebiger Knoten von G .



*) Im Prinzip durch ein oder zwei Tiefensuchen (siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component)

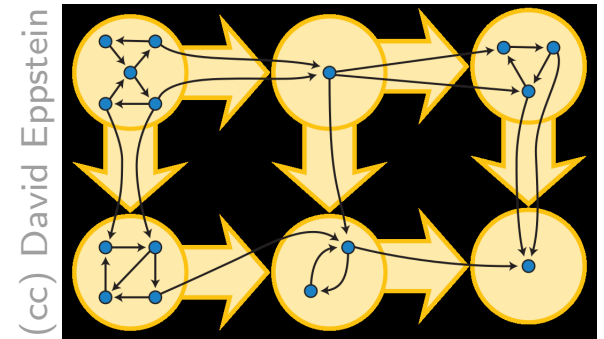
Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G *stark zusammenhängend* ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

Ansonsten zerlegen wir G in seine starken Zusammenhangskomponenten (wie?*) und betrachten jede separat.

Sei s ein beliebiger Knoten von G .

Sei $\delta(s, v)$ das Gewicht eines kürzesten (leichtesten) s - v -Wegs.



*) Im Prinzip durch ein oder zwei Tiefensuchen (siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component)

Vorbereitungen

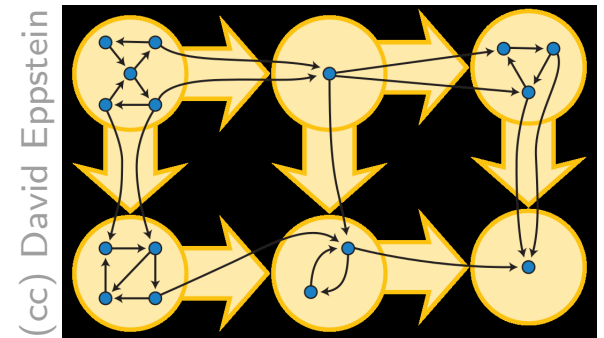
Wir nehmen an, dass G *stark zusammenhängend* ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

Ansonsten zerlegen wir G in seine starken Zusammenhangskomponenten (wie?*) und betrachten jede separat.

Sei s ein beliebiger Knoten von G .

Sei $\delta(s, v)$ das Gewicht eines kürzesten (leichtesten) s - v -Wegs.

Für $k = 0, \dots, n - 1$ sei $\delta_k(s, v)$ das Gewicht eines kürzesten s - v -Wegs, der aus *genau* k Kanten besteht (sonst ∞).

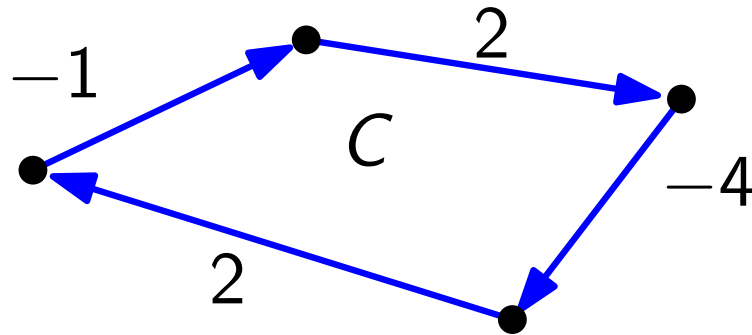


*) Im Prinzip durch ein oder zwei Tiefensuchen (siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component)

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

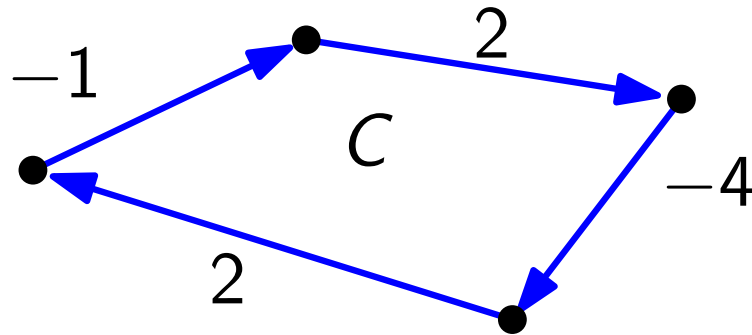
1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .



Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .

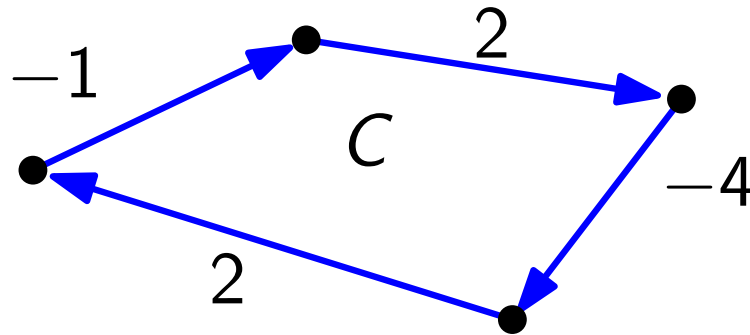


Beweis.

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .



Beweis.

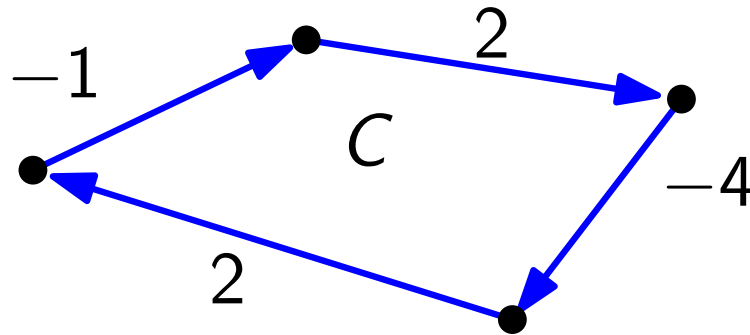
1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$\Rightarrow$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .



Beweis.

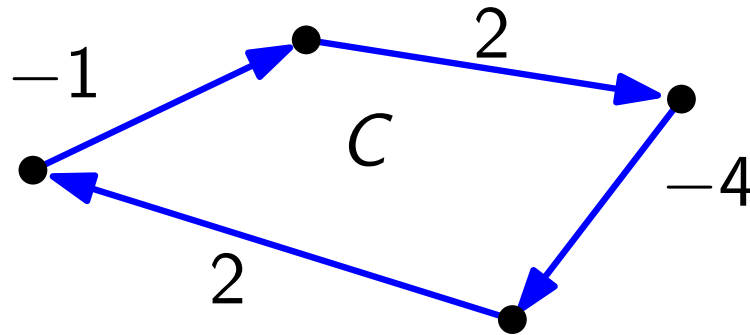
1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C)$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .



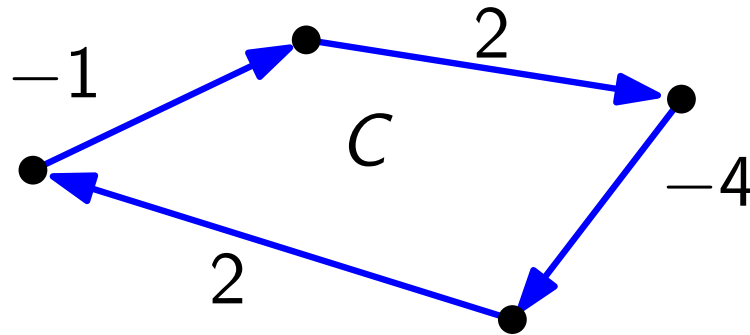
Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.
 $\Rightarrow \mu(C) < 0$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .



Beweis.

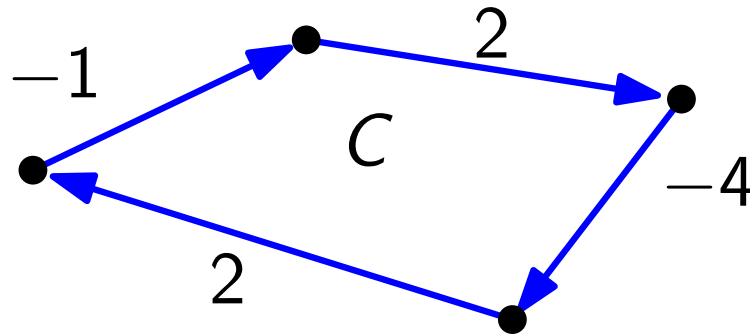
1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .



Beweis.

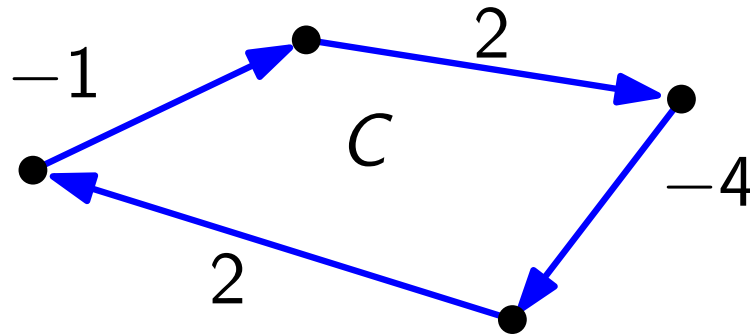
1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^*$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .



Beweis.

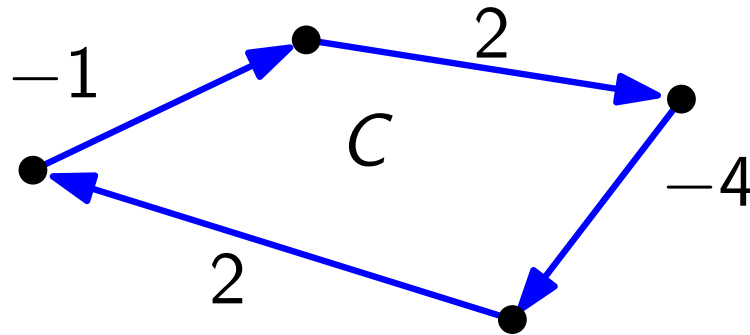
1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .



Beweis.

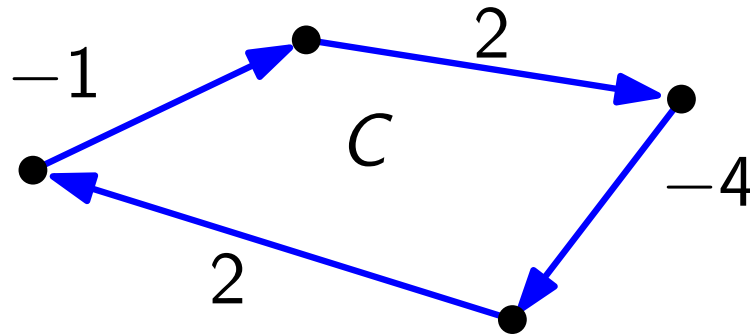
1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$$


Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

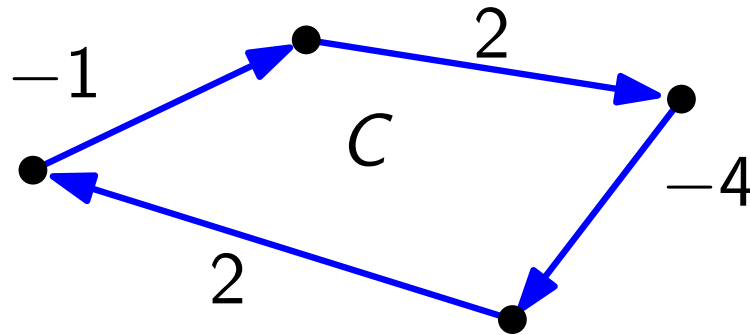
$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$$



Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$$

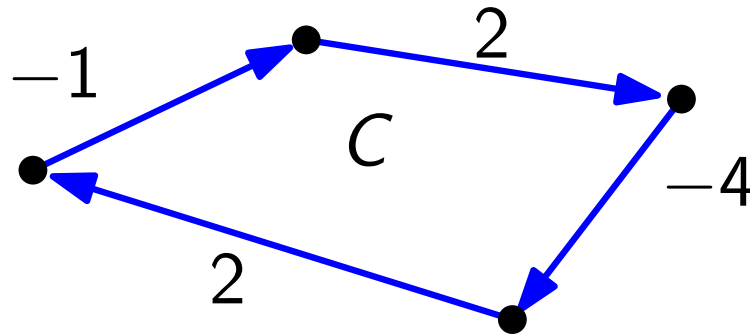
2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.

$\Rightarrow$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$$

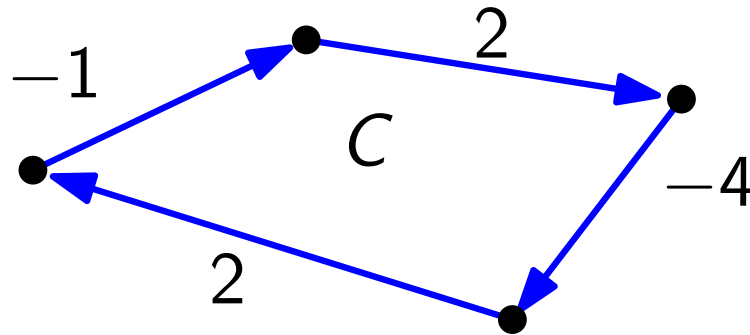

2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.

$$\Rightarrow \pi \text{ enthält Kreis } C.$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$$

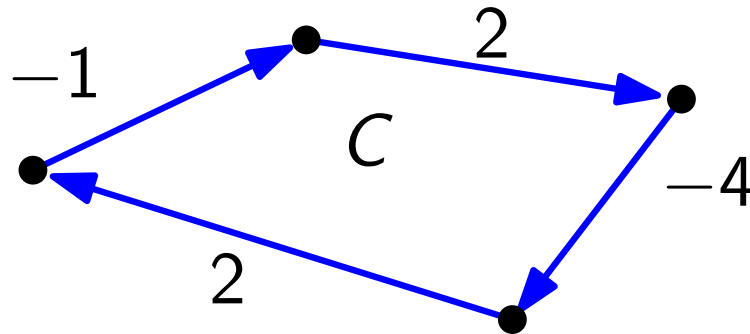

2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.

$$\Rightarrow \pi \text{ enthält Kreis } C. \text{ Aber } w(C) \geq 0.$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$$

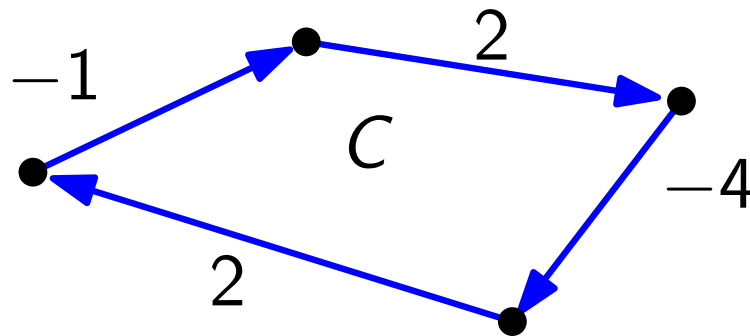

2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.

$$\Rightarrow \pi \text{ enthält Kreis } C. \text{ Aber } w(C) \geq 0. \Rightarrow$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$$

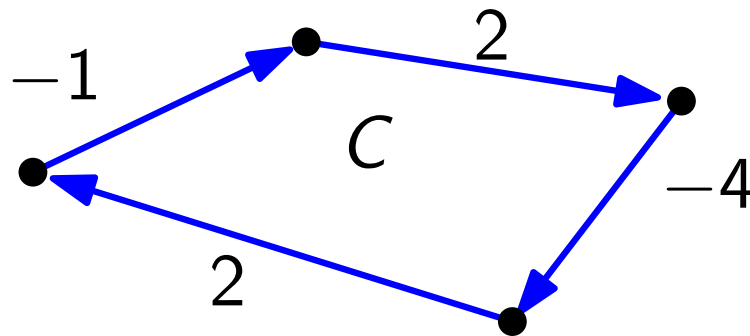

2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.

$$\Rightarrow \pi \text{ enthält Kreis } C. \text{ Aber } w(C) \geq 0. \Rightarrow w(\pi \setminus C)$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$$


2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.

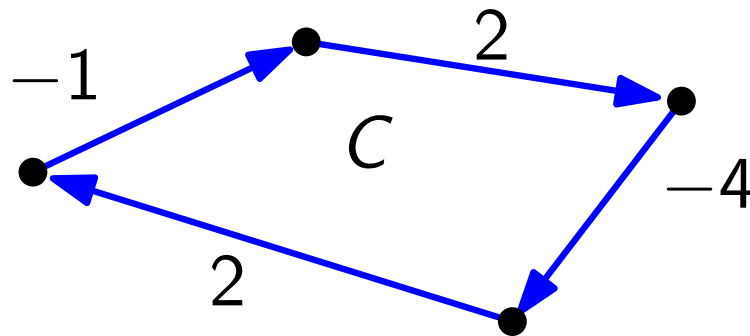
$$\Rightarrow \pi \text{ enthält Kreis } C. \text{ Aber } w(C) \geq 0. \Rightarrow w(\pi \setminus C) \leq w(\pi)$$

$\Rightarrow$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$$

2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.

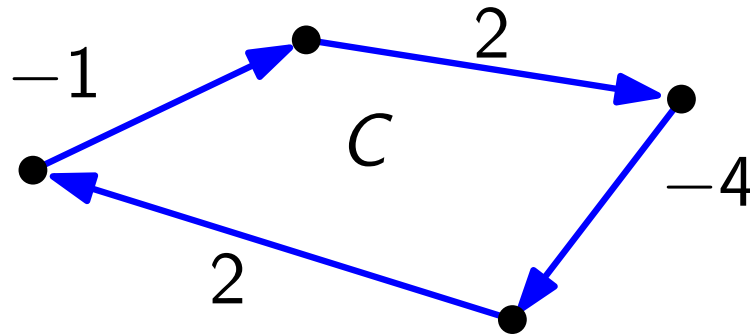
$$\Rightarrow \pi \text{ enthält Kreis } C. \text{ Aber } w(C) \geq 0. \Rightarrow w(\pi \setminus C) \leq w(\pi)$$

$$\Rightarrow \text{Es gibt einen kürzesten } s\text{-}v\text{-Weg mit } \leq n - 1 \text{ Kanten.}$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und ✓
2. $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v . ✓



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$$

⚡

2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.

$$\Rightarrow \pi \text{ enthält Kreis } C. \text{ Aber } w(C) \geq 0. \Rightarrow w(\pi \setminus C) \leq w(\pi)$$

$$\Rightarrow \text{Es gibt einen kürzesten } s\text{-}v\text{-Weg mit } \leq n - 1 \text{ Kanten.}$$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

- G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
- $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

- G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
- $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \stackrel{?}{\leq} \delta(s, v)$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

- G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
- $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v .

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

- G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
- $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v . (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) =$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

- G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
- $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v . (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

- G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
- $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v . (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

- G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
- $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v . (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Also gilt $\delta_n(s, v) \geq \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

- G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
- $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v . (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Also gilt $\delta_n(s, v) \geq \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow \delta_n(s, v) - \delta_k(s, v) \geq 0$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

- G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
- $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v . (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Also gilt $\delta_n(s, v) \geq \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow \max_{0 \leq k \leq n-1} \delta_n(s, v) - \delta_k(s, v) \geq 0$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

- G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
- $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v . (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Also gilt $\delta_n(s, v) \geq \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow \max_{0 \leq k \leq n-1} \delta_n(s, v) - \delta_k(s, v) \geq 0 \Rightarrow \text{Beh.}$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

- G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
- $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ für jeden Knoten v . (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

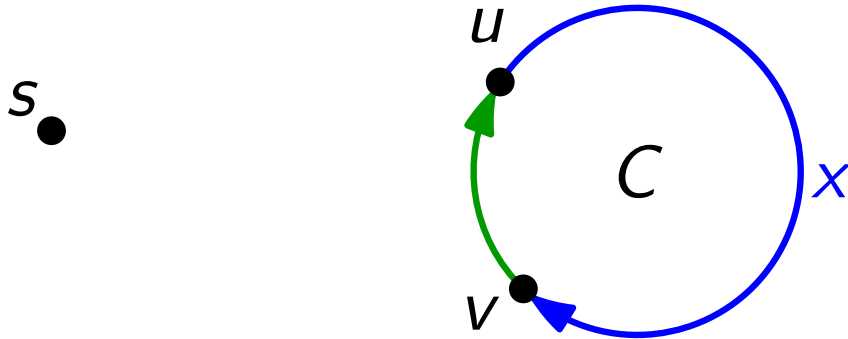
Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Also gilt $\delta_n(s, v) \geq \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow \max_{0 \leq k \leq n-1} \delta_n(s, v) - \delta_k(s, v) \geq 0 \Rightarrow \text{Beh.}$
 $n-k > 0$ □

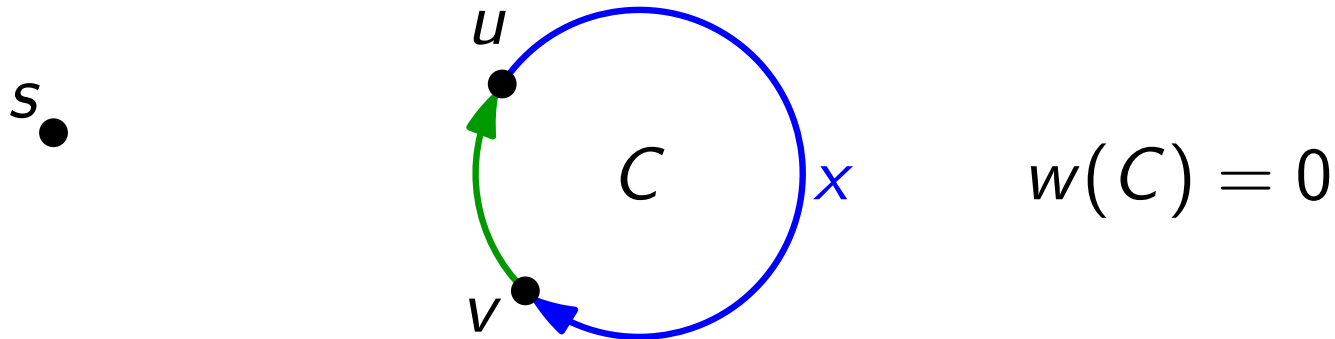
Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



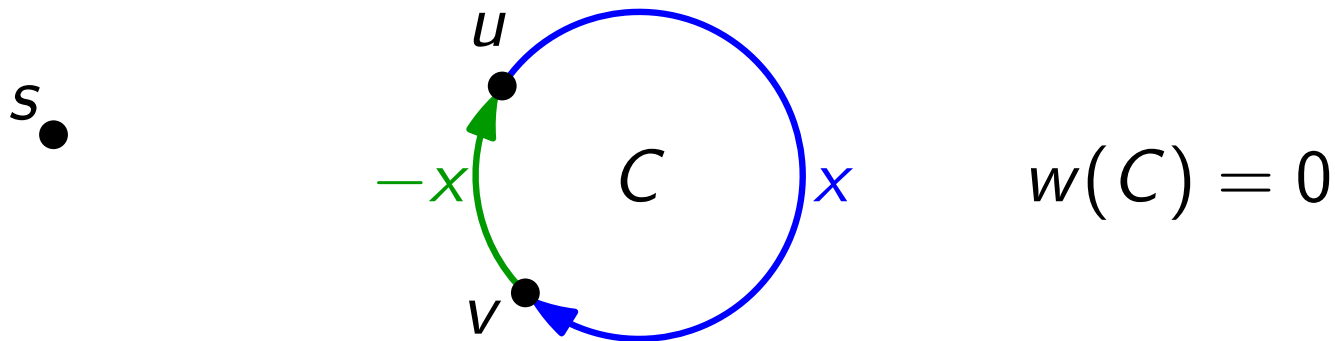
Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



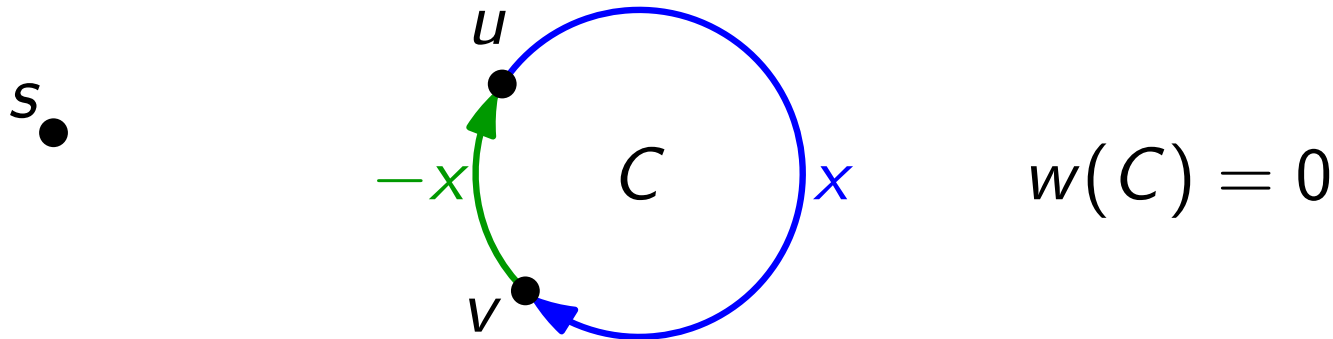
Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
 Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Schritt III

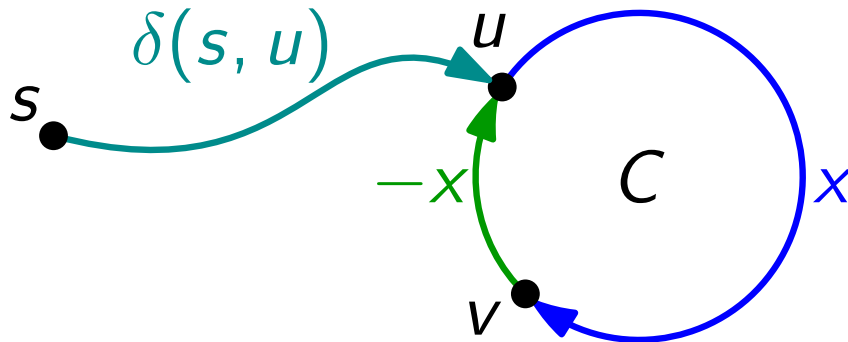
Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
 Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .

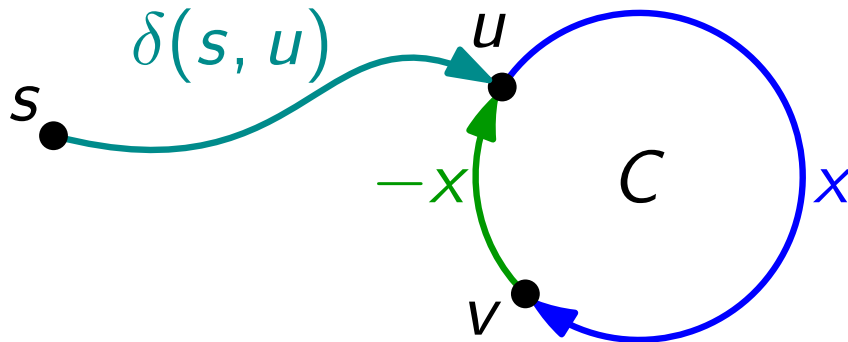


$$w(C) = 0$$

Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



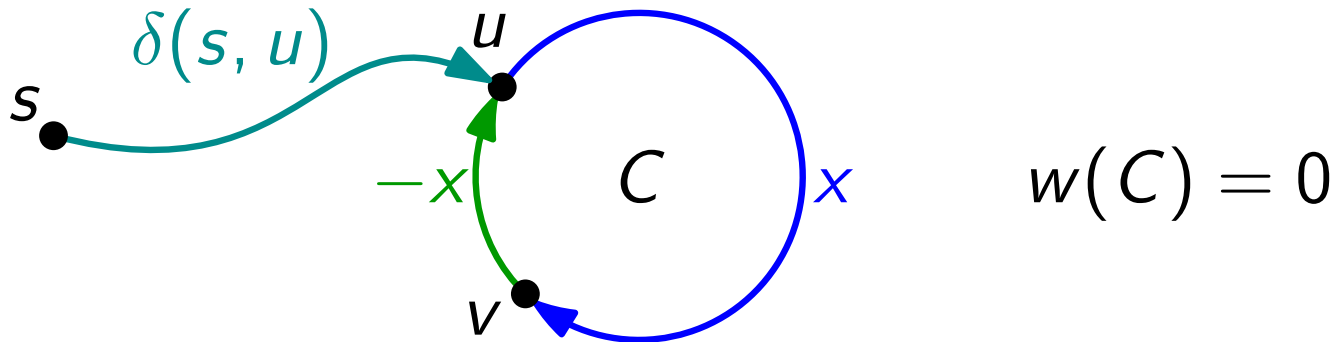
$$w(C) = 0$$

Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



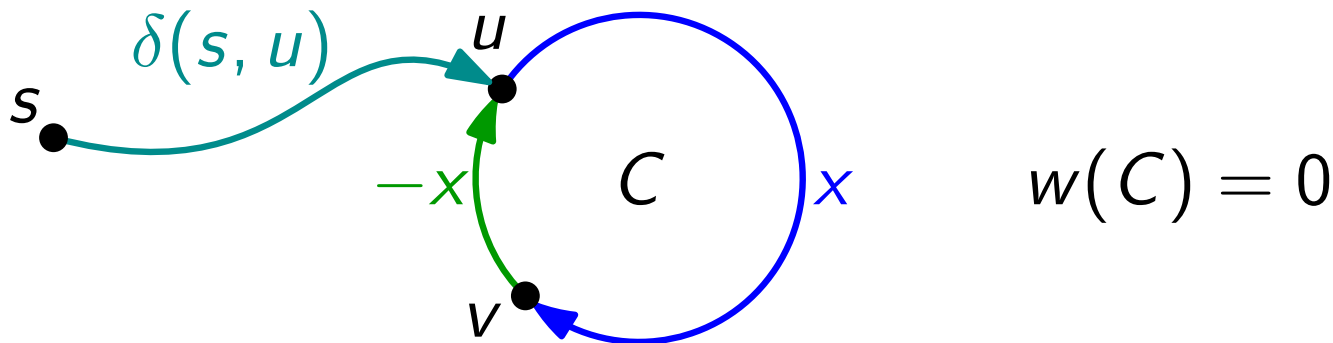
Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

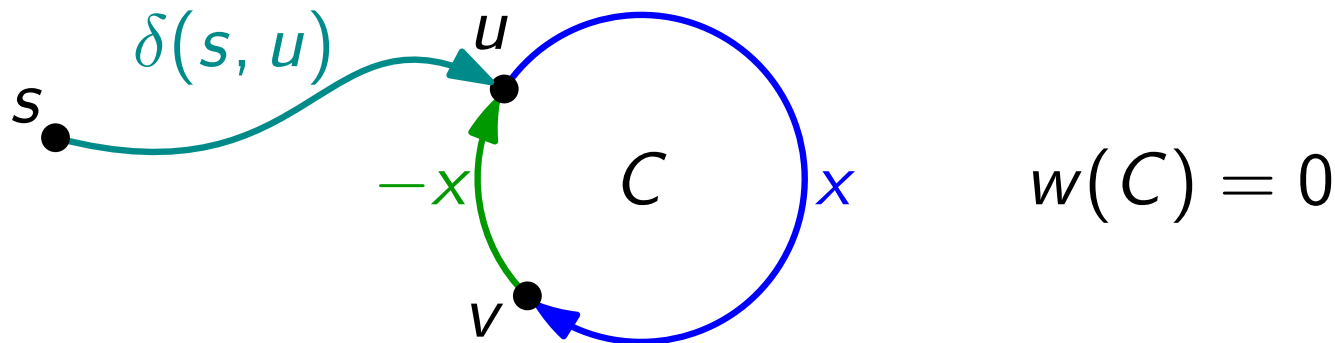
Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Angenommen, es gälte $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$.

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

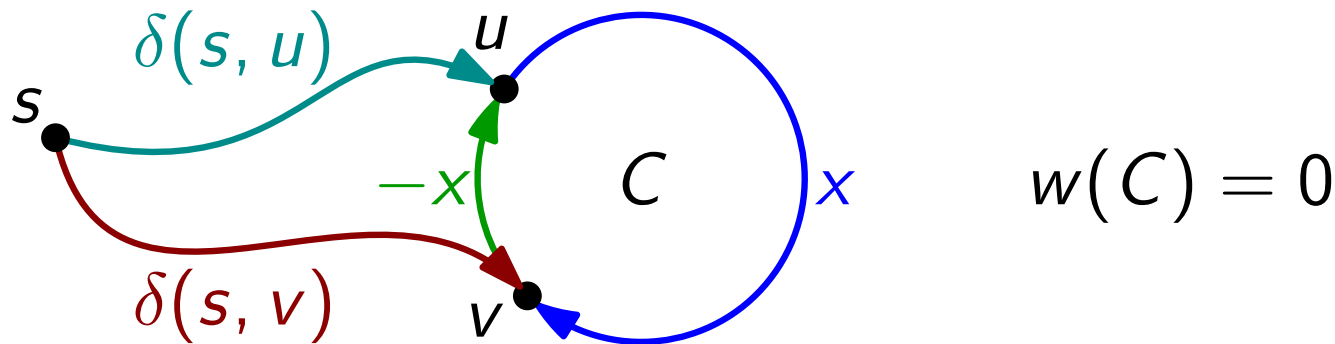
Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Angenommen, es gälte $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$.

$$\Rightarrow \delta(s, v) - x < \delta(s, u)$$

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

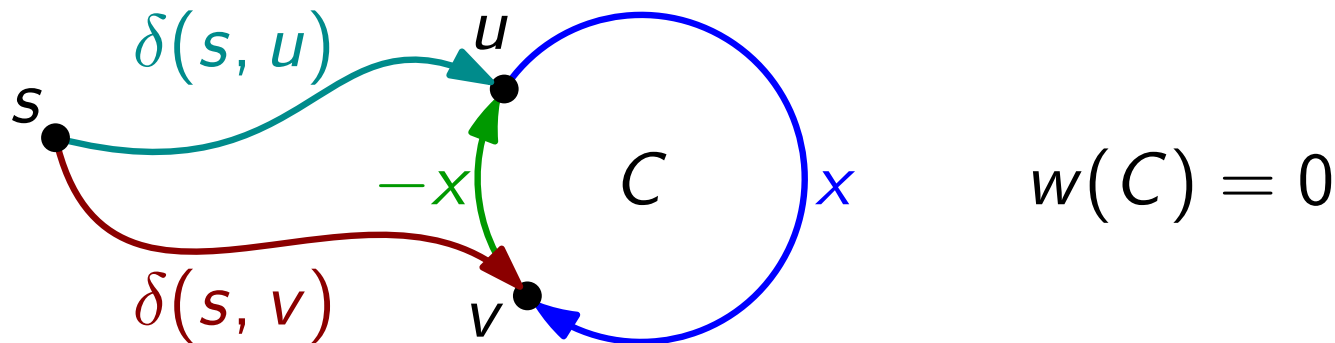
Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Angenommen, es gälte $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$.

$$\Rightarrow \delta(s, v) - x < \delta(s, u)$$

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

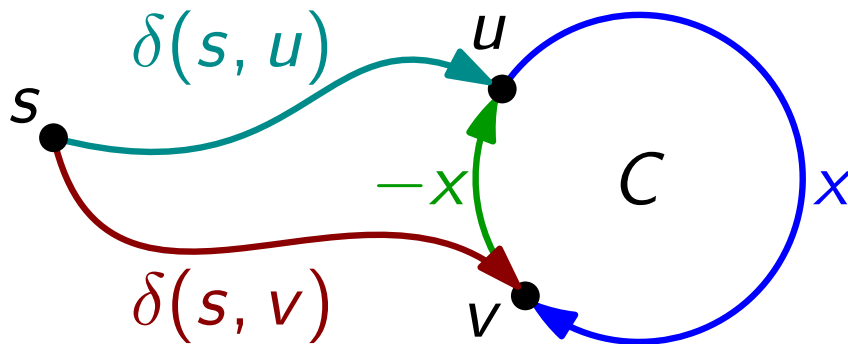
Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Angenommen, es gälte $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$.

$$\Rightarrow \delta(s, v) - x < \delta(s, u) \quad \text{⚡}$$

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



$$w(C) = 0$$

Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Angenommen, es gälte $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$.

$$\Rightarrow \delta(s, v) - x < \delta(s, u) \quad \text{⚡ zur Def. von } \delta.$$



Schritt IV

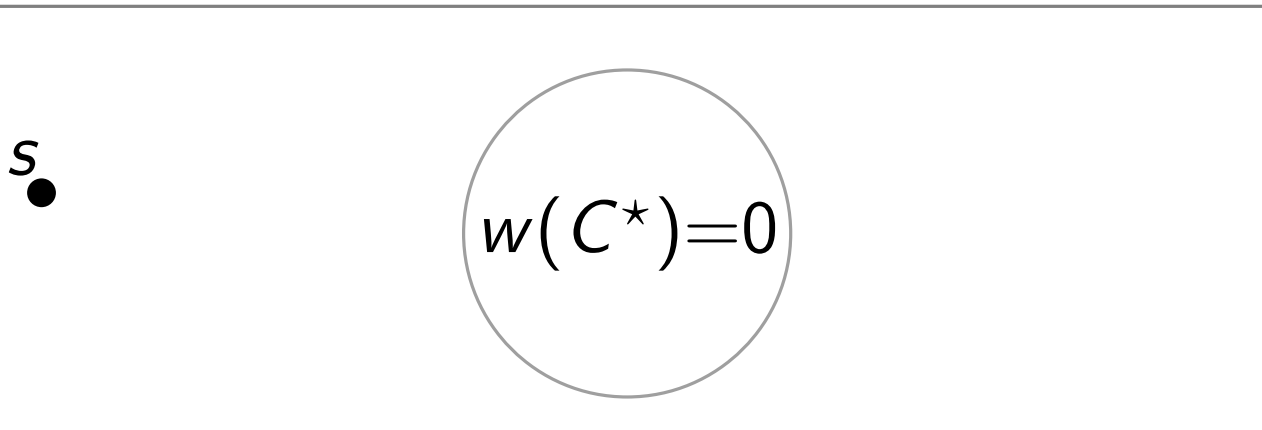
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt IV

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

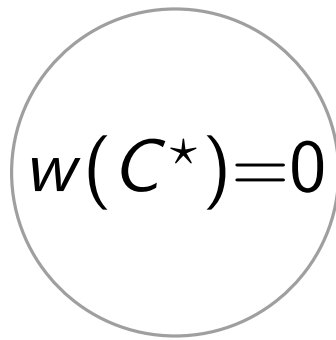
$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

s
●



Bestimme
 $v \in C^*$:
gehe von s
aus n Kanten

Schritt IV

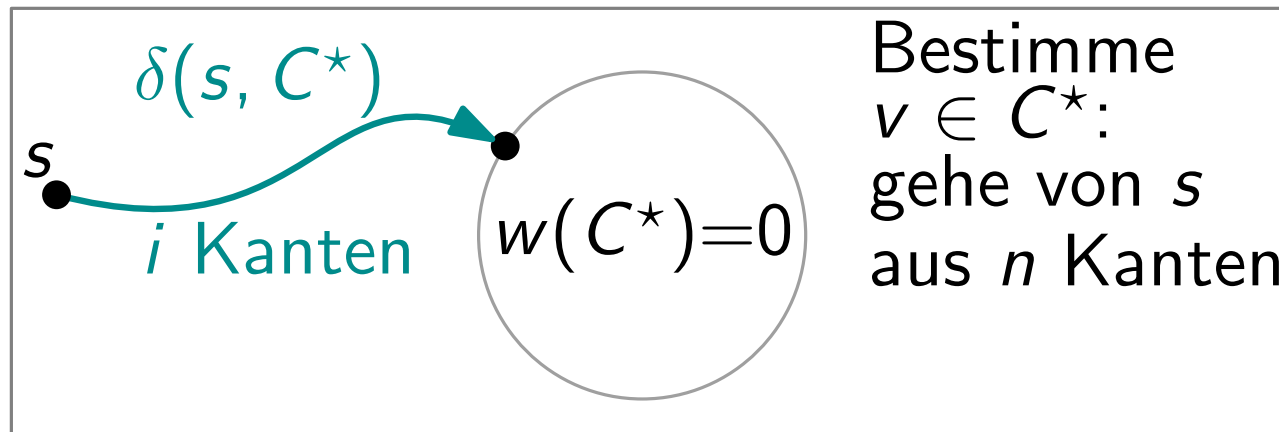
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt IV

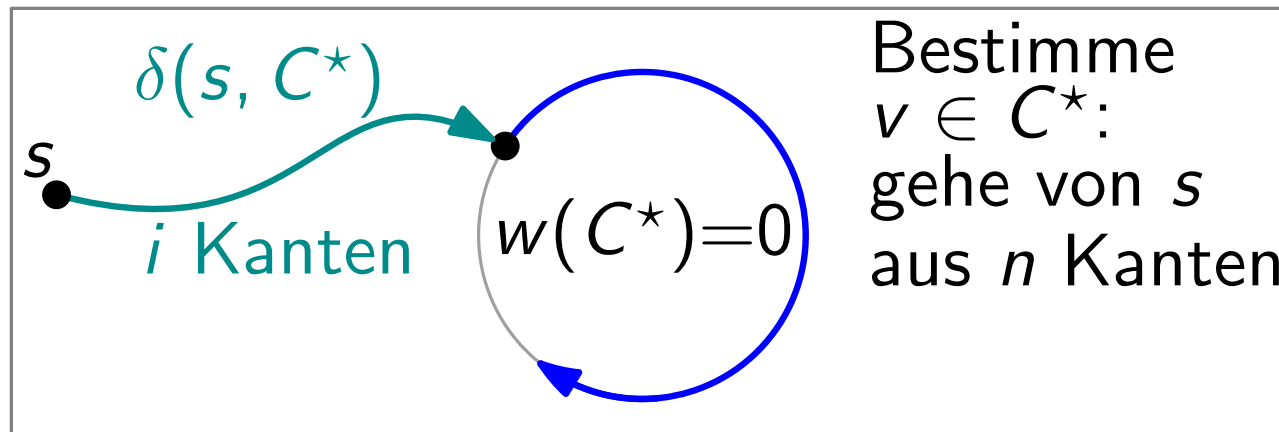
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt IV

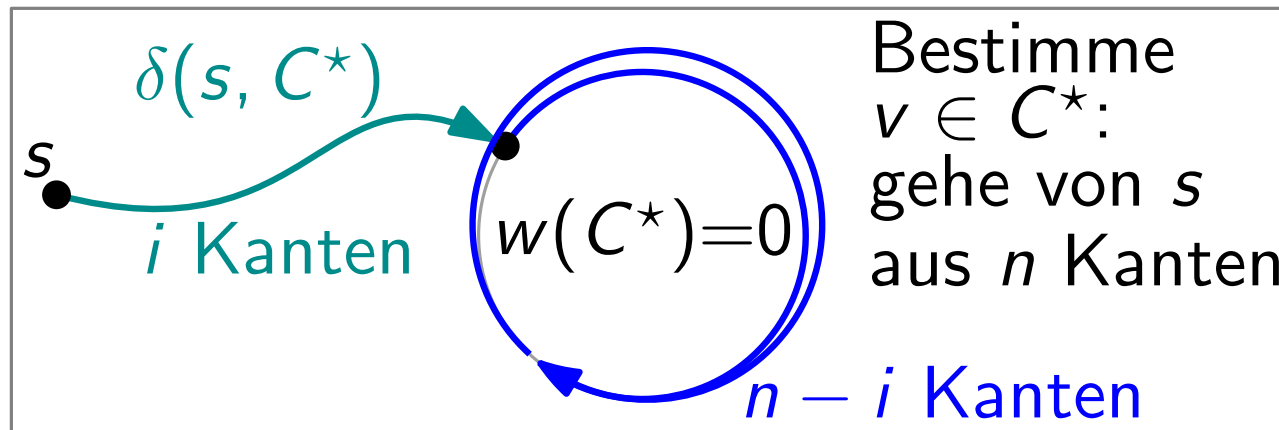
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt IV

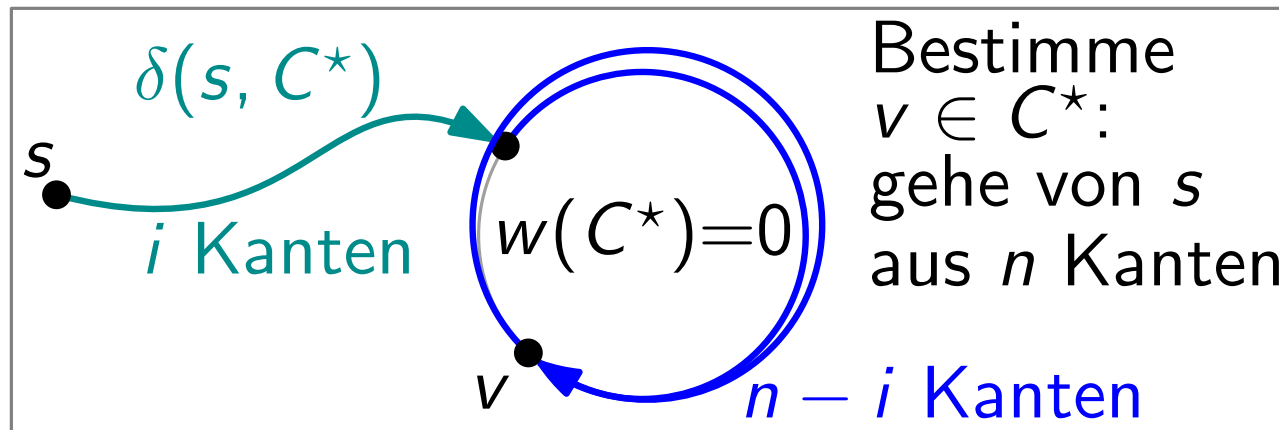
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt IV

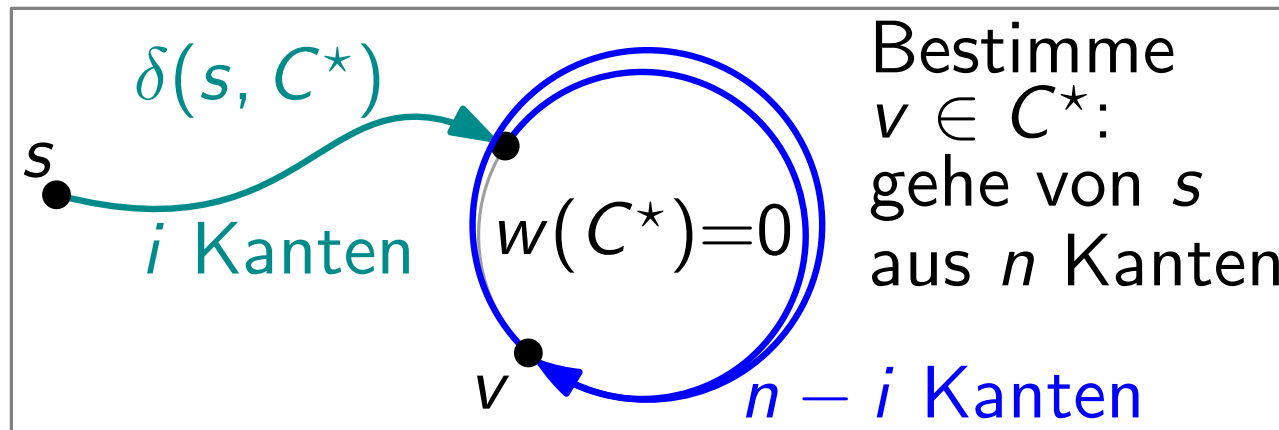
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt III für *dieses* v :
 $\Rightarrow \delta_n(s, v) = \delta(s, v).$

Schritt IV

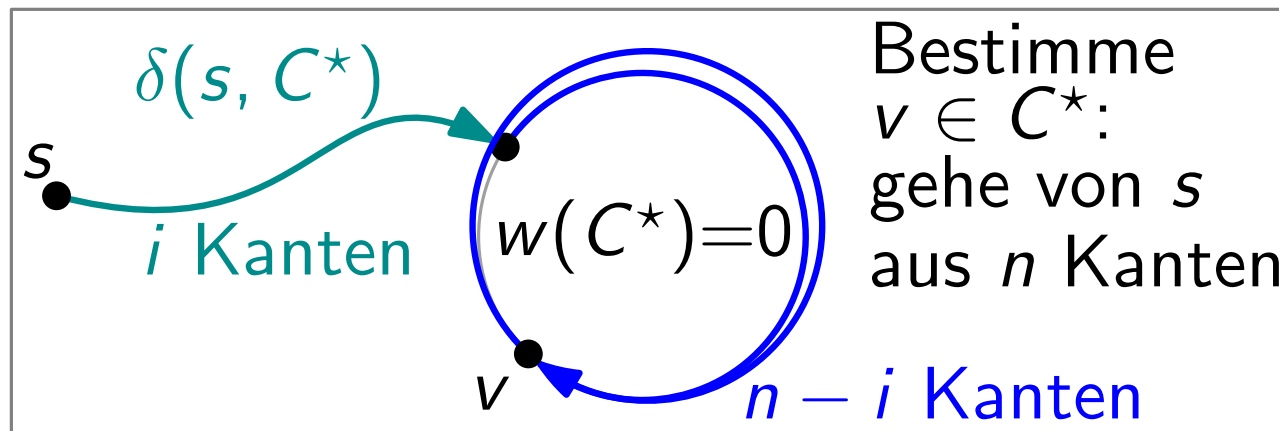
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt III für *dieses* v :

$$\Rightarrow \delta_n(s, v) = \delta(s, v).$$

$$\Rightarrow \delta_n(s, v) \leq \delta_k(s, v) !!$$

Schritt IV

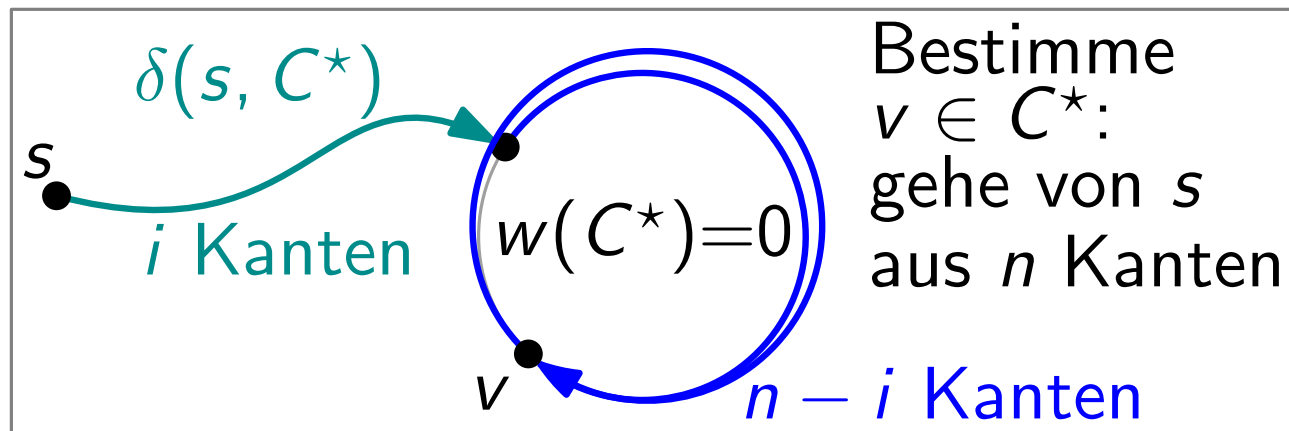
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt III für *dieses* v :
 $\Rightarrow \delta_n(s, v) = \delta(s, v)$.
 $\Rightarrow \delta_n(s, v) \leq \delta_k(s, v) !!$
 Aber für welches k gilt
 $\delta_n(s, v) = \delta_k(s, v)$?

Schritt IV

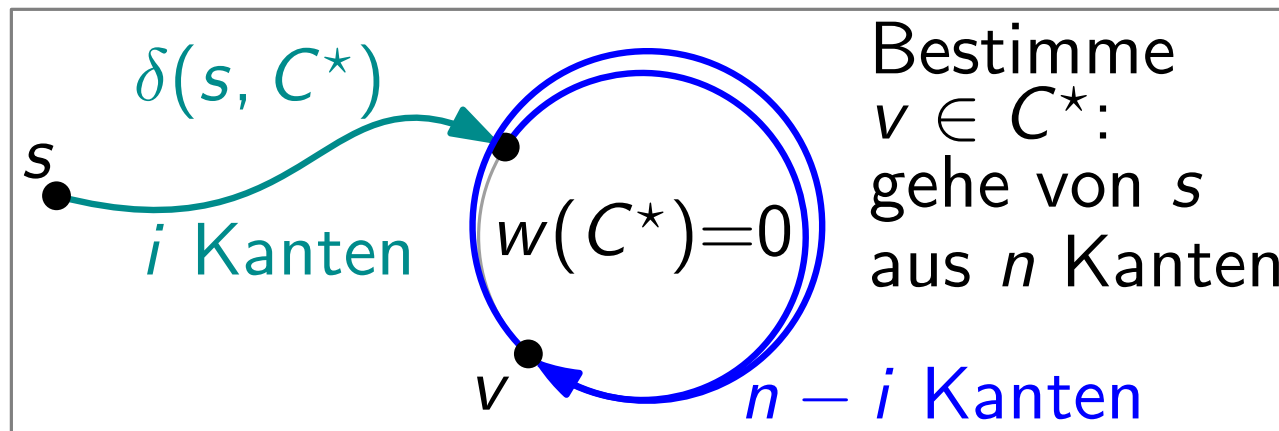
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt III für *dieses* v :

$$\Rightarrow \delta_n(s, v) = \delta(s, v).$$

$$\Rightarrow \delta_n(s, v) \leq \delta_k(s, v) !!$$

Aber für welches k gilt

$$\delta_n(s, v) = \delta_k(s, v)?$$

z.B. $k = n - |C^*|$, denn

$$w(C^*) = 0 \text{ und } |C^*| \leq n.$$

Schritt V

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = ?$$

Schritt V

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = \mathbf{0}.$$

Schritt V

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* ,
so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = \mathbf{0}.$$

Klar...

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}.$$

Zeige: Steigt *auch* um t , wenn alle Gew. um t erhöht werden.

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}.$$

Zeige: Steigt *auch* um t , wenn alle Gew. um t erhöht werden.

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{+nt}.$$

Zeige: Steigt *auch* um t , wenn alle Gew. um t erhöht werden.

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\overbrace{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}^{+nt}}{n - k}}.$$

Zeige: Steigt *auch* um t , wenn alle Gew. um t erhöht werden.

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\overbrace{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}^{+nt} - \overbrace{}^{+kt}}{n - k}}.$$

Zeige: Steigt *auch* um t , wenn alle Gew. um t erhöht werden.

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\overbrace{\delta_n(s, v) + nt} - \overbrace{\delta_k(s, v) + kt}}{n - k}}.$$

Zeige: Steigt *auch* um t , wenn alle Gew. um t erhöht werden.

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{nt - kt}{n - k} =$$

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{\substack{\underbrace{}_{+nt} \quad \underbrace{}_{+kt}}}$$

Zeige: Steigt *auch* um t , wenn alle Gew. um t erhöht werden.

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{nt - kt}{n - k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{\substack{\underbrace{+nt}_{\delta_n(s, v)} - \underbrace{+kt}_{\delta_k(s, v)}}}.$$

Zeige: Steigt *auch* um t , wenn alle Gew. um t erhöht werden. ✓

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{nt - kt}{n - k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{\substack{+nt \quad +kt}} =: \beta(t)$$

Zeige: Steigt *auch* um t , wenn alle Gew. um t erhöht werden. ✓

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{nt - kt}{n - k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{\substack{+nt \quad +kt}} =: \beta(t)$$

Zeige: Steigt *auch* um t , wenn alle Gew. um t erhöht werden. ✓

Also:

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{nt - kt}{n - k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \underbrace{\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{\substack{+nt \quad +kt}} =: \beta(t)$$

Zeige: Steigt *auch* um t , wenn alle Gew. um t erhöht werden. ✓

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{nt - kt}{n - k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{\substack{+nt \quad +kt}} =: \beta(t)$$

Zeige: Steigt *auch* um t , wenn alle Gew. um t erhöht werden.

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t mit $\alpha(\quad) = \beta(\quad)$ ✓

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\left. \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0. \right\} (**)$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{nt - kt}{n - k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \underbrace{\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{\substack{\underbrace{+nt} \quad \underbrace{+kt}}} =: \beta(t)$$

Zeige: Steigt *auch* um t , wenn alle Gew. um t erhöht werden.

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t mit $\alpha(\quad) = \beta(\quad)$ ✓
(**)

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\left. \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0. \right\} (**)$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{nt - kt}{n - k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \underbrace{\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{\substack{+nt \quad +kt}} =: \beta(t)$$

Zeige: Steigt *auch* um t , wenn alle Gew. um t erhöht werden. ✓

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t mit $\alpha(-\mu^*) = \beta(-\mu^*)$ ✓
 $(**)$

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\left. \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0. \right\} (**)$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{nt - kt}{n - k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \overset{?}{=} \underbrace{\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{\substack{\underbrace{+nt}_{\text{}} \quad \underbrace{+kt}_{\text{}}}} =: \beta(t)$$

Zeige: Steigt *auch* um t , wenn alle Gew. um t erhöht werden. ✓

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t mit $\alpha(-\mu^*) = \beta(-\mu^*)$ und Steigung 1 (**)

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\left. \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0. \right\} (**)$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{nt - kt}{n - k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?!}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{\substack{+nt \quad +kt}} =: \beta(t)$$

Zeige: Steigt *auch* um t , wenn alle Gew. um t erhöht werden. ✓

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t mit $\alpha(-\mu^*) = \beta(-\mu^*)$ und Steigung 1 $\Rightarrow \alpha \equiv \beta$. $\square$

Schritt VII

Es gilt

$$\mu^* = \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$



[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Schritt VII

Es gilt

$$\mu^* = \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$



[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

Schritt VII

Es gilt

$$\mu^* = \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$



[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und, für $v \in V \setminus \{s\}$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.

Schritt VII

Es gilt

$$\mu^* = \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$



[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und, für $v \in V \setminus \{s\}$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$ und $v \in V$, berechne

$$\delta_k(s, v) =$$

Schritt VII

Es gilt

$$\mu^* = \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$



[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und, für $v \in V \setminus \{s\}$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$ und $v \in V$, berechne

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Schritt VII

Es gilt

$$\mu^* = \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$



[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und, für $v \in V \setminus \{s\}$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$ und $v \in V$, berechne in $O(n \cdot |E|)$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Schritt VII

Es gilt

$$\mu^* = \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$



[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und, für $v \in V \setminus \{s\}$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$ und $v \in V$, berechne in $O(\text{indeg } v)$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Schritt VII

Es gilt

$$\mu^* = \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$



[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und, für $v \in V \setminus \{s\}$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$ und $v \in V$, berechne in $O(\text{indeg } v)$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Dies benötigt insg. $O(\quad)$ Zeit.

Schritt VII

Es gilt

$$\mu^* = \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$



[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und, für $v \in V \setminus \{s\}$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$ und $v \in V$, berechne in $O(\text{indeg } v)$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Dies benötigt insg. $O(VE)$ Zeit.

Schritt VII

Es gilt

$$\mu^* \stackrel{(***)}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$



[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und, für $v \in V \setminus \{s\}$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$ und $v \in V$, berechne in $O(\text{indeg } v)$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Dies benötigt insg. $O(VE)$ Zeit.

- Berechne μ^* nach $(***)$ in $O(\quad)$ Zeit.

Schritt VII

Es gilt

$$\mu^* \stackrel{(***)}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$



[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und, für $v \in V \setminus \{s\}$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$ und $v \in V$, berechne in $O(\text{indeg } v)$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Dies benötigt insg. $O(VE)$ Zeit.

- Berechne μ^* nach $(***)$ in $O(V^2)$ Zeit. □

Schritt VII

Es gilt

$$\mu^* \stackrel{(***)}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$



[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und, für $v \in V \setminus \{s\}$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$ und $v \in V$, berechne in $O(\text{indeg } v)$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Dies benötigt insg. $O(VE)$ Zeit.

Das ist ein kleines
dynamisches Programm! :-)

- Berechne μ^* nach $(***)$ in $O(V^2)$ Zeit. □