

10. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (Winter 2021/22)

Aufgabe 1 – Bäume transformieren

Als ADS-HörerIn stellen Sie sich zu Hause natürlich nicht irgendeine Zimmerpflanze auf, sondern einen binären Suchbaum. Ihr Suchbaum heißt B_1 und hat n Knoten. Ihr(e) Übungspartner(in) hat auch einen binären Suchbaum, der B_2 genannt wird und zufälligerweise genau dieselben Schlüssel wie Ihr Suchbaum enthält. Er sieht aber schöner aus. Deshalb möchten Sie Ihren Suchbaum so transformieren, dass er am Ende wie B_2 aussieht.

Zeigen Sie hierzu, dass Sie stets in der Lage sind B_1 durch $O(n)$ Rotationen in B_2 zu transformieren, egal wie die beiden binären Suchbäume konkret aussehen.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $n - 1$ Rotationen ausreichen, um einen beliebigen Suchbaum in einen Suchbaum zu transformieren, in dem kein Knoten einen linken Kindknoten hat. **5 Punkte**

Aufgabe 2 – Springer auf Schachfeld

Gesucht ist ein Algorithmus, der ermittelt, wieviele Züge ein Springer benötigt, um auf einem Schachbrett mit $n \times n$ Feldern von Feld (x_1, y_1) zu Feld (x_2, y_2) zu kommen.

- a) Wie lässt sich dieses Problem als Kürzeste-Wege-Problem auf einem Graphen modellieren? Was repräsentieren die Knoten und Kanten des Graphen? **1 Punkt**
- b) Ist der Graph zweifärbbar (entsprechend der Definition in Blatt 9 Aufgabe 1)? Begründen Sie Ihre Antwort. **1 Punkt**
- c) Geben Sie für das gewöhnliche Schachbrett mit 8×8 Feldern die genaue Anzahl der Kanten des Graphen an. **1 Punkt**
- d) Geben Sie für ein Schachbrett mit $n \times n$ Feldern eine obere Schranke für die Anzahl der Kanten an. Verwenden Sie dafür die Groß-O-Notation. **1 Punkt**
- e) Geben Sie einen Algorithmus an, der die erforderliche Anzahl an Zügen in $\Theta(n^2)$ Zeit berechnet. Begründen Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus. **2 Punkte**

Aufgabe 3 – Leichte Kanten und Schnitte

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Kantengewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Sei weiter $T = (V, E_T)$ ein minimaler Spannbaum von G bezüglich w . Zeigen Sie: für jede Kante $\{u, v\} \in E_T$ gibt es einen Schnitt, für den $\{u, v\}$ *leicht* ist.

4 Punkte

Aufgabe 4 – Faire Geschenke

Sie sind Mutter/Vater von Zwillingen, deren Geburtstag naht. Sie haben eine Menge an n Geschenken gekauft und möchten diese nun fair verteilen. Dabei hat jedes Geschenk i einen bestimmten ganzzahligen positiven Wert w_i . Alle Geschenke zusammen addieren sich zum Wert W . Wir nehmen an, dass dieser gerade ist. Die Aufteilung der Geschenke ist genau dann fair, wenn jeder Zwilling insgesamt den gleichen Wert an Geschenken erhält.

Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n \cdot W)$ feststellt, ob eine faire Aufteilung aller Geschenke möglich ist.

5 Punkte

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Donnerstag, 03. Februar 2022, 14:00 Uhr** einmal pro Gruppe über Wuecampus als pdf-Datei ab. Vermerken Sie dabei stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen auf der Abgabe.

Grundsätzlich sind stets alle Ihrer Aussagen zu begründen und Ihr Pseudocode ist stets zu kommentieren.

Die Lösungen zu den mit PABS gekennzeichneten Aufgaben, geben Sie bitte nur über das PABS-System ab. Vermerken Sie auf Ihrem Übungsblatt, in welchem Repository (sXXXXXX-Nummer) die Abgabe zu finden ist. Geben Sie Ihre Namen hier als Kommentare in den Quelltextdateien an.