

7. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (Winter 2021/22)

Aufgabe 1 – Operationen in Rot-Schwarz-Bäumen

- a) In einen anfangs leeren Rot-Schwarz-Baum werden nacheinander die Zahlen 50, 42, 38, 13, 17 und 5 eingefügt. Zeichnen Sie den Baum nach jeder dieser Einfügeoperationen. **3 Punkte**
- b) Anschließend werden die Zahlen 5, 13, 17 und 38 nacheinander gelöscht. Zeichnen Sie den Baum nach jeder dieser Löschoperationen. **2 Punkte**

Stellen Sie sicher, dass rote und schwarze Knoten klar voneinander unterscheidbar sind. Sie brauchen die nil-Blätter nicht zu zeichnen.

Aufgabe 2 – Binär hochzählen

Die Datenstruktur D enthält eine einzige natürliche Zahl Z in Binärdarstellung (zu Beginn ist $Z = 0$) und stellt lediglich die Methode `Increment` zur Verfügung, die Z um Eins erhöht. Die Laufzeit der Methode entspricht dabei der Anzahl der Bits, die sich in Z durch die Erhöhung um Eins ändern.

Zeigen Sie, dass die *amortisierte* Laufzeit von `Increment` in $O(1)$ ist! **4 Punkte**

Aufgabe 3 – Höhe von Rot-Schwarz-Bäumen

Im Folgenden beziehen sich die Anzahl der Knoten und die Höhe eines Rot-Schwarz-Baums auf den Baum *ohne* die nil-Blätter.

Stellen Sie sicher, dass rote und schwarze Knoten klar voneinander unterscheidbar sind. Sie brauchen die nil-Blätter nicht zu zeichnen.

- a) Zeichnen Sie einen gültigen Rot-Schwarz-Baum der Höhe 3, bei dem die Anzahl der Knoten minimal ist. **2 Punkte**
- b) Zeichnen Sie einen binären Suchbaum der Höhe 3, für den es keine Färbung gibt, welche die Eigenschaften eines Rot-Schwarz-Baums erfüllt. Dieser Suchbaum soll die maximale Anzahl von Knoten enthalten. **2 Punkte**

Aufgabe 4 – Stapel rekonstruieren

Die Zahlen $1, 2, \dots, n$ werden in aufsteigender Reihenfolge mit Push in einen Stapel eingefügt.

Alle eingefügten Zahlen werden durch Aufruf von Pop wieder aus dem Stapel entfernt, wobei die Methode Pop sowohl zwischen den Aufrufen von Push als auch nach dem letzten Aufruf von Push ausgeführt werden kann. Insgesamt wird die Methode Pop n -mal ausgeführt und wird nie auf einen leeren Stapel angewandt.

- a) Welche der gegebenen Folgen gibt eine mögliche Reihenfolge wieder, in welcher die Zahlen aus dem Stapel mit Pop entfernt wurden? Bei welcher der Folgen ist dies nicht möglich? Begründen Sie Ihre Antwort. **2 Punkte**

- 3, 2, 4, 1, 8, 9, 10, 7, 6, 5
- 5, 4, 3, 10, 9, 8, 7, 6, 1, 2

- b) Geben Sie in Pseudocode einen Algorithmus an, der (wie in Aufgabenteil (a)) für eine gegebene Permutation A der Zahlen $1, 2, \dots, n$ ermittelt, ob A die Folge der durch Pop entfernten Zahlen sein kann.

Erläutern Sie *zusätzlich zum Pseudocode* die Funktionsweise Ihres Algorithmus in Worten, und begründen Sie, warum der Algorithmus korrekt ist. **5 Punkte**

Tipp: Rekonstruieren Sie die Folge von Push- und Pop-Anweisungen, und geben Sie false aus, wenn Sie auf einen Widerspruch stoßen.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Donnerstag, 23. Dezember 2021, 14:00 Uhr** einmal pro Gruppe über Wuecampus als pdf-Datei ab. Vermerken Sie dabei stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen auf der Abgabe.

Grundsätzlich sind stets alle Ihrer Aussagen zu begründen und Ihr Pseudocode ist stets zu kommentieren.

Die Lösungen zu den mit PABS gekennzeichneten Aufgaben, geben Sie bitte nur über das PABS-System ab. Vermerken Sie auf Ihrem Übungsblatt, in welchem Repository (sXXXXXX-Nummer) die Abgabe zu finden ist. Geben Sie Ihre Namen hier als Kommentare in den Quelltextdateien an.