

## 5. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (Winter 2020/21)

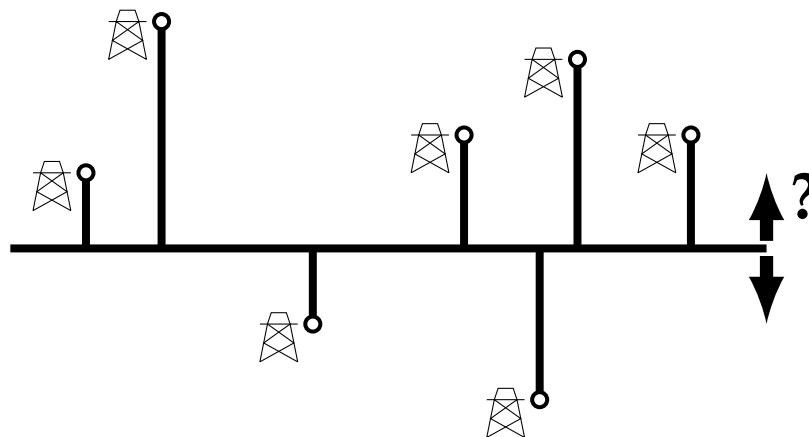
### Aufgabe 1 – Pipelines

Jett Rink möchte eine Pipeline in Ost-West-Richtung bauen, an die er seine Ölquellen möglichst kostengünstig anschließen kann. Jede Ölquelle soll über eine Zuleitung, die in Nord-Süd-Richtung verlaufen soll, an die Pipeline angeschlossen werden. Jett Rink fragt sich, wo die billigste Ost-West-Pipeline verläuft, also die, bei der die Gesamtlänge aller Zuleitungen minimiert wird.

Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit in  $O(n)$  an, der für eine Menge von  $n$  Ölquellen  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$  die  $y$ -Koordinate einer billigsten Ost-West-Pipeline zurückgibt. Begründen Sie, warum der Algorithmus korrekt ist.

*Hinweis:* Sie dürfen davon ausgehen, dass die  $x$ -Koordinaten aller Ölquellen paarweise verschieden sind.

**4 Punkte**



### Aufgabe 2 – Schlange-2-Stapel

- a) Wie lässt sich eine Schlange durch die Verwendung von zwei Stapeln implementieren?

Welche asymptotischen Worst-Case-Laufzeiten haben die Methoden Enqueue und Dequeue in Ihrer Implementierung?

**2 Punkte**

- b) Wie lässt sich ein Stapel durch die Verwendung von zwei Schlangen implementieren?

Welche asymptotischen Worst-Case-Laufzeiten haben die Methoden Push, Pop und Top in Ihrer Implementierung? **2 Punkte**

### Aufgabe 3 – Sanderring

Fährt man vom Hubland kommend auf der Zeppelinstraße in Richtung Sanderring, so überquert man auf einer durch Ampeln geregelten Kreuzung die Trautenauer Straße. Wir nehmen an, dass die Grünphase und die Rotphase der Ampel jeweils eine Minute dauern; die Gelbphase vernachlässigen wir.

- a) Sei  $X$  eine Zufallsvariable, die angibt, wie lange ein Autofahrer an dieser Ampel warten muss. Berechnen Sie den Erwartungswert  $E(X)$  von  $X$ . **2 Punkte**
- b) Möchte man als Fußgänger die Trautenauer Straße überqueren, muss man zunächst immer an einer roten Fußgängerampel halten. Um weiterzugehen muss man erst einen Knopf drücken und dann solange warten, bis die Verkehrsampel für Autos zum nächsten Mal von Rot auf Grün springt. Erst dann schaltet auch die Fußgängerampel auf Grün. Sei  $Y$  eine Zufallsvariable, die angibt, wie lange ein Fußgänger an dieser Ampel warten muss. Berechnen Sie den Erwartungswert  $E(Y)$  von  $Y$ .

Natürlich kann man in der Praxis das Glück haben, dass bereits ein anderer Fußgänger den Knopf betätigt hat, wenn man an die Kreuzung kommt. Diesen Fall vernachlässigen wir hier. **2 Punkte**

### Aufgabe 4 – Hashing

Die Schlüssel 44, 12, 23, 88, 71, 11, 94, 39, 20, 5 und 16 sollen in dieser Reihenfolge nacheinander in eine Hashtabelle  $T[0..15]$  eingefügt werden. Dabei können verschiedene Verfahren eingesetzt werden, um Kollisionen aufzulösen.

- a) Zeichnen Sie für jedes der folgenden Verfahren die resultierende Hashtabelle.
1. Kollisionen werden durch Verkettung aufgelöst;  
die Hashfunktion ist  $h(k) = (3k + 7) \bmod 16$ .
  2. Kollisionen werden durch lineares Sondieren aufgelöst;  
die Hashfunktion ist  $h(k, i) = (h_0(k) + i) \bmod 16$   
mit  $h_0(k) = (3k + 7) \bmod 16$ .
  3. Kollisionen werden durch quadratisches Sondieren aufgelöst;  
die Hashfunktion ist  $h(k, i) = (h_0(k) + c_1 i + c_2 i^2) \bmod 16$   
mit  $c_1 = \frac{1}{2}$ ,  $c_2 = \frac{1}{2}$  und  $h_0(k) = (3k + 7) \bmod 16$ .

4. Kollisionen werden durch doppeltes Hashing aufgelöst;  
die Hashfunktionen ist  $h(k, i) = (h_1(k) + ih_2(k)) \bmod 16$   
mit  $h_1(k) = (3k + 7) \bmod 16$  und  $h_2(k) = 7 - 2(k \bmod 4)$ .

Bei den Verfahren 2. bis 4. durchläuft  $i$  die Werte  $0, \dots, 15$ .

Geben Sie bei jedem Verfahren (außer bei 1.) und für jeden Schlüssel an, wie viele Zellen Sie testen mussten, bevor Sie eine freie Zelle gefunden haben. Geben Sie für jedes Verfahren auch die Gesamtzahl der erfolglosen Tests an. **6 Punkte**

- b) Welches Problem tritt beim doppelten Hashing auf, wenn die Hashfunktion  
 $h(k, i) = (h_1(k) + ih_2(k)) \bmod 16$   
mit  $h_1(k) = (3k + 7) \bmod 16$  und  $h_2(k) = 8 - (k \bmod 8)$  verwendet wird?

Beim quadratischen Sondieren können durch ungeschickte Wahl der Parameter  $c_1$  und  $c_2$  ähnliche Probleme auftreten. Geben Sie ein Beispiel mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  an.

**2 Punkte**

---

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Donnerstag, 2. Dezember 2021, 14:00 Uhr** einmal pro Gruppe über Wuecampus als pdf-Datei ab. Vermerken Sie dabei stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen auf der Abgabe.

Grundsätzlich sind stets alle Ihrer Aussagen zu begründen und Ihr Pseudocode ist stets zu kommentieren.

Die Lösungen zu den mit PABS gekennzeichneten Aufgaben, geben Sie bitte nur über das PABS-System ab. Vermerken Sie auf Ihrem Übungsblatt, in welchem Repository (sXXXXXX-Nummer) die Abgabe zu finden ist. Geben Sie Ihre Namen hier als Kommentare in den Quelltextdateien an.