

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2021/22

24. Vorlesung

Der Handlungsreisende

Das Problem

Definition. *Traveling Salesperson Problem (TSP)*

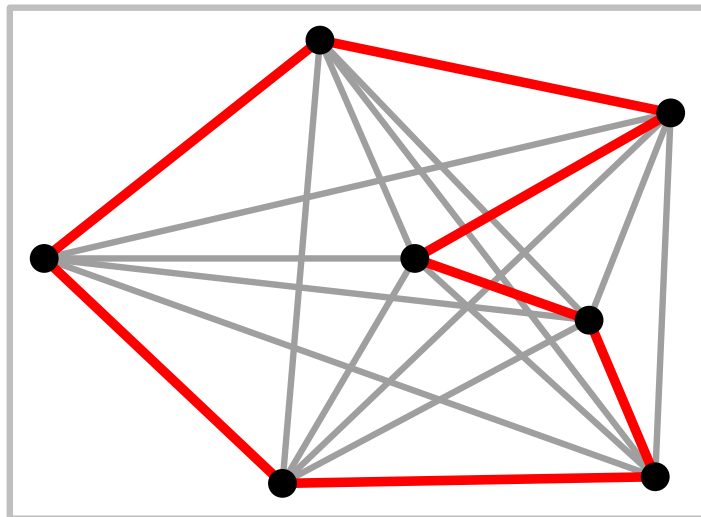
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen
Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

(Ein HK besucht jeden Knoten genau $1 \times$.)

Beispiel.

$c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



Problem.

- TSP ist NP-schwer
- und schwer zu approximieren.

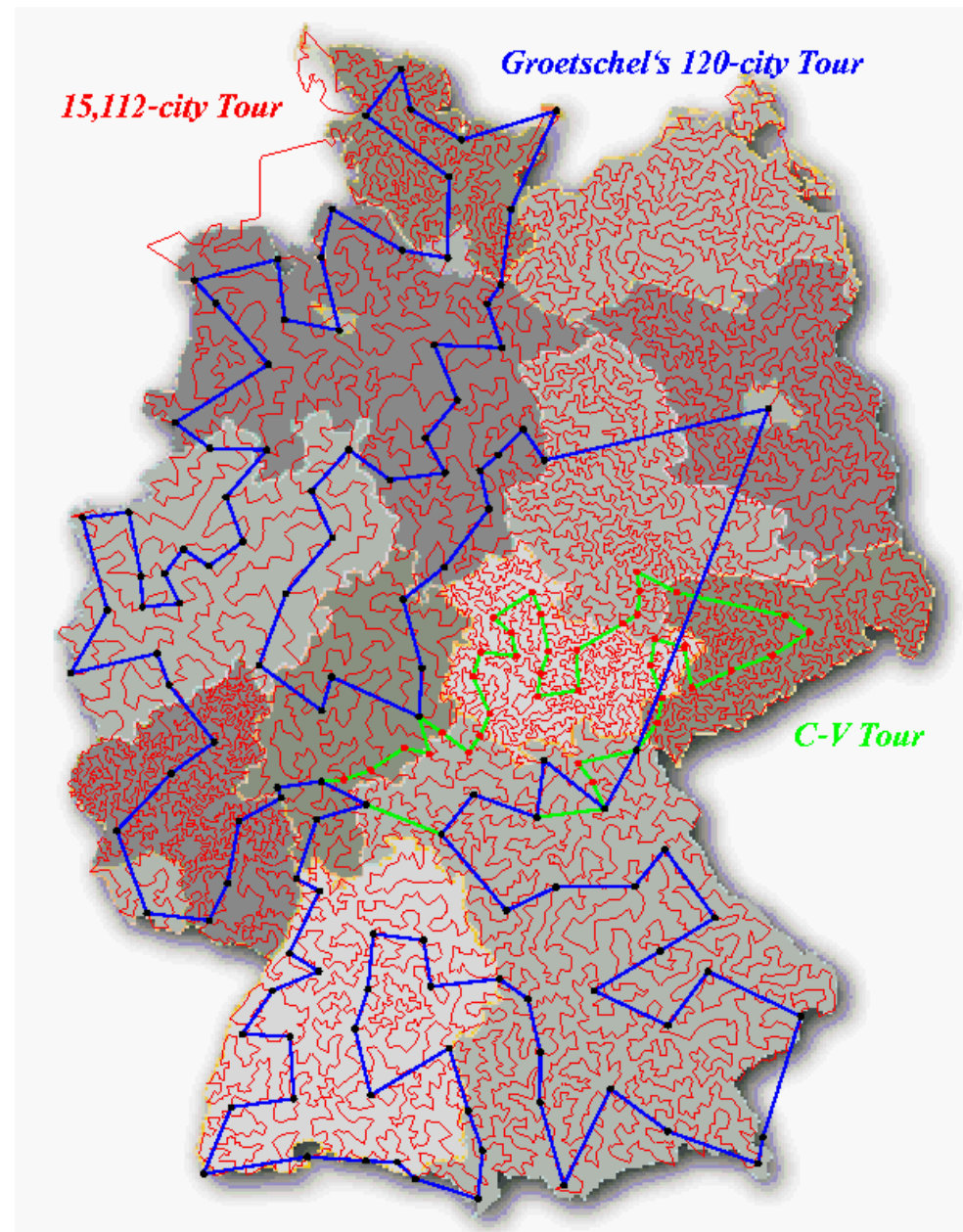


Etwas Geschichte

Der Handlungsreisende – wie er sein soll und was er zu thun hat, um Aufträge zu erhalten und eines glücklichen Erfolgs in seinen Geschäften gewiss zu sein. Von einem alten Commis-Voyageur [1832]

Rekord I:
optimale 120-Städte-Tour
[Groetschel, 1977]

Rekord II:
optimale 15.112-Städte-Tour
[Applegate, Bixby, Chvátal, Cook 2001]



Was tun? – Mach das Problem leichter!

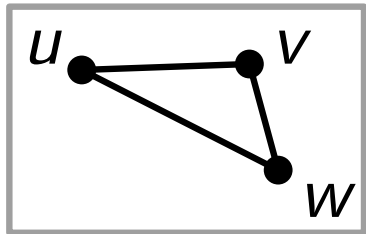
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ -TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$

mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,

die die Dreiecksungleichung erfüllen,

d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

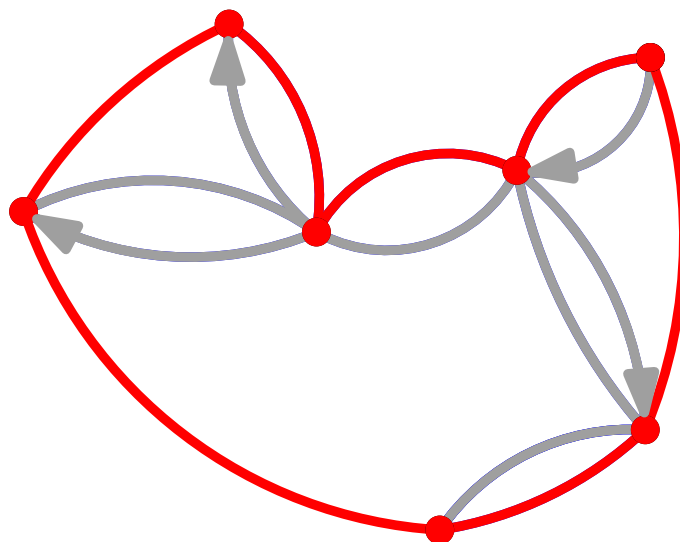


Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz.

Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

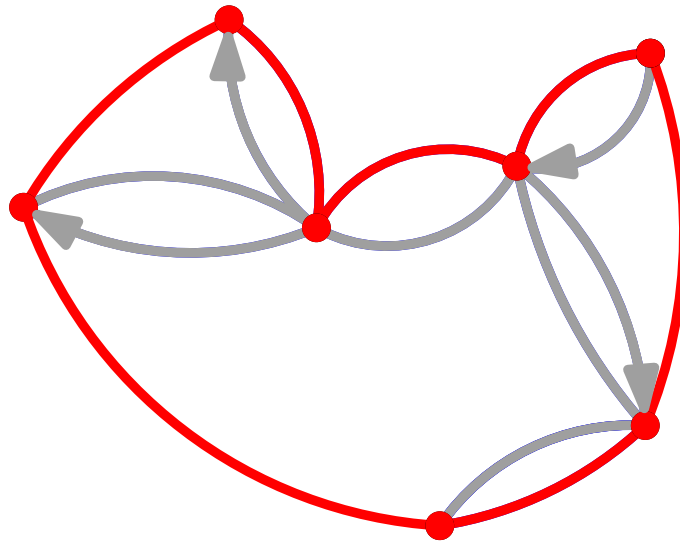
Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



1. Algorithmus

Berechne **MSB** von G .

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. Analyse

$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$$

Dreiecksungleichung

Optimale TSP-Tour minus eine Kante ist (i.A. nicht minimaler) Spannbaum!!

Die „Kunst“ der unteren Schranke: $c(\text{min. Spannbaum}) \leq c(\text{TSP-Tour})$

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:
Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \dots, v_n$ in dieser Reihenfolge:
$$c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$$
- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n - 1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Ang. ??? = $O(n)$, dann ist die Laufzeit $O(n!)$.

Speicher:

$O(n)$ für: bisher beste, aktuelle & nächste Permutation.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

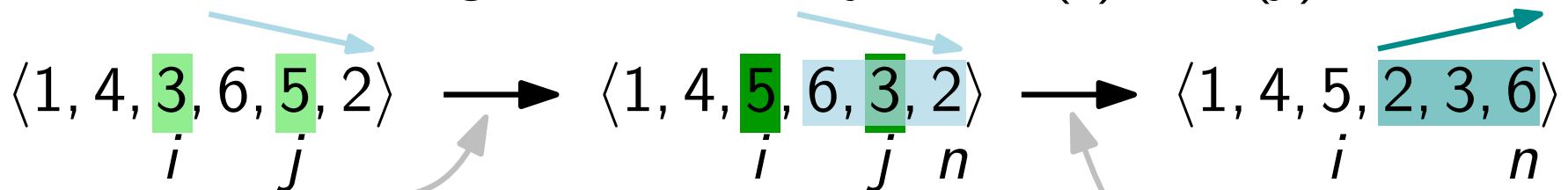
Z.B. in lexikografischer Ordnung:

$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle, \dots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$.

Für gegebene Permutation σ , finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).

- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$. *Beispiel:*



- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.
- Kehre die Teilfolge $\langle \sigma(i+1), \sigma(i+2), \dots, \sigma(n) \rangle$ um.

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = (2^{\log_2 n})^n = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow n! \in 2^{\Theta(n \log n)}$$

Genauer: Stirlingformel

[James Stirling, 1692–1770]

Für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Noch genauer:

$$\sqrt{2\pi} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere:

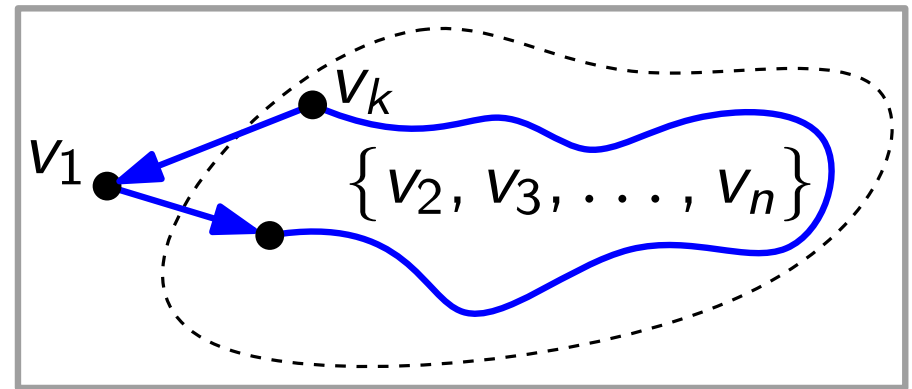
$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs
durch alle Knoten in W .

Schritt 2 für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$, $i > 1$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$

Und für W mit $|W| \geq 2$, $v_i \in W$:



$$T[W, v_i] = \min_{\substack{v_j \in W \setminus \{v_i\} \\ \text{Letzter Knoten vor } v_i}} T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$$

$$\Rightarrow \text{OPT} = \min_{k \neq 1} T[\{v_2, v_3, \dots, v_n\}, v_k] + c(v_k, v_1)$$

Index des letzten Knotens vor v_1

Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer opt. Lsg. (hier: bot.-up)!*

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

└ $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

for $j = 2$ **to** $n - 1$ **do**

└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = j$ **do**

└ **foreach** $v_i \in W$ **do**

└ $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$

return $\min_{k \neq 1} T[\{v_2, v_3, \dots, v_n\}, v_k] + c(v_k, v_1)$

Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq 2^{n-1} \cdot n$

$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit $\in O(n^2 \cdot 2^n)$ **Speicher:** $O(n \cdot 2^n)$

Vergleich

Brute Force

Bellman-Held-Karp

Laufzeit

$$2^{\Theta(n \log n)}$$

$$O(n^2 \cdot 2^n)$$

Speicher

$$O(n)$$

$$O(n \cdot 2^n)^*$$

Der Bellman-Held-Karp-Algorithmus verringert also die Laufzeit zu Kosten des Speicherplatzverbrauchs.

Das bezeichnet man als Laufzeit-Speicherplatz-*Trade-Off*.

*) Wie wäre es, wenn wir im DP nicht *ganz* $T[\cdot, \cdot]$ speichern?

Für $T[W, \cdot]$ brauchen wir nur alle $T[W', \cdot]$ mit $|W'| = |W| - 1$.

Welches j maximiert $\binom{n}{j}$? $j = \frac{n}{2}$.

Wie groß ist $\binom{n}{n/2}$? In $\Theta(2^n / \sqrt{n})$.



Richard M. Karp
(*1935)



Richard E. Bellman
(1920–1984)