Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2021/22

22. Vorlesung

Dynamisches Programmieren

Prof. Dr. Alexander Wolff *Lehrstuhl für Informatik I*

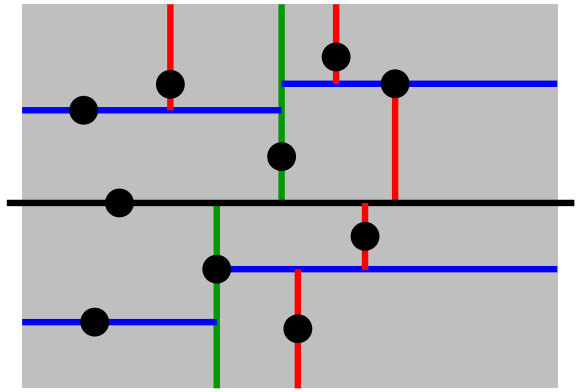
Entwurfstechniken

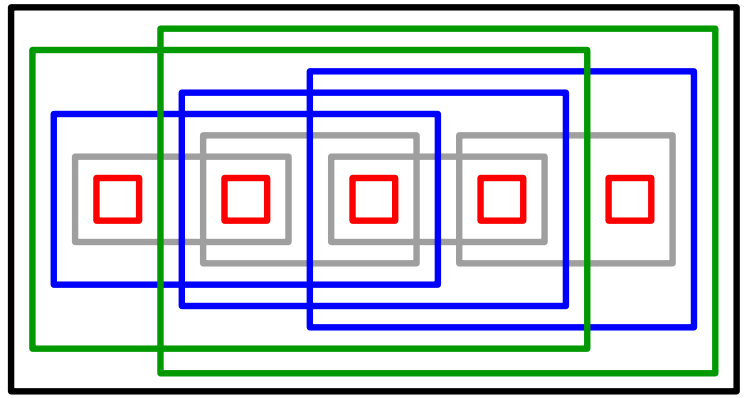
- Inkrementell
- Rekursiv
- Teile und Herrsche
- Randomisiert

- Dynamisches Programmieren

meint hier das Arbeiten mit einer Tabelle,
nicht das Schreiben eines Computerprogramms.

Vergleich





Teile und Herrsche

- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen
- top-down
- eher für Entscheidungs- oder Berechnungsprobleme

Dynamisches Programmieren

- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen, d.h. Teilinstanzen haben z.T. dieselben Teilteilinstanzen. Lösungen von Teilinstanzen werden zwischengespeichert, nicht neu berechnet.
- meist bottom-up
- meist für Optimierungsprobleme

Fahrplan

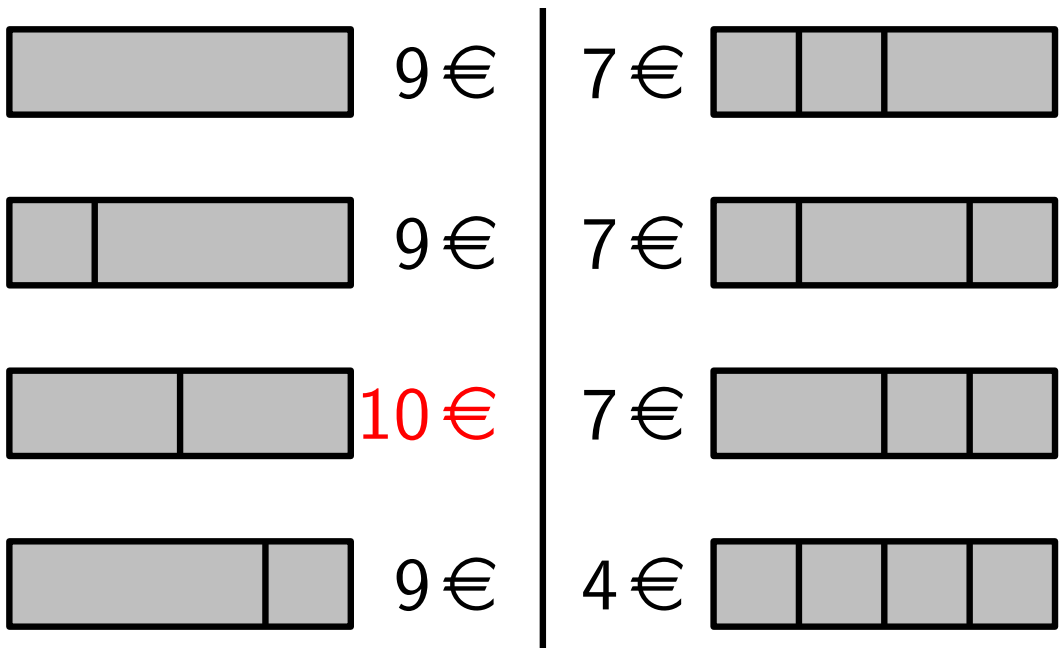
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)
4. Optimale Lösung aus berechneter Information konstruieren

Ein Beispiel

Zerlegungsproblem

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für Stäbe der Längen $1, 2, \ldots, n$.

Durch welche Zerlegung unseres Stabs können wir unseren Ertrag maximieren?



Länge i	1	2	3	4
Preis p_i [in €]	1	5	8	9

Ein erster Versuch

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für Stäbe der Längen $1, 2, \ldots, n$.

Beispiel: $n = 4$

Länge i [in m]	1	2	3	4
Preis p_i [in €]	1	5	8	9
Quotient [€/m]	1	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{4}$

Welche Stabzerlegung maximiert den Ertrag?

Ein/e ADSler/in schlägt folgenden Greedy-Algorithmus vor:

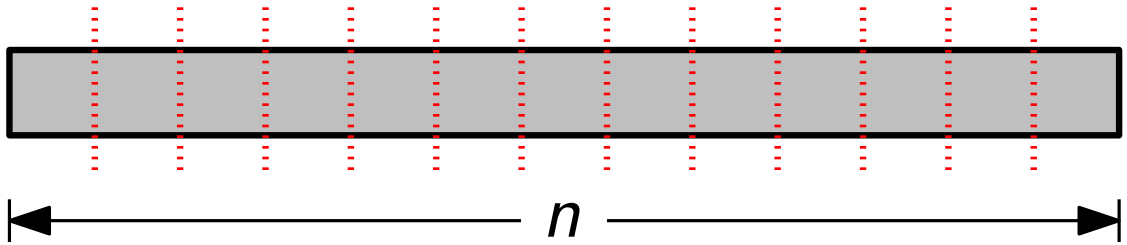
- Berechne für $i = 1, \ldots, n$ den Preis pro Meter $q_i = p_i/i$.
- Zerlege Stab in möglichst viele Stücke der Länge i mit q_i max.
- Streiche alle Stablängen $\geq i$ aus der Tabelle und wiederhole den Prozess mit dem Stabrest (falls > 0).

Liefert dieser Greedy-Algorithmus immer das Optimum?

Ja? Beweisen! Nein? Gegenbeispiel!

Rohe Gewalt

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Stab der Länge n zu zerlegen?



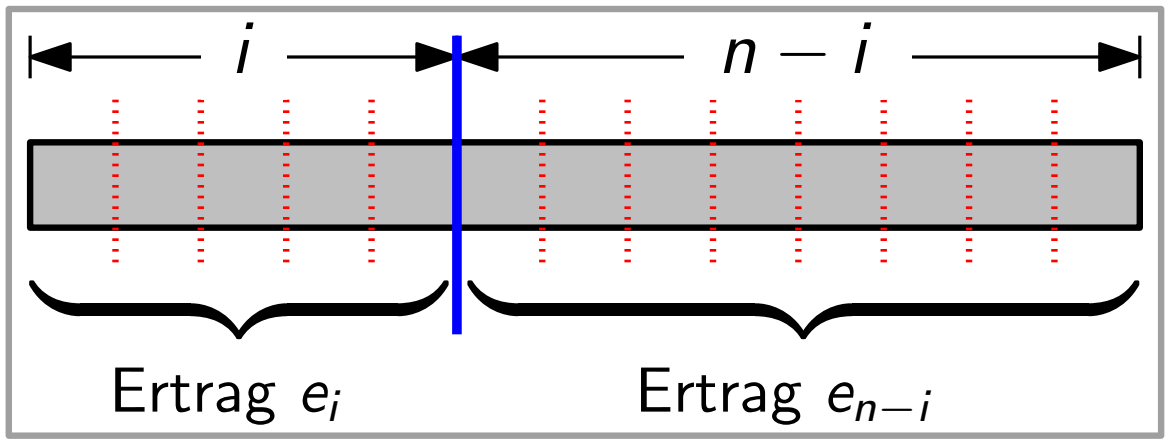
Antw.: Können $n-1$ mal entscheiden: *schneiden* oder *nicht*.
$\Rightarrow$ 2^{n-1} verschiedene* Zerlegungen

Also können wir es uns nicht leisten alle Zerlegungen durchzugehen und für jede ihren Ertrag zu berechnen.

*) Genauer: die gesuchte Anzahl ist die Anzahl $p(n)$ der *Partitionen* der Zahl n, die angibt, auf wie viele Arten man n als Summe von natürlichen Zahlen schreiben kann. Es gilt $p(n) \approx e^{\pi\sqrt{2n/3}} \Big/ (4n\sqrt{3}) \in \Theta^*\Big((13{,}00195\ldots)^{\sqrt{n}}\Big)$.

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \ldots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.



Phänomen der *optimalen Teilstruktur*!

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

Wissen nicht, *welcher* Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.
Also probieren wir einfach *alle* möglichen Schnitte aus:

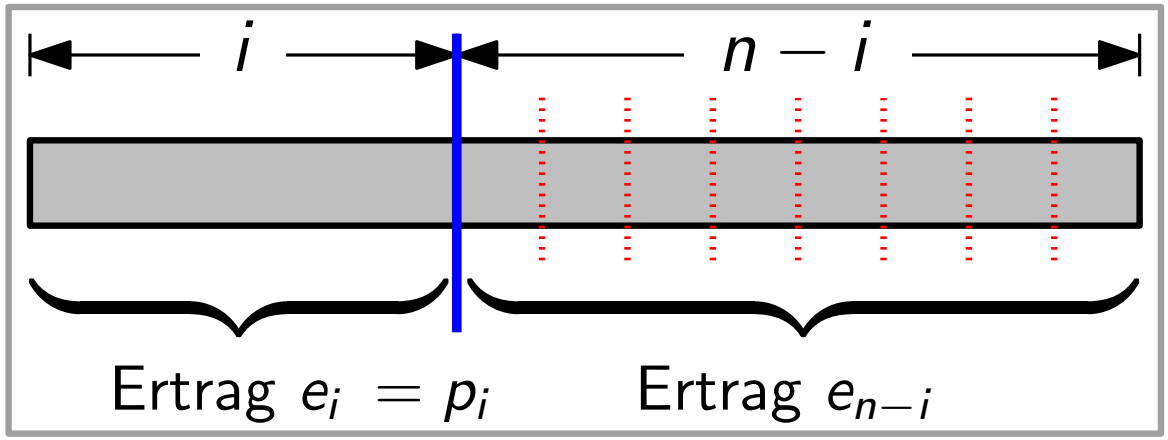
$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ e_{n-1} + e_1\ \}$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ e_{n-1} + e_1\ \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiete weitere Schnitte im linken Teilstück!



Also gilt:

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ p_1 + e_{n-1},\ \ p_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ p_{n-1} + e_1\ \}$$

$$= \max_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}, \quad \text{wobei } e_0 := 0.$$

Vorteil: Wert einer opt. Lösung ist Summe aus einer Zahl der Eingabe und *einem* Wert einer opt. Teillösung.

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```
StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = −∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n − i)}
  return q
```

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl
von Aufrufen von StangenZerlegung$(p, \cdot)$
beim Ausführen von StangenZerlegung(p, n)

$\Rightarrow A(0) = 1$

und $A(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} A(n-i) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} A(j) \overset{\text{Beweis?!}}{=} 2^n$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *mit Tabelle*

Zeit-Speicher-Tausch (engl. *time-memory trade-off*)

```
MemoStangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  e = new int[0..n]
  e[0] = 0
  for i = 1 to n do
    e[i] = −∞
  return HauptStangenZerlegung(p, n, e)
```

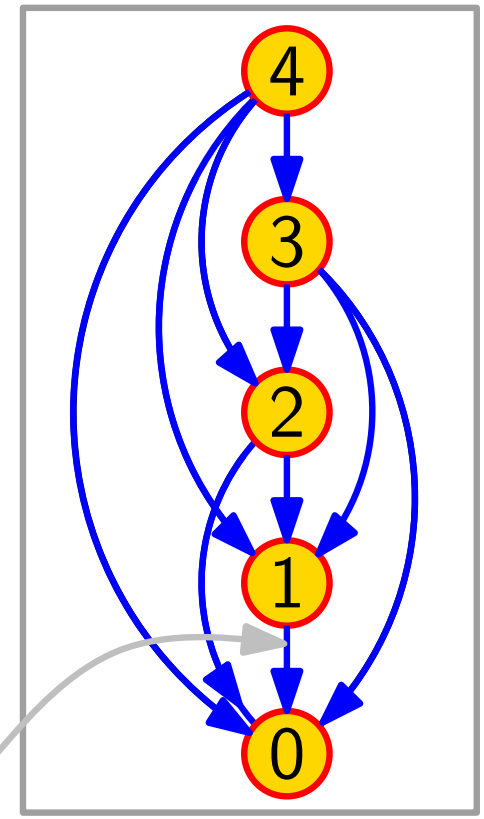
```
HauptStangenZerlegung(int[] p, int n, int[] e)
  if e[n] > −∞ then return e[n]
  q = −∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + HauptStangenZerlegung(p, n − i, e)}
  e[n] = q; return q
```

Laufzeit? – Wie letzte Folie? – Asymptotisch schneller?

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

```
BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)
  e = new int[0..n]
  e[0] = 0
  for j = 1 to n do
      q = −∞
      for i = 1 to j do
          q = max{q, p[i] + e[j − i]}
      e[j] = q
  return q
```

Neu: *kein* rekursiver Aufruf!



Kante (j, i) bedeutet: Teilinstanz j benützt Wert einer opt. Lösung von Teilinstanz i.

Graph der Teilinstanzen

Beob. Die Anzahl der Kanten im Graphen ist proportional zur Laufzeit des DP (Anz. Additionen).

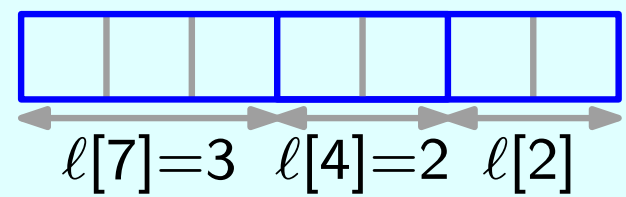
Satz. BottUpSZerl() und MemoSZerl() laufen in $O(n^2)$ Zeit.

4. Optimale Lösung aus berechneter Info. konstruieren

```
ErweiterteBottomUpZerlegung(int[] p, int[] e, int[] ℓ, int n)
  e[0] = 0
  for j = 1 to n do
      q = −∞
      for i = 1 to j do
          if q < p[i] + e[j − i] then
              q = p[i] + e[j − i]
              ℓ[j] = i          // merke Länge des 1. Teilstücks
      e[j] = q
```

$q = \max\{q, p[i] + e[j-i]\}$

```
GibZerlegungAus(int[] p, int n)
  ℓ = new int[0..n]; e = new int[0..n]
  ErweiterteBottomUpZerlegung(p, e, ℓ, n)
  while n > 0 do          // gib wiederholt Länge des 1. Teilstücks aus
      print ℓ[n]; n = n − ℓ[n]
```

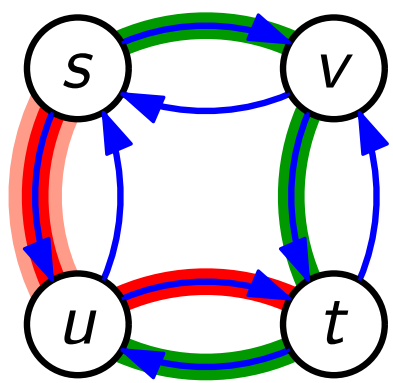


Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s-t-Weg,

d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t \rangle$ mit $v_0 v_1, \ldots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.



$\langle s, u, t \rangle$ ist ein längster einfacher s-t-Weg.

Aber:

$\langle s, u \rangle$ ist *kein* längster einfacher s-u-Weg;

$\langle s, v, t, u \rangle$ ist ein längster einfacher s-u-Weg!

Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

*) Es ist NP-schwer für (G, s, t, k) zu entscheiden, ob G einen einfachen s-t-Weg der Länge k enthält. (Vgl. Hamilton-Weg!)

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gewichteter gerichteter *kreisfreier* Graph $G = (V, E; w)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster s-t-Weg.

Beob$_1$ In kreisfreien Graphen sind alle Wege einfach.

Beob$_2$ *Dieses* Problem hat optimale Teilstruktur, denn:
Ein längster s-t-Weg π gehe durch u, d.h.

$$\pi = s \xrightarrow{\pi_{su}} u \xrightarrow{\pi_{ut}} t.$$

Dann gilt:
π_{su} ist längster s-u-Weg; π_{ut} ist längster u-t-Weg –
sonst wäre π kein längster s-t-Weg.

Außerdem gilt $V(\pi_{su}) \cap V(\pi_{ut}) = \{u\}$;
sonst gäbe es einen Kreis!

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$d_v = \max_{u:\ uv \in E} d_u + w(u,v)$$ // Länge eines längsten s-v-Wegs

so!

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (hier bottom-up)
   - G topologisch sortieren
   - d-Werte initialisieren: $d_s = 0$ und $d_v = -\infty$ für alle $v \neq s$
   - for-Schleife durch Knoten v.l.n.r. d-Werte berechnen

Übrigens: *Kürzeste* Wege in kreisfreien Graphen kann man genauso berechnen (mit min statt max und $+\infty$ statt $-\infty$).

Genauso kann man auch das SMS-Problem lösen ($\cdot$ statt $+$).

Und jetzt?

Im Buch [CLRS] werden weitere, praxisrelevante Probleme mit dynamischem Programmieren gelöst:

- Ketten von Matrixmultiplikationen
- Längste gemeinsame Teilfolge (in Zeichenketten)
- Optimale binäre Suchbäume

Lesen Sie Kapitel 15.2–5 !!!