

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2021/22

21. Vorlesung

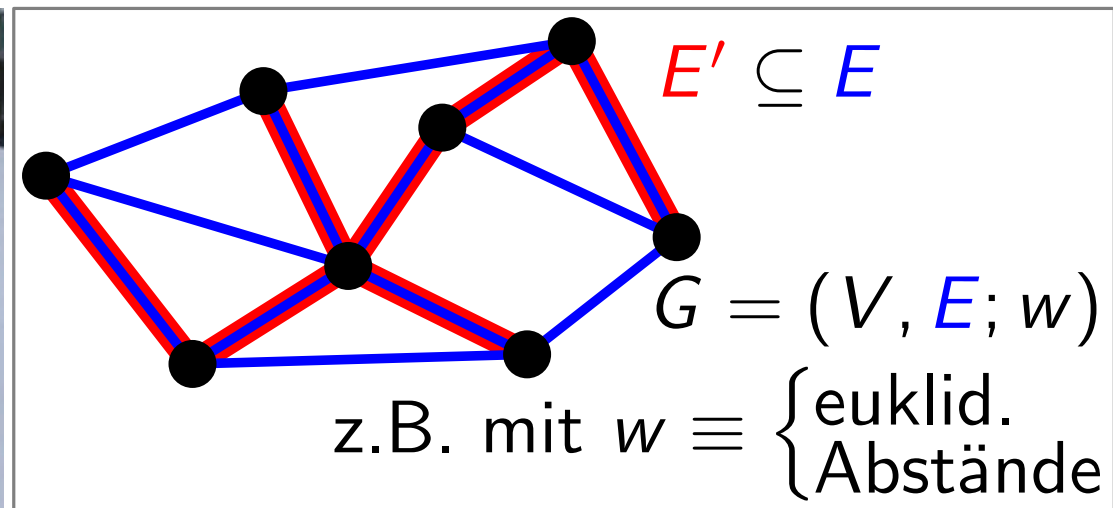
Minimale Spann bäume

Motivation

Gegeben: **zusammenhängendes** Straßennetz $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, das eine Menge V von n Städten verbindet.

Gesucht: Teilnetz $G' = (V, E')$ mit $E' \subseteq E$, so dass

- (1) man von jeder Stadt in G' zu jeder anderen kommen kann („ G' spannt G auf“) und
- (2) die „Schneeräumkosten“ $w(E') = \sum_{e \in E'} w(e)$ minimal sind unter allen Teilnetzen, die (1) erfüllen.



Beobachtung

Wegen der Minimalität von $w(E')$ gilt:

G' hat keine Kreise $\Rightarrow G'$ ist ein Wald.

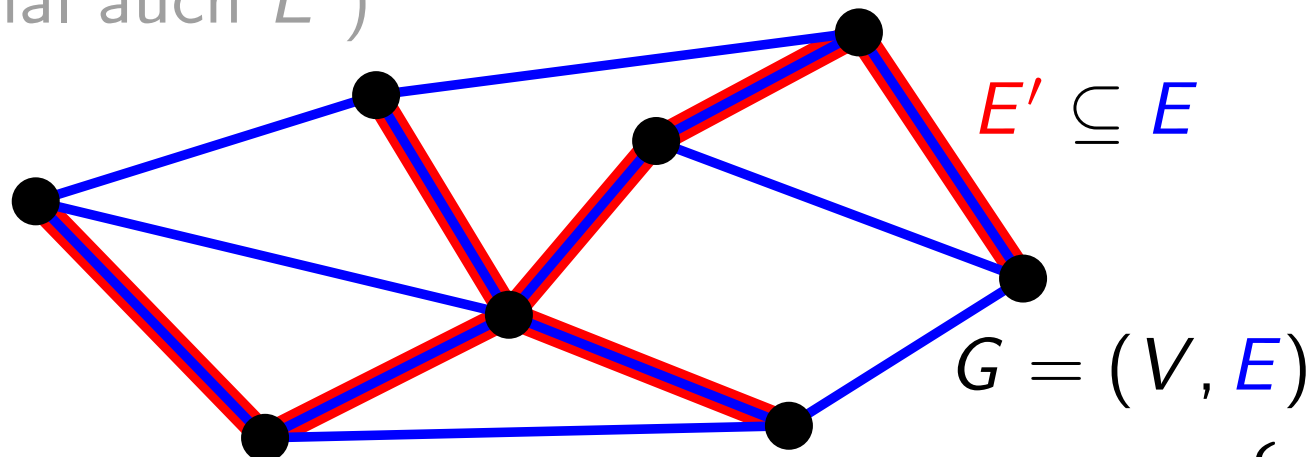
G' „erbt“ Zusammenhang von $G \Rightarrow G'$ Baum.

G' spannt G auf $\Rightarrow G'$ ist Spannbaum von G .

G' hat minimales Gewicht unter *allen* Spannbäumen von G .

Wir nennen G' kurz *minimalen Spannbaum* von G .

(manchmal auch E')



Beob. $|E'| = |V| - 1$

z.B. mit $w \equiv \begin{cases} \text{euklid.} \\ \text{Abstände} \end{cases}$

Generischer Min.-Spannbaum-Algorithmus

GenericMST(UndirectedConnectedGraph G , EdgeWeights w)

$A = \emptyset$

while $|A| < |V| - 1$ **do**

// *Invariante*: A ist Teilmenge eines min. Spannbaums von G

finde Kante uv , die **sicher** für A ist

$A = A \cup \{uv\}$

return A

Wir sagen uv ist *sicher* für A , falls Invariante für $A \cup \{uv\}$ gilt.

Beob. Dies ist ein sogenannter *Greedy-Algorithmus*!

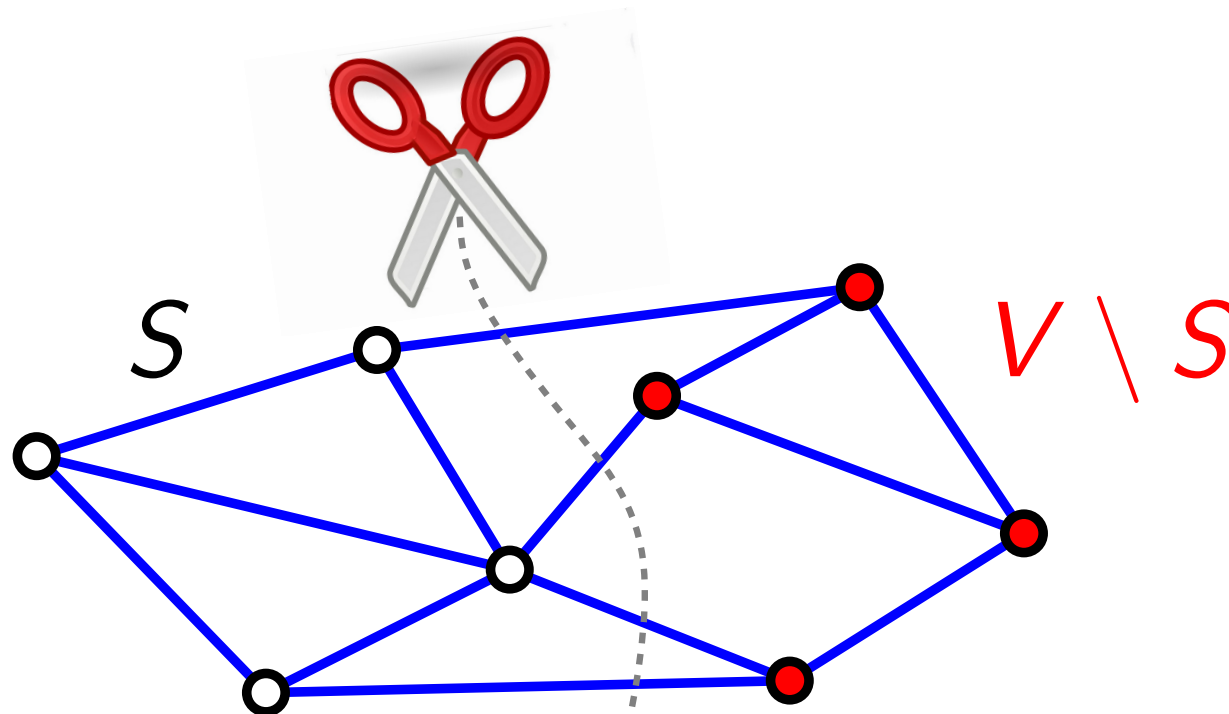
Frage: Gibt's überhaupt immer eine sichere Kante?

Antwort: Ja! – *Per Induktion!*

Frage: Aber wie findet man eine –
ohne schon einen minimalen Spannbaum zu kennen?

Schnitte und leichte Kanten

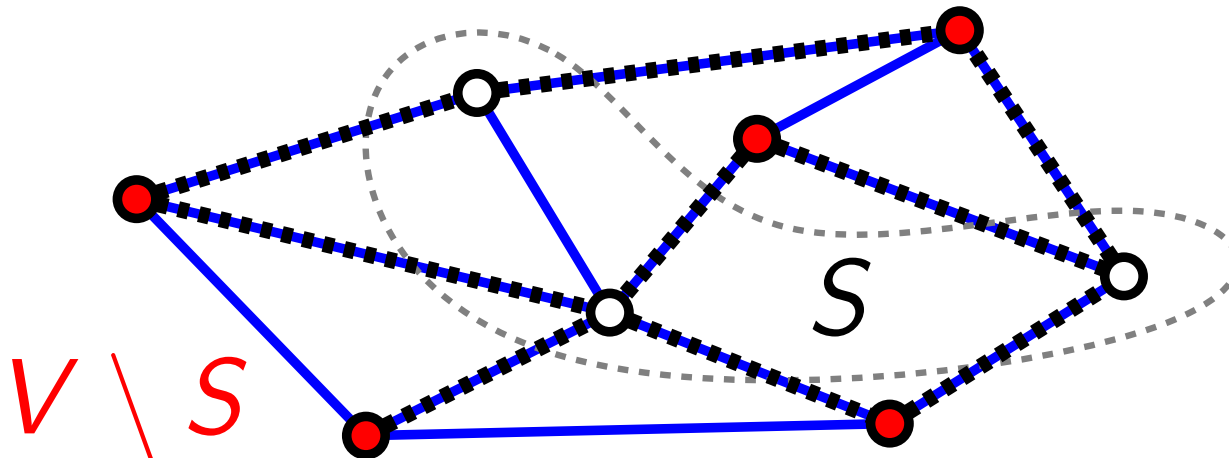
Def. Ein *Schnitt* $(S, V \setminus S)$ eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Zerlegung (od. Zweifärbung*) von V .



*) benachbarte Knoten dürfen hier die gleiche Farbe haben.

Schnitte und leichte Kanten

Def. Ein *Schnitt* $(S, V \setminus S)$ eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Zerlegung (od. Zweifärbung*) von V .
 Eine Kante e *kreuzt* $(S, V \setminus S)$, wenn ein Endpunkt von e in S und der andere in $V \setminus S$ liegt.

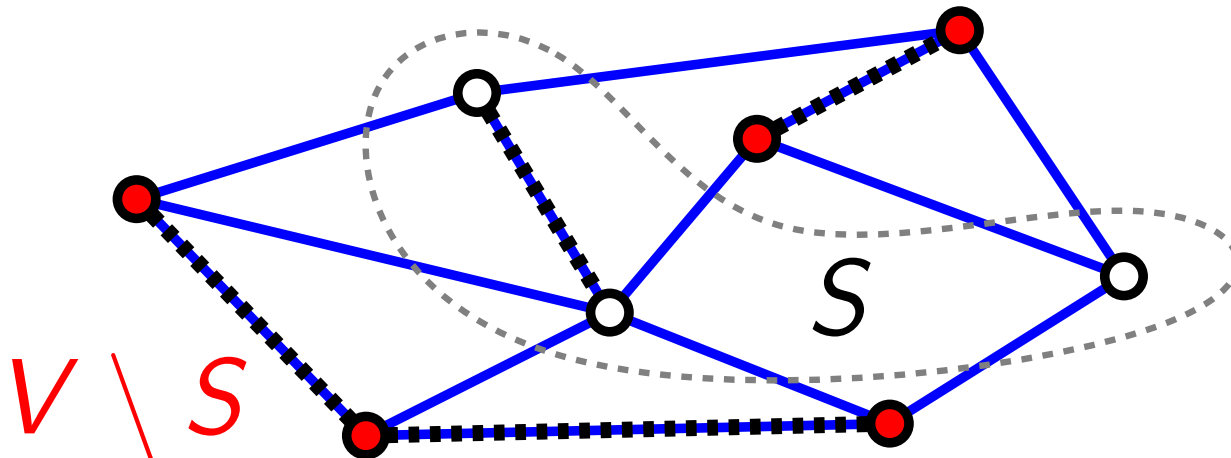


Schnitte und leichte Kanten

Def. Ein *Schnitt* $(S, V \setminus S)$ eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Zerlegung (od. Zweifärbung*) von V .

Eine Kante e *kreuzt* $(S, V \setminus S)$, wenn ein Endpunkt von e in S und der andere in $V \setminus S$ liegt.

Ein Schnitt *respektiert* eine Kantenmenge A , wenn keine Kante in A den Schnitt kreuzt.



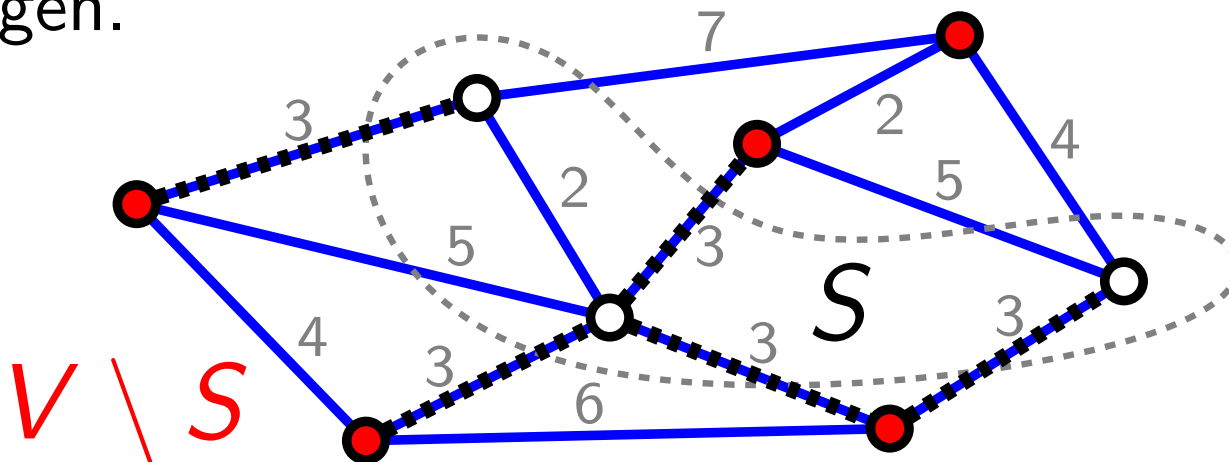
Schnitte und leichte Kanten

Def. Ein **Schnitt** $(S, V \setminus S)$ eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Zerlegung (od. Zweifärbung*) von V .

Eine Kante e **kreuzt** $(S, V \setminus S)$, wenn ein Endpunkt von e in S und der andere in $V \setminus S$ liegt.

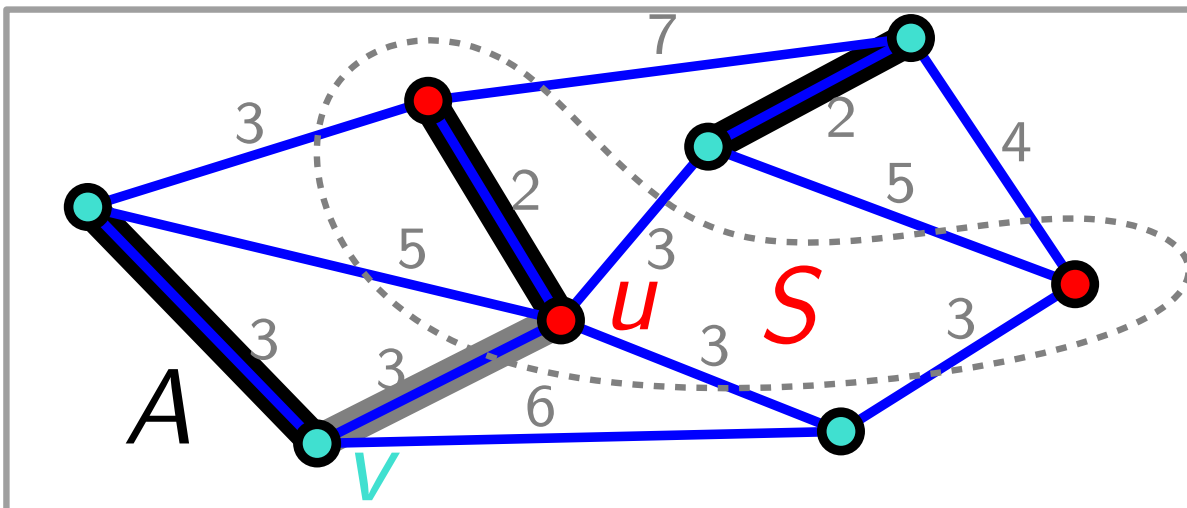
Ein Schnitt **respektiert** eine Kantenmenge A , wenn keine Kante in A den Schnitt kreuzt.

Eine Kante e , die einen Schnitt kreuzt, ist **leicht**, wenn alle Kanten, die den Schnitt kreuzen, mindestens $w(e)$ wiegen.



Erweiterungssatz

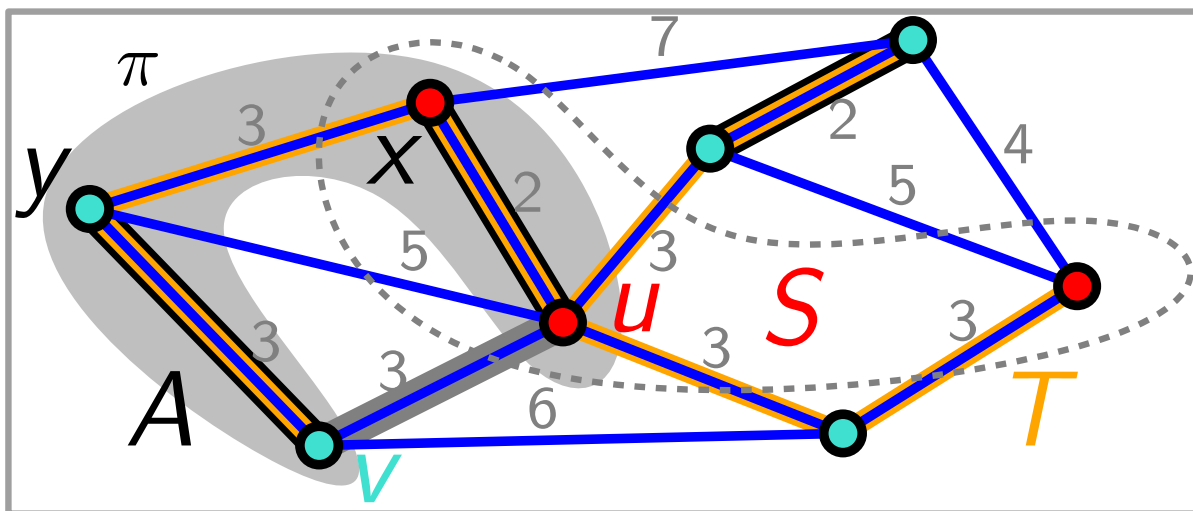
Satz. Sei $G = (V, E; w)$ ein zshg., gewichteter, unger. Graph.
 Sei T Kantenmenge eines min. Spannbaums von G .
 Sei A Teilmenge von T .
 Sei $(S, V \setminus S)$ ein Schnitt, der A respektiert.
 Sei $uv \in E$ leicht bzgl. $(S, V \setminus S)$.
 Dann ist uv sicher für A ,
 d.h. G hat einen min. Spannbaum, der $A \cup \{uv\}$ enthält.



Beweis

Satz. ... Dann ist uv sicher für A .

Beweis. Zeige: G hat min. Spannbaum, der $A \cup \{uv\}$ enthält.
 Falls $uv \in T$, fertig. Also $uv \notin T$. Sei π u - v -Pfad in T .
 $\Rightarrow \pi + uv$ ist Kreis (wobei uv $(S, V \setminus S)$ kreuzt)
 \Rightarrow Kreis enthält zweite Kante xy , die $(S, V \setminus S)$ kreuzt.
 $\Rightarrow T' = (T \cup \{uv\}) \setminus \{xy\}$ ist auch Spannbaum von G .
 $w(T') = w(T) + \underbrace{w(uv) - w(xy)}_{\leq 0, \text{ da } uv \text{ leicht bzgl. } (S, V \setminus S)} \leq w(T)$



$\Rightarrow T'$ ist *minimaler* Spannbaum von G .
 Und: $A \cup \{uv\} \subseteq T'$.
 $\Rightarrow uv$ ist sicher für A .

□

Zurück zum Algorithmus

Satz. Sei $G = (V, E; w)$ ein zshg., gewichteter, unger. Graph.
 Sei T Kantenmenge eines min. Spannbaums von G .
 Sei A Teilmenge von T .
 Sei $(S, V \setminus S)$ ein Schnitt, der A respektiert.
 Sei $uv \in E$ leicht bzgl. $(S, V \setminus S)$.
 Dann ist uv sicher für A .

GenericMST(UndirectedConnectedGraph G , EdgeWeights w)

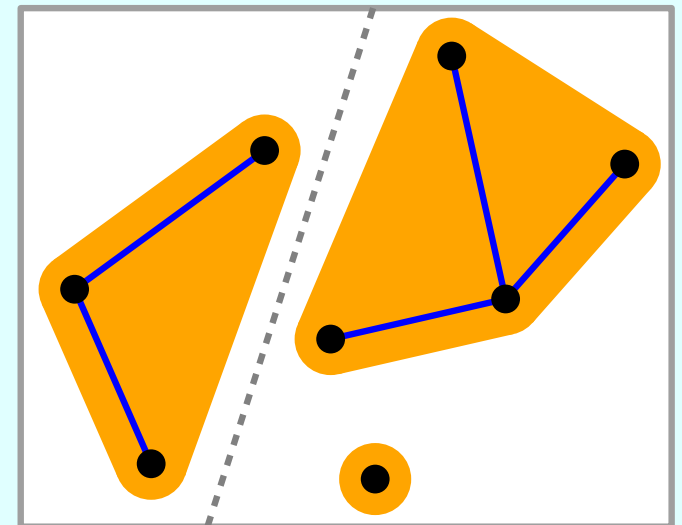
$A = \emptyset$

while $|A| < |V| - 1$ **do**

// INV: $A \subseteq$ min. Spannbaum von G
 finde Kante uv , die *sicher* für A ist

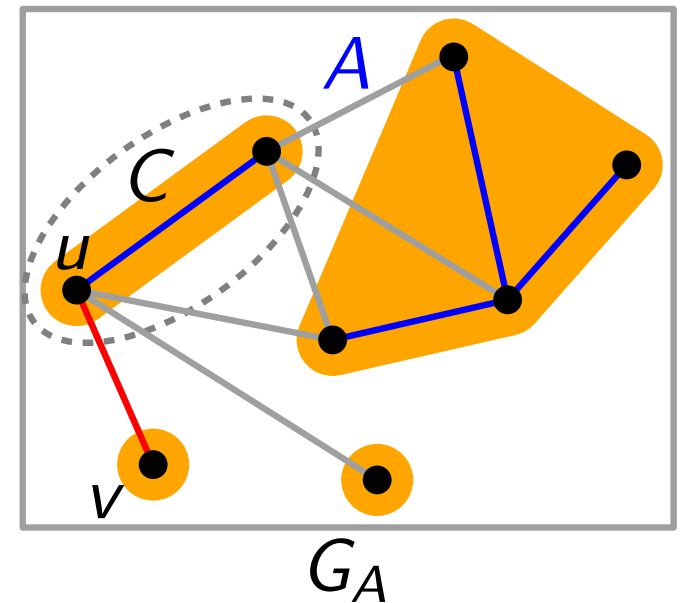
$A = A \cup \{uv\}$

return A



Zusammenhangskomponenten

Def. Eine *Zusammenhangskomponente* eines Graphen ist ein Teilgraph, der von einer nicht vergrößerbaren („*inklusionsmaximalen*“) zusammenhängenden Menge von Knoten *induziert* wird.



Korollar. $G = (V, E)$ wie gehabt.
 $A \subseteq E$ in einem min. Spannbaum von G enthalten.
 $C = (V_C, E_C)$ Zshgskomp. des Waldes $G_A = (V, A)$.
 uv leicht bzgl. $(V_C, V \setminus V_C)$
Dann gilt: uv ist sicher für A .

Der Algorithmus von Jarník-Prim-Dijkstra

Jarník Prim Dijkstra MST

(1930/1957/1959)

~~Dijkstra~~(Weighted Graph $G = (V, E; w)$, Vertex s)

Initialize(G, s)

$Q = \text{new PriorityQueue}(V, d)$ // Gewichtung

while not $Q.\text{Empty}()$ **do**

$u = Q.\text{ExtractMin}()$

foreach $v \in \text{Adj}[u]$ **do**

$\text{Relax}'(u, v; w)$

$v \in Q$ and ...

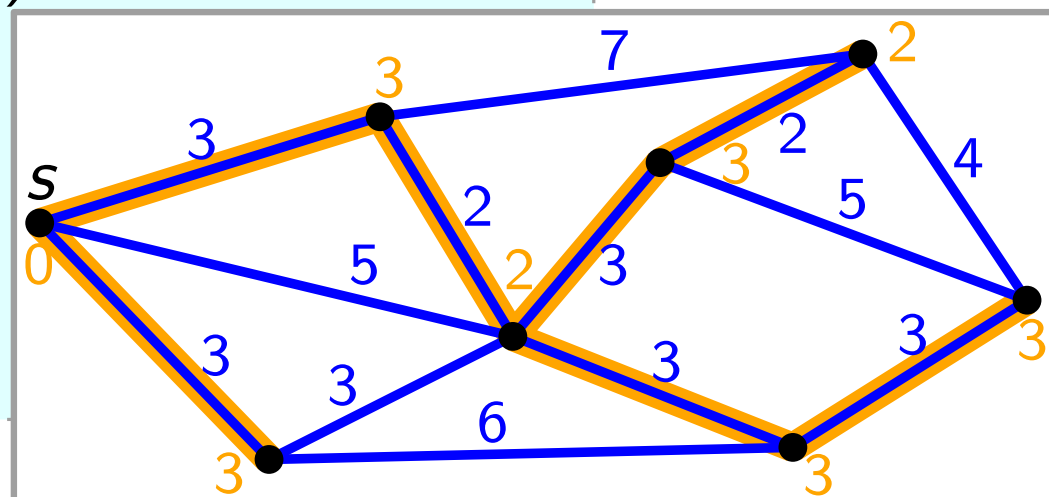
$\text{Relax}'(u, v; w)$

if $v.d > \cancel{u.d} + w(u, v)$ **then**

$v.d = \cancel{u.d} + w(u, v)$

$v.\pi = u$

$Q.\text{DecreaseKey}(v, v.d)$



Korrektheit? ✓

Folgt aus Korollar:
 $A = \{ \{u, u.\pi\} : u \notin Q \}$,
 Kante $\{u, u.\pi\}$ immer
 sicher bzgl. $(Q^*, V \setminus Q^*)$,
 wobei $Q^* = Q \cup \{u\}$.

Laufzeit?

$O(|E| \cdot \text{DecreaseKey} + |V| \cdot \text{ExtractMin})$

$\Rightarrow O((E + V) \log V)$ [Heap/RS-Baum]

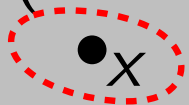
$\Rightarrow O(E + V \log V)$ [Fibonacci-Heap]

Einschub: halbdynamische Mengen (wachsen nur, schrumpfen nicht)

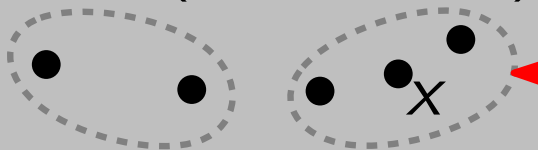
Die halbdyn. Mengen zerlegen immer eine Grundmenge X .

Drei Operationen:

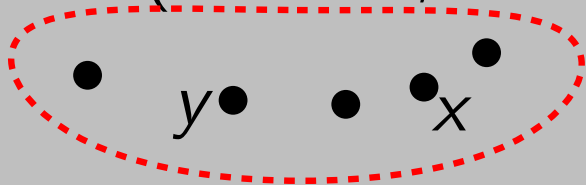
MakeSet(Element x) legt die Menge $\{x\}$ an.



FindSet(Element x) liefert (Zeiger auf) die Menge zurück, die momentan x enthält.



Union(Elem. x , Elem. y) vereinigt die Mengen, die momentan x und y enthalten.



Satz. Eine Folge von m MakeSet-, Union- und FindSet-Oper., von denen n MakeSet-Oper. sind, benötigt $O(m \cdot \alpha(n))$ Zeit, wobei $\alpha(n) \leq 4$ für alle $n \leq 10^{80}$. Insbesondere $\alpha(n) \ll \log_{10} n$ für $n > 1$.

funktionales Inverses der extrem schnellwachsenden Ackermann-Funktion $A(n, n)$

Der Algorithmus von Kruskal

KruskalMST(WeightedUndirectedGraph $G = (V, E), w$)

$A = \emptyset$

foreach $v \in V$ **do**

└─ MakeSet(v)

Sortiere E nicht-absteigend nach Gewicht w

foreach $uv \in E$ **do**

└─ **if** FindSet(u) \neq FindSet(v) **then**

└─└─ $A = A \cup \{uv\}$

└─└─ Union(u, v)

return A

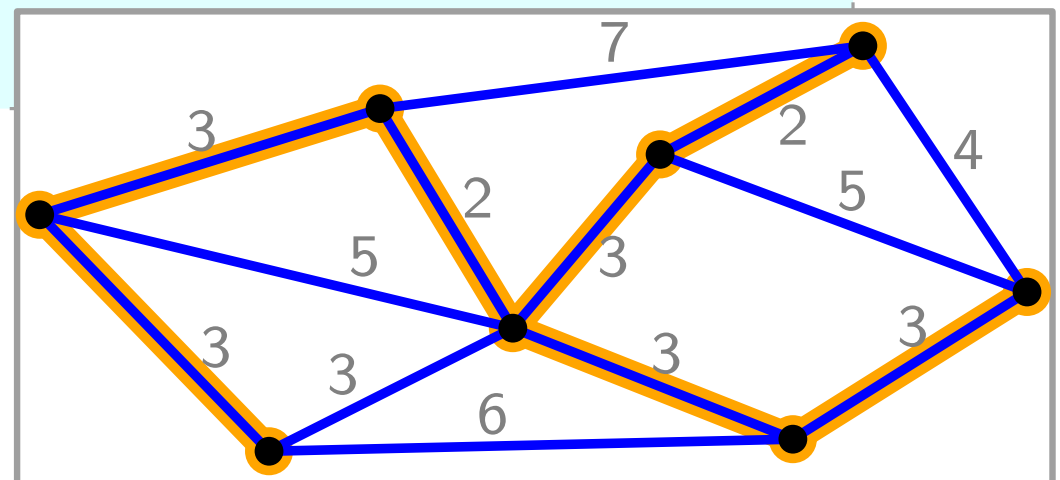
Laufzeit?

$|V| \cdot \text{MakeSet} + (|V| - 1) \cdot \text{Union}$

$+ 2|E| \cdot \text{FindSet} + \text{Sort}(E)$

$\in O(E \log V + E \log E)$

$= O(E \log V)$! Warum??



Weil $O(\log E) \subseteq O(\log V^2) = O(\log V)$. Ah...

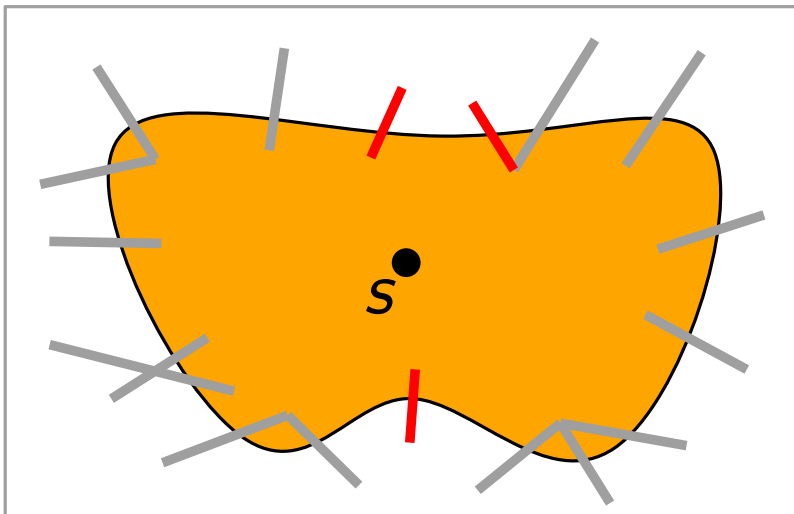
Übersicht: Algo. für min. Spann bäume

Greedy!



Jarník-Prim

- geht (wie Dijkstra / BFS) wellenförmig von einem Startknoten aus
- aktuelle Kantenmenge zusammenhängend
- Laufzeit $O(E + V \log V)$



Kruskal

- bearbeitet Kanten nach aufsteigendem (genauer: nicht-absteig.) Gewicht
- nach Einfügen der i . Kante gibt es $n - i$ Zshgskomp.
- Laufzeit $O(E \log V)$

