

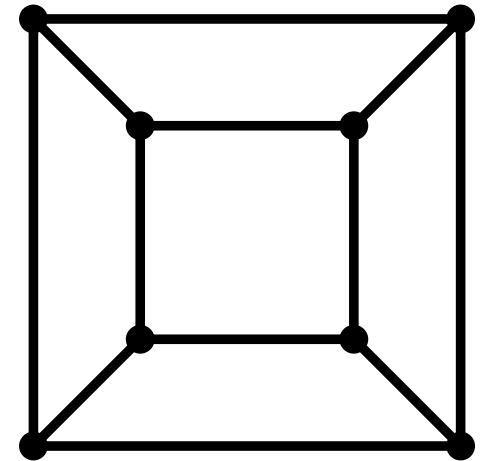
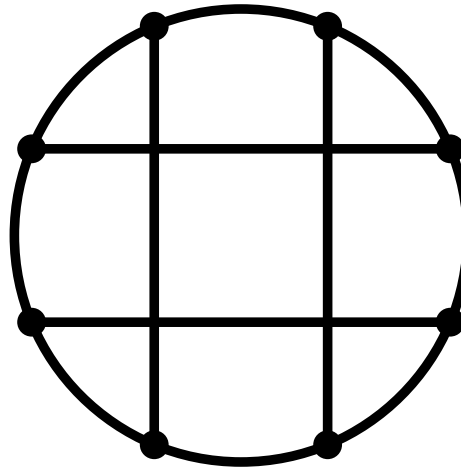
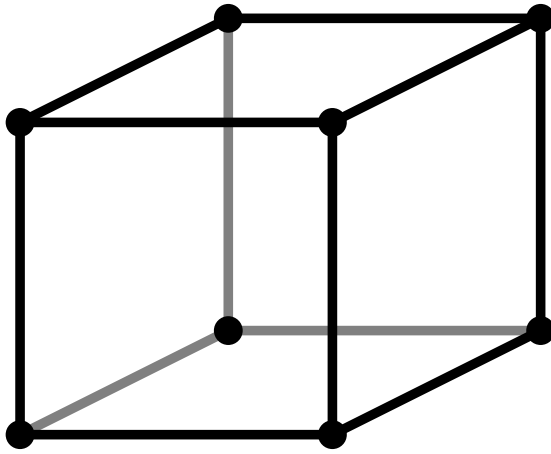
Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2021/22

18. Vorlesung

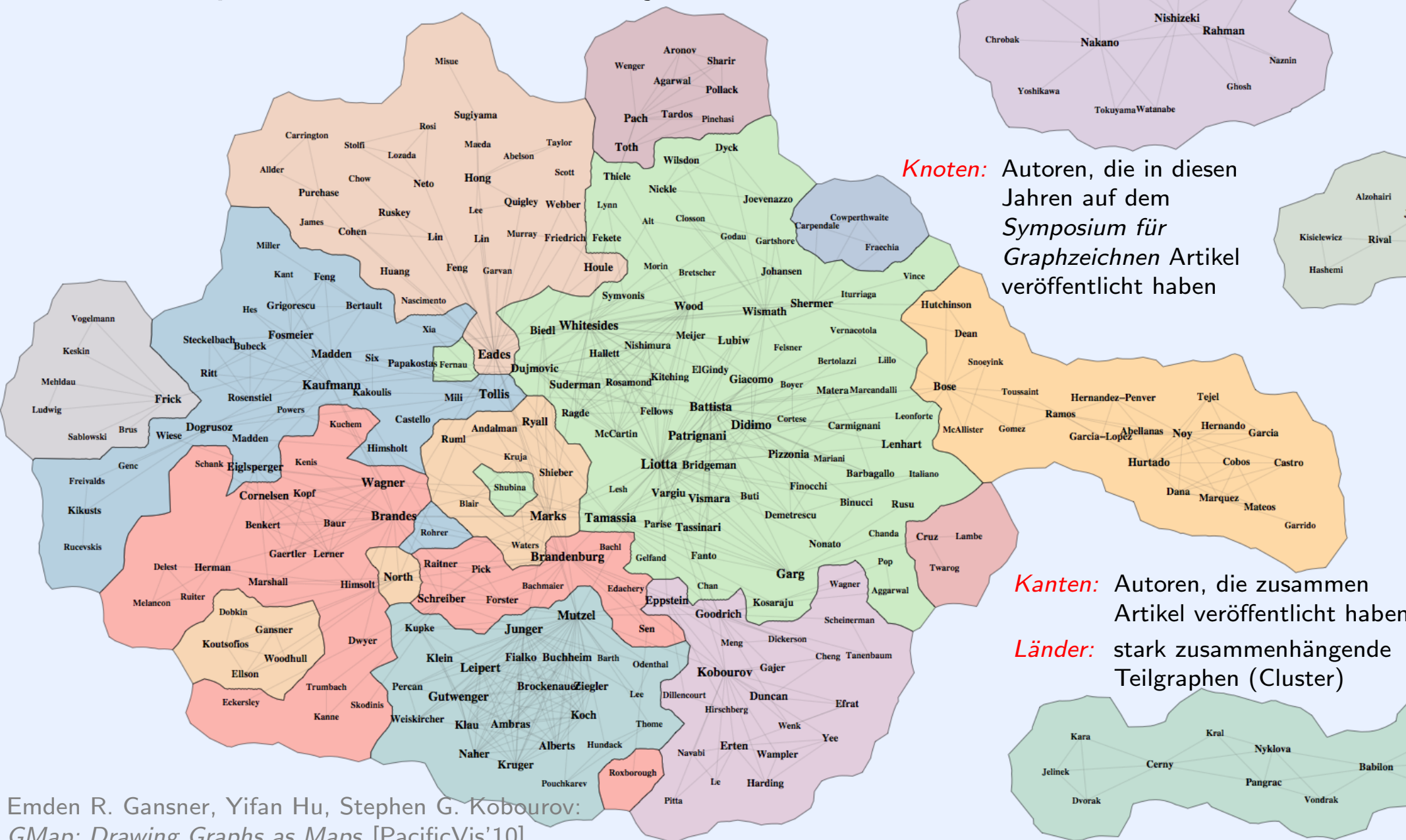
Graphen: Repräsentation und Durchlaufstrategien

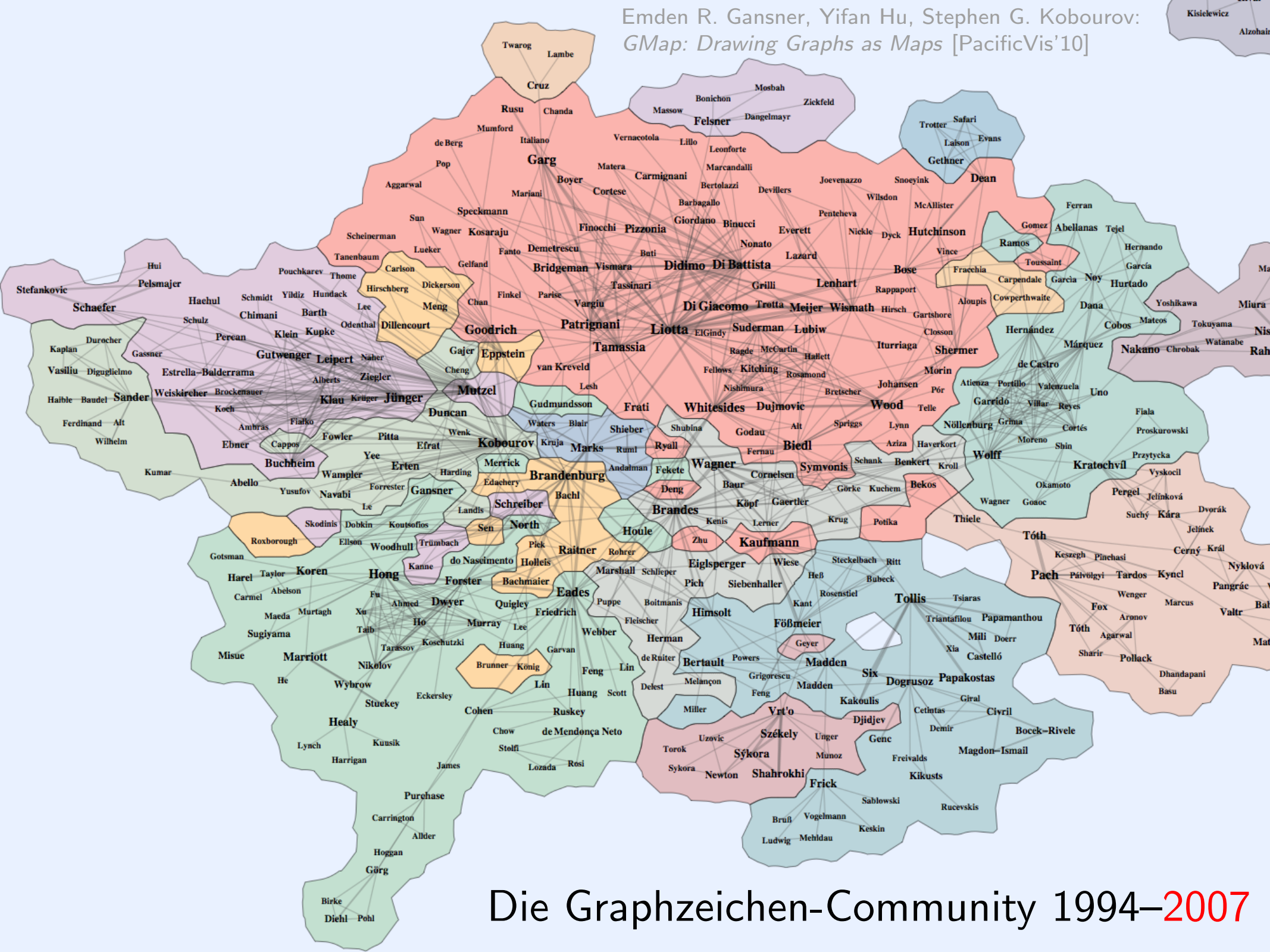
Was ist das?



Ein (und derselbe) *Graph*; der dreidimensionale Hyperwürfel.

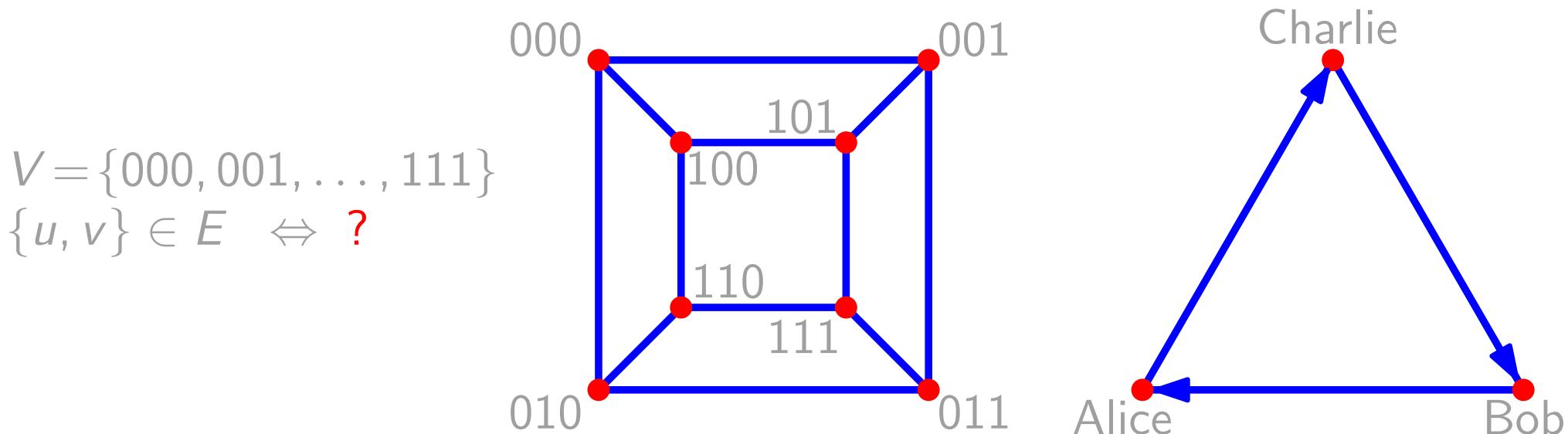
Die Graphzeichen-Community 1994–2004





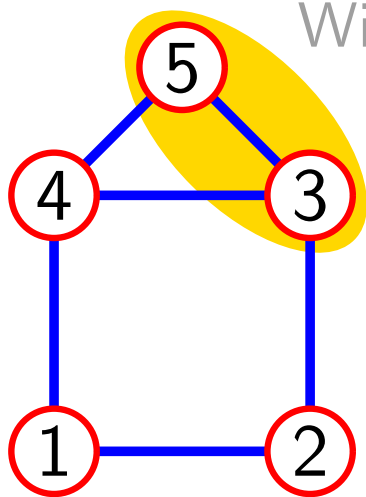
F: Was ist ein Graph?

- A₁: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar (V, E) , wobei
- V *Knotenmenge* und
 - $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ *Kantenmenge*.



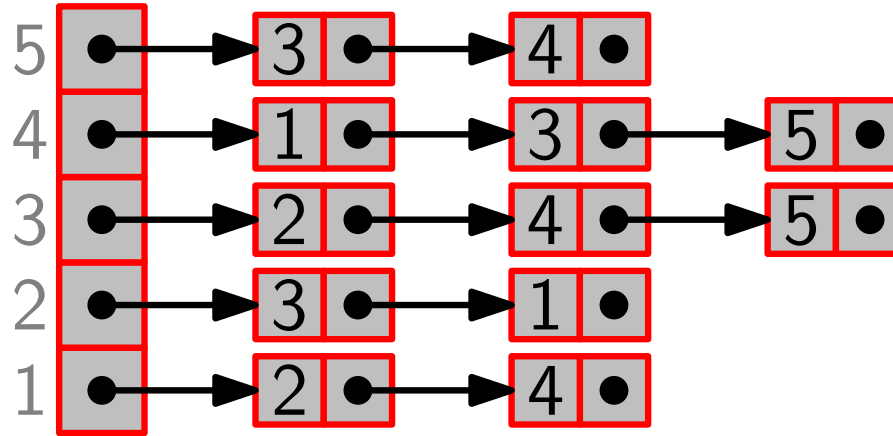
- A₂: Ein *gerichteter* Graph ist ein Paar (V, E) , wobei
- V *Knotenmenge* und
 - $E \subseteq V \times V = \{(u, v) \mid u, v \in V\}$ *Kantenmenge*.

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter
Graph

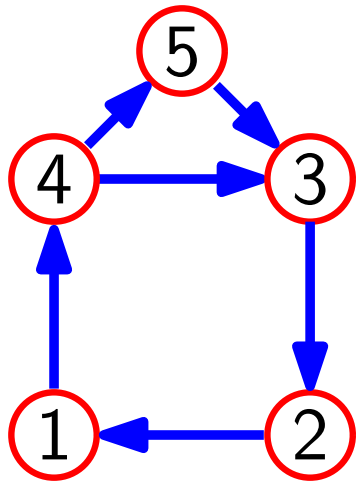
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjacent*.



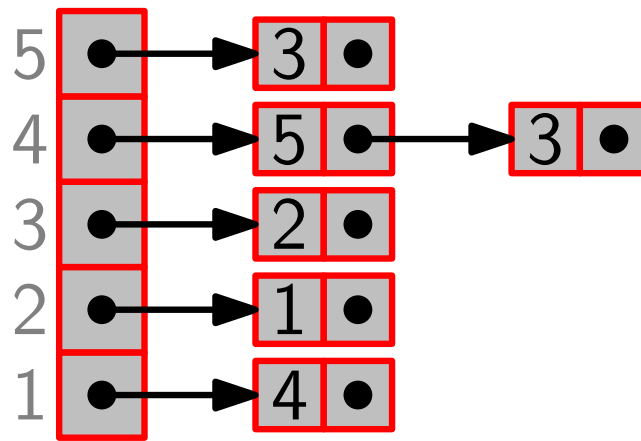
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix



gerichteter
Graph



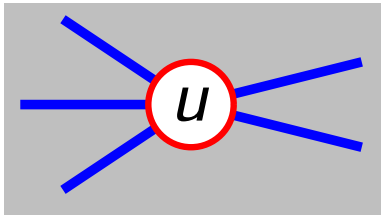
$$\text{Adj}[i] = \{j \in V \mid (i, j) \in E\}$$

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	0
2	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	1
5	0	0	1	0	0

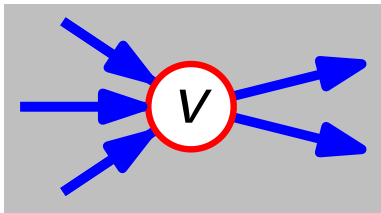
$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i, j) \in E$$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\text{Adj}[u]|$$



$$\text{outdeg}(v) = |\text{Adj}[v]|$$

$$\text{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob.

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis.

Technik des *zweifachen Abzählens*:

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Eine Kante ist *inzident* zu ihren Endknoten.

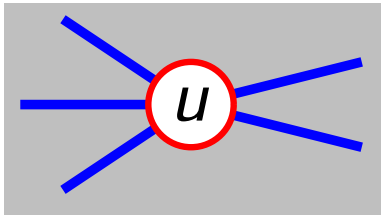
Ein Knoten ist *inzident* zu allen Kanten, deren Endknoten er ist.

Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V} \deg v$

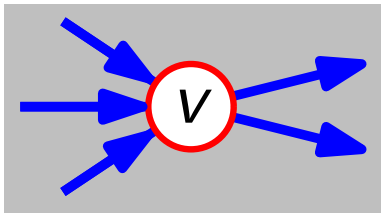
Aus Sicht der Kanten: $2 \cdot |E|$ also gleich!

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\text{Adj}[u]|$$



$$\text{outdeg}(v) = |\text{Adj}[v]|$$

$$\text{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob.

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Sätze.

Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis.

$$2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg v = \sum_{v \in V_{\text{ger}}} \deg v + \sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg v$$

gerade!
gerade!
gerade!
 $\Rightarrow$ *gerade!*

$$\sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg v \text{ gerade} \Rightarrow |V_{\text{ung}}| \text{ ist gerade!} \quad \square$$

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis, so dass jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

2. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis, so dass jeder **Knoten** genau einmal durchlaufen wird.

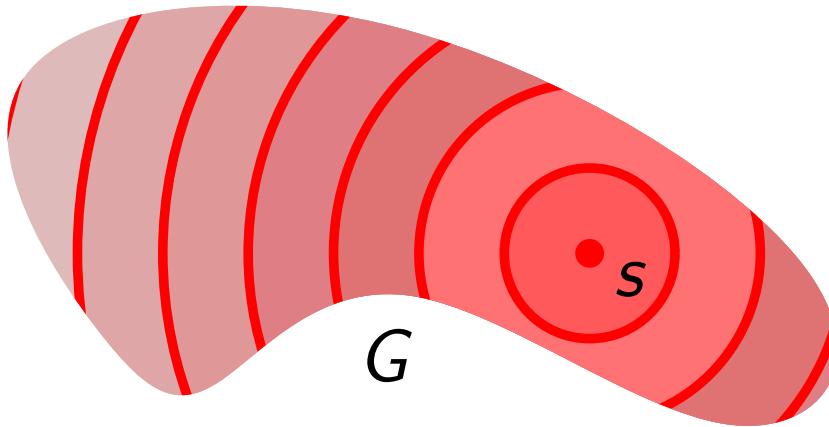
Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

NP-schwer

F: Wie durchlaufe ich einen Graphen?

Ideen?



1. wellenförmige Ausbreitung ab einem gegebenen Startknoten s

Breitensuche (breadth-first search, BFS) ← *jetzt!*

2. vom Startknoten s möglichst schnell weit weg

↪ *Tiefensuche (depth-first search, DFS)*

↪ *nächstes Mal!*

Breitensuche

BFS(Graph G , Vertex s)

Initialize(G , s)

$Q = \text{new Queue}()$

$Q.\text{Enqueue}(s)$

while not $Q.\text{Empty}()$ **do**

$u = Q.\text{Dequeue}()$

foreach $v \in \text{Adj}[u]$ **do**

if $v.\text{color} == \text{white}$ **then**

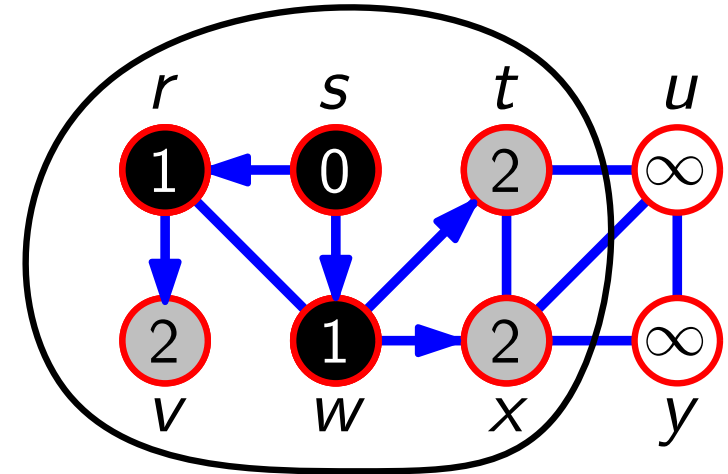
$v.\text{color} = \text{gray}$

$v.d = u.d + 1$

$v.\pi = u$

$Q.\text{Enqueue}(v)$

$u.\text{color} = \text{black}$



w r t x v u s w .

Initialize(Graph G , Vertex s)

foreach $u \in V$ **do**

$u.\text{color} = \text{white}$

$u.d = \infty$

$u.\pi = \text{nil}$

$s.\text{color} = \text{gray}$

$s.d = 0$

Laufzeit?

$$\begin{array}{l}
 \text{Initialize} \quad \text{En-/Dequeues} \quad \text{Adjazenzlisten (foreach-Schleifen)} \\
 O(|V|) + O(|V|) + O(|E|) = O(|V| + |E|) \\
 \text{[Beob. über Knotengrade!]}
 \end{array}$$

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

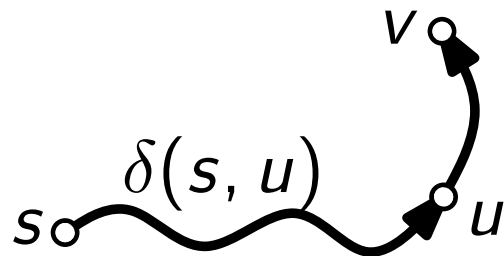
Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
 $\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u - v -Wegs,
 (falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach $\text{BFS}(G, s)$ für alle $v \in V$ gilt:
 $\overset{\text{berechneter Abstand von } s}{v.d} = \overset{\text{tatsächlicher Abstand von } s}{\delta(s, v)}.$

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
 Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
 Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 1. Fall: u ist von s erreichbar (d.h. $\exists$ s - u -Weg)



Dieser s - v -Weg hat Länge $\delta(s, u) + 1$.



Kürzester s - v -Weg hat Länge $\leq \delta(s, u) + 1$.

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1. \quad \checkmark$$

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$. Nach $\text{BFS}(G, s)$ gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```

BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
    u = Q.Dequeue()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = gray
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.Enqueue(v)
    u.color = black
  
```

$k = 1$: Situation nach $Q.\text{Enqueue}(s)$: ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

$k > 1$: Situation nach $Q.\text{Enqueue}(v)$: ✓

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u .

$$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)$$

Induktionsannahme für u Lemma 1
($u.d$ wurde gesetzt, als Anz. Enqueue-Oper. $< k$)

Jetzt ist v grau. $\Rightarrow v.d$ ändert sich nicht mehr. □

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach $\text{BFS}(G, s)$ gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$. ✓

Lemma 3. Sei $Q = \langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle$ während BFS. Dann gilt:
(A) $v_r.d \leq v_1.d + 1$ und
(B) $v_i.d \leq v_{i+1}.d$ für $i = 1, \dots, r - 1$.
Also d -Werte der Knoten in Q z.B. $\langle 3, 3, 4, 4, 4 \rangle$.

Korollar. Angenommen u wird früher als v in Q eingefügt,
dann gilt $u.d \leq v.d$, wenn v in Q eingefügt wird.

Beweis. Folgt aus Lemma 3 und der Tatsache, dass jeder
Knoten $\leq 1 \times$ einen endlichen d -Wert bekommt.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G .
Nach $\text{BFS}(G, s)$ gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

(iii) Für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$ gilt:
es gibt einen kürzesten s - v -Weg, der aus einem
kürzesten s - $v.\pi$ -Weg und der Kante $(v.\pi, v)$ besteht.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii). Es genügt also (i) zu zeigen.

Lemma 2 $\Rightarrow v.d \geq \delta(s, v)$. Noch z.z.: $v.d \leq \delta(s, v)$.

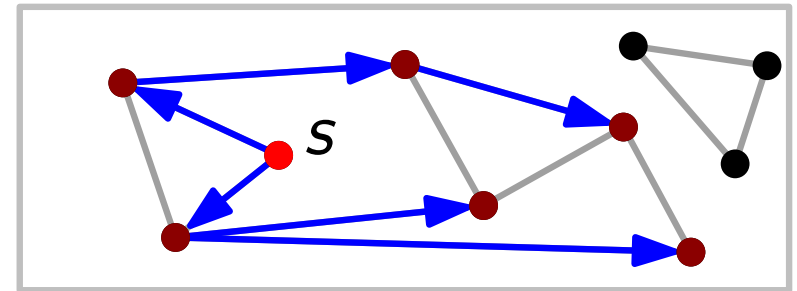
Widerspruchsbeweis mit Wahl des „kleinsten Schurken“.

Siehe Kapitel 22.2 [CLRS].

BFS-Bäume

Betrachte den *Vorgänger-Graphen* $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G :

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



Klar: G_π ist ein Baum (da zshg. und $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$).

Beh.: G_π ist ein *Kürzeste-Wege-Baum* (oder *BFS-Baum*), d.h.

- $V_\pi = \{v \in V : v \text{ erreichbar von } s\}$
- für alle $v \in V_\pi$ enthält G_π einen eindeutigen Weg von s nach v , der ein kürzester s - v -Weg ist.

Bew.: Folgt aus (ii) und (iii) im Hauptsatz.

