

# Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2021/22

13. Vorlesung

## Binäre Suchbäume

# Dynamische Menge

verwaltet Elemente einer  
sich ändernden Menge  $M$



2

Abstrakter Datentyp	Funktionalität	
<code>ptr Insert(key <math>k</math>, info <math>i</math>)</code> <code>Delete(ptr <math>x</math>)</code> <code>ptr Search(key <math>k</math>)</code>	} Änderungen	} <b>Wörterbuch</b>
<code>ptr Minimum()</code> <code>ptr Maximum()</code> <code>ptr Predecessor(ptr <math>x</math>)</code> <code>ptr Successor(ptr <math>x</math>)</code>		

**Implementierung:** je nachdem...

# Implementierung

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$

# Implementierung

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$

# Implementierung

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^\oplus$	$\Theta(n)$

$^\oplus$ ) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.

# Implementierung

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^\oplus$	$\Theta(n)$
sortiertes Feld	?	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$

$^\oplus$ ) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.

# Implementierung

*\* ) unter bestimmten Annahmen.*

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^{\oplus}$	$\Theta(n)$
sortiertes Feld	<b>?</b>	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^*$	$\Theta(1)^*$	—	—

$\oplus$ ) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.

# Implementierung

*\* ) unter bestimmten Annahmen.*

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^{\oplus}$	$\Theta(n)$
sortiertes Feld	<b>?</b>	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^*$	$\Theta(1)^*$	—	—
Binärer Suchbaum	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$

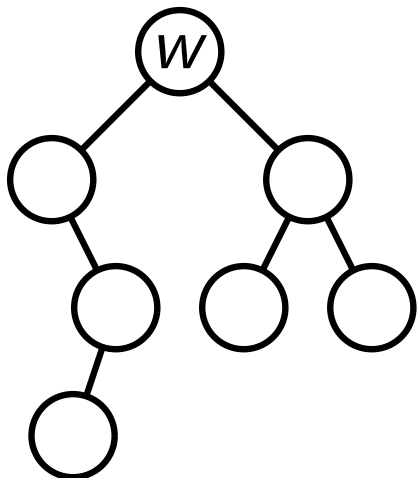
$\oplus$ ) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.



# Implementierung

*\* ) unter bestimmten Annahmen.*

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^\oplus$	$\Theta(n)$
sortiertes Feld	<b>?</b>	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^*$	$\Theta(1)^*$	—	—
Binärer Suchbaum	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$



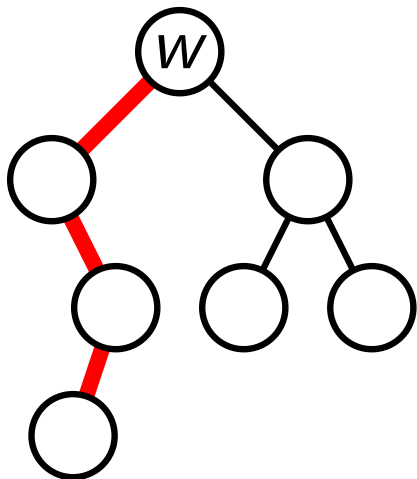
$h(T)$  = Höhe des Baums  $T$

$\oplus$ ) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.

# Implementierung

*\* ) unter bestimmten Annahmen.*

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^{\oplus}$	$\Theta(n)$
sortiertes Feld	<b>?</b>	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^*$	$\Theta(1)^*$	—	—
Binärer Suchbaum	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$



$h(T)$  = Höhe des Baums  $T$

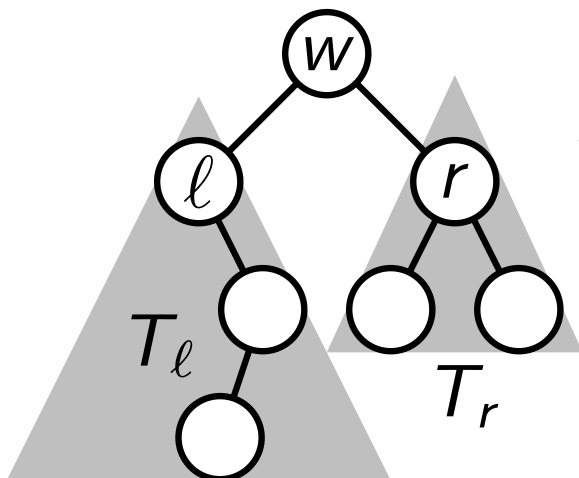
= Anz. Kanten auf längstem Wurzel-Blatt-Pfad

$\oplus$ ) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.

# Implementierung

*\*) unter bestimmten Annahmen.*

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^\oplus$	$\Theta(n)$
sortiertes Feld	<b>?</b>	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^*$	$\Theta(1)^*$	—	—
Binärer Suchbaum	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$



$h(T)$  = Höhe des Baums  $T$

= Anz. Kanten auf längstem Wurzel-Blatt-Pfad

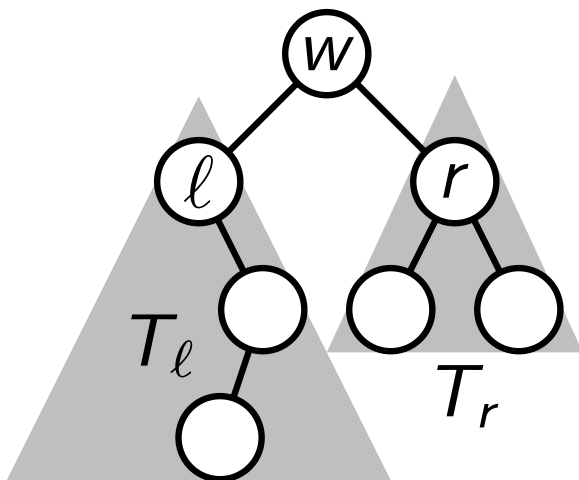
=  $\begin{cases} \text{Finden Sie die} \\ \text{Rekursionsgleichung!} \end{cases}$  falls Baum = Blatt  
sonst.

$\oplus$ ) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.

# Implementierung

\*) *unter bestimmten Annahmen.*

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^\oplus$	$\Theta(n)$
sortiertes Feld	?	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^*$	$\Theta(1)^*$	—	—
Binärer Suchbaum	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$



$h(T)$  = Höhe des Baums  $T$

= Anz. Kanten auf längstem Wurzel-Blatt-Pfad

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls Baum = Blatt} \\ 1 + \max\{h(T_\ell), h(T_r)\} & \text{sonst.} \end{cases}$$


$^\oplus$ ) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.

# Suche im sortierten Feld

2	3	5	6	8	9	11	12	13	14	17	19	21	24	27
---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----

*Suche 21!*

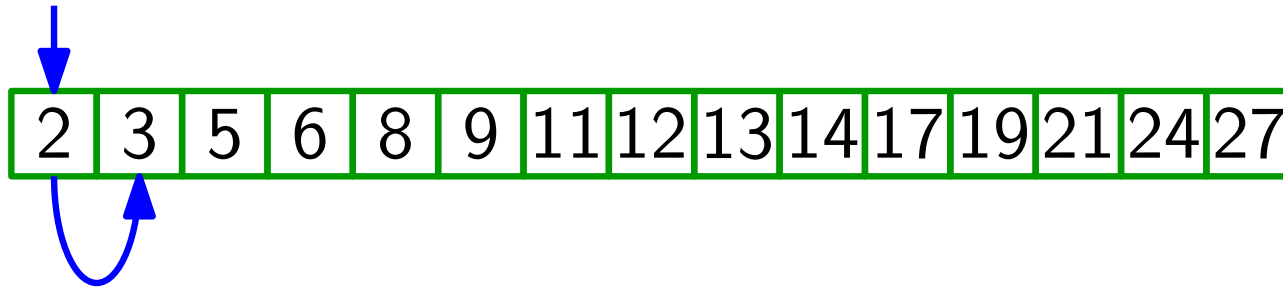
# Suche im sortierten Feld



2	3	5	6	8	9	11	12	13	14	17	19	21	24	27
---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----

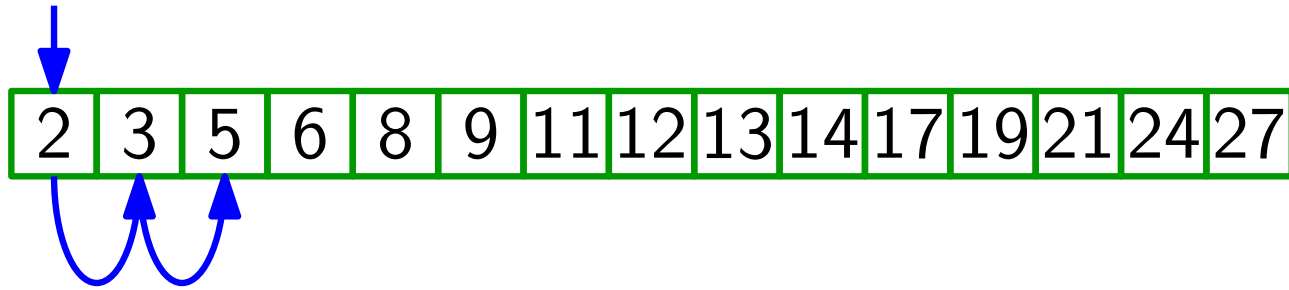
*Suche 21!*

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

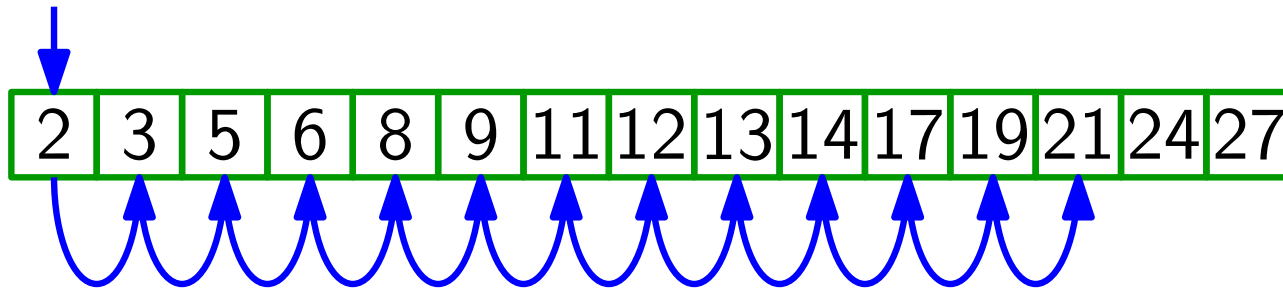
# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

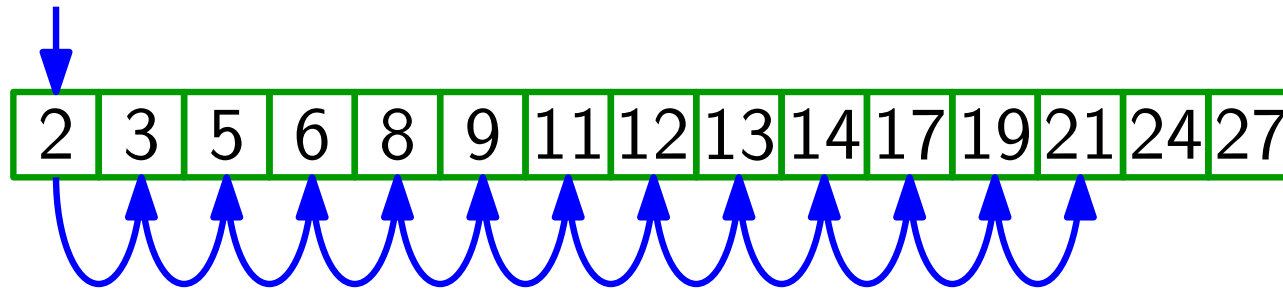


# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

Lineare Suche: *hier* 13 *im Worst Case*  $n$  Schritte

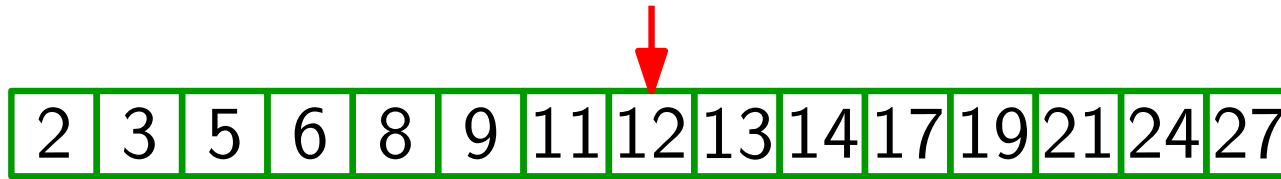
# Suche im sortierten Feld

2	3	5	6	8	9	11	12	13	14	17	19	21	24	27
---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----

*Suche 21!*

Lineare Suche: *hier* 13 *im Worst Case*  $n$  Schritte

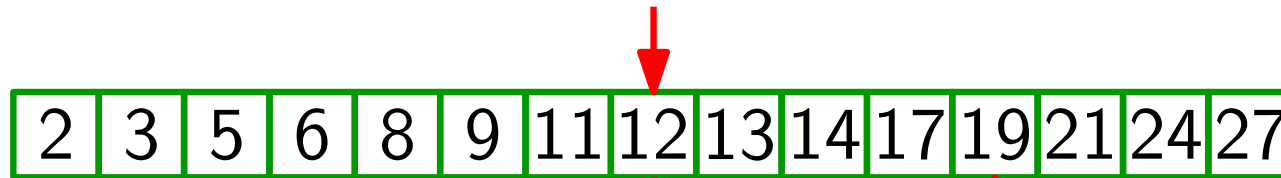
# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

Lineare Suche: *hier* 13 *im Worst Case*  $n$  Schritte

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

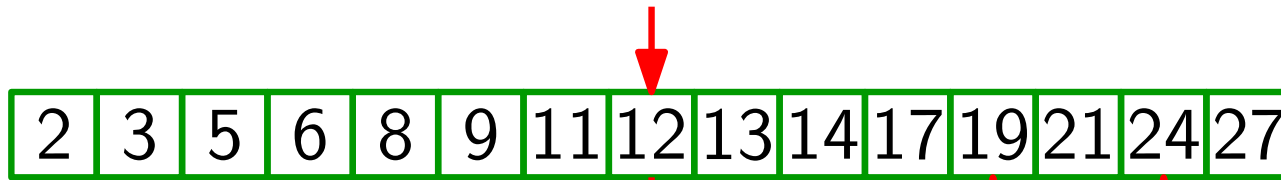
Lineare Suche:

13

$n$

Schritte

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

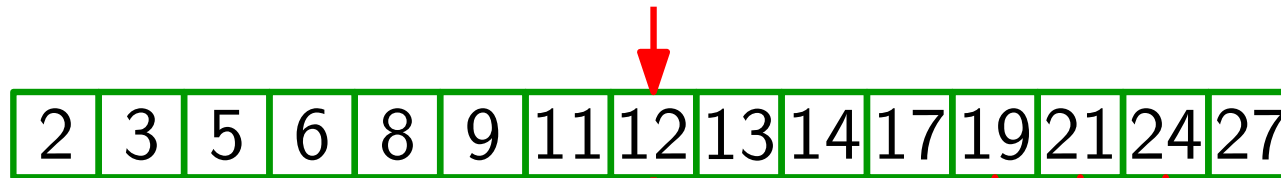
Lineare Suche:

13

$n$

Schritte

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

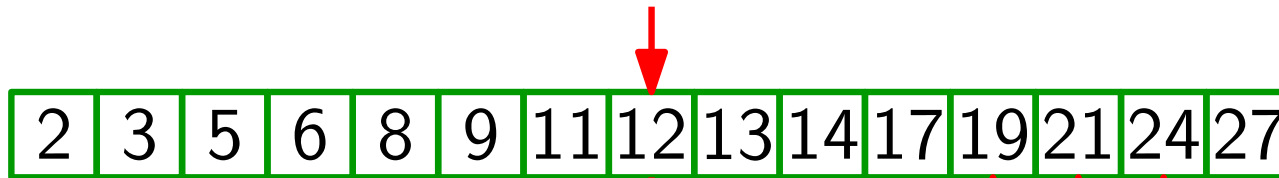
Lineare Suche:

13

$n$

Schritte

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

Lineare Suche:

13

$n$

Schritte

Binäre Suche:

4

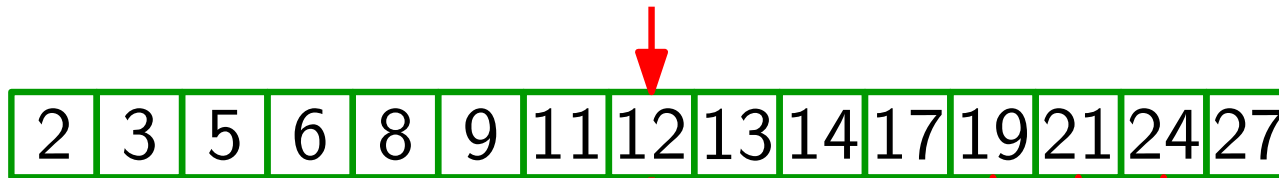
?

Schritte<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).



# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

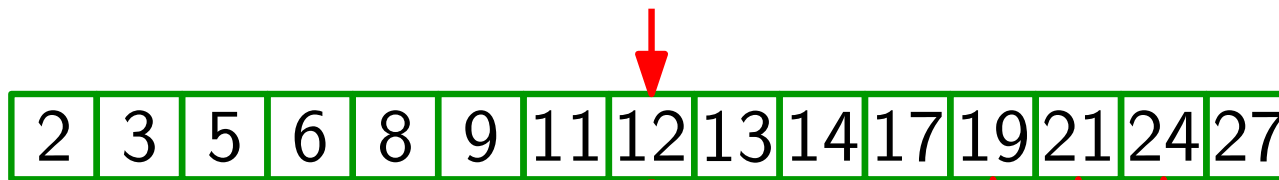
Lineare Suche: 13  $n$  Schritte

Binäre Suche: 4 ? Schritte<sup>\*</sup>

grob: Wie oft muss ich  $n$  halbieren, bis ich bei 1 bin?

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

Lineare Suche: 13  $n$  Schritte

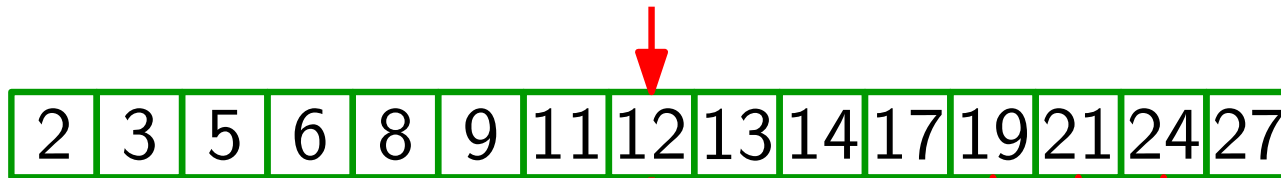
Binäre Suche: 4 ? Schritte<sup>\*</sup>

grob: Wie oft muss ich  $n$  halbieren, bis ich bei 1 bin?

genau:  $T(n) \leq$  *Finden Sie die Rekursions(un)gleichung!!*

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

Lineare Suche: 13  $n$  Schritte

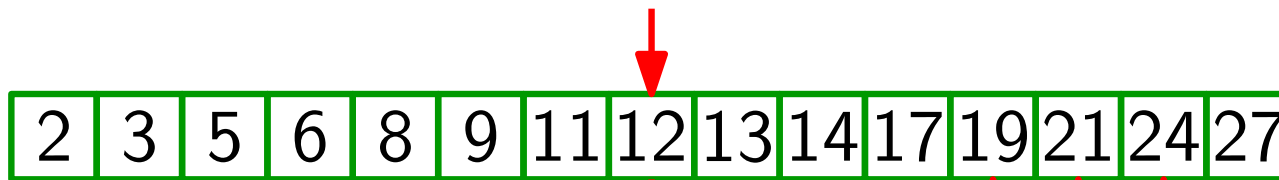
Binäre Suche: 4 ? Schritte<sup>\*</sup>

grob: Wie oft muss ich  $n$  halbieren, bis ich bei 1 bin?

genau:  $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$  und  $T(1) = 1$

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

Lineare Suche: 13  $n$  Schritte

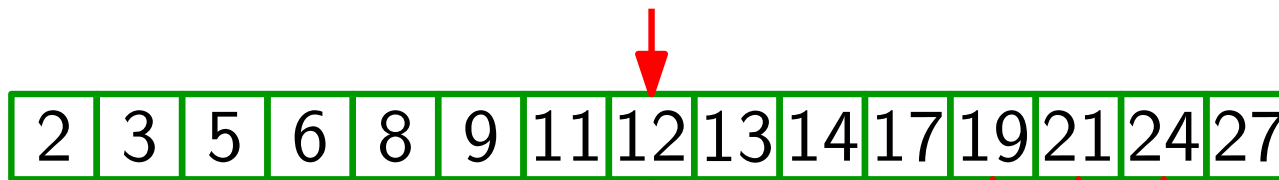
Binäre Suche: 4 ? Schritte<sup>\*</sup>

grob: Wie oft muss ich  $n$  halbieren, bis ich bei 1 bin?

genau:  $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$  und  $T(1) = 1$

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

Lineare Suche: 13  $n$  Schritte

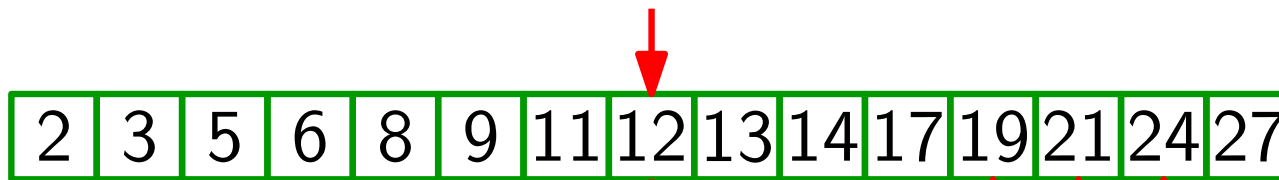
Binäre Suche: 4 ? Schritte<sup>\*</sup>

grob: Wie oft muss ich  $n$  halbieren, bis ich bei 1 bin?

$$\begin{aligned} \text{genau: } T(n) &\leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \quad \text{und} \quad T(1) = 1 \\ &\leq \quad \quad \quad + 1 \end{aligned}$$

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

Lineare Suche: 13  $n$  Schritte

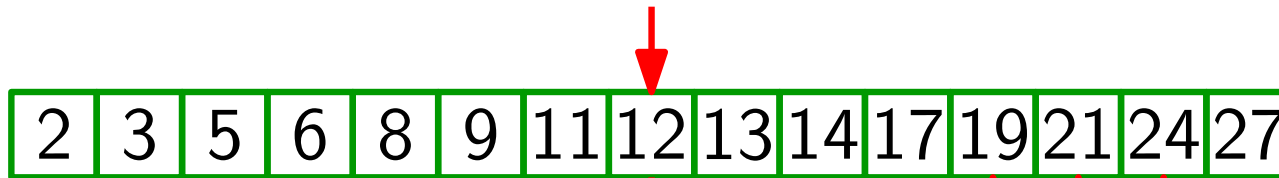
Binäre Suche: 4 ? Schritte<sup>\*</sup>

grob: Wie oft muss ich  $n$  halbieren, bis ich bei 1 bin?

$$\begin{aligned} \text{genau: } T(n) &\leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \quad \text{und} \quad T(1) = 1 \\ &\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \end{aligned}$$

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

Lineare Suche: 13  $n$  Schritte

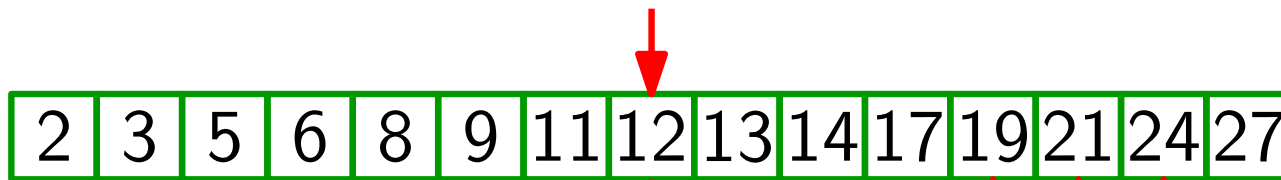
Binäre Suche: 4 ? Schritte<sup>\*</sup>

grob: Wie oft muss ich  $n$  halbieren, bis ich bei 1 bin?

$$\begin{aligned} \text{genau: } T(n) &\leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \quad \text{und} \quad T(1) = 1 \\ &\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \leq \dots \leq \end{aligned}$$

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

Lineare Suche: 13  $n$  Schritte

Binäre Suche: 4 ? Schritte<sup>\*</sup>

grob: Wie oft muss ich  $n$  halbieren, bis ich bei 1 bin?

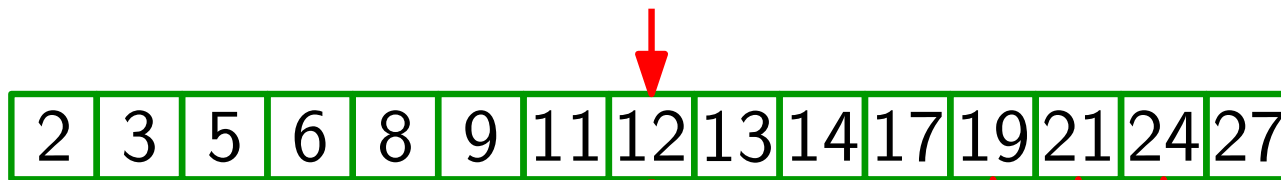
genau:  $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$  und  $T(1) = 1$

$$\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \leq \dots \leq T(1) + 1 + \dots + 1$$

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B.  $=$  und  $<$ ).



# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

Lineare Suche: 13  $n$  Schritte

Binäre Suche: 4 ? Schritte<sup>\*</sup>

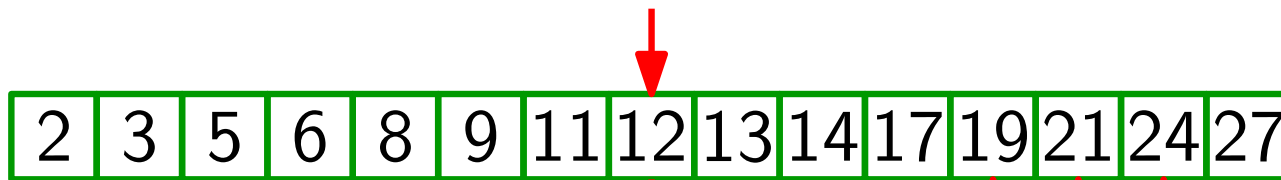
grob: Wie oft muss ich  $n$  halbieren, bis ich bei 1 bin?

genau:  $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$  und  $T(1) = 1$

$$\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \leq \dots \leq T(1) + \underbrace{1 + \dots + 1}$$

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B.  $=$  und  $<$ ).

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

Lineare Suche: 13  $n$  Schritte

Binäre Suche: 4 ? Schritte<sup>\*</sup>

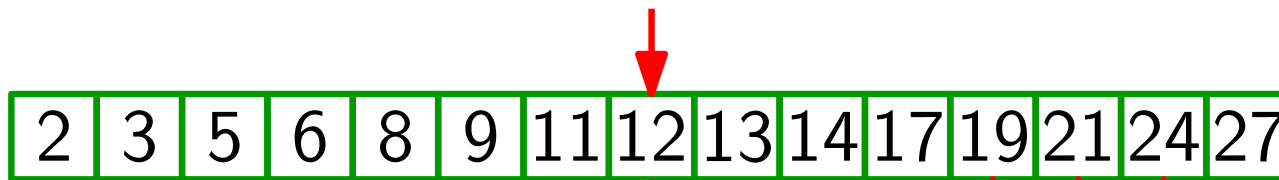
grob: Wie oft muss ich  $n$  halbieren, bis ich bei 1 bin?

genau:  $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$  und  $T(1) = 1$

$$\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \leq \dots \leq T(1) + \underbrace{1 + \dots + 1}_{\lfloor \log_2 n \rfloor}$$

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

Lineare Suche: 13  $n$  Schritte

Binäre Suche: 4 ? Schritte<sup>\*</sup>

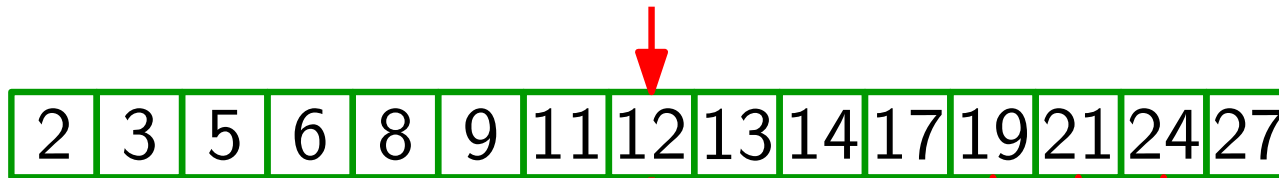
grob: Wie oft muss ich  $n$  halbieren, bis ich bei 1 bin?

genau:  $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$  und  $T(1) = 1$

$$\begin{aligned} &\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \leq \dots \leq T(1) + \underbrace{1 + \dots + 1}_{\lfloor \log_2 n \rfloor} \\ &= 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor \end{aligned}$$

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B.  $=$  und  $<$ ).

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

Lineare Suche: 13  $n$  Schritte

Binäre Suche: 4 ? Schritte<sup>\*</sup>

grob: Wie oft muss ich  $n$  halbieren, bis ich bei 1 bin?

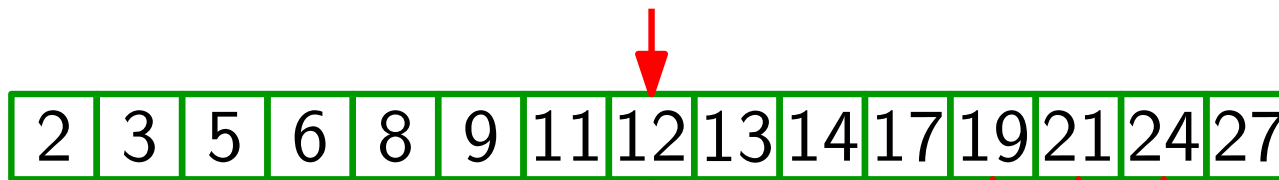
genau:  $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$  und  $T(1) = 1$

$$\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \leq \dots \leq T(1) + \underbrace{1 + \dots + 1}_{\lfloor \log_2 n \rfloor}$$

*Übung!*  $= 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor = \lceil \log_2(n + 1) \rceil$

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B.  $=$  und  $<$ ).

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

Lineare Suche: 13  $n$  Schritte

Binäre Suche: 4  $\lceil \log_2(n+1) \rceil$  Schritte<sup>\*</sup>

grob: Wie oft muss ich  $n$  halbieren, bis ich bei 1 bin?

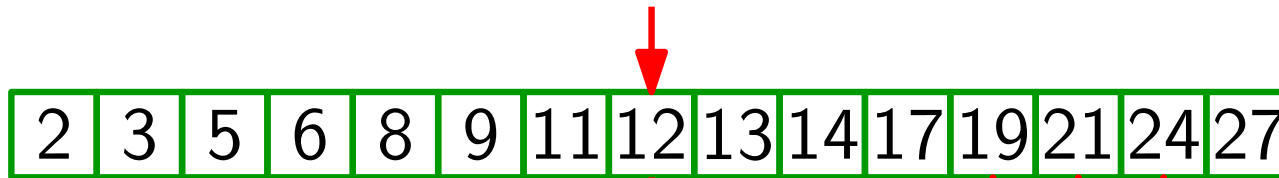
genau:  $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$  und  $T(1) = 1$

$$\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \leq \dots \leq T(1) + \underbrace{1 + \dots + 1}_{\lfloor \log_2 n \rfloor}$$

*Übung!*  $= 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor = \lceil \log_2(n+1) \rceil$

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B.  $=$  und  $<$ ).

# Suche im sortierten Feld

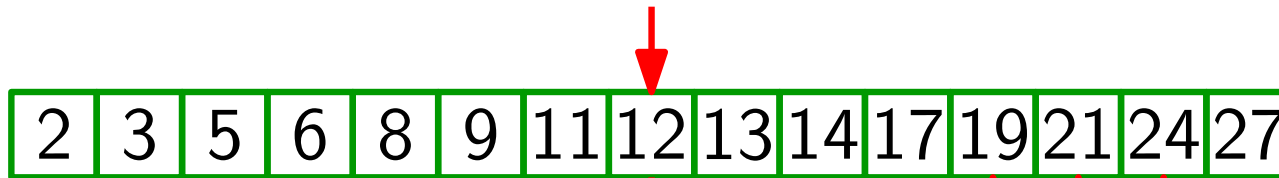


*Suche 21!*

	<i>hier</i>	<i>im Worst Case</i>	
Lineare Suche:	13	$n$	Schritte
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n + 1) \rceil$	Schritte <sup>*</sup>

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

*hier im Worst Case*

Lineare Suche:

13

$n$

Schritte

*Binäre Suche:*

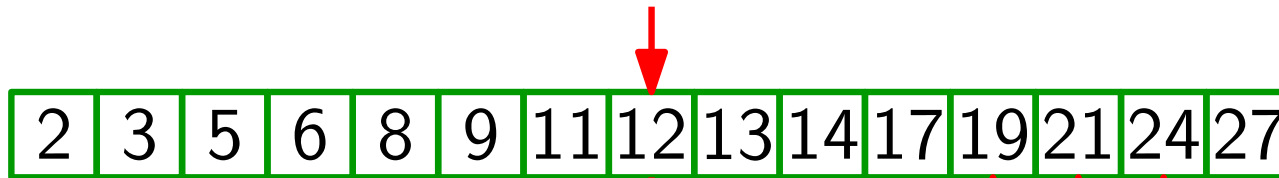
4

$\lceil \log_2(n + 1) \rceil$  Schritte<sup>\*</sup>

20

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

# Suche im sortierten Feld



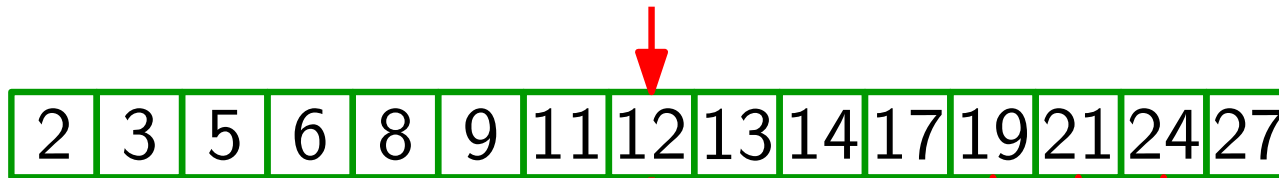
*Suche 21!*

	<i>hier</i>	<i>im Worst Case</i>		
Lineare Suche:	13	$n$	Schritte	$2^{20} - 1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n + 1) \rceil$	Schritte <sup>*</sup>	20

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).



# Suche im sortierten Feld

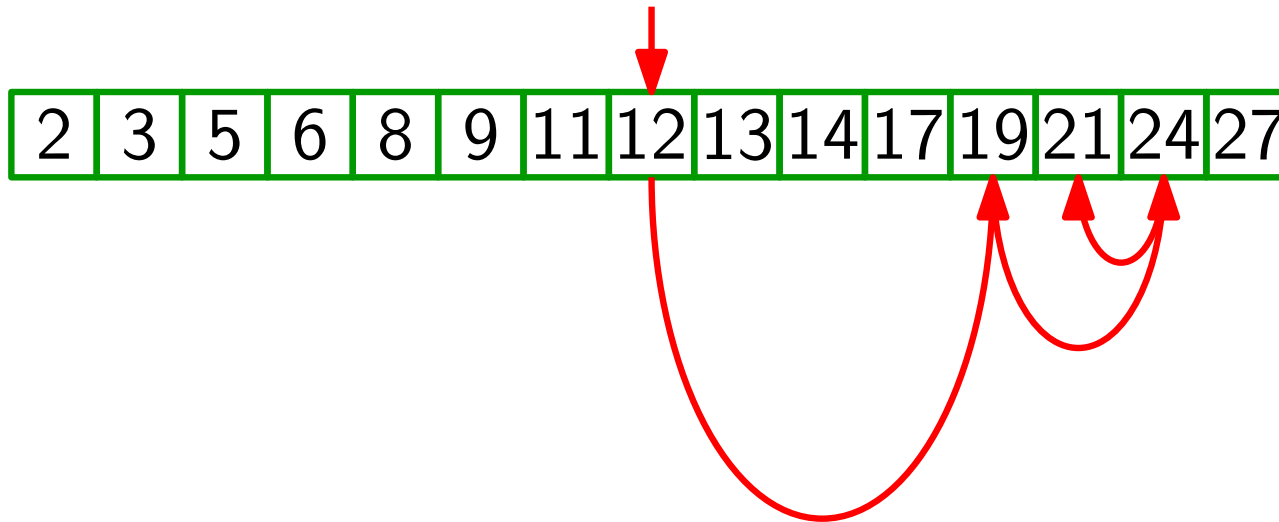


*Suche 21!*

	<i>hier</i>	<i>im Worst Case</i>		
Lineare Suche:	13	$n$	Schritte	$\approx 1 \text{ Mio.}$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n + 1) \rceil$	Schritte <sup>*</sup>	$2^{20} - 1$
				20

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

# Suche im sortierten Feld

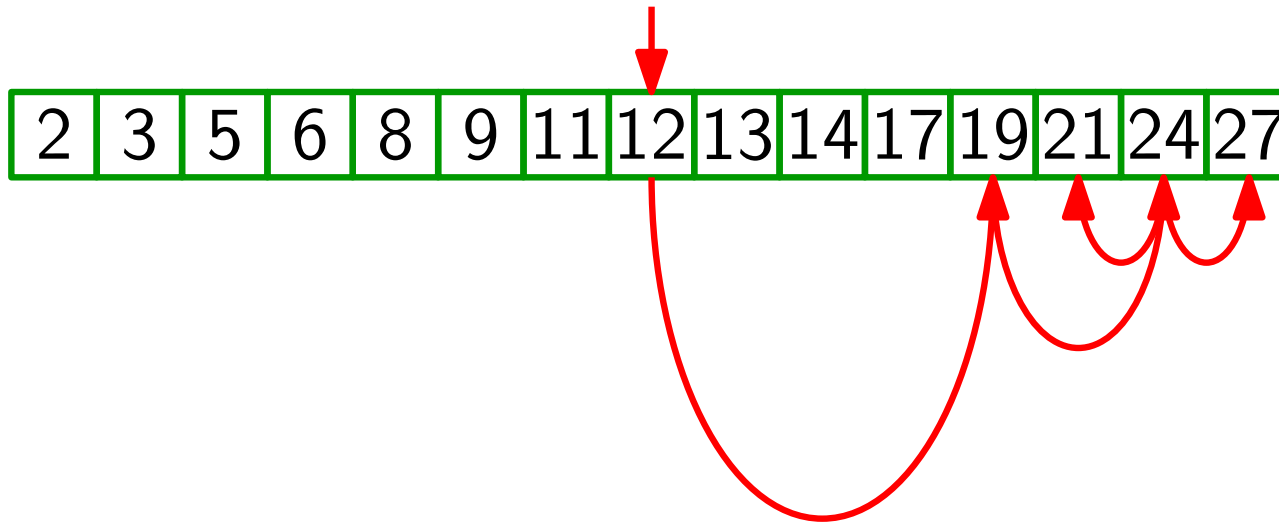


*Suche 21!*  
*Suche 27!*

	<i>hier</i>	<i>im Worst Case</i>		$\approx 1 \text{ Mio.}$
Lineare Suche:	13	$n$	Schritte	$2^{20} - 1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n + 1) \rceil$	Schritte <sup>*</sup>	20

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

# Suche im sortierten Feld

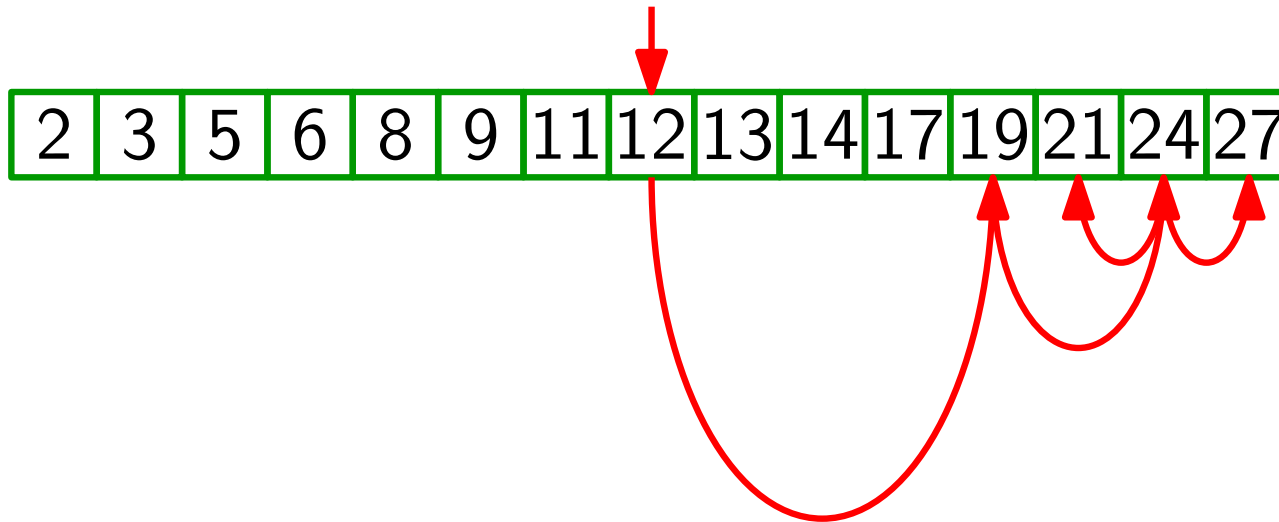


*Suche 21!*  
*Suche 27!*

	<i>hier</i>	<i>im Worst Case</i>		
Lineare Suche:	13	$n$	Schritte	$\approx 1 \text{ Mio.}$ $2^{20} - 1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n + 1) \rceil$	Schritte <sup>*</sup>	20

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

# Suche im sortierten Feld

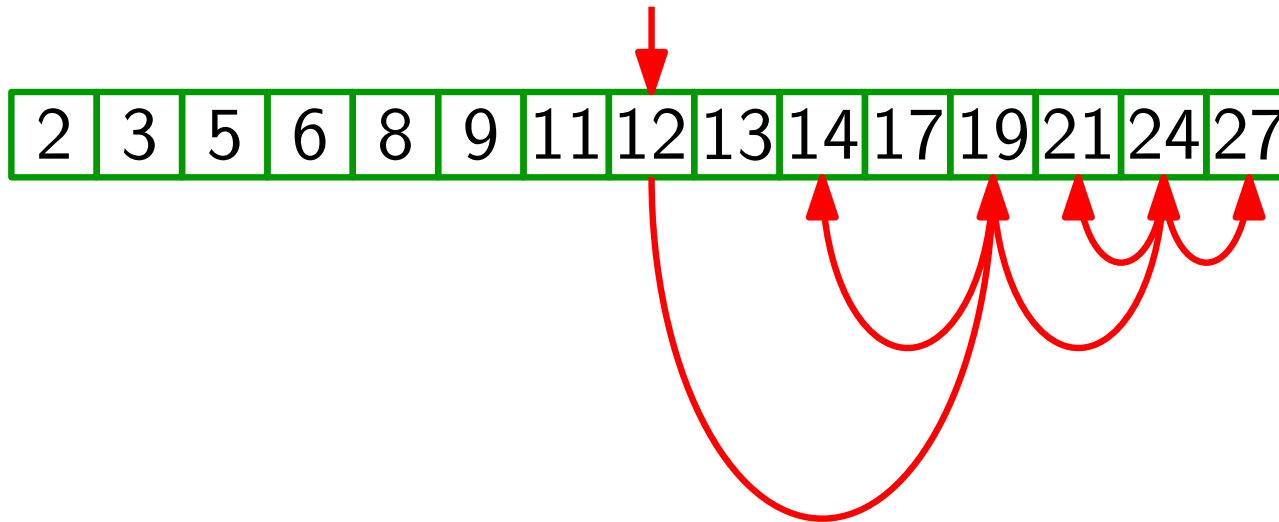


Suche 21!  
Suche 27!  
Suche 17!

	<i>hier</i>	<i>im Worst Case</i>		$\approx 1 \text{ Mio.}$
Lineare Suche:	13	$n$	Schritte	$2^{20} - 1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n + 1) \rceil$	Schritte <sup>*</sup>	20

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

# Suche im sortierten Feld

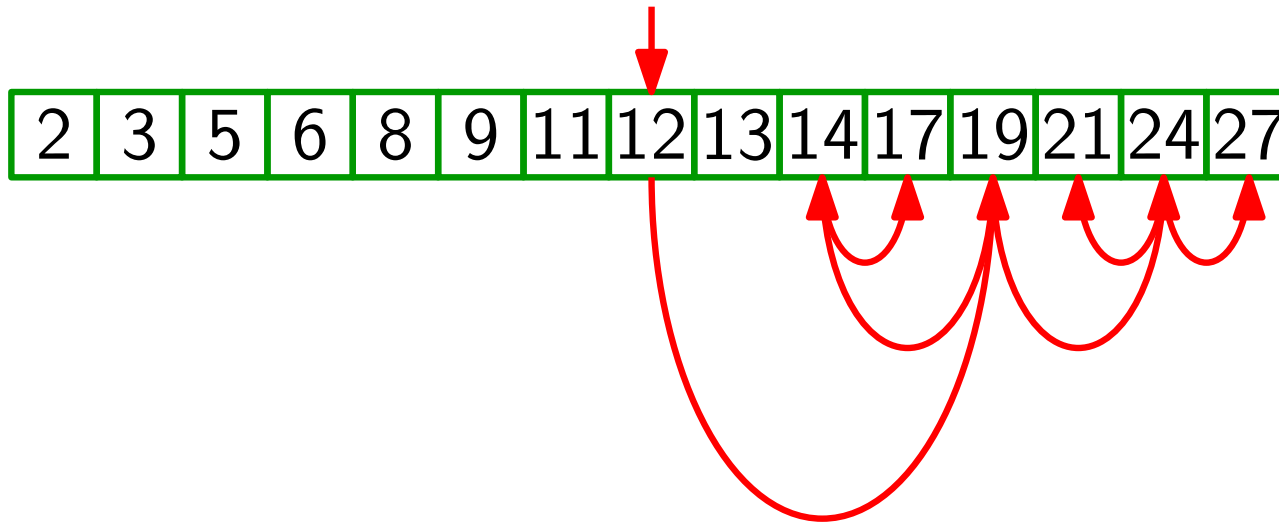


Suche 21!  
Suche 27!  
Suche 17!

	<i>hier</i>	<i>im Worst Case</i>		$\approx 1 \text{ Mio.}$
Lineare Suche:	13	$n$	Schritte	$2^{20} - 1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n + 1) \rceil$	Schritte <sup>*</sup>	20

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

# Suche im sortierten Feld

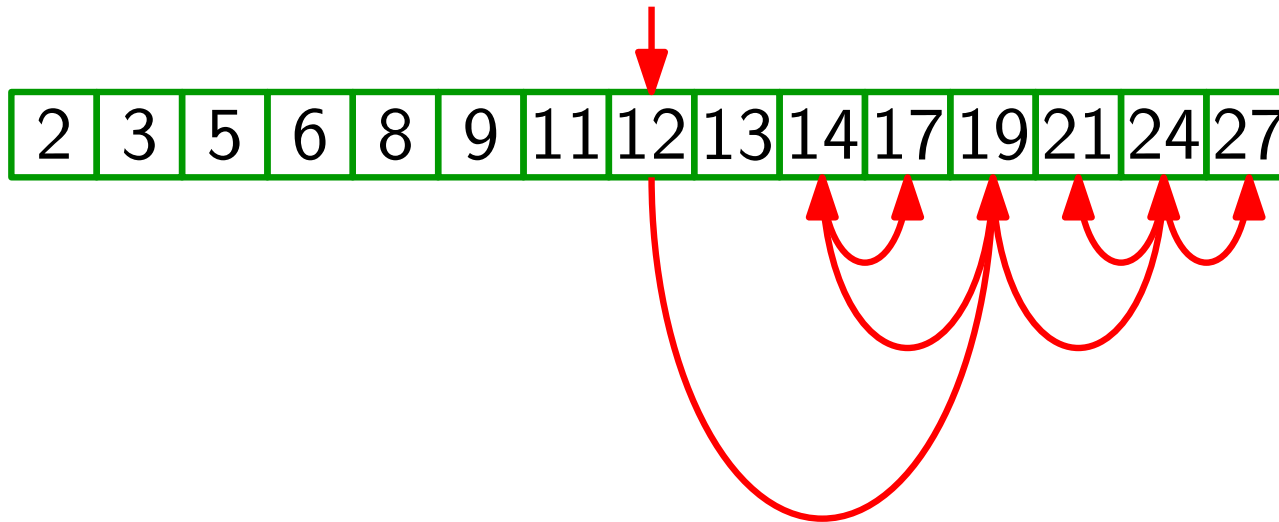


Suche 21!  
Suche 27!  
Suche 17!

	<i>hier</i>	<i>im Worst Case</i>		$\approx 1 \text{ Mio.}$
Lineare Suche:	13	$n$	Schritte	$2^{20} - 1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n + 1) \rceil$	Schritte <sup>*</sup>	20

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

# Suche im sortierten Feld

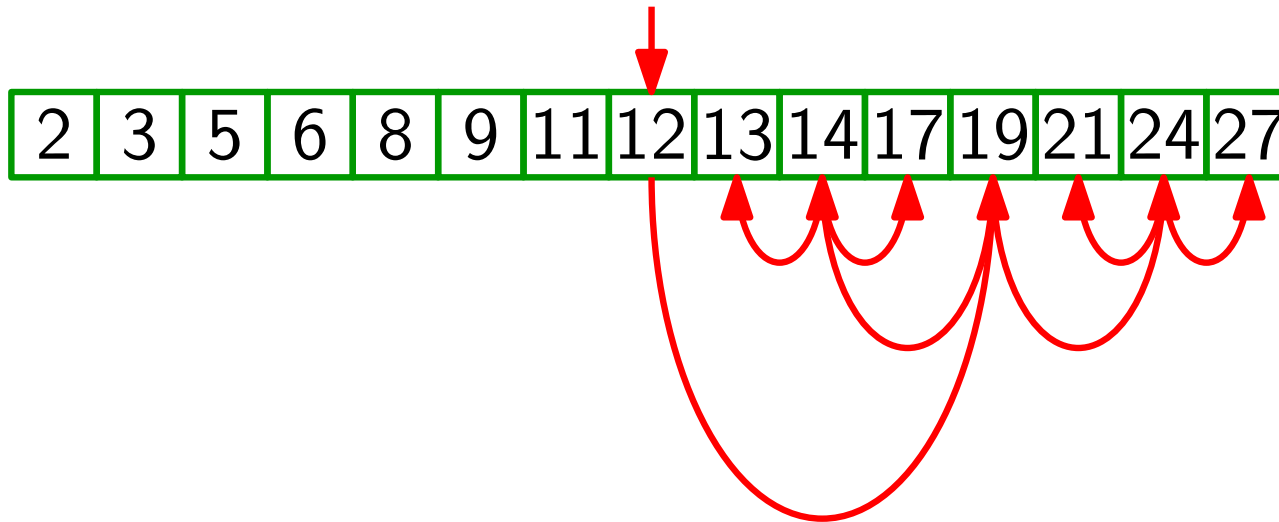


Suche 21!  
Suche 27!  
Suche 17!  
Suche 13!

	<i>hier</i>	<i>im Worst Case</i>		$\approx 1 \text{ Mio.}$
Lineare Suche:	13	$n$	Schritte	$2^{20} - 1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n + 1) \rceil$	Schritte <sup>*</sup>	20

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

# Suche im sortierten Feld



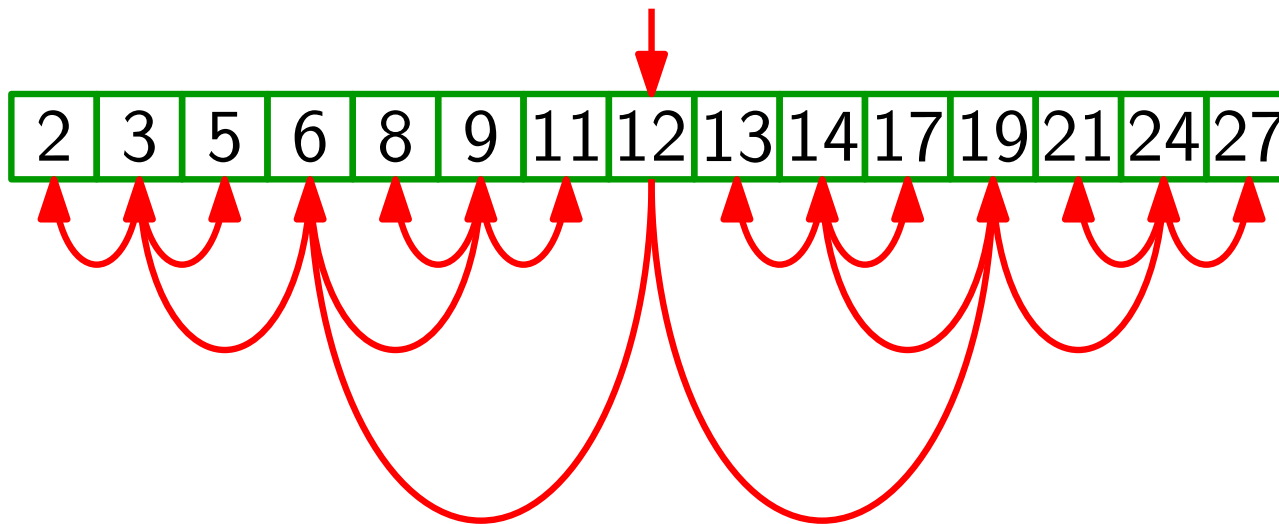
Suche 21!  
Suche 27!  
Suche 17!  
Suche 13!

	<i>hier</i>	<i>im Worst Case</i>		$\approx 1 \text{ Mio.}$
Lineare Suche:	13	$n$	Schritte	$2^{20} - 1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n + 1) \rceil$	Schritte <sup>*</sup>	20

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).



# Suche im sortierten Feld

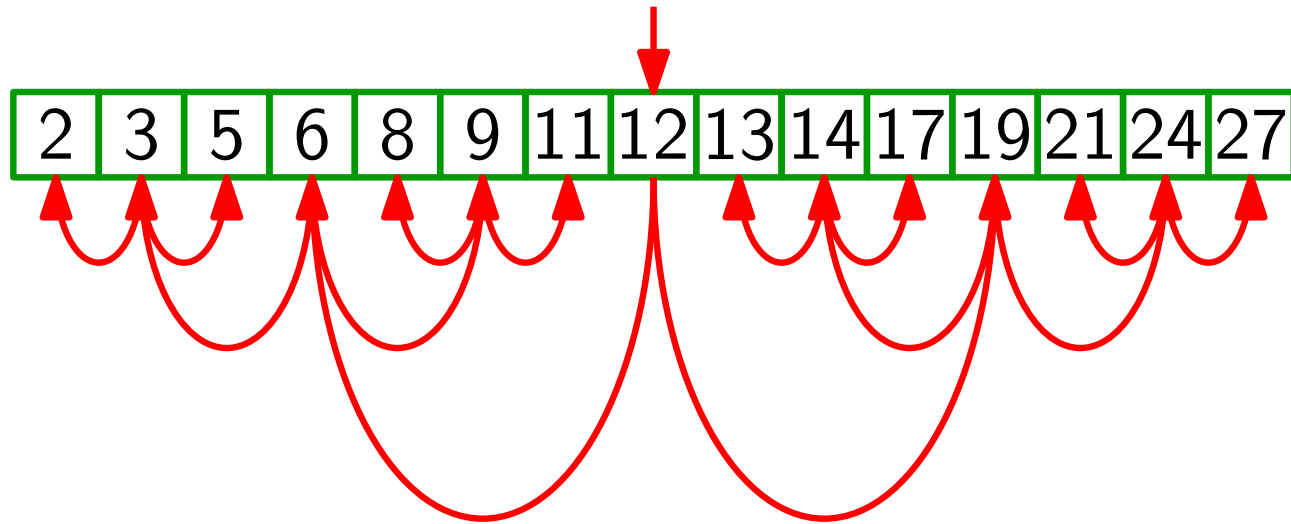


Suche 21!  
Suche 27!  
Suche 17!  
Suche 13!

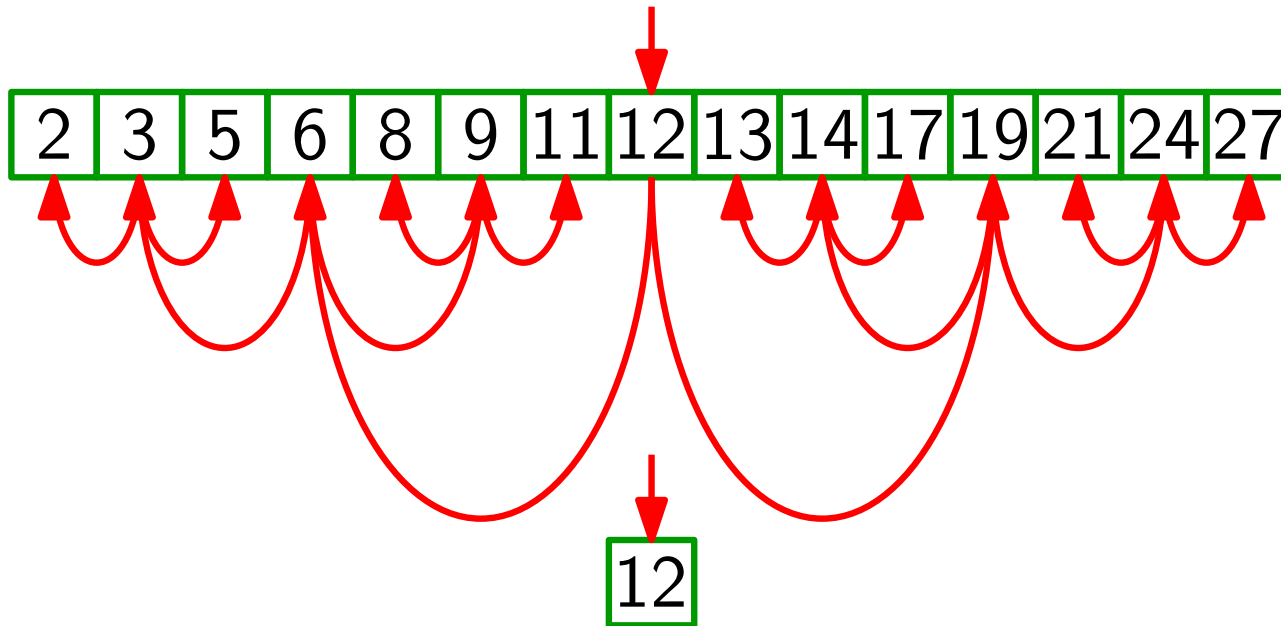
	<i>hier</i>	<i>im Worst Case</i>		
Lineare Suche:	13	$n$	Schritte	$\approx 1 \text{ Mio.}$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n + 1) \rceil$	Schritte <sup>*</sup>	$2^{20} - 1$
				20

<sup>\*</sup>) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

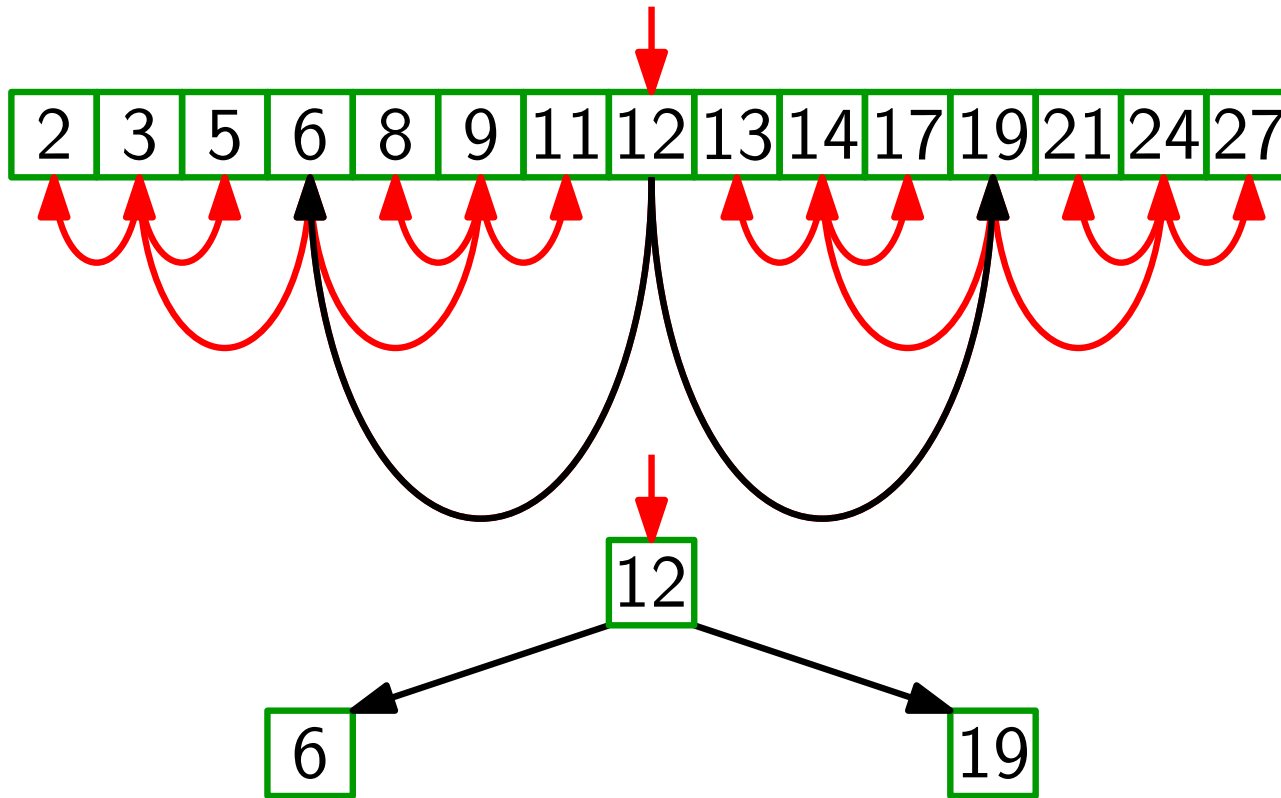
# Suche im sortierten Feld



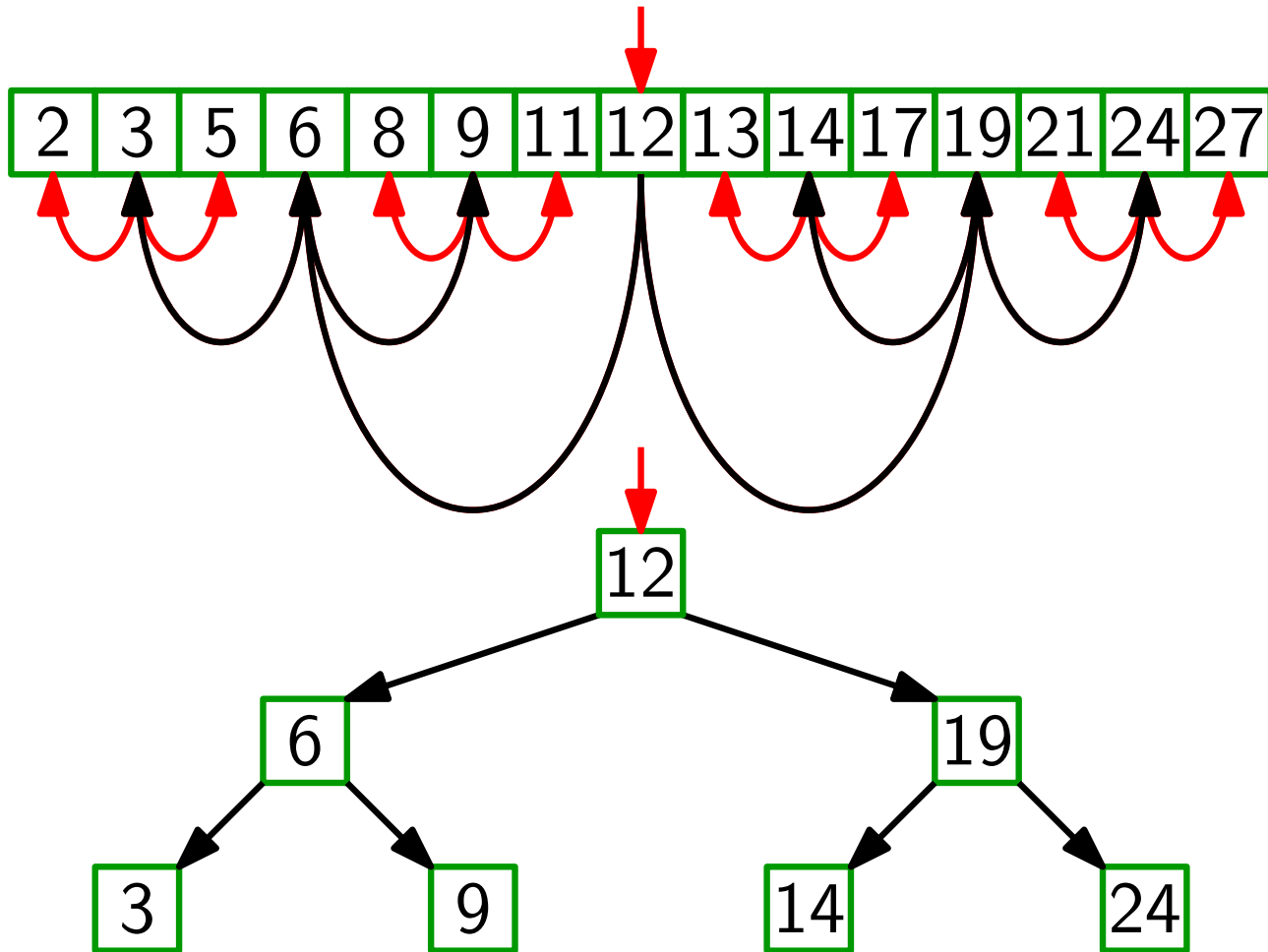
# Suche im sortierten Feld



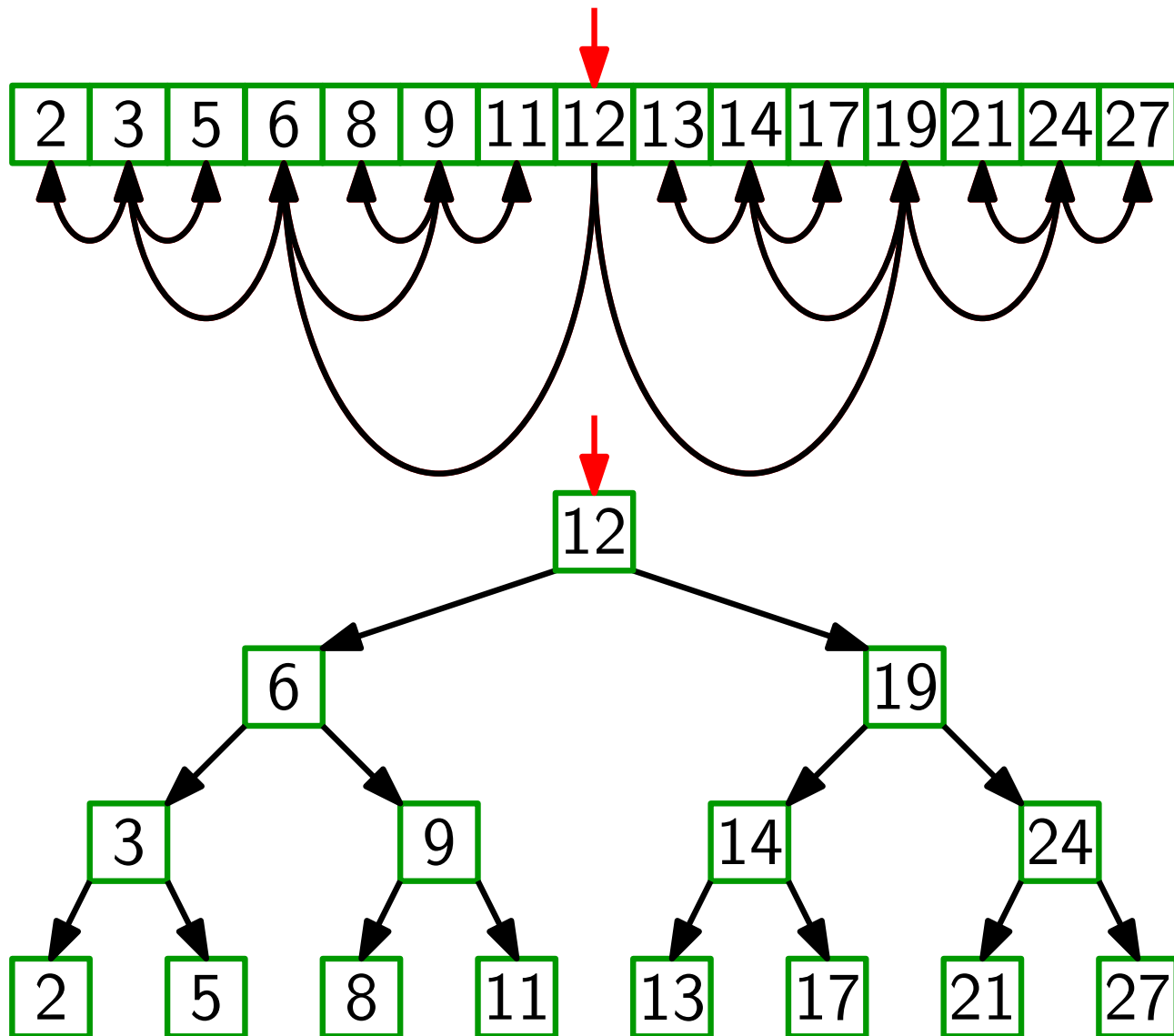
# Suche im sortierten Feld



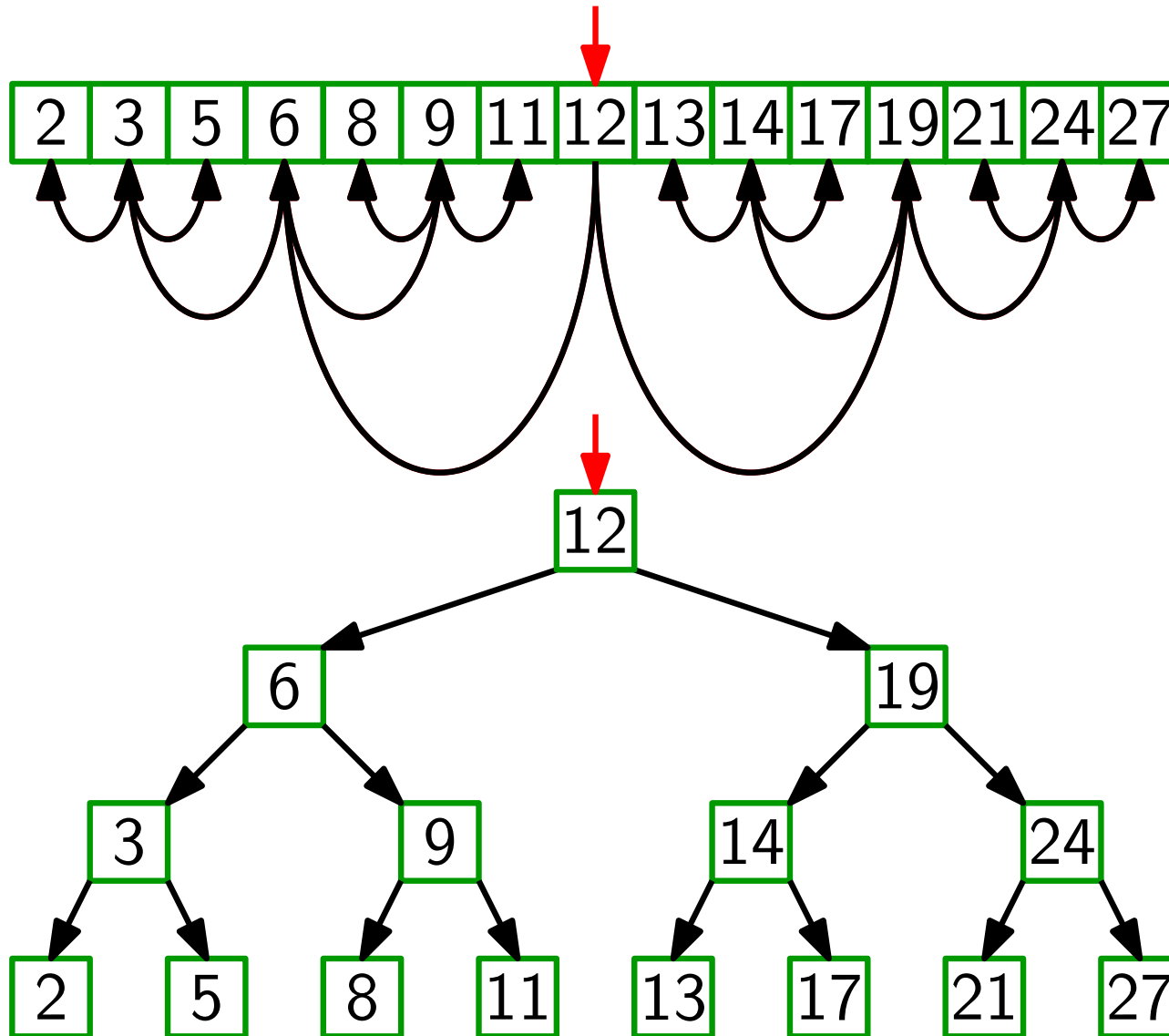
# Suche im sortierten Feld



# Suche im sortierten Feld

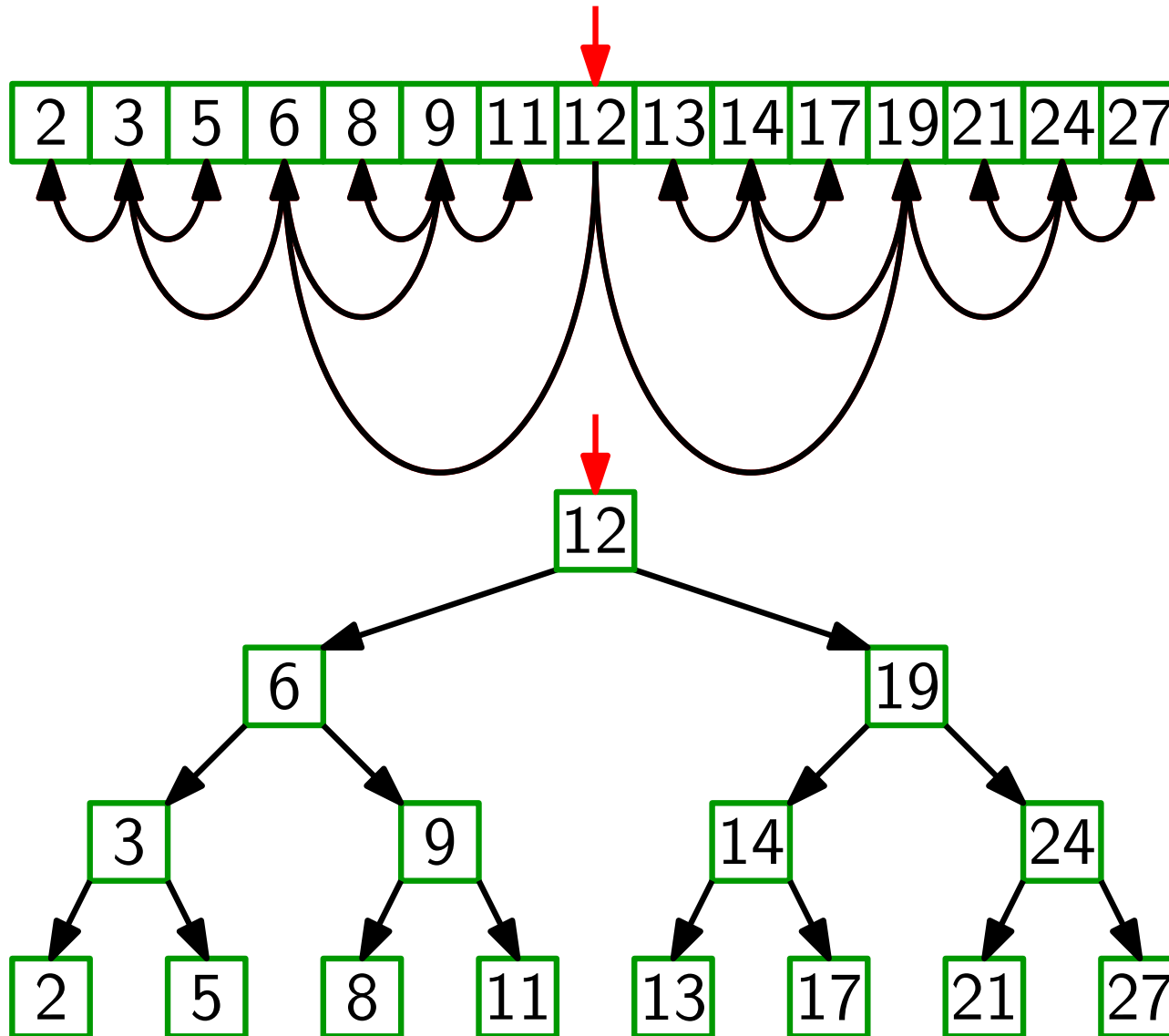


# Suche im sortierten Feld



*Binärer  
Suchbaum*

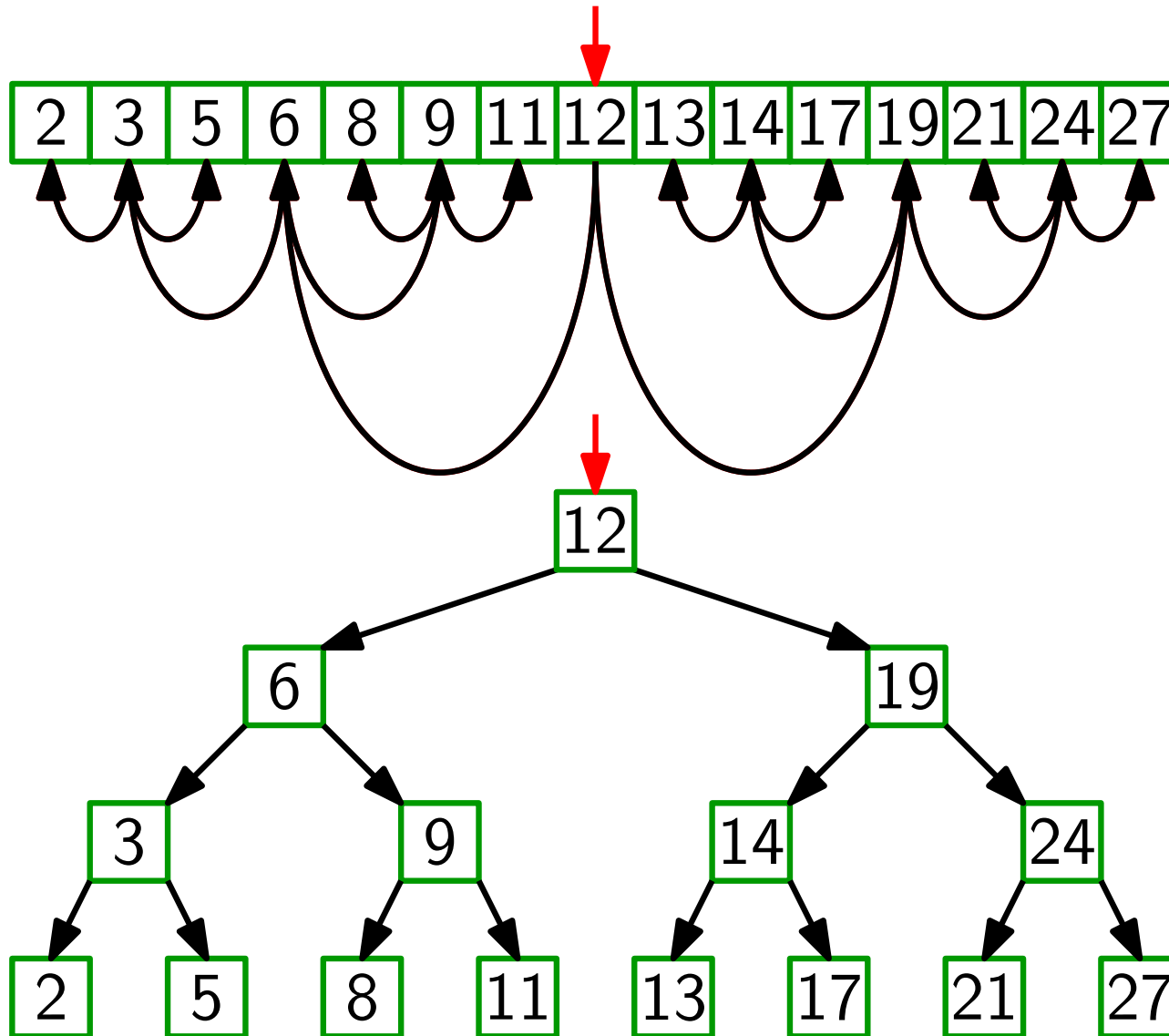
# Suche im sortierten Feld



*Binärer  
Suchbaum*



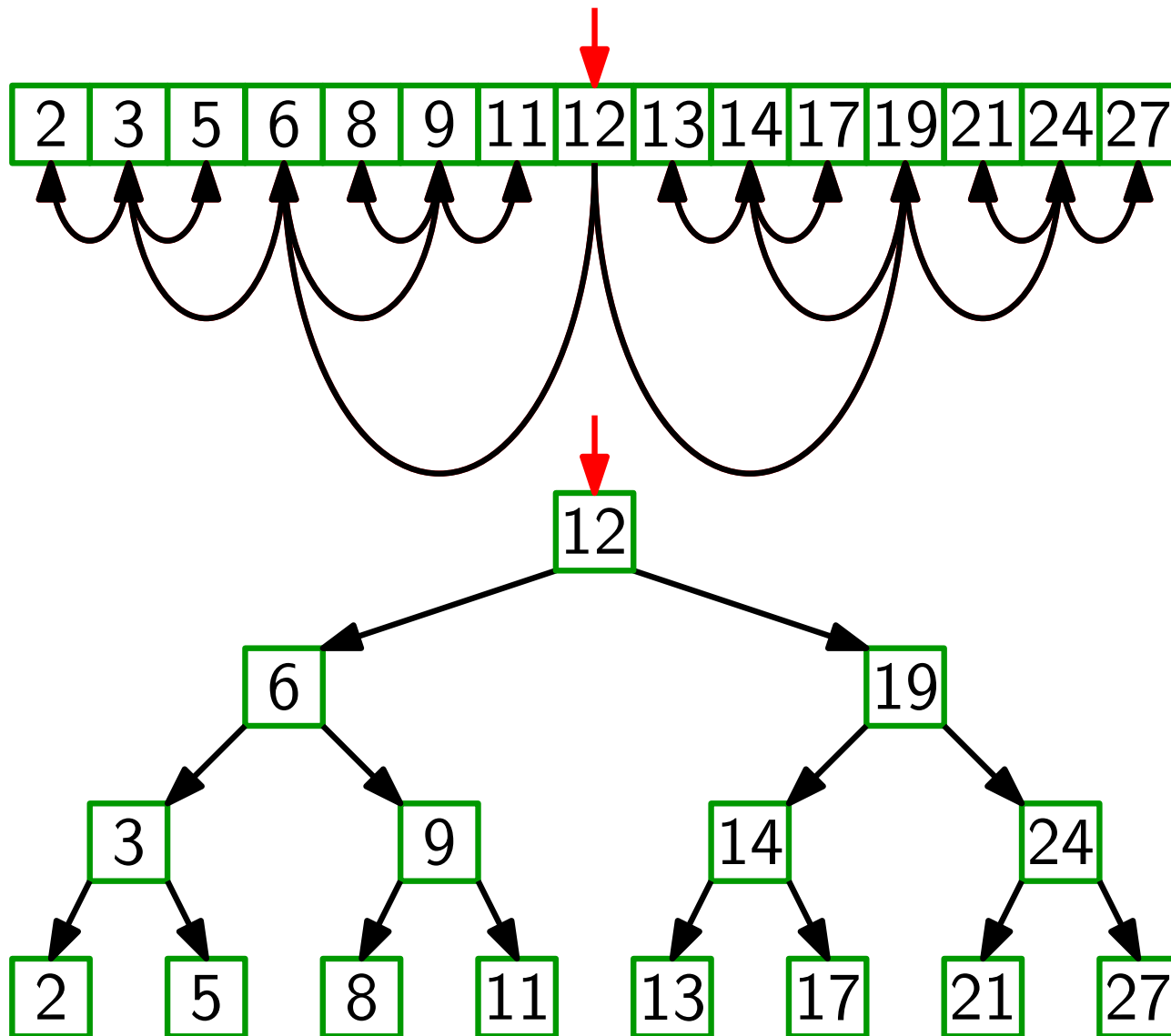
# Suche im sortierten Feld



*Binärer  
Suchbaum*

zusammen-  
hängender  
Wald

# Suche im sortierten Feld

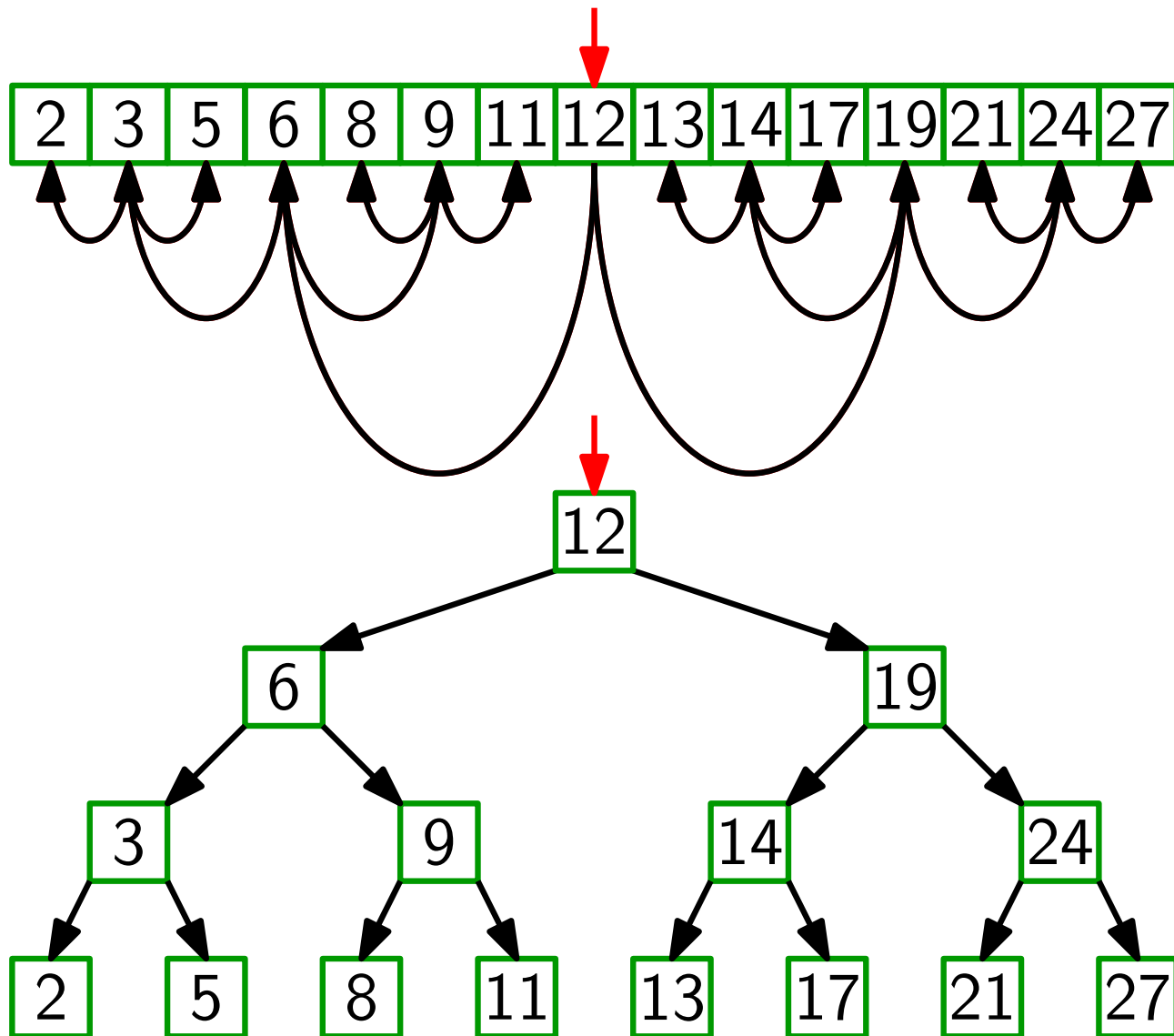


*Binärer  
Suchbaum*

zusammen-  
hängender  
Wald

kreisfreier  
Graph

# Suche im sortierten Feld

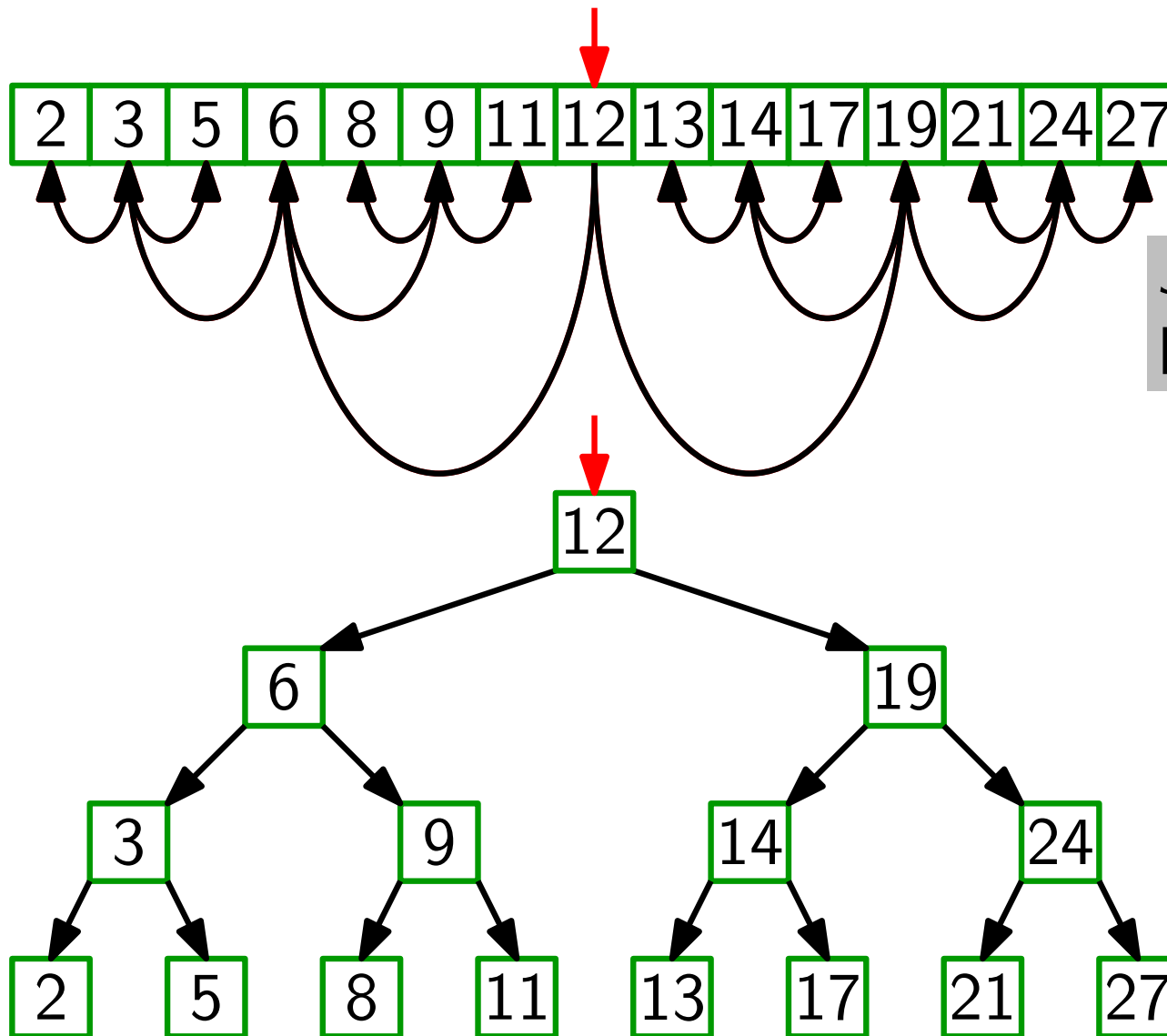


*Binärer  
Suchbaum*

zusammen-  
hängender  
Wald

kreisfreier  
Graph

# Suche im sortierten Feld



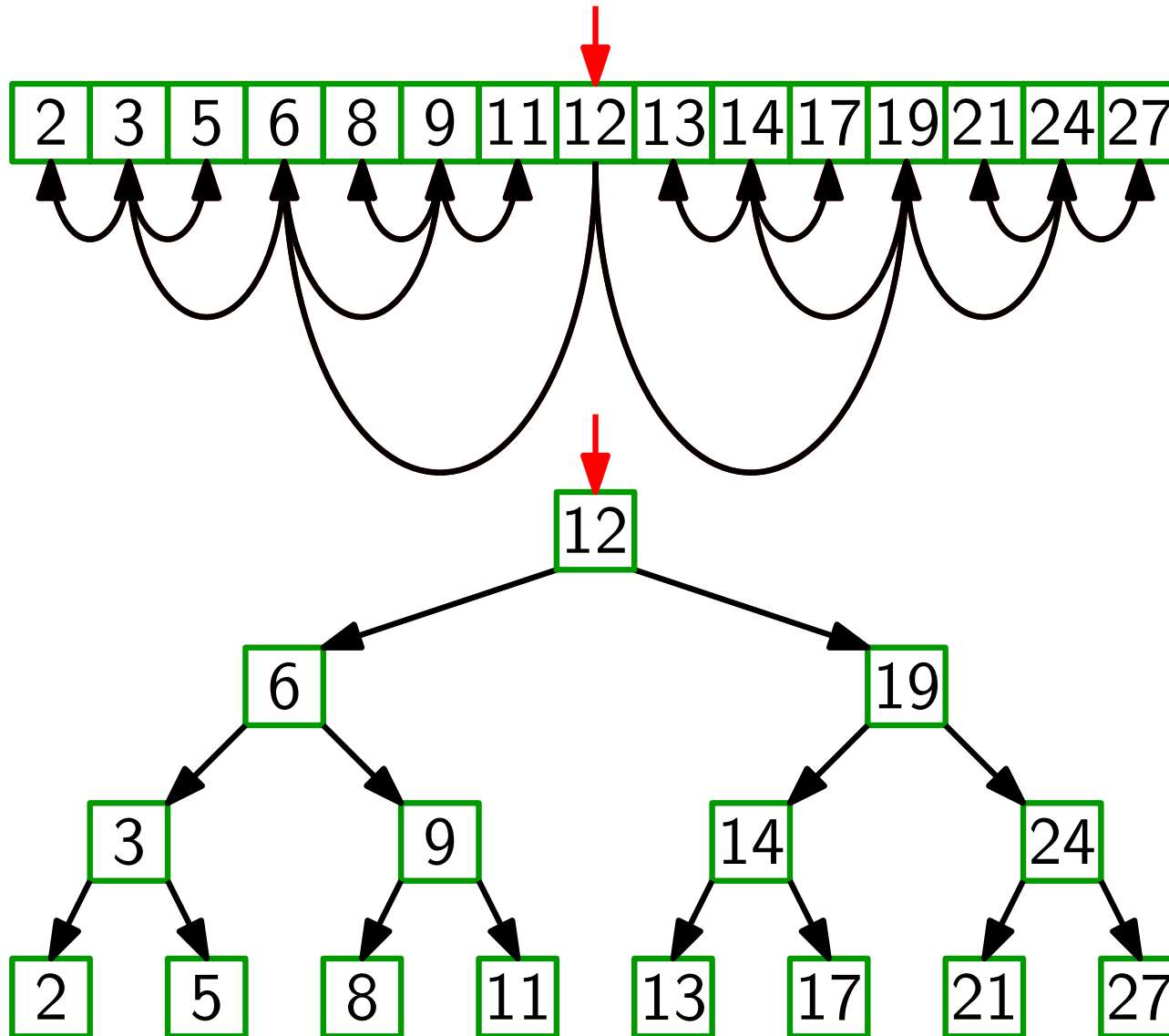
Jeder Knoten hat höchstens zwei Kinder.

*Binärer Suchbaum*

zusammenhängender Wald

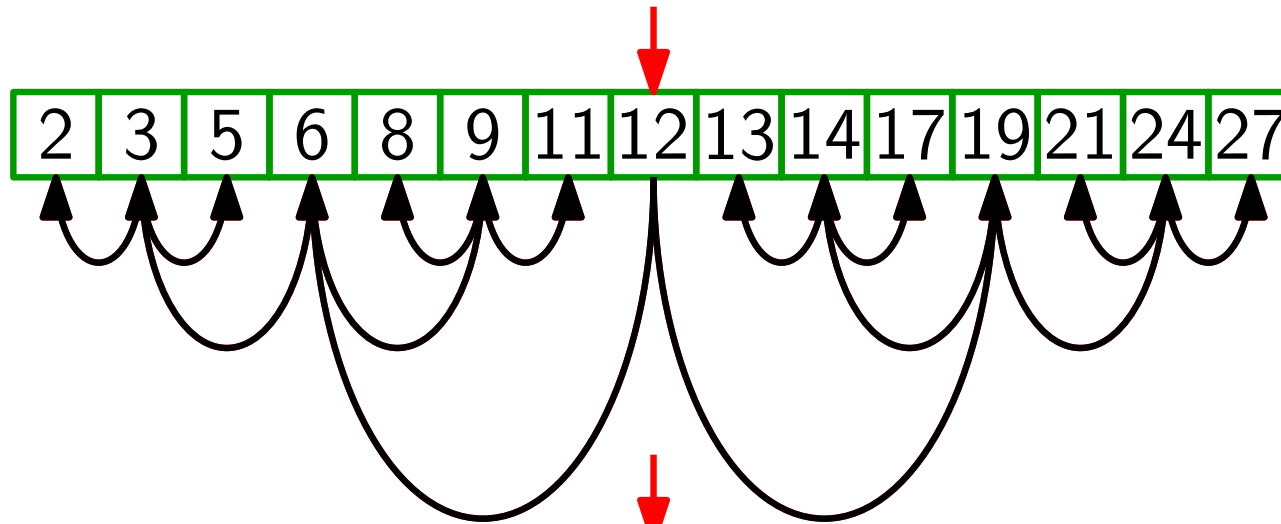
kreisfreier Graph

# Suche im sortierten Feld

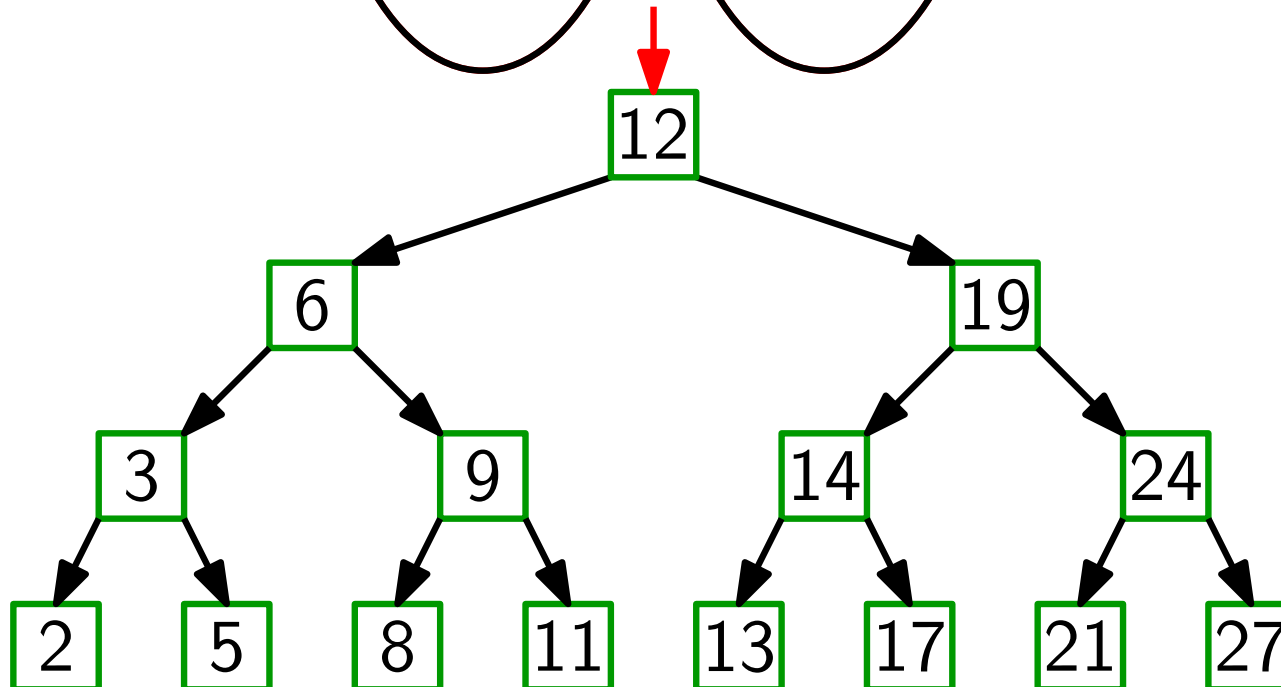


*Binärer  
Suchbaum*

# Suche im sortierten Feld

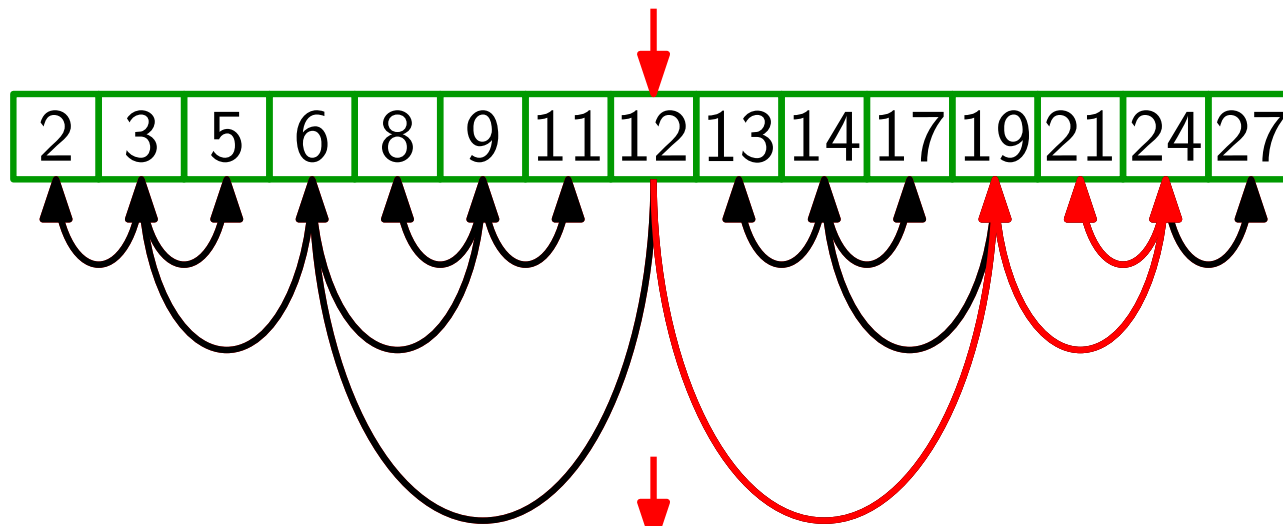


*Suche 21!*

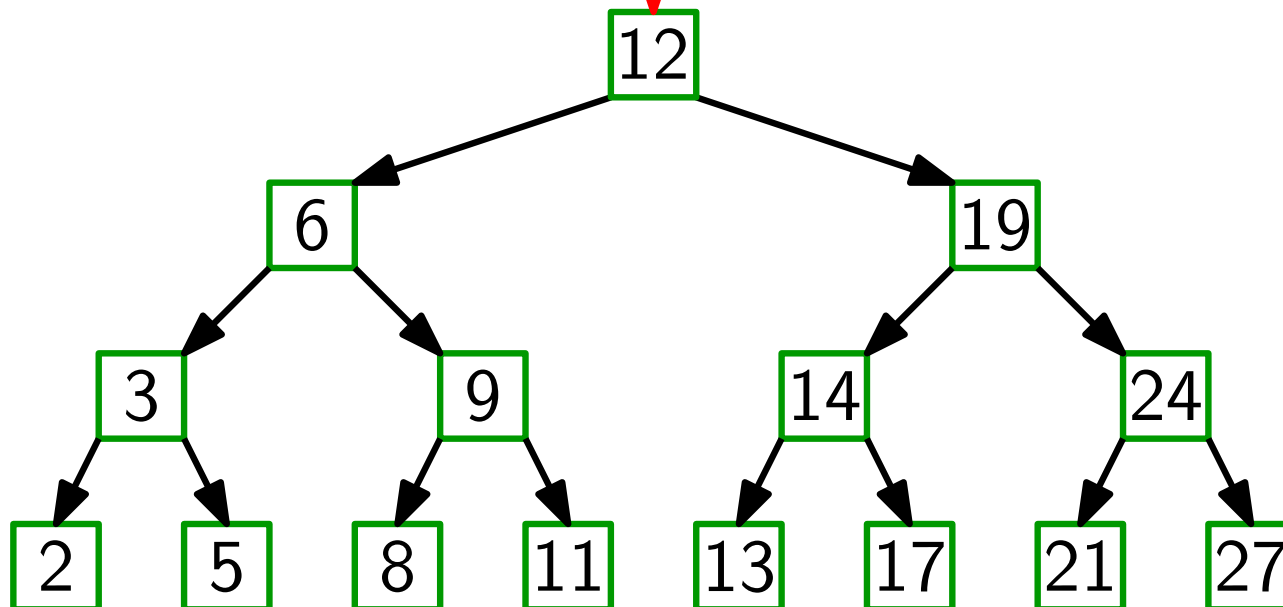


*Binärer  
Suchbaum*

# Suche im sortierten Feld

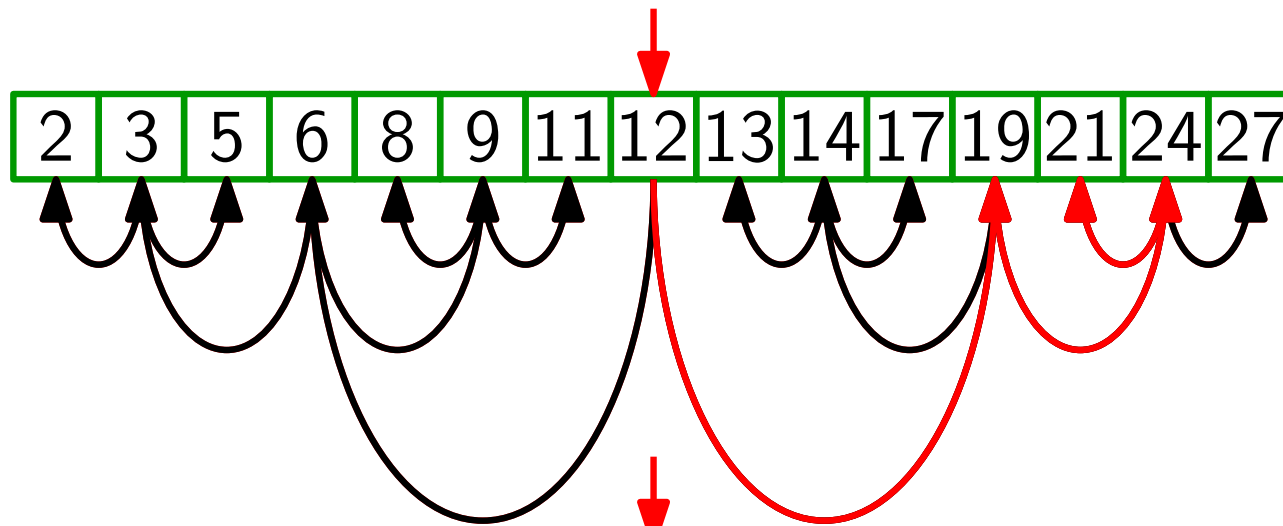


*Suche 21!*

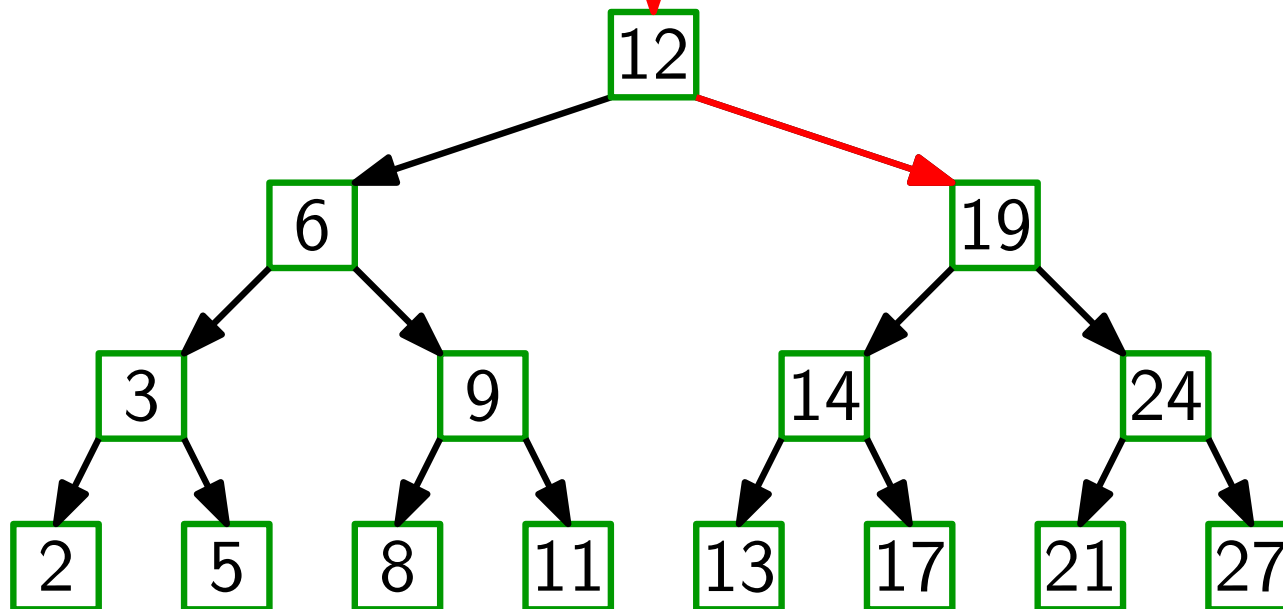


*Binärer  
Suchbaum*

# Suche im sortierten Feld



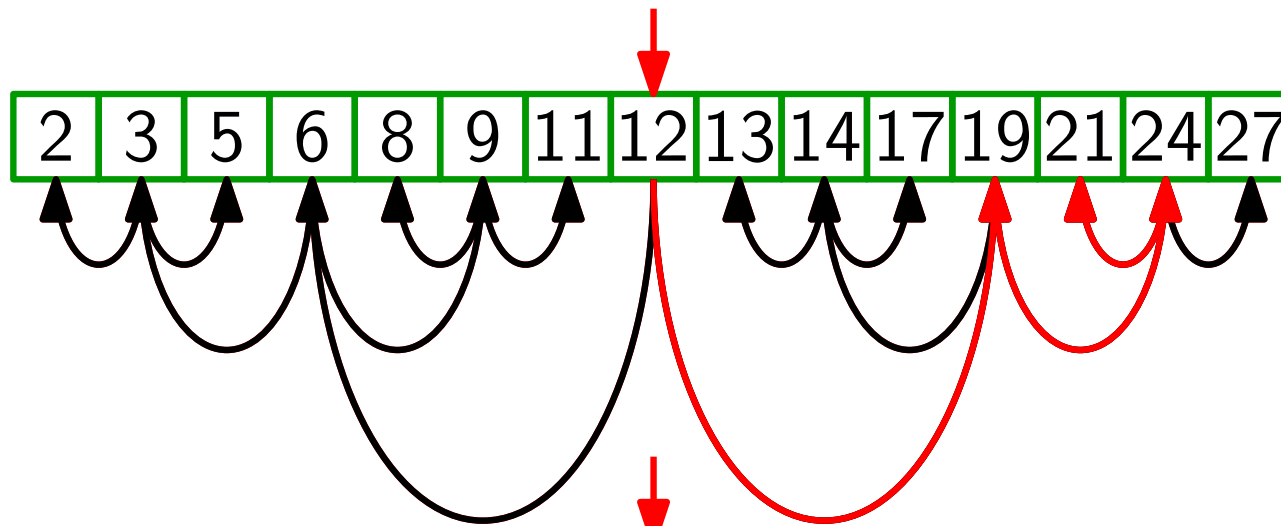
*Suche 21!*



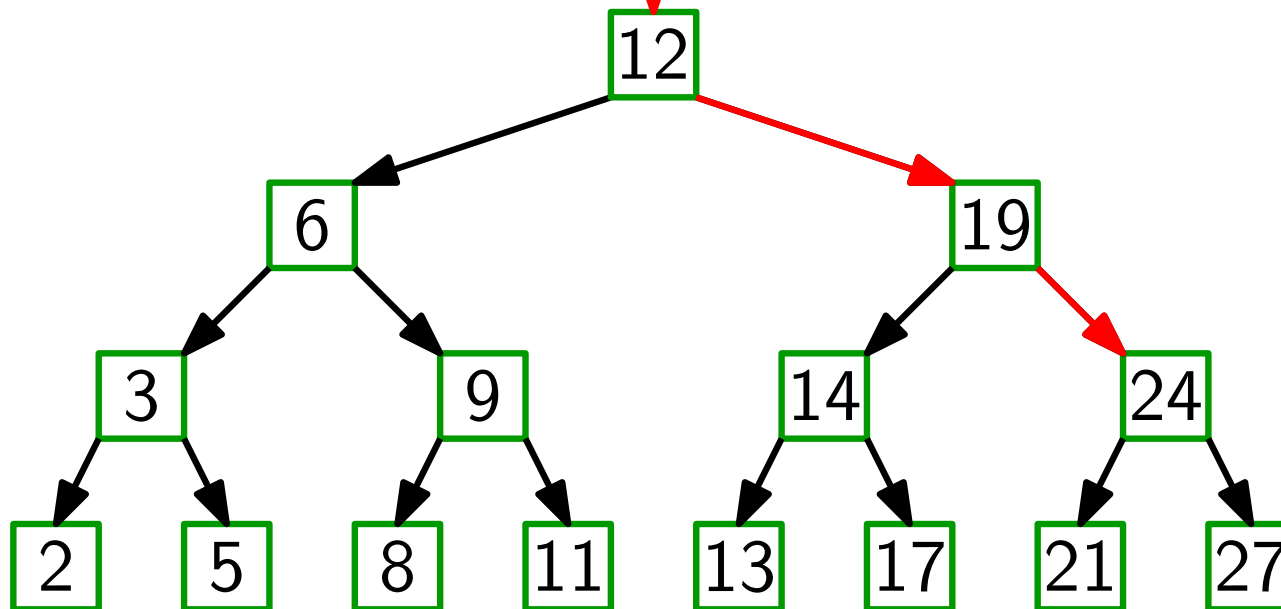
*Binärer  
Suchbaum*



# Suche im sortierten Feld

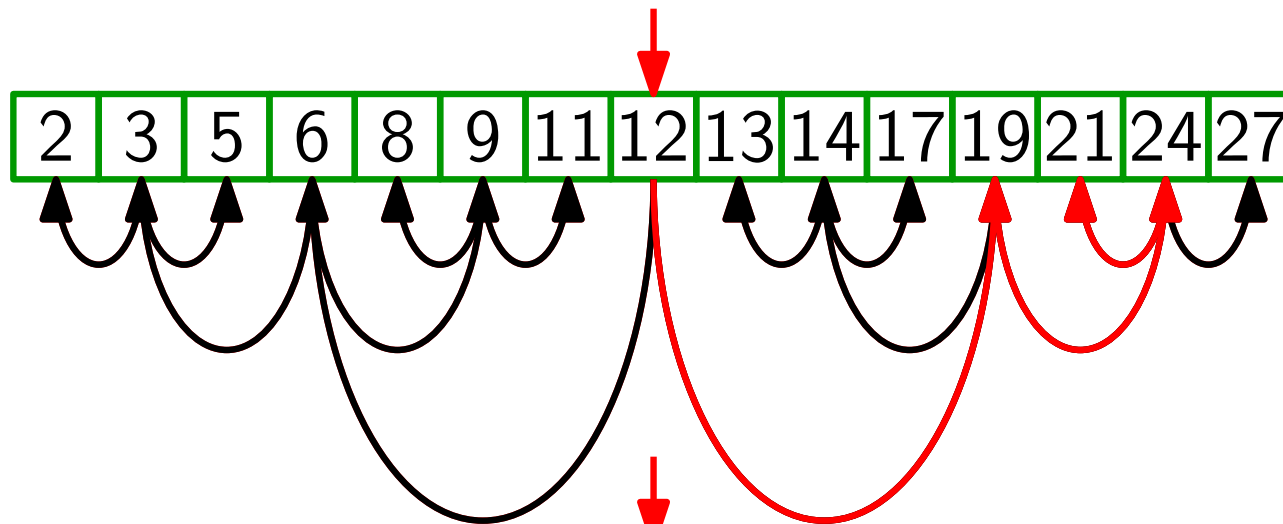


*Suche 21!*

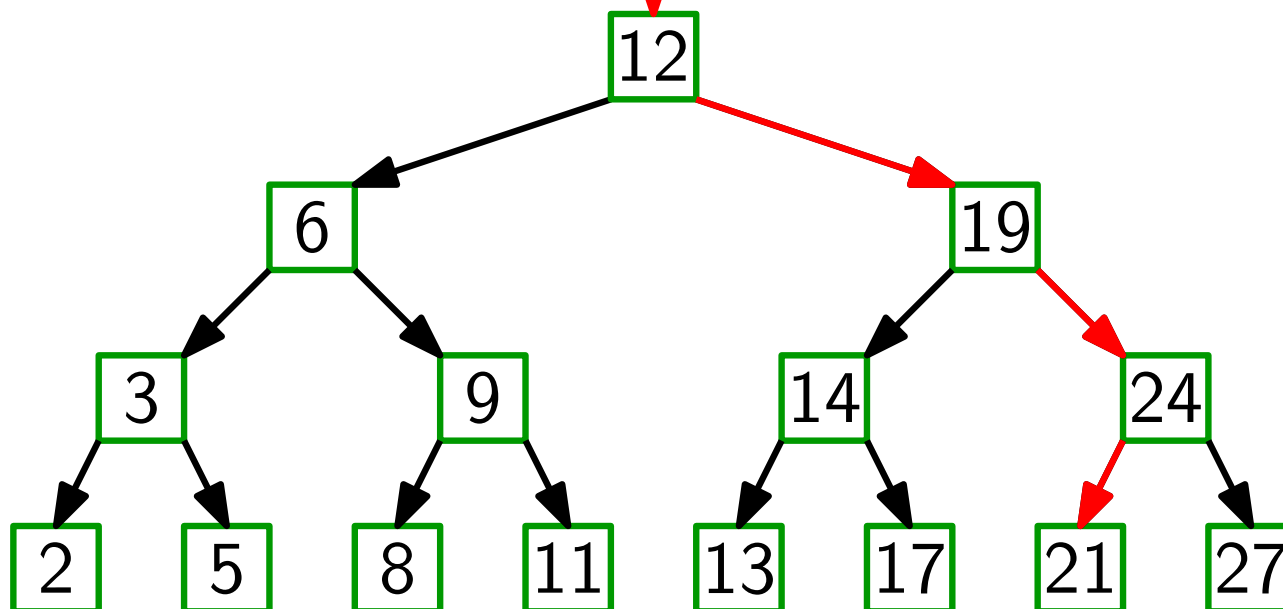


*Binärer  
Suchbaum*

# Suche im sortierten Feld

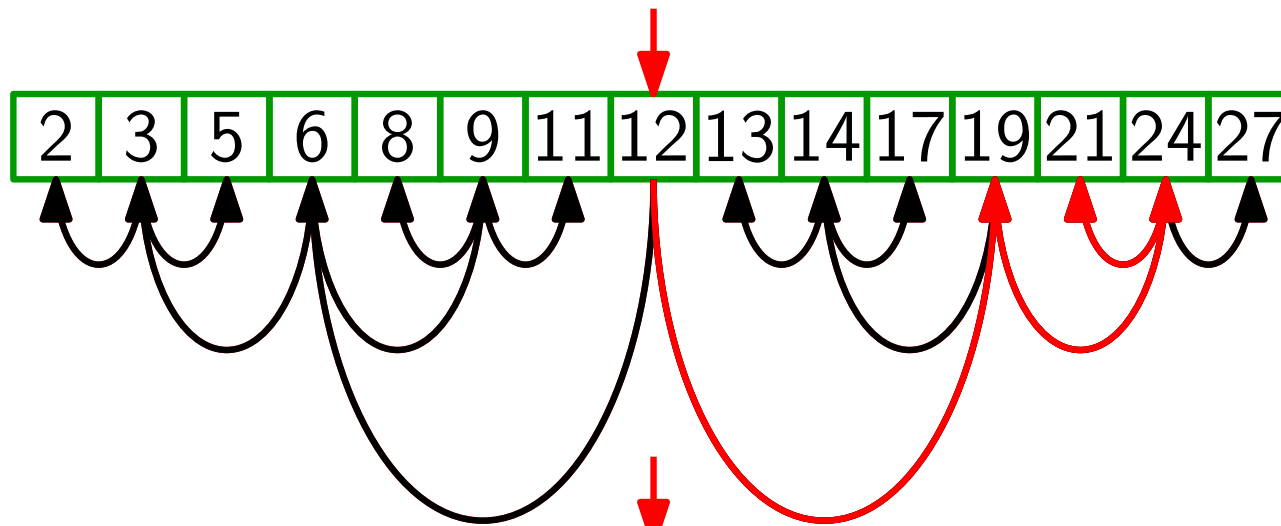


*Suche 21!*

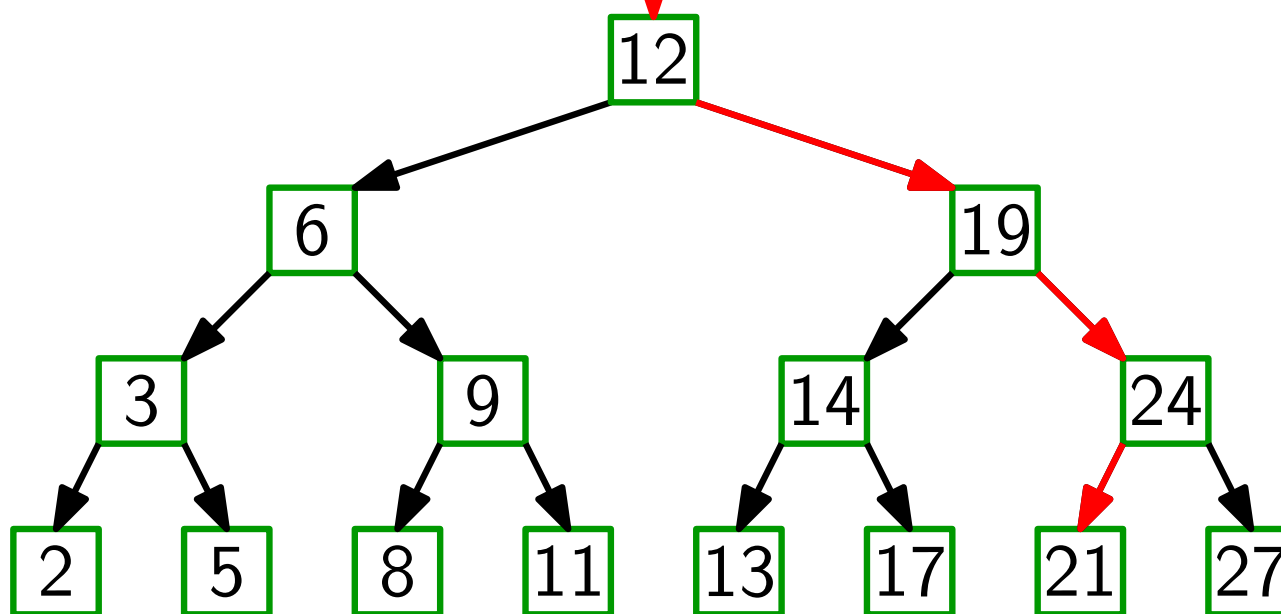


*Binärer  
Suchbaum*

# Suche im sortierten Feld



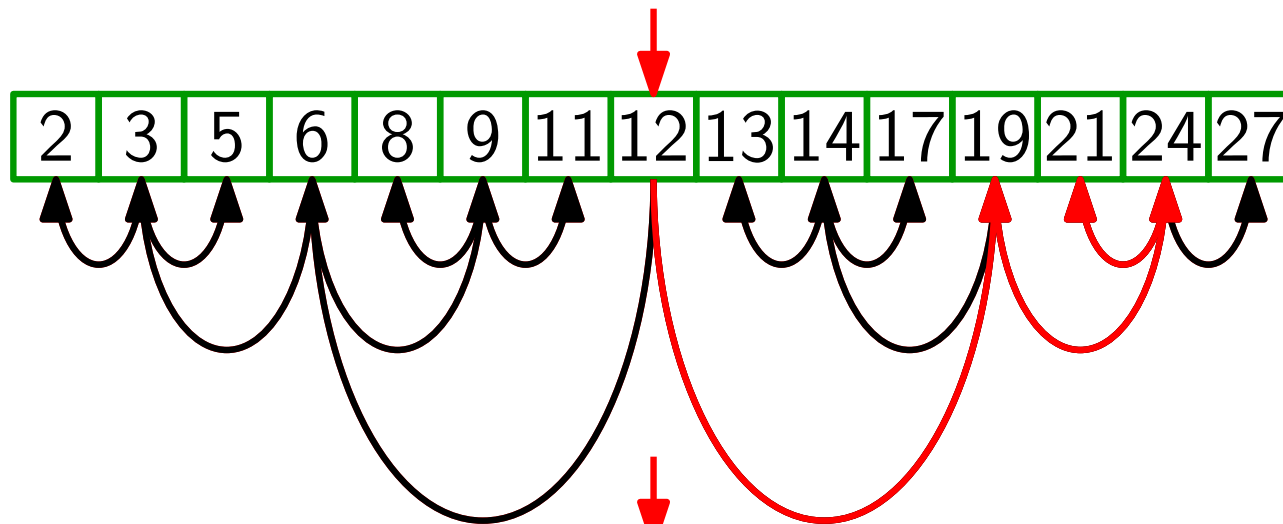
*Suche 21!*



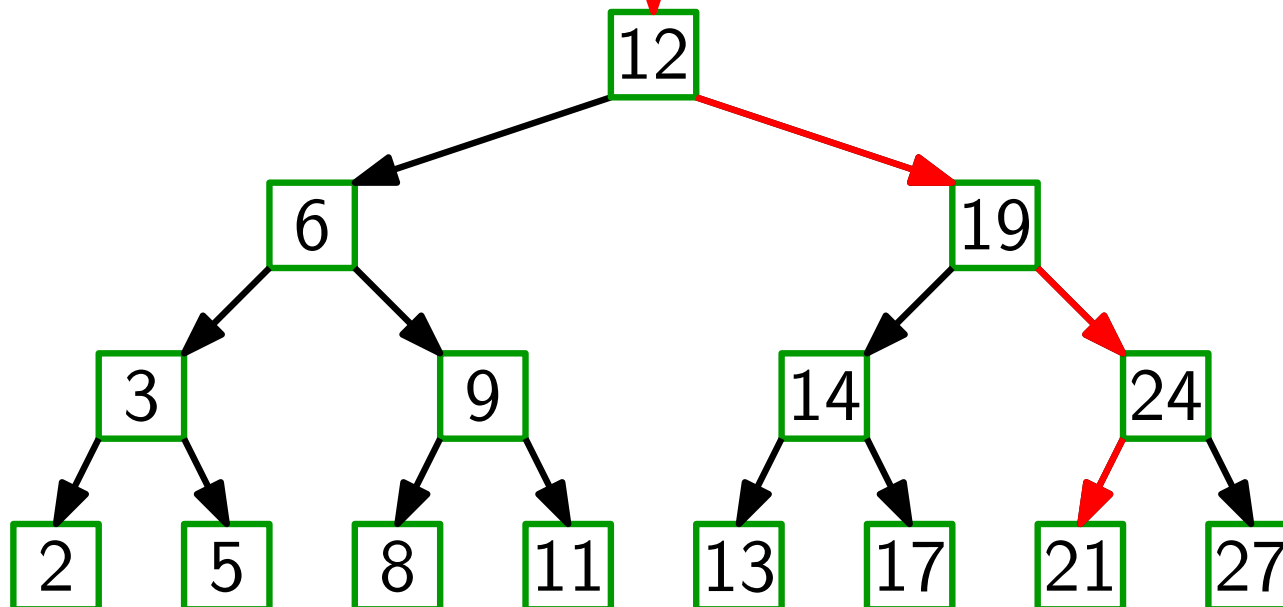
*Binärer  
Suchbaum*

*Binärer-Suchbaum-Eigenschaft:*

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

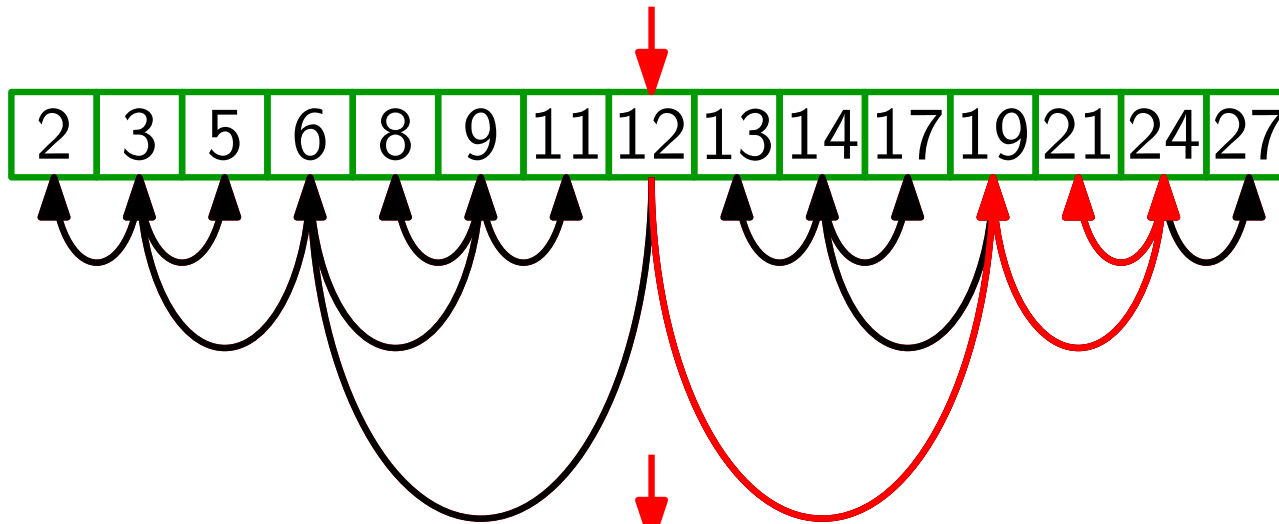


*Binärer  
Suchbaum*

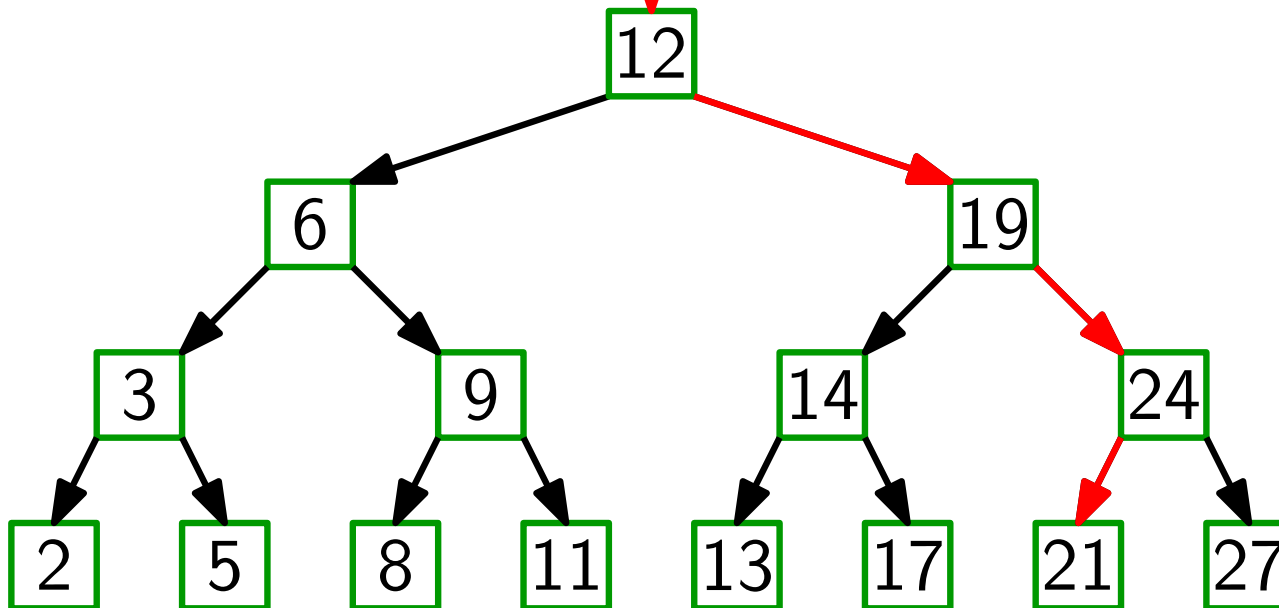
*Binärer-Suchbaum-Eigenschaft:*

Für jeden Knoten  $v$  gilt:

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*

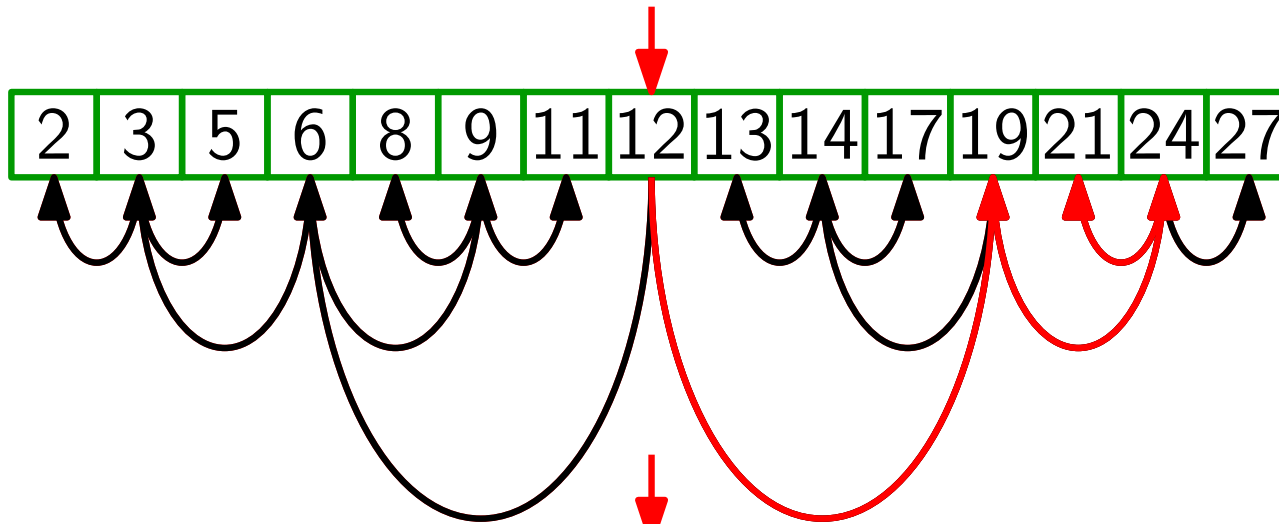


*Binärer  
Suchbaum*

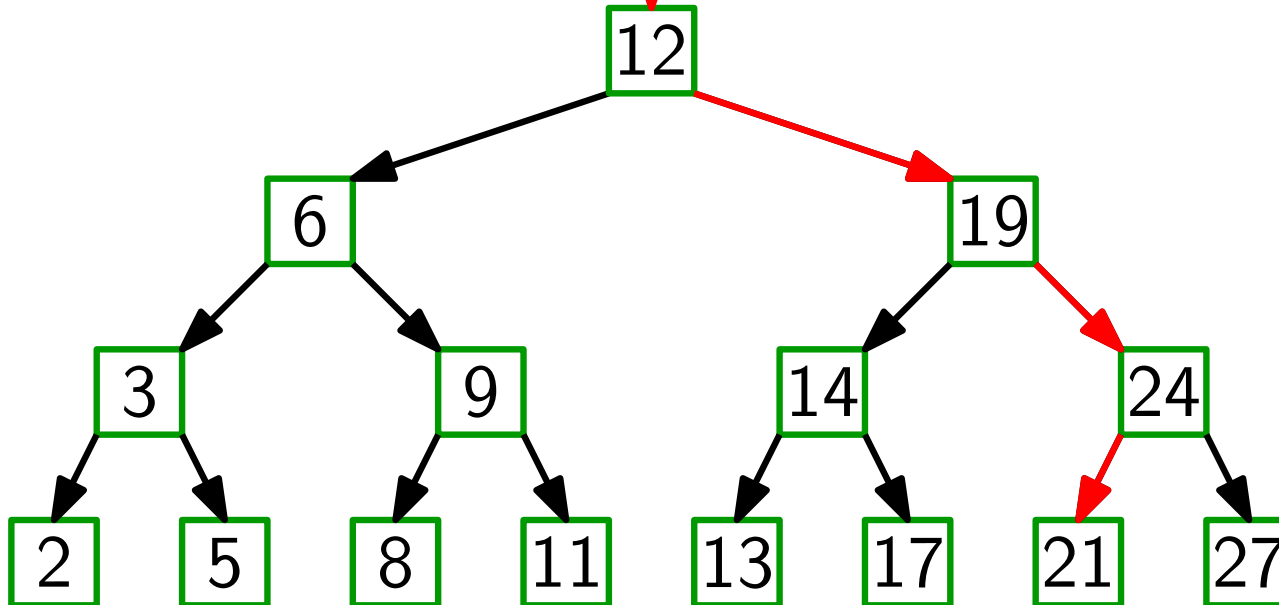
*Binärer-Suchbaum-Eigenschaft:*

Für jeden Knoten  $v$  gilt:  
alle Knoten im linken Teilbaum von  $v$  haben Schlüssel  $\leq v.key$

# Suche im sortierten Feld



*Suche 21!*



*Binärer  
Suchbaum*

*Binärer-Suchbaum-Eigenschaft:*

Für jeden Knoten  $v$  gilt:  
 alle Knoten im linken Teilbaum von  $v$  haben Schlüssel  $\leq v.key$   
 rechten  $\geq$

# Bin. Suchbaum

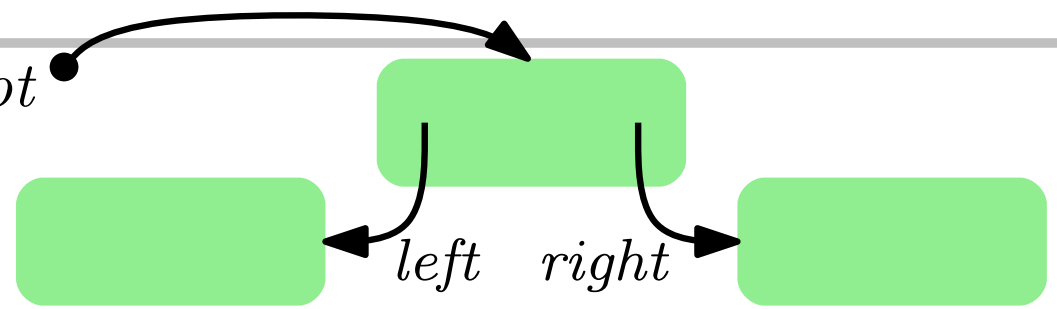
## Abs. Datentyp

BinSearchTree()

## Implementierung

# Bin. Suchbaum

*root*



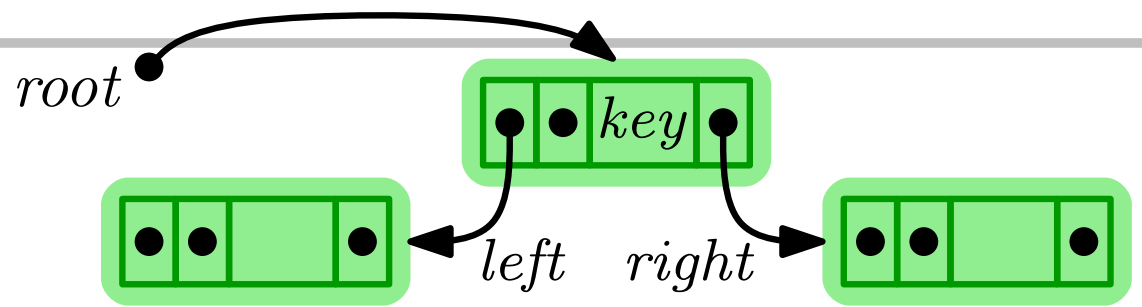
## Abs. Datentyp

BinSearchTree()

## Implementierung



# Bin. Suchbaum

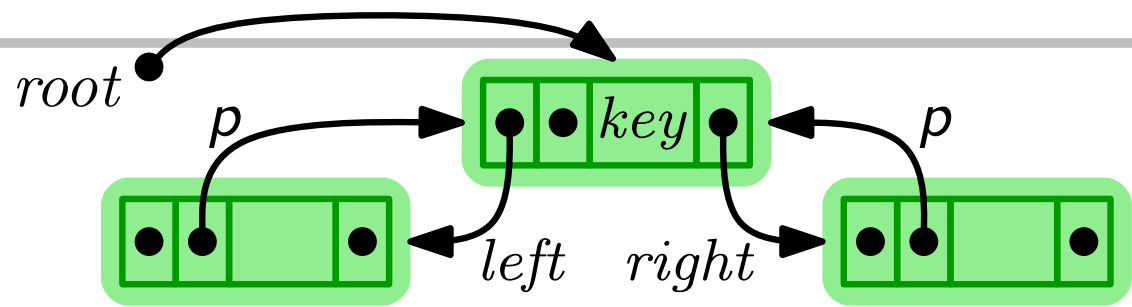


## Abs. Datentyp

BinSearchTree()

## Implementierung

# Bin. Suchbaum

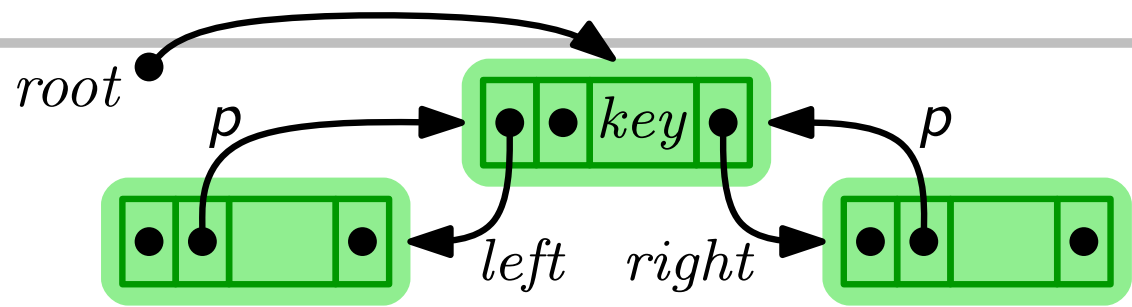


## Abs. Datentyp

BinSearchTree()

## Implementierung

# Bin. Suchbaum



## Abs. Datentyp

BinSearchTree()

## Implementierung

Node

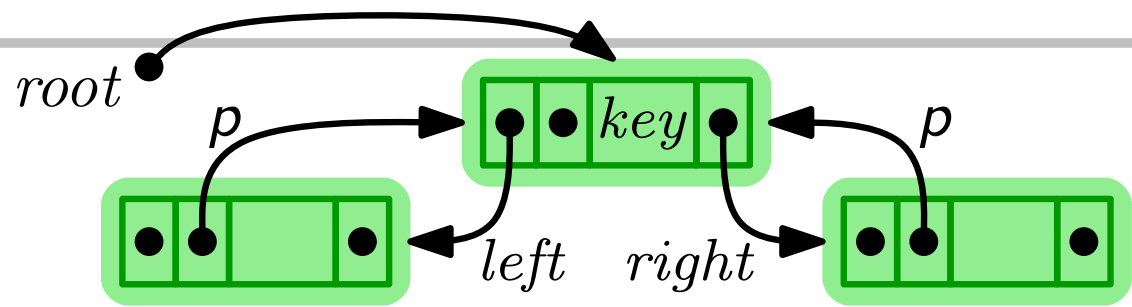
key *key*

Node *left*

Node *right*

Node *p*

# Bin. Suchbaum



## Abs. Datentyp

BinSearchTree()

## Implementierung

Node *root*

Node

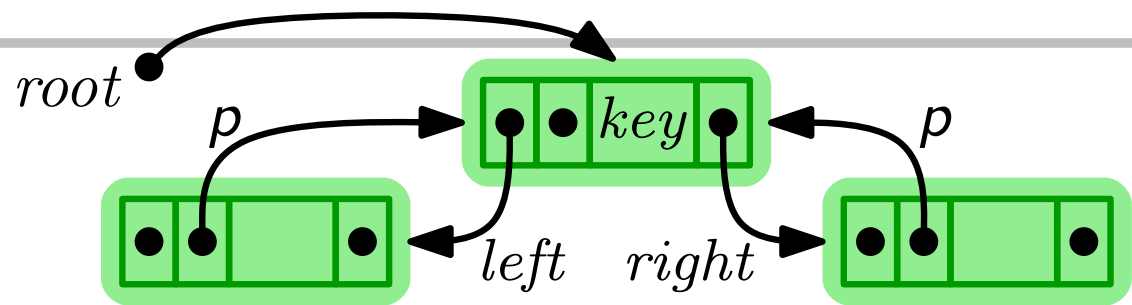
key *key*

Node *left*

Node *right*

Node *p*

# Bin. Suchbaum



## Abs. Datentyp

BinSearchTree()

## Implementierung

Node(key *k*, Node *par*)

*key* = *k*

*p* = *par*

*right* = *left* = *nil*

Node *root*

Node

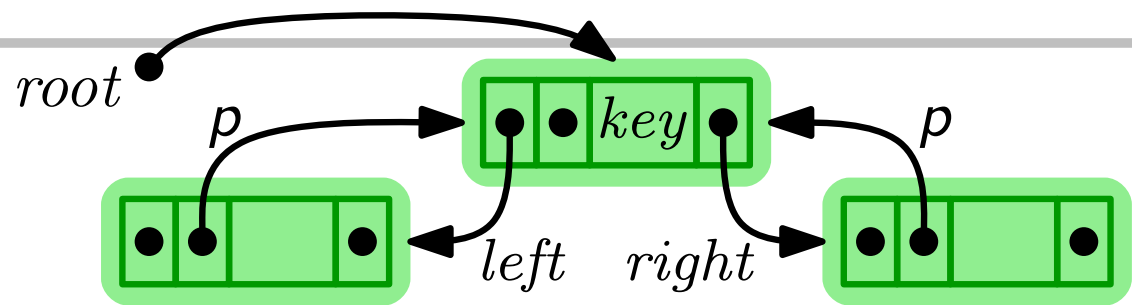
key *key*

Node *left*

Node *right*

Node *p*

# Bin. Suchbaum



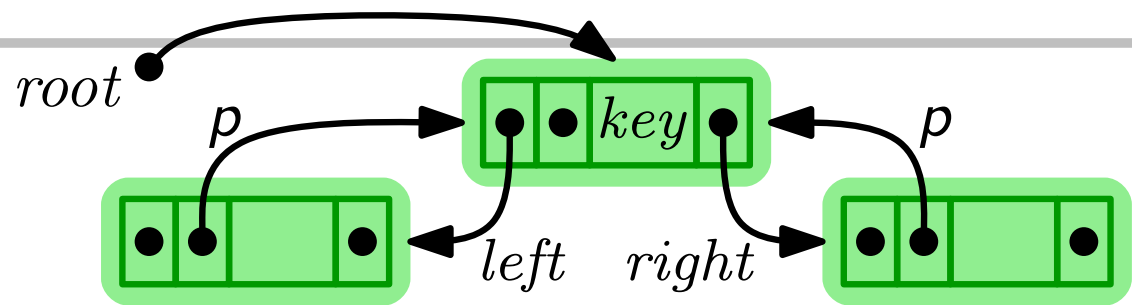
## Abs. Datentyp

BinSearchTree()

## Implementierung

<i>root = nil</i>	Node(key <i>k</i> , Node <i>par</i> )	Node key <i>key</i> Node <i>left</i> Node <i>right</i> Node <i>p</i>
	<i>key = k</i> <i>p = par</i> <i>right = left = nil</i>	
	Node <i>root</i>	

# Bin. Suchbaum



## Abs. Datentyp

BinSearchTree()

Node Search(key  $k$ )

Node Insert(key  $k$ )

Delete(Node  $x$ )

Node Minimum()

Node Maximum()

Node Predecessor(Node  $x$ )

Node Successor(Node  $x$ )

## Implementierung

$root = nil$

Node(key  $k$ , Node  $par$ )

$key = k$

$p = par$

$right = left = nil$

Node  $root$

Node

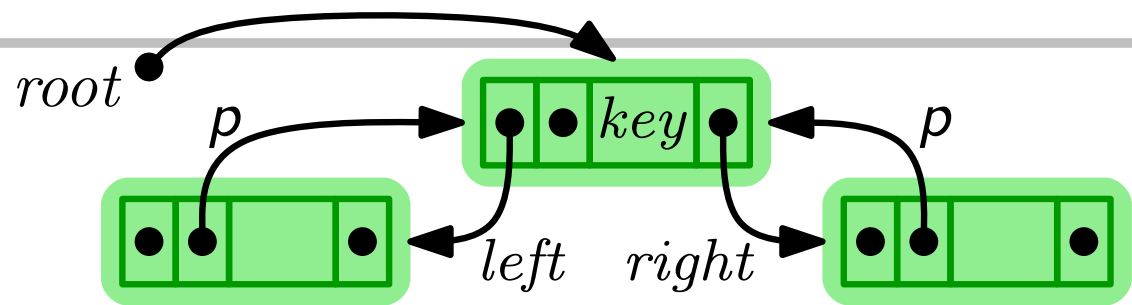
key  $key$

Node  $left$

Node  $right$

Node  $p$

# Bin. Suchbaum



## Abs. Datentyp

BinSearchTree()

Node Search(key  $k$ )

Node Insert(key  $k$ )

Delete(Node  $x$ )

Node Minimum()

Node Maximum()

Node Predecessor(Node  $x$ )

Node Successor(Node  $x$ )

## Implementierung

$root = nil$

Node(key  $k$ , Node  $par$ )

$key = k$

$p = par$

$right = left = nil$

Node  $root$

Node

key  $key$

Node  $left$

Node  $right$

Node  $p$

TO DO!



# Inorder-Traversierung

(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

# Inorder-Traversierung

(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

**Beispiel:** Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

# Inorder-Traversierung

(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

**Beispiel:** Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

**Lösung:**

# Inorder-Traversierung

(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

**Beispiel:** Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

**Lösung:** 1. Durchlaufe rekursiv linken Teilbaum der Wurzel.

# Inorder-Traversierung

(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

**Beispiel:** Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

**Lösung:**

1. Durchlaufe rekursiv linken Teilbaum der Wurzel.
2. Gib den Schlüssel der Wurzel aus.

# Inorder-Traversierung

(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

**Beispiel:** Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

**Lösung:**

1. Durchlaufe rekursiv linken Teilbaum der Wurzel.
2. Gib den Schlüssel der Wurzel aus.
3. Durchlaufe rekursiv rechten Teilbaum der Wurzel.

# Inorder-Traversierung

(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

**Beispiel:** Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

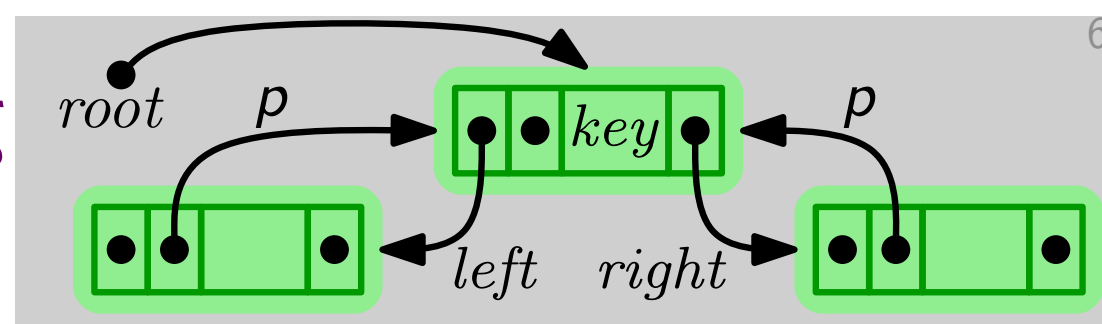
**Lösung:**

1. Durchlaufe rekursiv linken Teilbaum der Wurzel.
2. Gib den Schlüssel der Wurzel aus.
3. Durchlaufe rekursiv rechten Teilbaum der Wurzel.

**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
```

# Inorder-Traversierung



(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

**Beispiel:** Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

**Lösung:**

1. Durchlaufe rekursiv linken Teilbaum der Wurzel.
2. Gib den Schlüssel der Wurzel aus.
3. Durchlaufe rekursiv rechten Teilbaum der Wurzel.

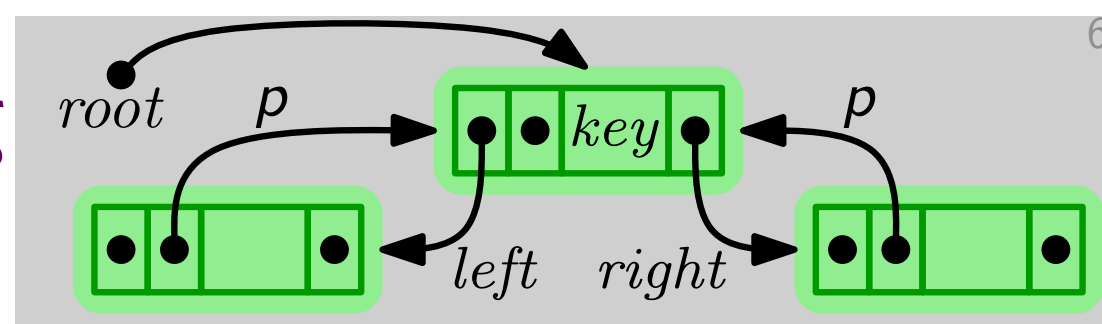
**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
```

*Geben Sie eine rekursive  
Implementierung an!*



# Inorder-Traversierung



(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

**Beispiel:** Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

**Lösung:**

1. Durchlaufe rekursiv linken Teilbaum der Wurzel.
2. Gib den Schlüssel der Wurzel aus.
3. Durchlaufe rekursiv rechten Teilbaum der Wurzel.

**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )  
  if  $x \neq nil$  then  
    InorderTreeWalk( $x.left$ )  
    gib  $x.key$  aus  
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Korrektheit

## Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )  
  if  $x \neq nil$  then  
    InorderTreeWalk( $x.left$ )  
    gib  $x.key$  aus  
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Korrektheit

zu zeigen:

**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )  
  if  $x \neq nil$  then  
    InorderTreeWalk( $x.left$ )  
    gib  $x.key$  aus  
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Korrektheit

**zu zeigen:** Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )  
  if  $x \neq nil$  then  
    InorderTreeWalk( $x.left$ )  
    gib  $x.key$  aus  
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Korrektheit

**zu zeigen:** Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.  
Induktion über die Baumhöhe  $h$ .

**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )  
  if  $x \neq nil$  then  
    InorderTreeWalk( $x.left$ )  
    gib  $x.key$  aus  
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Korrektheit

**zu zeigen:** Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.  
Induktion über die Baumhöhe  $h$ .

$h = -1$ :

**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )  
  if  $x \neq nil$  then  
    InorderTreeWalk( $x.left$ )  
    gib  $x.key$  aus  
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Korrektheit

**zu zeigen:** Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.  
Induktion über die Baumhöhe  $h$ .

$h = -1$ : Baum leer, d.h.  $root = nil$

**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )  
  if  $x \neq nil$  then  
    InorderTreeWalk( $x.left$ )  
    gib  $x.key$  aus  
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Korrektheit

**zu zeigen:** Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.  
Induktion über die Baumhöhe  $h$ .

$h = -1$ : Baum leer, d.h.  $root = nil$  ✓

**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )  
  if  $x \neq nil$  then  
    InorderTreeWalk( $x.left$ )  
    gib  $x.key$  aus  
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```



# Korrektheit

**zu zeigen:** Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.  
Induktion über die Baumhöhe  $h$ .

$h = -1$ : Baum leer, d.h.  $root = nil$  ✓

$h \geq 0$ :

**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )  
  if  $x \neq nil$  then  
    InorderTreeWalk( $x.left$ )  
    gib  $x.key$  aus  
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Korrektheit

**zu zeigen:** Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.  
Induktion über die Baumhöhe  $h$ .

- $h = -1$ : Baum leer, d.h.  $root = nil$  ✓  
 $h \geq 0$ : Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe  $< h$ .

## Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )  
  if  $x \neq nil$  then  
    InorderTreeWalk( $x.left$ )  
    gib  $x.key$  aus  
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Korrektheit

**zu zeigen:** Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe  $h$ .

$h = -1$ : Baum leer, d.h.  $root = nil$  ✓

$h \geq 0$ : Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe  $< h$ .

Seien  $T_{links}$  und  $T_{rechts}$  li. & re. Teilbaum der Wurzel.

**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )  
  if  $x \neq nil$  then  
    InorderTreeWalk( $x.left$ )  
    gib  $x.key$  aus  
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Korrektheit

**zu zeigen:** Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe  $h$ .

$h = -1$ : Baum leer, d.h.  $root = nil$  ✓

$h \geq 0$ : Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe  $< h$ .

Seien  $T_{links}$  und  $T_{rechts}$  li. & re. Teilbaum der Wurzel.  
 $T_{links}$  und  $T_{rechts}$  haben Höhe  $< h$ .

**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )  
  if  $x \neq nil$  then  
    InorderTreeWalk( $x.left$ )  
    gib  $x.key$  aus  
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Korrektheit

**zu zeigen:** Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe  $h$ .

$h = -1$ : Baum leer, d.h.  $root = nil$  ✓

$h \geq 0$ : Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe  $< h$ .

Seien  $T_{links}$  und  $T_{rechts}$  li. & re. Teilbaum der Wurzel.

$T_{links}$  und  $T_{rechts}$  haben Höhe  $< h$ . *[rekursive Def. der Höhe!]*

**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )  
  if  $x \neq nil$  then  
    InorderTreeWalk( $x.left$ )  
    gib  $x.key$  aus  
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Korrektheit

**zu zeigen:** Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe  $h$ .

$h = -1$ : Baum leer, d.h.  $root = nil$  ✓

$h \geq 0$ : Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe  $< h$ .

Seien  $T_{links}$  und  $T_{rechts}$  li. & re. Teilbaum der Wurzel.

$T_{links}$  und  $T_{rechts}$  haben Höhe  $< h$ . *[rekursive Def. der Höhe!]*

Also werden *ihre* Schlüssel sortiert ausgegeben.

**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
  if  $x \neq nil$  then
    InorderTreeWalk( $x.left$ )
    gib  $x.key$  aus
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Korrektheit

**zu zeigen:** Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe  $h$ .

$h = -1$ : Baum leer, d.h.  $root = nil$  ✓

$h \geq 0$ : Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe  $< h$ .

Seien  $T_{links}$  und  $T_{rechts}$  li. & re. Teilbaum der Wurzel.

$T_{links}$  und  $T_{rechts}$  haben Höhe  $< h$ . *[rekursive Def. der Höhe!]*

Also werden *ihre* Schlüssel sortiert ausgegeben.

Ausgabe (sortierte Schlüssel von  $T_{links}$ , dann  $root.key$ , dann sortierte Schlüssel von  $T_{rechts}$ ) ist sortiert.

**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
  if  $x \neq nil$  then
    InorderTreeWalk( $x.left$ )
    gib  $x.key$  aus
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Korrektheit

**zu zeigen:** Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe  $h$ .

$h = -1$ : Baum leer, d.h.  $root = nil$  ✓

$h \geq 0$ : Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe  $< h$ .

Seien  $T_{links}$  und  $T_{rechts}$  li. & re. Teilbaum der Wurzel.

$T_{links}$  und  $T_{rechts}$  haben Höhe  $< h$ . *[rekursive Def. der Höhe!]*

Also werden *ihre* Schlüssel sortiert ausgegeben.

**Binärer-Suchbaum-Eigenschaft**  $\Rightarrow$

Ausgabe (sortierte Schlüssel von  $T_{links}$ , dann  $root.key$ , dann sortierte Schlüssel von  $T_{rechts}$ ) ist sortiert.

**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
  if  $x \neq nil$  then
    InorderTreeWalk( $x.left$ )
    gib  $x.key$  aus
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```



# Korrektheit

**zu zeigen:** Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe  $h$ .

$h = -1$ : Baum leer, d.h.  $root = nil$  ✓

$h \geq 0$ : Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe  $< h$ .

Seien  $T_{links}$  und  $T_{rechts}$  li. & re. Teilbaum der Wurzel.

$T_{links}$  und  $T_{rechts}$  haben Höhe  $< h$ . *[rekursive Def. der Höhe!]*

Also werden *ihre* Schlüssel sortiert ausgegeben.

**Binärer-Suchbaum-Eigenschaft**  $\Rightarrow$

Ausgabe (sortierte Schlüssel von  $T_{links}$ , dann  $root.key$ , dann sortierte Schlüssel von  $T_{rechts}$ ) ist sortiert. ✓

**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
  if  $x \neq nil$  then
    InorderTreeWalk( $x.left$ )
    gib  $x.key$  aus
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Laufzeit

$$T(n) =$$

## Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )  
  if  $x \neq nil$  then  
    InorderTreeWalk( $x.left$ )  
    gib  $x.key$  aus  
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Laufzeit

Anz. der Knoten im linken / rechten Teilbaum der Wurzel


$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(\text{orange box}) + T(\text{orange box}) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

## Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
  if  $x \neq nil$  then
    InorderTreeWalk( $x.left$ )
    gib  $x.key$  aus
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Laufzeit

Anz. der Knoten im linken / rechten Teilbaum der Wurzel


$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n - k - 1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$


## Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
  if  $x \neq nil$  then
    InorderTreeWalk( $x.left$ )
    gib  $x.key$  aus
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Laufzeit

Anz. der Knoten im linken / rechten Teilbaum der Wurzel

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n - k - 1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$


Zeige (mit Substitutionsmethode)  $T(n) \leq c \cdot n$

## Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
  if  $x \neq nil$  then
    InorderTreeWalk( $x.left$ )
    gib  $x.key$  aus
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Laufzeit

Anz. der Knoten im linken / rechten Teilbaum der Wurzel

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n - k - 1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode)  $T(n) \leq c \cdot n - 1$

## Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
  if  $x \neq nil$  then
    InorderTreeWalk( $x.left$ )
    gib  $x.key$  aus
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n - k - 1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode)  $T(n) \leq c \cdot n - 1$

*oder:*

## Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )  
  if  $x \neq nil$  then  
    InorderTreeWalk( $x.left$ )  
    gib  $x.key$  aus  
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n - k - 1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode)  $T(n) \leq c \cdot n - 1$

*oder:* Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt InorderTreeWalk eine konstante Anz. von Schritten aus.

## Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
  if  $x \neq nil$  then
    InorderTreeWalk( $x.left$ )
    gib  $x.key$  aus
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```



# Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n - k - 1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode)  $T(n) \leq c \cdot n - 1$

*oder:* Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt InorderTreeWalk eine konstante Anz. von Schritten aus.

Für Bäume gilt:  $\# \text{Kanten} = \# \text{Knoten} - 1 = n - 1$

## Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = \text{root}$ )
  if  $x \neq \text{nil}$  then
    InorderTreeWalk( $x.\text{left}$ )
    gib  $x.\text{key}$  aus
    InorderTreeWalk( $x.\text{right}$ )
```

# Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n - k - 1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode)  $T(n) \leq c \cdot n - 1$

*oder:* Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt InorderTreeWalk eine konstante Anz. von Schritten aus.

Für Bäume gilt:  $\#Kanten = \#Knoten - 1 = n - 1$

Übung: zeig's  
mit Induktion!

## Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
  if  $x \neq nil$  then
    InorderTreeWalk( $x.left$ )
    gib  $x.key$  aus
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n - k - 1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode)  $T(n) \leq c \cdot n - 1$

*oder:* Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt InorderTreeWalk eine konstante Anz. von Schritten aus.

Für Bäume gilt:  $\# \text{Kanten} = \# \text{Knoten} - 1 = n - 1$

## Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = \text{root}$ )
  if  $x \neq \text{nil}$  then
    InorderTreeWalk( $x.\text{left}$ )
    gib  $x.\text{key}$  aus
    InorderTreeWalk( $x.\text{right}$ )
```

# Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n - k - 1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode)  $T(n) \leq c \cdot n - 1$

*oder:* Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt InorderTreeWalk eine konstante Anz. von Schritten aus.

Für Bäume gilt:  $\# \text{Kanten} = \# \text{Knoten} - 1 = n - 1$

$$\Rightarrow T(n) = c_1 \cdot (n - 1) + c_2 \cdot n$$

## Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = \text{root}$ )
  if  $x \neq \text{nil}$  then
    InorderTreeWalk( $x.\text{left}$ )
    gib  $x.\text{key}$  aus
    InorderTreeWalk( $x.\text{right}$ )
```

# Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n - k - 1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode)  $T(n) \leq c \cdot n - 1$

*oder:* Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt InorderTreeWalk eine konstante Anz. von Schritten aus.

Für Bäume gilt:  $\# \text{Kanten} = \# \text{Knoten} - 1 = n - 1$

$\Rightarrow T(n) = c_1 \cdot (n - 1) + c_2 \cdot n \in O(n)$ .

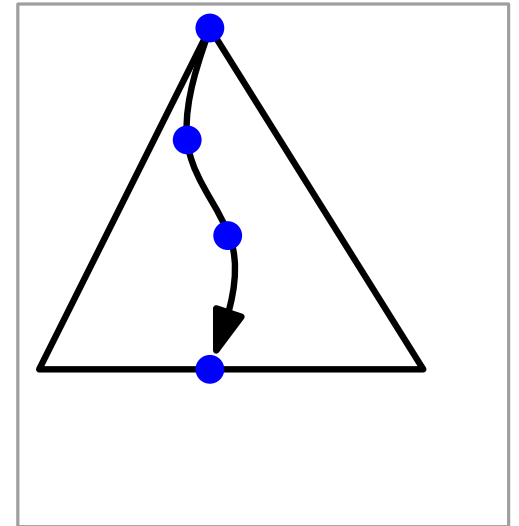
## Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = \text{root}$ )
  if  $x \neq \text{nil}$  then
    InorderTreeWalk( $x.\text{left}$ )
    gib  $x.\text{key}$  aus
    InorderTreeWalk( $x.\text{right}$ )
```

# Suche

**Aufgabe:** Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

Node Search(key  $k$ , Node  $x = \text{root}$ )



**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = \text{root}$ )  
  if  $x \neq \text{nil}$  then  
    InorderTreeWalk( $x.\text{left}$ )  
    gib  $x.\text{key}$  aus  
    InorderTreeWalk( $x.\text{right}$ )
```

# Suche

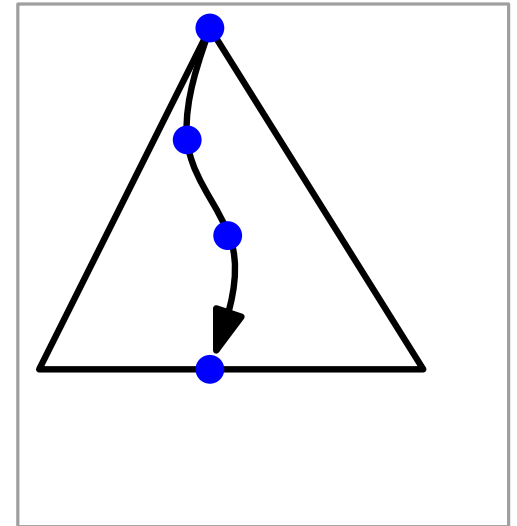
**Aufgabe:** Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

```
Node Search(key  $k$ , Node  $x = root$ )
```

```

if  $x == nil$  or  $x.key == k$  then
  | return  $x$ 
if  $k < x.key$  then
  | return Search( $k$ ,  $x.left$ )
else return Search( $k$ ,  $x.right$ )

```



**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
```

```

if  $x \neq nil$  then
  | InorderTreeWalk( $x.left$ )
  | gib  $x.key$  aus
  | InorderTreeWalk( $x.right$ )

```

# Suche

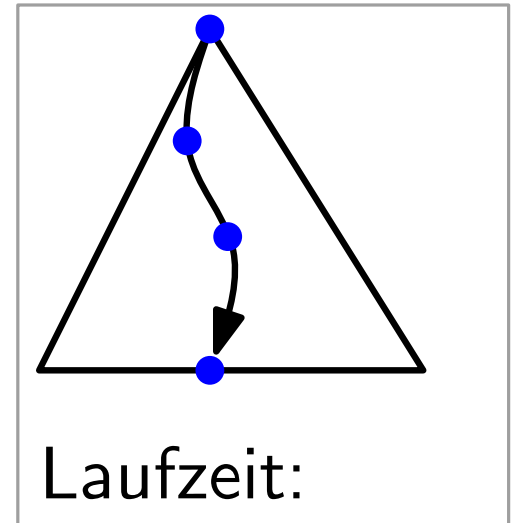
**Aufgabe:** Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

```
Node Search(key  $k$ , Node  $x = \text{root}$ )
```

```

if  $x == \text{nil}$  or  $x.\text{key} == k$  then
    return  $x$ 
if  $k < x.\text{key}$  then
    return Search( $k$ ,  $x.\text{left}$ )
else return Search( $k$ ,  $x.\text{right}$ )

```



**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = \text{root}$ )
```

```

if  $x \neq \text{nil}$  then
    InorderTreeWalk( $x.\text{left}$ )
    gib  $x.\text{key}$  aus
    InorderTreeWalk( $x.\text{right}$ )

```



# Suche

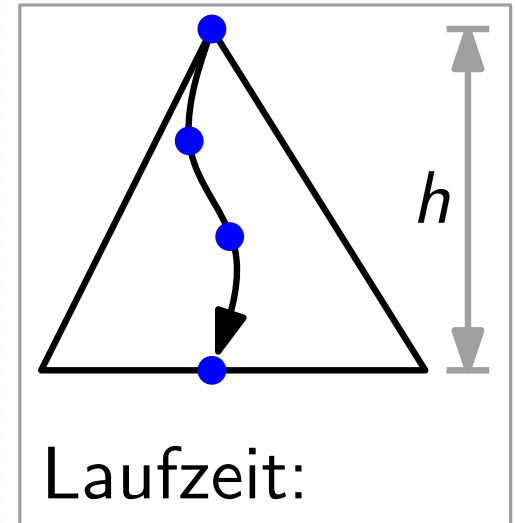
**Aufgabe:** Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

```
Node Search(key  $k$ , Node  $x = \text{root}$ )
```

```

if  $x == \text{nil}$  or  $x.\text{key} == k$  then
  | return  $x$ 
if  $k < x.\text{key}$  then
  | return Search( $k$ ,  $x.\text{left}$ )
else return Search( $k$ ,  $x.\text{right}$ )

```



**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = \text{root}$ )
```

```

if  $x \neq \text{nil}$  then
  | InorderTreeWalk( $x.\text{left}$ )
  | gib  $x.\text{key}$  aus
  | InorderTreeWalk( $x.\text{right}$ )

```

# Suche

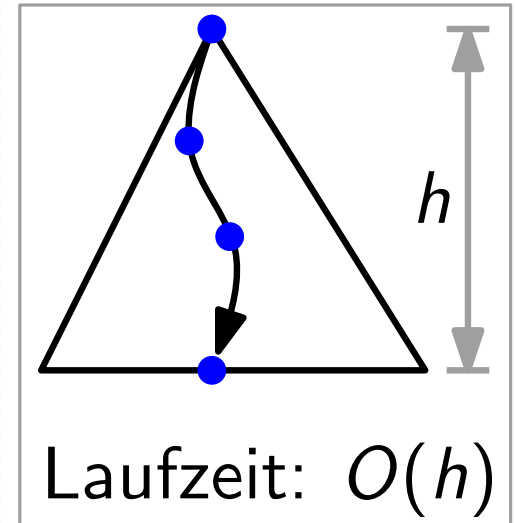
**Aufgabe:** Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

```
Node Search(key  $k$ , Node  $x = \text{root}$ )
```

```

if  $x == \text{nil}$  or  $x.\text{key} == k$  then
    return  $x$ 
if  $k < x.\text{key}$  then
    return Search( $k$ ,  $x.\text{left}$ )
else return Search( $k$ ,  $x.\text{right}$ )

```



**Code:**

```
InorderTreeWalk(Node  $x = \text{root}$ )
```

```

if  $x \neq \text{nil}$  then
    InorderTreeWalk( $x.\text{left}$ )
    gib  $x.\text{key}$  aus
    InorderTreeWalk( $x.\text{right}$ )

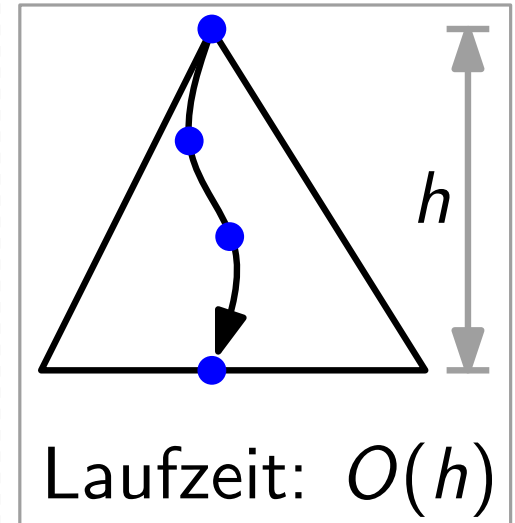
```

# Suche

**Aufgabe:** Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

rekursiv {

```
Node Search(key  $k$ , Node  $x = root$ )
    if  $x == nil$  or  $x.key == k$  then
        return  $x$ 
    if  $k < x.key$  then
        return Search( $k$ ,  $x.left$ )
    else return Search( $k$ ,  $x.right$ )
```



**Code:**

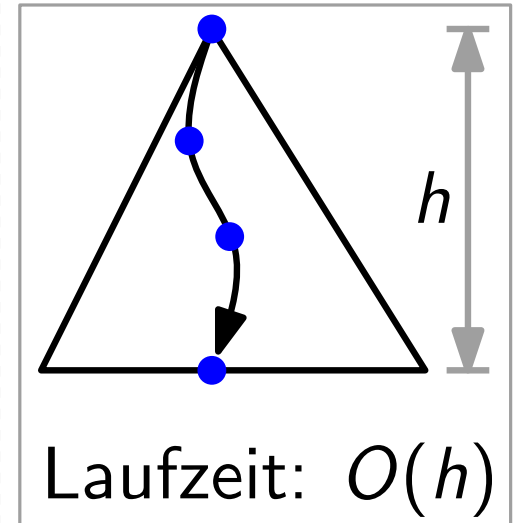
```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
    if  $x \neq nil$  then
        InorderTreeWalk( $x.left$ )
        gib  $x.key$  aus
        InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

# Suche

**Aufgabe:** Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

rekursiv {

```
Node Search(key  $k$ , Node  $x = root$ )  
    if  $x == nil$  or  $x.key == k$  then  
        return  $x$   
    if  $k < x.key$  then  
        return Search( $k$ ,  $x.left$ )  
    else return Search( $k$ ,  $x.right$ )
```



iterativ {

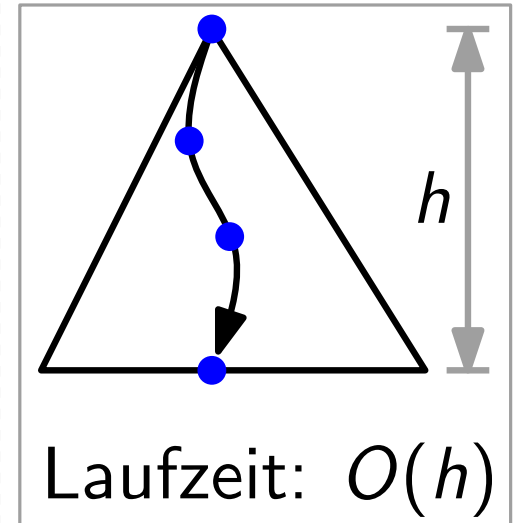
# Suche

**Aufgabe:** Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

rekursiv {

```

Node Search(key  $k$ , Node  $x = \text{root}$ )
    if  $x == \text{nil}$  or  $x.\text{key} == k$  then
        return  $x$ 
    if  $k < x.\text{key}$  then
        return Search( $k$ ,  $x.\text{left}$ )
    else return Search( $k$ ,  $x.\text{right}$ )
  
```



iterativ {

```

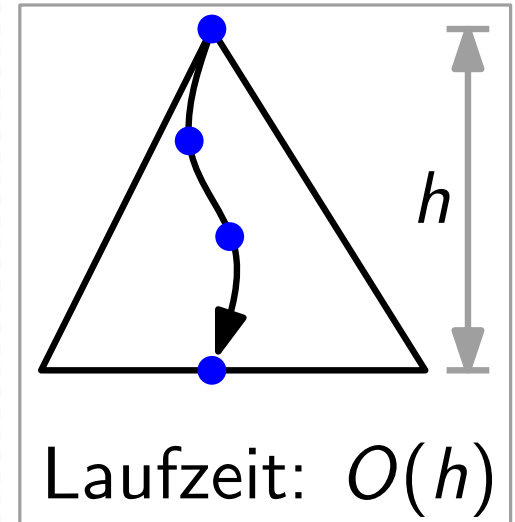
while  $x \neq \text{nil}$  and  $x.\text{key} \neq k$  do
    if  $k < x.\text{key}$  then
         $x = x.\text{left}$ 
    else  $x = x.\text{right}$ 
return  $x$ 
  
```

# Suche

**Aufgabe:** Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

rekursiv {

```
Node Search(key  $k$ , Node  $x = root$ )
  if  $x == nil$  or  $x.key == k$  then
    return  $x$ 
  if  $k < x.key$  then
    return Search( $k$ ,  $x.left$ )
  else return Search( $k$ ,  $x.right$ )
```



iterativ {

```
while  $x \neq nil$  and  $x.key \neq k$  do
  if  $k < x.key$  then
     $x = x.left$ 
  else  $x = x.right$ 
return  $x$ 
```

# Suche

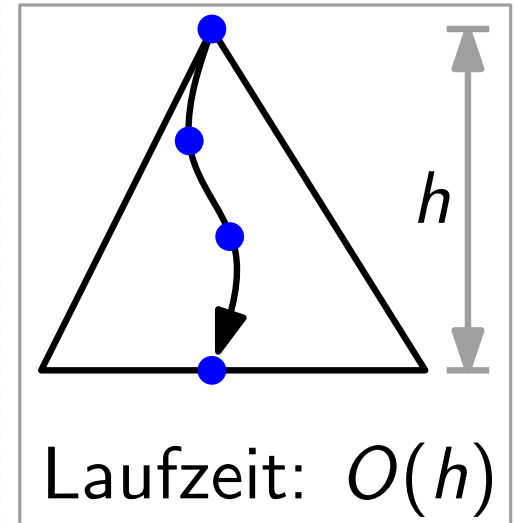
**Aufgabe:** Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

rekursiv {

```

Node Search(key  $k$ , Node  $x = \text{root}$ )
  if  $x == \text{nil}$  or  $x.\text{key} == k$  then
    return  $x$ 
  if  $k < x.\text{key}$  then
    return Search( $k$ ,  $x.\text{left}$ )
  else return Search( $k$ ,  $x.\text{right}$ )

```



iterativ {

```

while  $x \neq \text{nil}$  and  $x.\text{key} \neq k$  do
  if  $k < x.\text{key}$  then
     $x = x.\text{left}$ 
  else  $x = x.\text{right}$ 
return  $x$ 

```

Laufzeit:

# Suche

**Aufgabe:** Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

rekursiv

```
Node Search(key  $k$ , Node  $x = root$ )
```

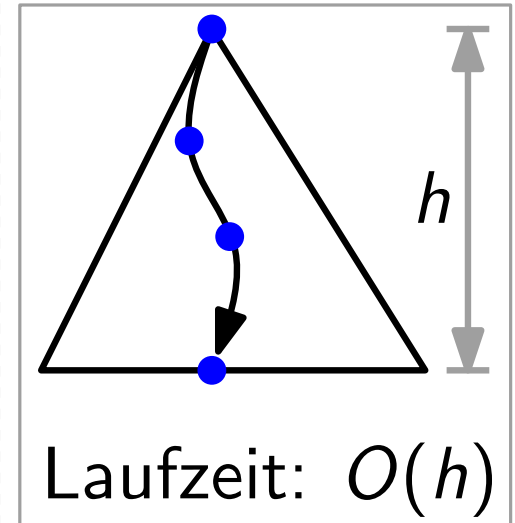
```
  if  $x == nil$  or  $x.key == k$  then
```

```
    return  $x$ 
```

```
  if  $k < x.key$  then
```

```
    return Search( $k$ ,  $x.left$ )
```

```
  else return Search( $k$ ,  $x.right$ )
```



iterativ

```
while  $x \neq nil$  and  $x.key \neq k$  do
```

```
  if  $k < x.key$  then
```

```
     $x = x.left$ 
```

```
  else  $x = x.right$ 
```

```
return  $x$ 
```

Laufzeit:  $O(h)$



# Suche

**Aufgabe:** Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

rekursiv

```
Node Search(key  $k$ , Node  $x = root$ )
```

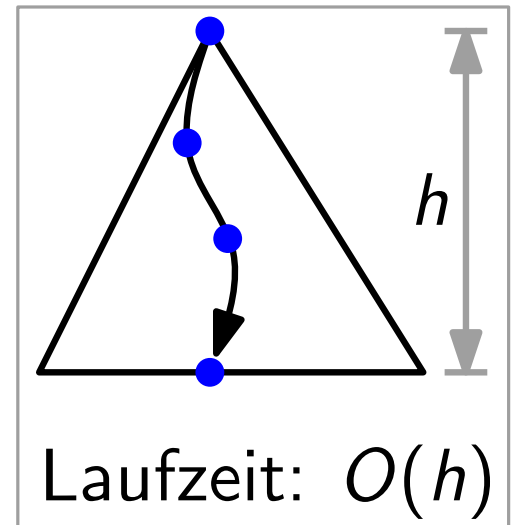
```
  if  $x == nil$  or  $x.key == k$  then
```

```
    return  $x$ 
```

```
  if  $k < x.key$  then
```

```
    return Search( $k$ ,  $x.left$ )
```

```
  else return Search( $k$ ,  $x.right$ )
```



iterativ

```
while  $x \neq nil$  and  $x.key \neq k$  do
```

```
  if  $k < x.key$  then
```

```
     $x = x.left$ 
```

```
  else  $x = x.right$ 
```

```
return  $x$ 
```

Laufzeit:  $O(h)$

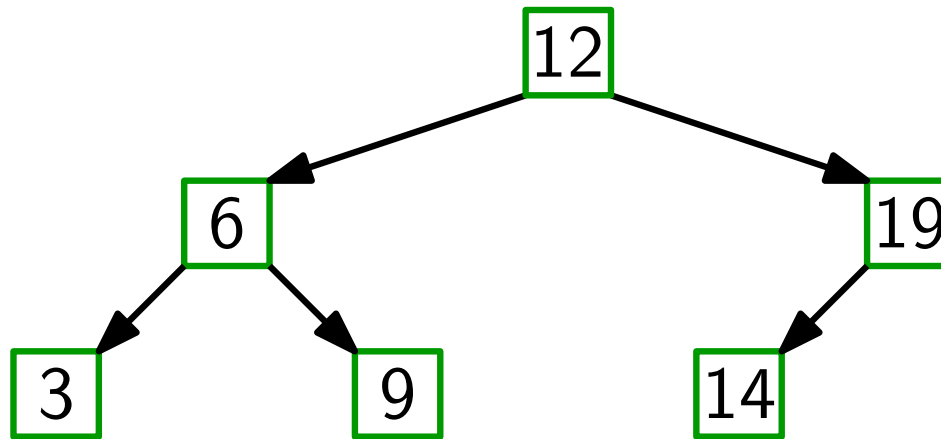
Trotzdem schneller,  
da keine Verwaltung  
der rekursiven  
Methodenaufrufe.

# Minimum & Maximum

**Frage:** Was folgt aus der Binärer-Suchbaum-Eigenschaft für die Position von Min und Max im Baum?

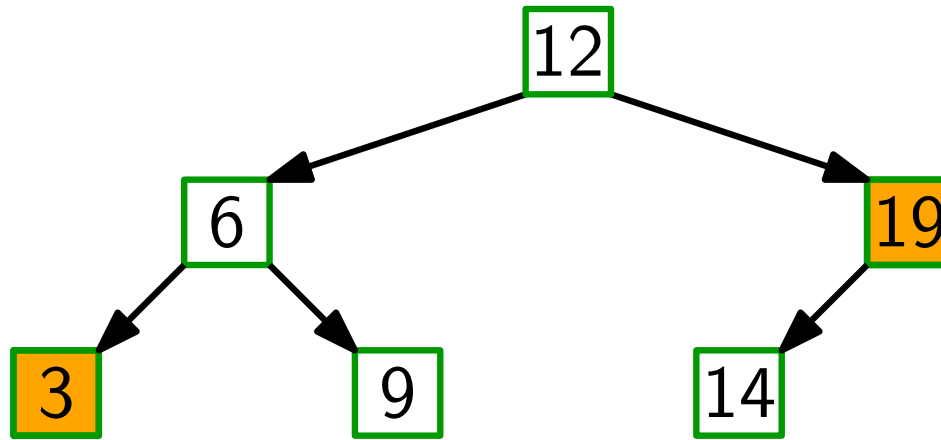
# Minimum & Maximum

**Frage:** Was folgt aus der Binärer-Suchbaum-Eigenschaft für die Position von Min und Max im Baum?



# Minimum & Maximum

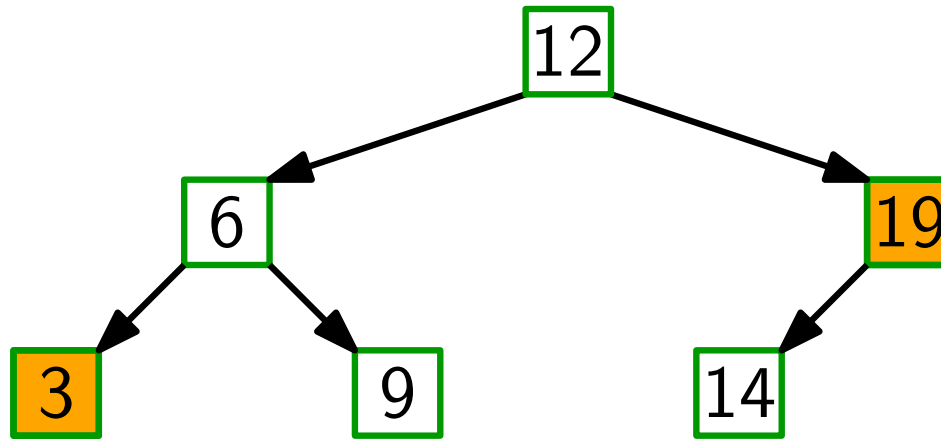
**Frage:** Was folgt aus der Binärer-Suchbaum-Eigenschaft für die Position von Min und Max im Baum?



**Antwort:** Min steht ganz links, Max ganz rechts!

# Minimum & Maximum

**Frage:** Was folgt aus der Binärer-Suchbaum-Eigenschaft für die Position von Min und Max im Baum?



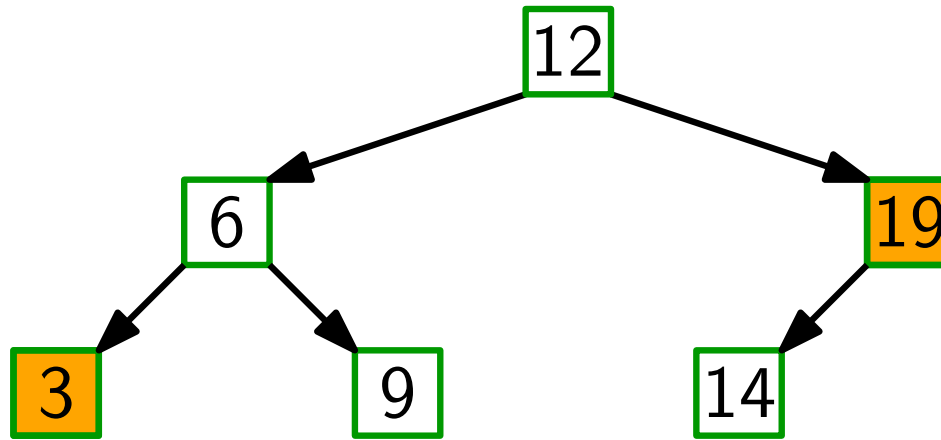
**Antwort:** Min steht ganz links, Max ganz rechts!

**Aufgabe:** Schreiben Sie für binäre Suchbäume die Methode

`Node Minimum(Node  $x = root$ )` — *iterativ!*

# Minimum & Maximum

**Frage:** Was folgt aus der Binärer-Suchbaum-Eigenschaft für die Position von Min und Max im Baum?



**Antwort:** Min steht ganz links, Max ganz rechts!

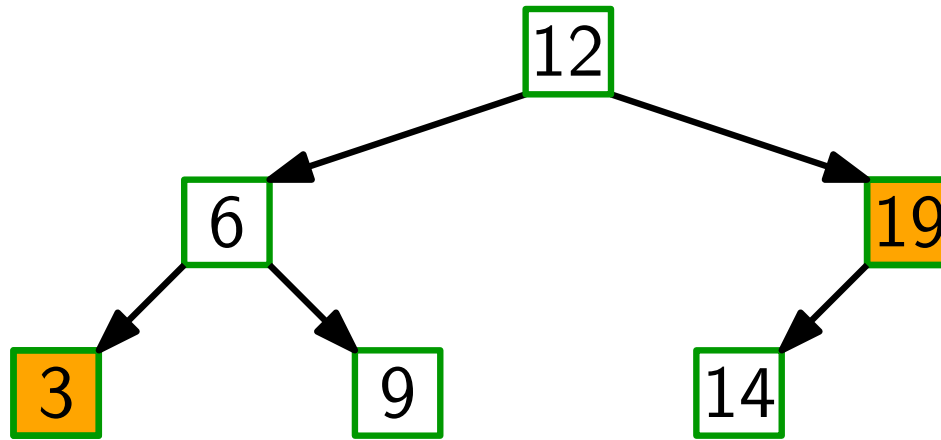
**Aufgabe:** Schreiben Sie für binäre Suchbäume die Methode

`Node Minimum(Node x = root)` — *iterativ!*

```
while x.left  $\neq$  nil do  
   $\quad$  x = x.left  
return x
```

# Minimum & Maximum

**Frage:** Was folgt aus der Binärer-Suchbaum-Eigenschaft für die Position von Min und Max im Baum?



**Antwort:** Min steht ganz links, Max ganz rechts!

**Aufgabe:** Schreiben Sie für binäre Suchbäume die Methode

`Node Minimum(Node x = root)` — *iterativ!*

**if**  $x == nil$  **then return**  $nil$

**while**  $x.left \neq nil$  **do**

└  $x = x.left$

**return**  $x$

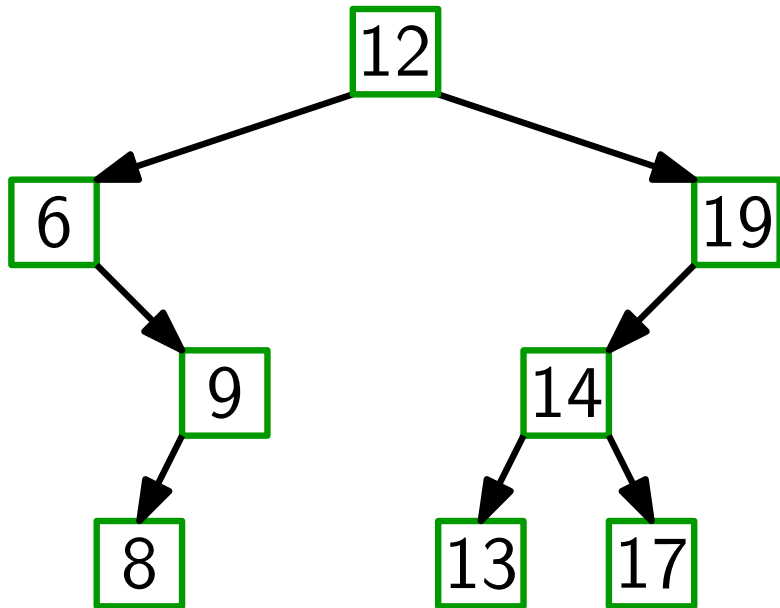
# Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.



# Nachfolger (und Vorgänger)

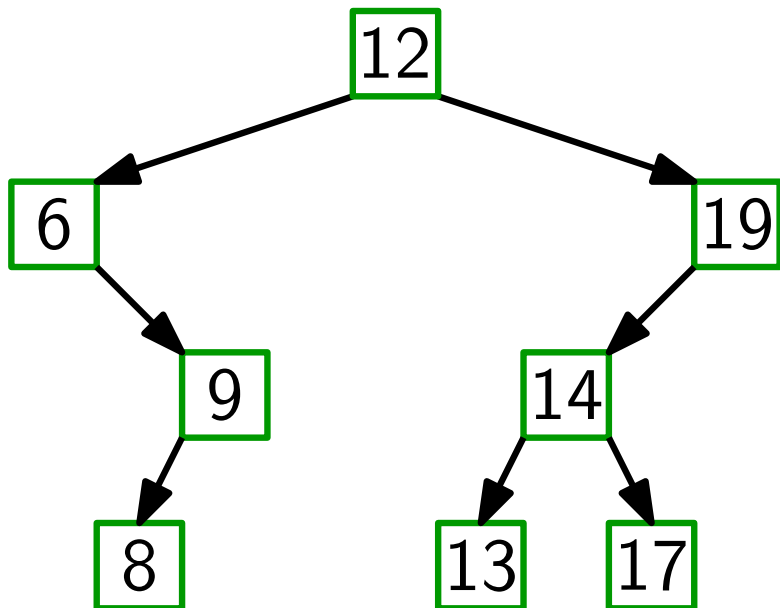
Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.



# Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

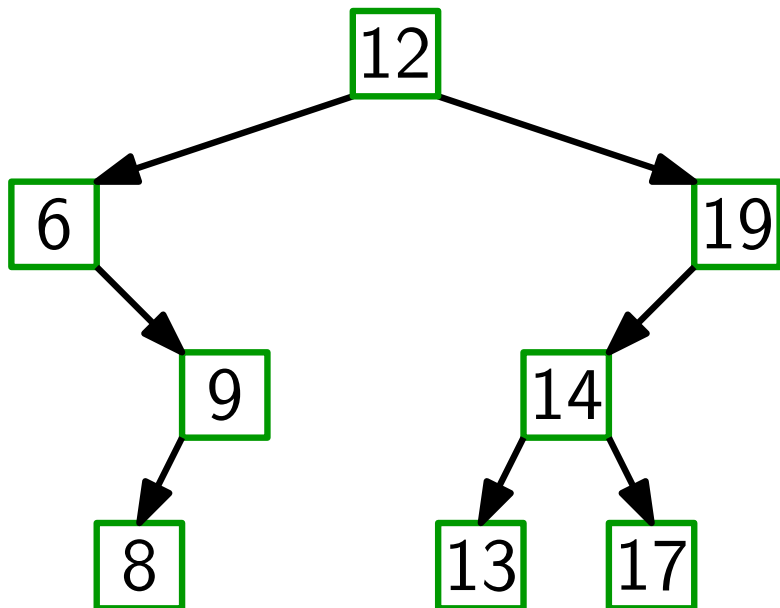
**Erinnerung:**  $\text{Nachfolger}(x) =$



# Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

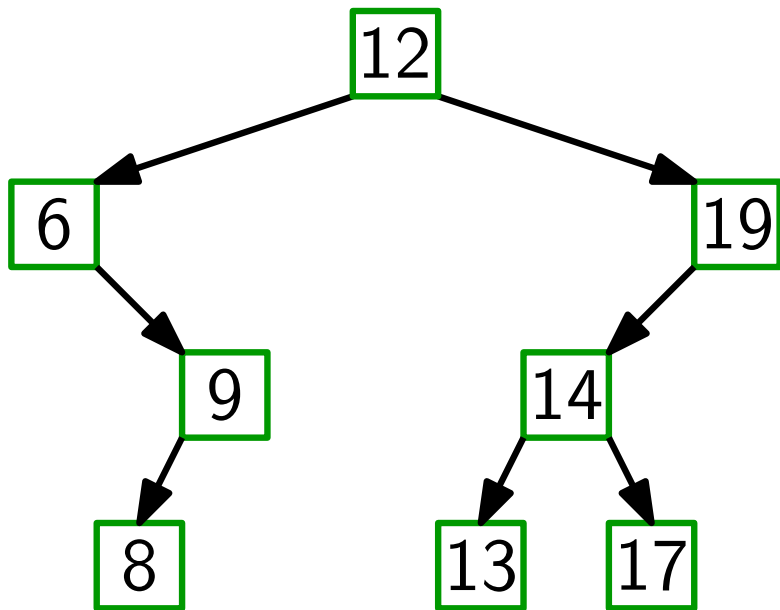
**Erinnerung:**  $\text{Nachfolger}(x) =$  Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen  $y$  mit  $y.\text{key} > x.\text{key}$ .



# Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

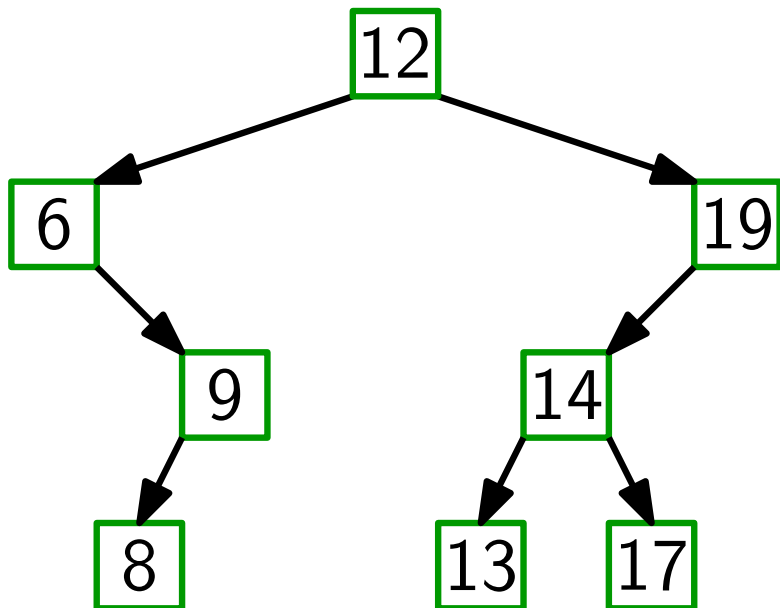
**Erinnerung:**  $\text{Nachfolger}(x) =$  Knoten mit kleinstem Schlüssel  
unter allen  $y$  mit  $y.\text{key} > x.\text{key}$ .  
 $= \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$



# Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

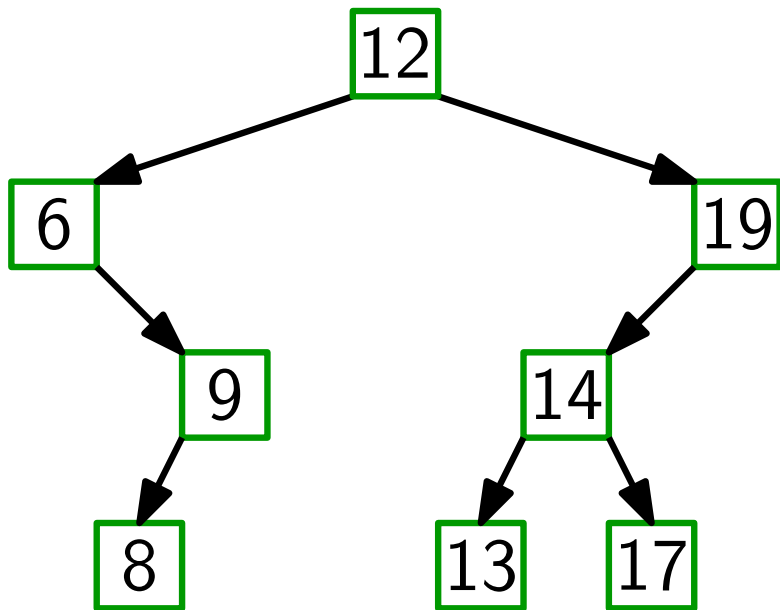
**Erinnerung:**  $\text{Nachfolger}(x) =$  Knoten mit kleinstem Schlüssel  
unter allen  $y$  mit  $y.\text{key} > x.\text{key}$ .  
 $= \arg \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$



# Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

**Erinnerung:**  $\text{Nachfolger}(x) = \text{Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen } y \text{ mit } y.\text{key} > x.\text{key}.$   
 $= \arg \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$

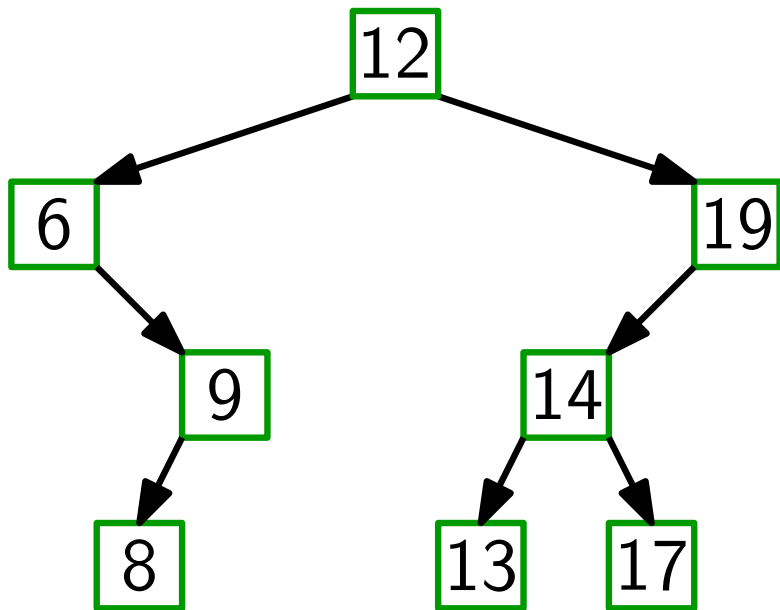


$\text{Nachfolger}(19) := \text{nil}$

# Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

**Erinnerung:**  $\text{Nachfolger}(x) = \text{Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen } y \text{ mit } y.\text{key} > x.\text{key}.$   
 $= \arg \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$



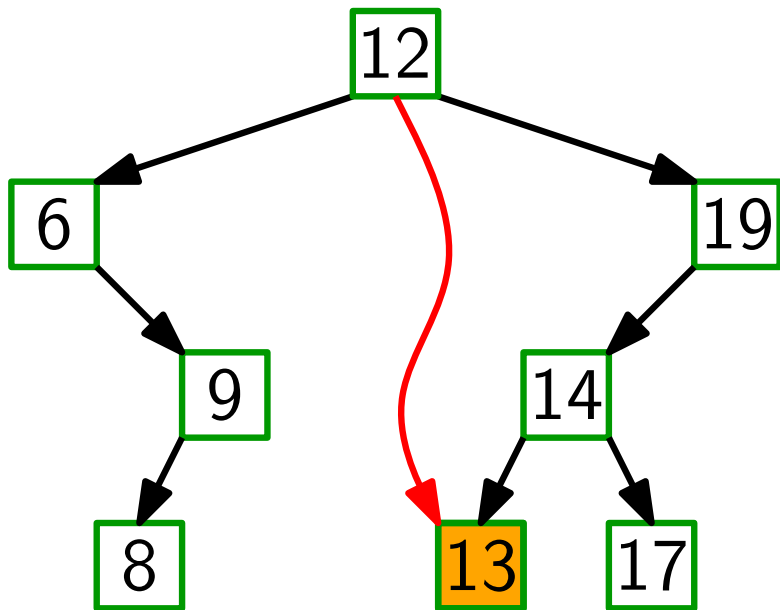
$\text{Nachfolger}(19) := \text{nil}$

$\text{Nachfolger}(12) = ?$

# Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

**Erinnerung:**  $\text{Nachfolger}(x) = \text{Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen } y \text{ mit } y.\text{key} > x.\text{key}.$   
 $= \arg \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$



$\text{Nachfolger}(19) := \text{nil}$

$\text{Nachfolger}(12) = ?$

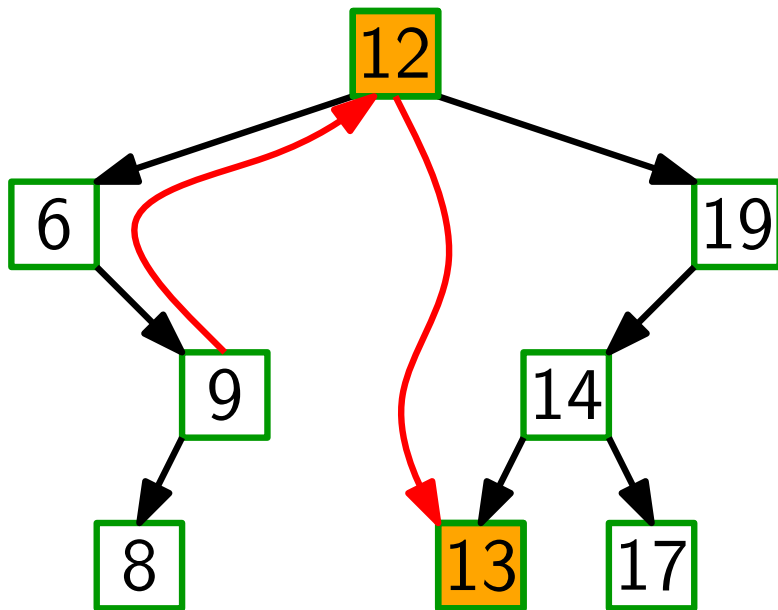
$13 == \text{Minimum}(„12.\text{right}“)$



# Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

**Erinnerung:**  $\text{Nachfolger}(x) = \text{Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen } y \text{ mit } y.\text{key} > x.\text{key}.$   
 $= \arg \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$



$\text{Nachfolger}(19) := \text{nil}$

$\text{Nachfolger}(12) = ?$

$\text{Nachfolger}(9) = ?$

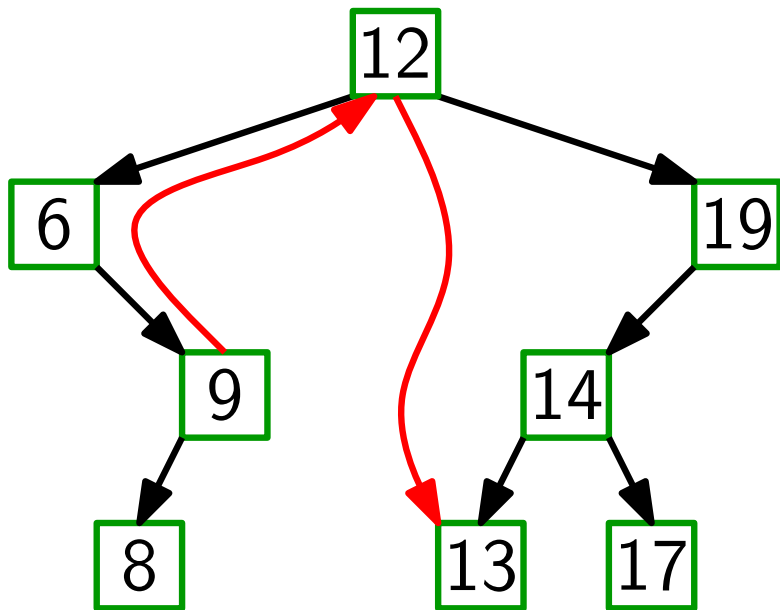
$13 == \text{Minimum}(„12.\text{right}“)$

9 hat kein rechtes Kind;  $9 == \text{Maximum}(„12.\text{left}“)$

# Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

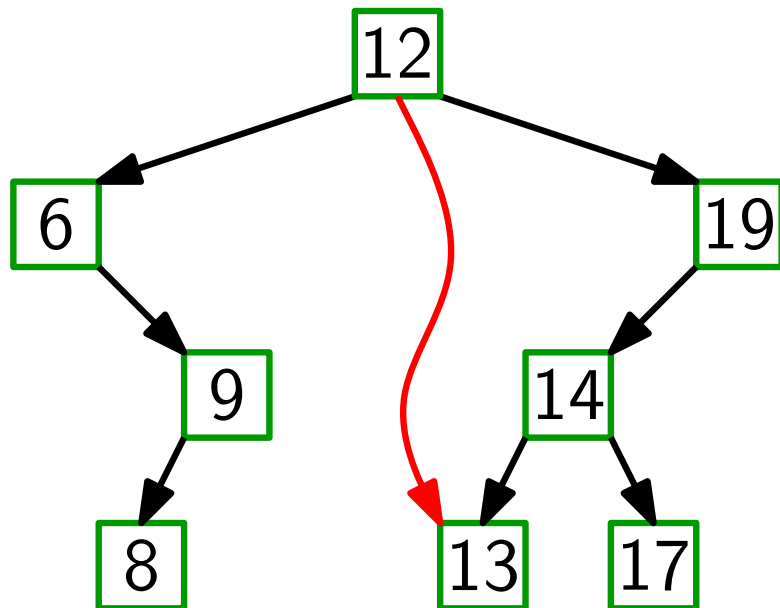
**Erinnerung:**  $\text{Nachfolger}(x) =$  Knoten mit kleinstem Schlüssel  
unter allen  $y$  mit  $y.\text{key} > x.\text{key}$ .  
 $= \arg \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$



# Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

**Erinnerung:**  $\text{Nachfolger}(x) = \text{Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen } y \text{ mit } y.\text{key} > x.\text{key}.$   
 $= \arg \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$



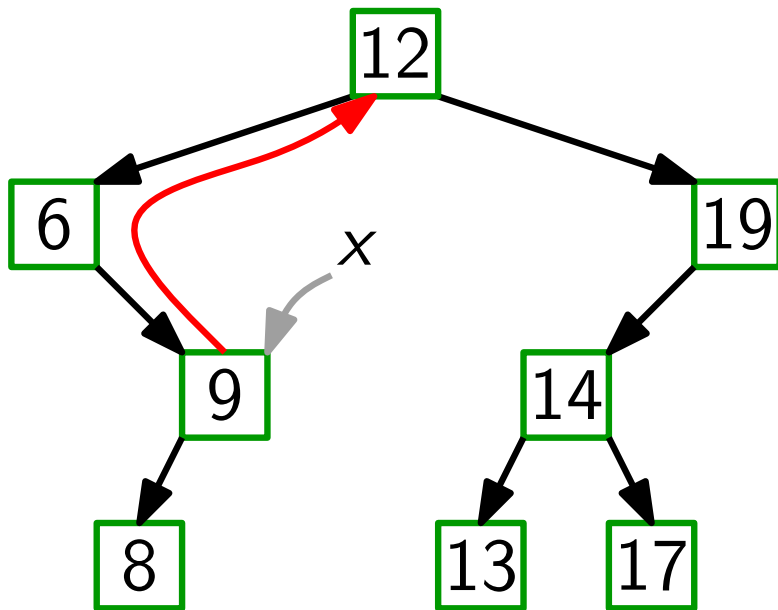
Node Successor(Node  $x$ )

```
if  $x.\text{right} \neq \text{nil}$  then  
  return Minimum( $x.\text{right}$ )
```

# Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

**Erinnerung:**  $\text{Nachfolger}(x) = \text{Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen } y \text{ mit } y.\text{key} > x.\text{key}.$   
 $= \arg \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$

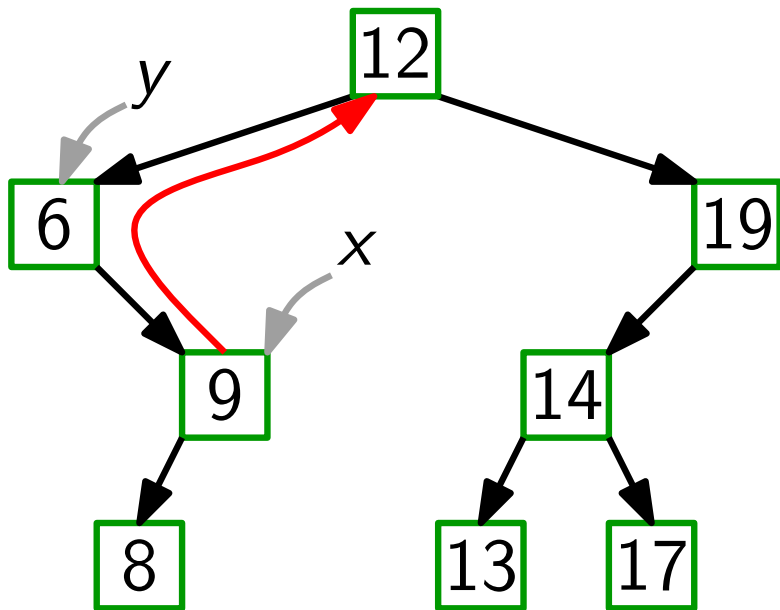


Node Successor(Node  $x$ )

```

if  $x.\text{right} \neq \text{nil}$  then
  | return Minimum( $x.\text{right}$ )
 $y = x.p$ 
while  $y \neq \text{nil}$  and  $x == y.\text{right}$  do
  |  $x = y$ 
  |  $y = y.p$ 
return  $y$ 
  
```

**Erinnerung:**  $\text{Nachfolger}(x) =$  Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen  $y$  mit  $y.key > x.key$ .  
 $= \arg \min_y \{y.key \mid y.key > x.key\}.$



## Node Successor(Node x)

```
if  $x.right \neq nil$  then  
|   return Minimum( $x.right$ )
```

$$y = x.p$$

```
while  $y \neq nil$  and  $x == y.right$  do
```

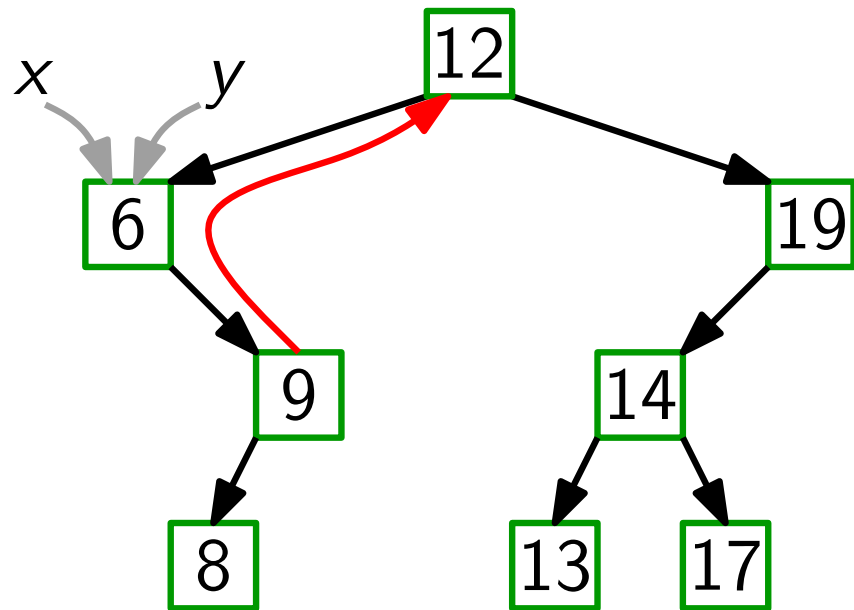
$$\begin{array}{l} x = y \\ y = y.p \end{array}$$

```
return y
```

# Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

**Erinnerung:**  $\text{Nachfolger}(x) = \text{Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen } y \text{ mit } y.\text{key} > x.\text{key}.$   
 $= \arg \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$



Node Successor(Node  $x$ )

**if**  $x.\text{right} \neq \text{nil}$  **then**

└ **return** Minimum( $x.\text{right}$ )

$y = x.p$

**while**  $y \neq \text{nil}$  **and**  $x == y.\text{right}$  **do**

└  $x = y$

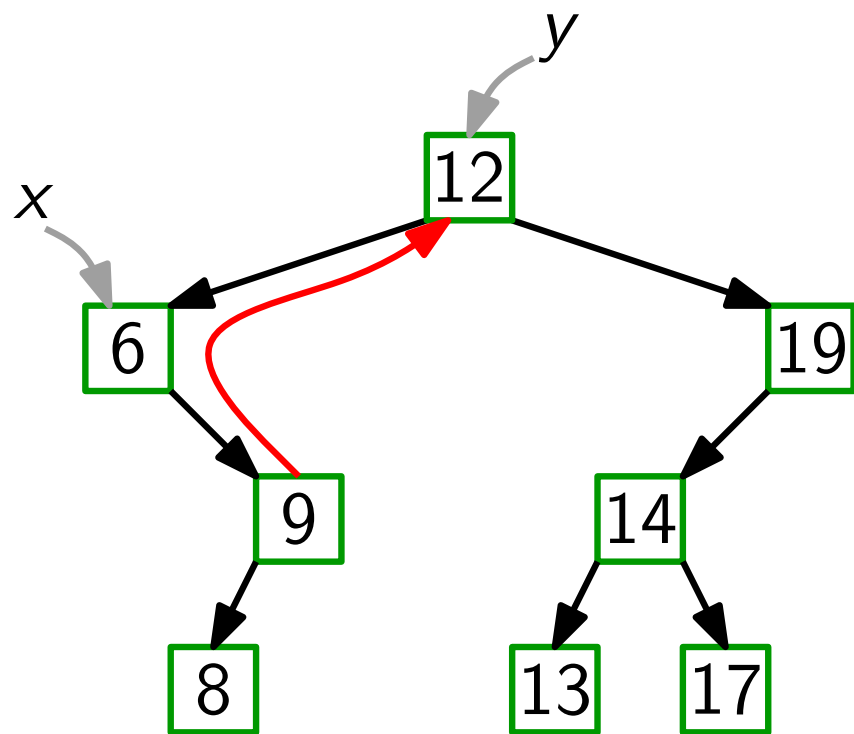
└  $y = y.p$

**return**  $y$

# Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

**Erinnerung:**  $\text{Nachfolger}(x) = \text{Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen } y \text{ mit } y.\text{key} > x.\text{key}.$   
 $= \arg \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$



Node Successor(Node  $x$ )

**if**  $x.\text{right} \neq \text{nil}$  **then**  
     **return** Minimum( $x.\text{right}$ )

$y = x.p$

**while**  $y \neq \text{nil}$  **and**  $x == y.\text{right}$  **do**

$x = y$

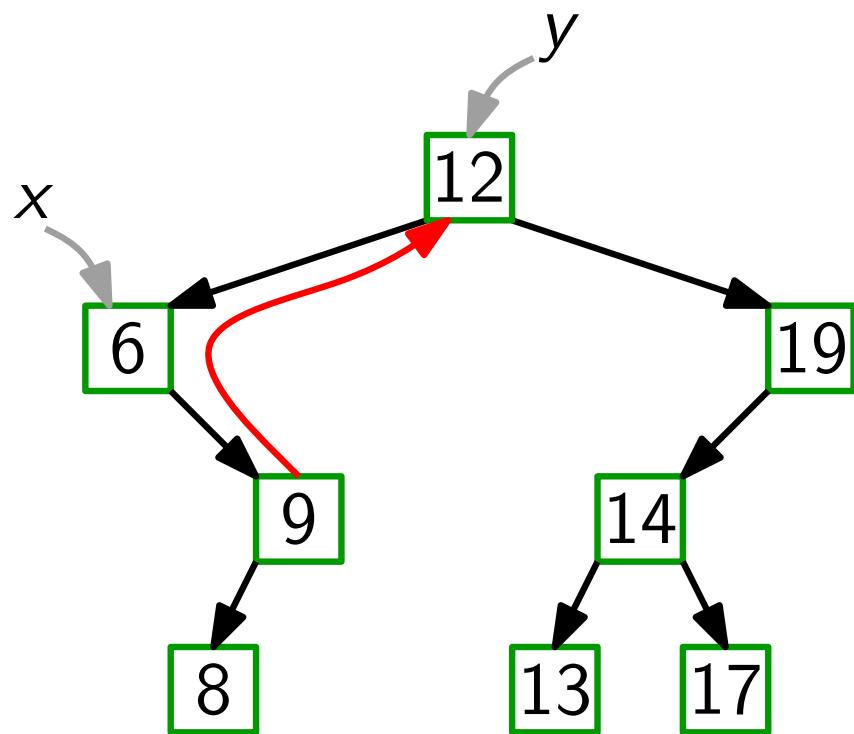
$y = y.p$

**return**  $y$

# Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

**Erinnerung:**  $\text{Nachfolger}(x) = \text{Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen } y \text{ mit } y.\text{key} > x.\text{key}.$   
 $= \arg \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$



Node Successor(Node  $x$ )

**if**  $x.\text{right} \neq \text{nil}$  **then**  
 └ **return** Minimum( $x.\text{right}$ )

$y = x.p$

**while**  $y \neq \text{nil}$  **and**  $x == y.\text{right}$  **do**

└  $x = y$

└  $y = y.p$

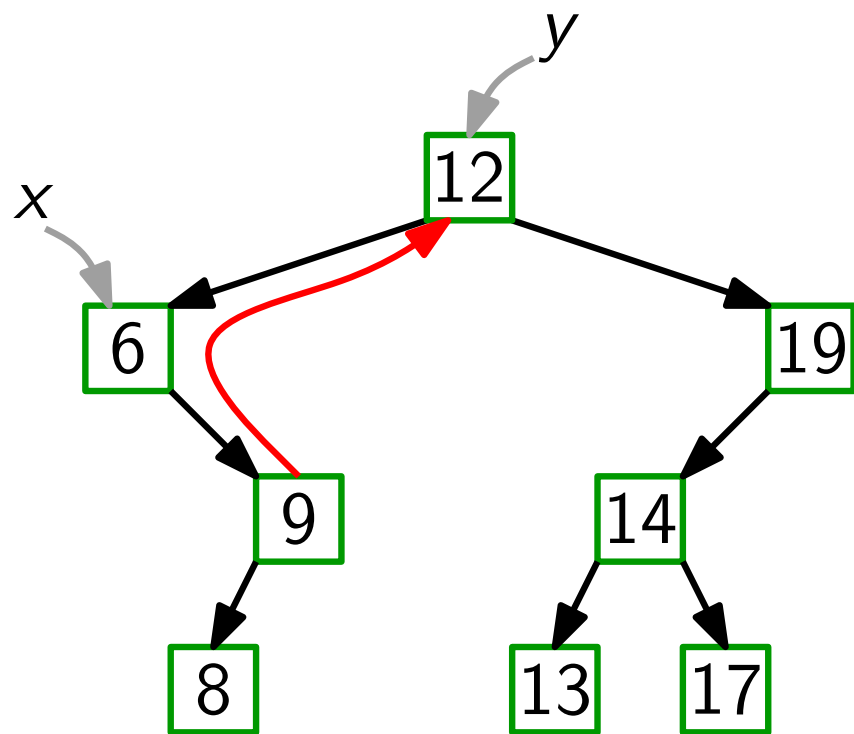
**return**  $y$



# Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

**Erinnerung:**  $\text{Nachfolger}(x) = \text{Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen } y \text{ mit } y.\text{key} > x.\text{key}.$   
 $= \arg \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$



Node Successor(Node  $x$ )

**if**  $x.\text{right} \neq \text{nil}$  **then**  
     **return** Minimum( $x.\text{right}$ )

$y = x.p$

**while**  $y \neq \text{nil}$  **and**  $x == y.\text{right}$  **do**

$x = y$

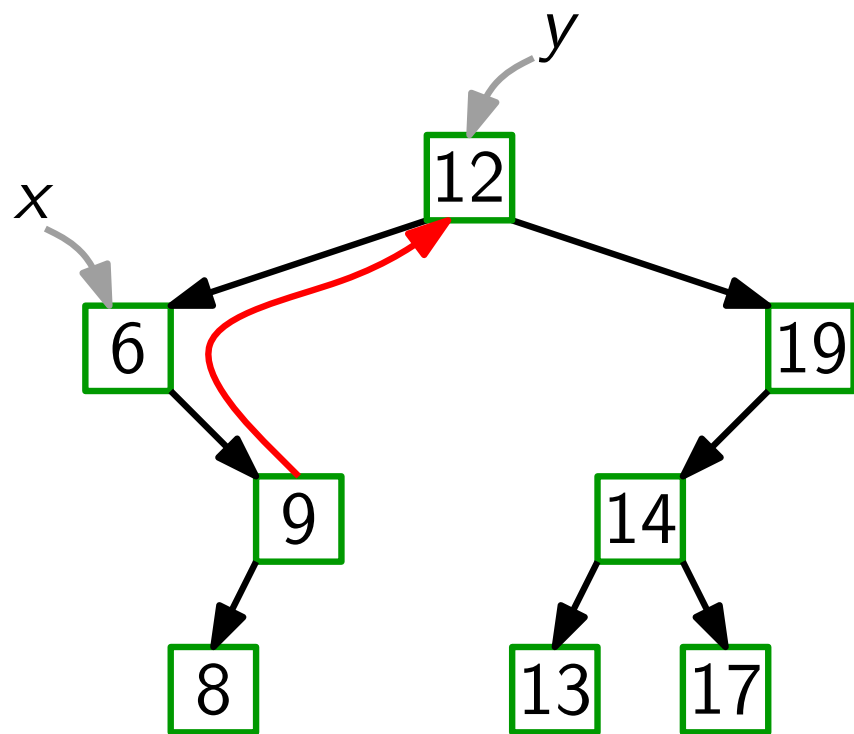
$y = y.p$

**return**  $y$

# Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

**Erinnerung:**  $\text{Nachfolger}(x) = \text{Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen } y \text{ mit } y.\text{key} > x.\text{key}.$   
 $= \arg \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$



*Tipp:* Probieren Sie auch  
 z.B.  $\text{Successor}("19")$ !

Node Successor(Node  $x$ )

**if**  $x.\text{right} \neq \text{nil}$  **then**

└ **return** Minimum( $x.\text{right}$ )

$y = x.p$

**while**  $y \neq \text{nil}$  **and**  $x == y.\text{right}$  **do**

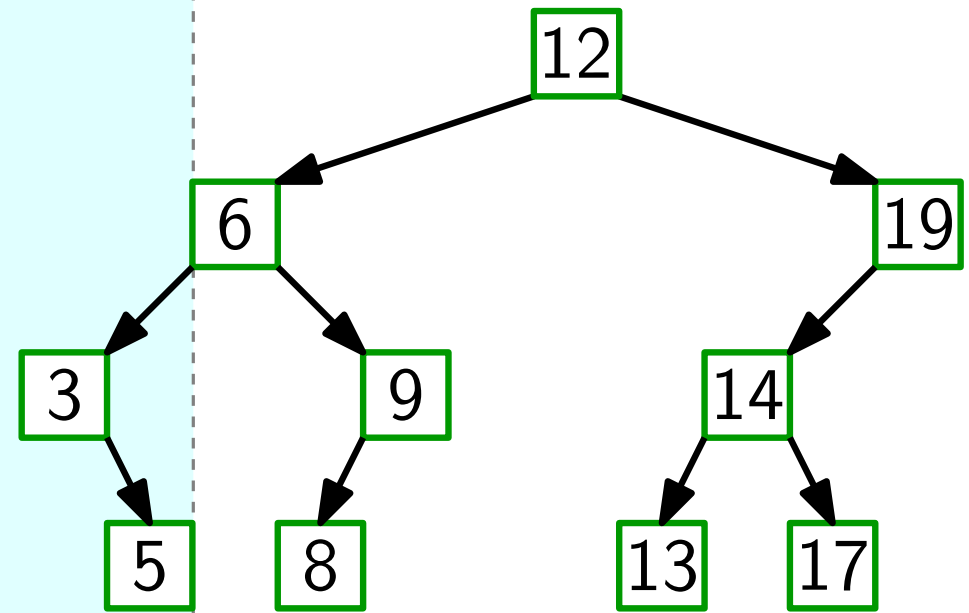
└  $x = y$

└  $y = y.p$

**return**  $y$

# Einfügen

Node Insert(key  $k$ )



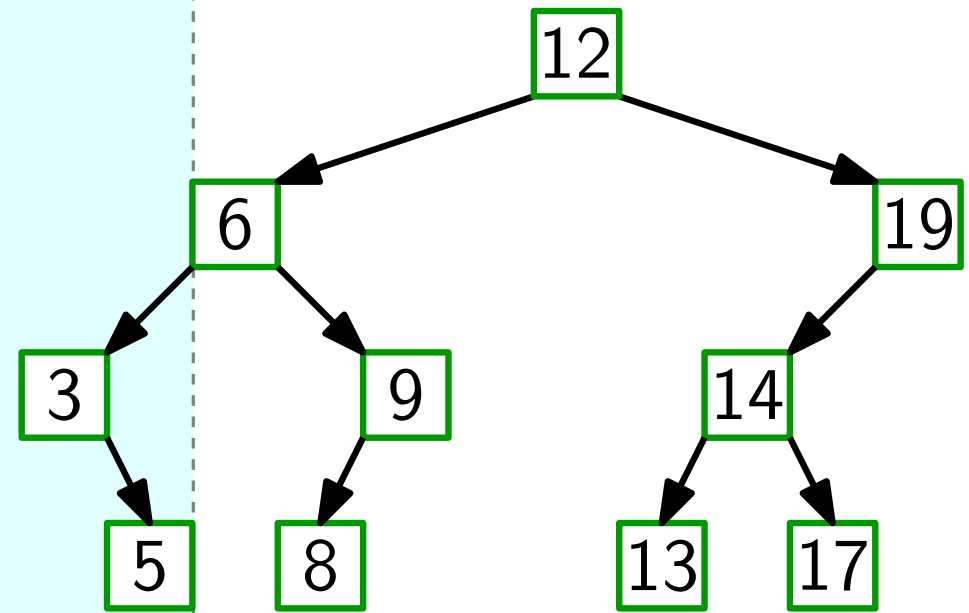
Insert(11)

# Einfügen

Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$



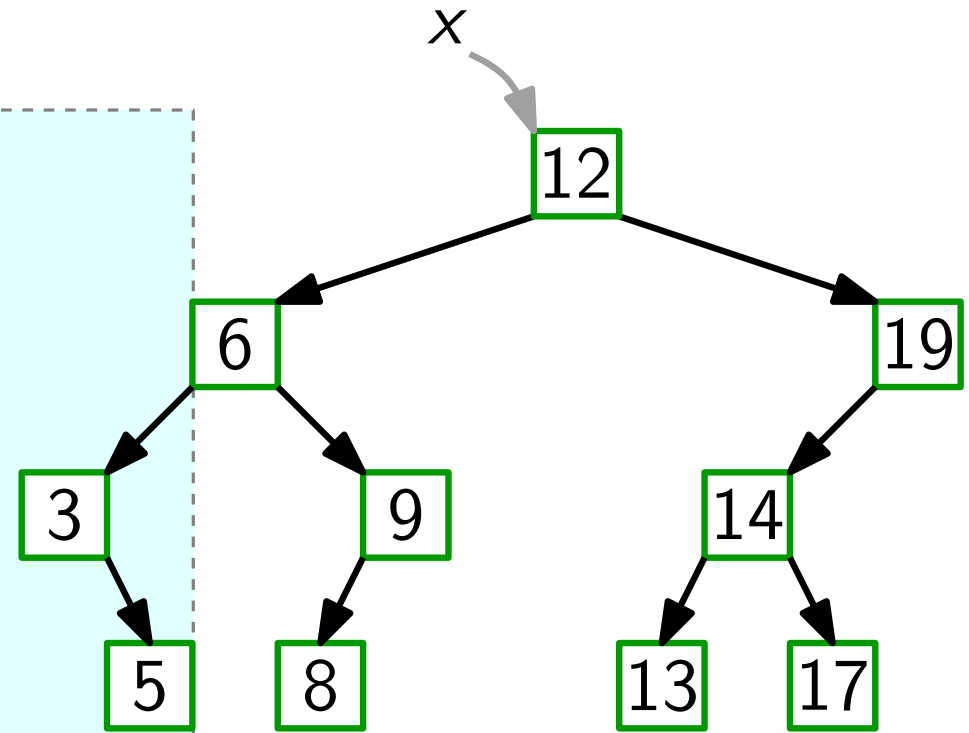
Insert(11)

# Einfügen

Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$



Insert(11)

# Einfügen

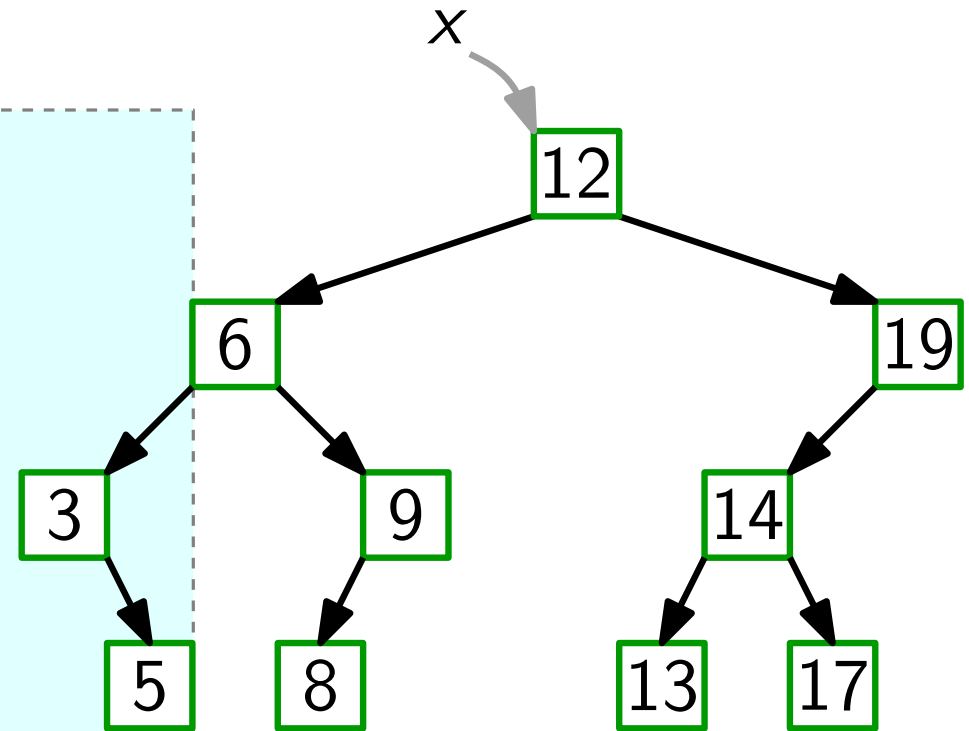
Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$

**while**  $x \neq nil$  **do**

$y = x$



Insert(11)

# Einfügen

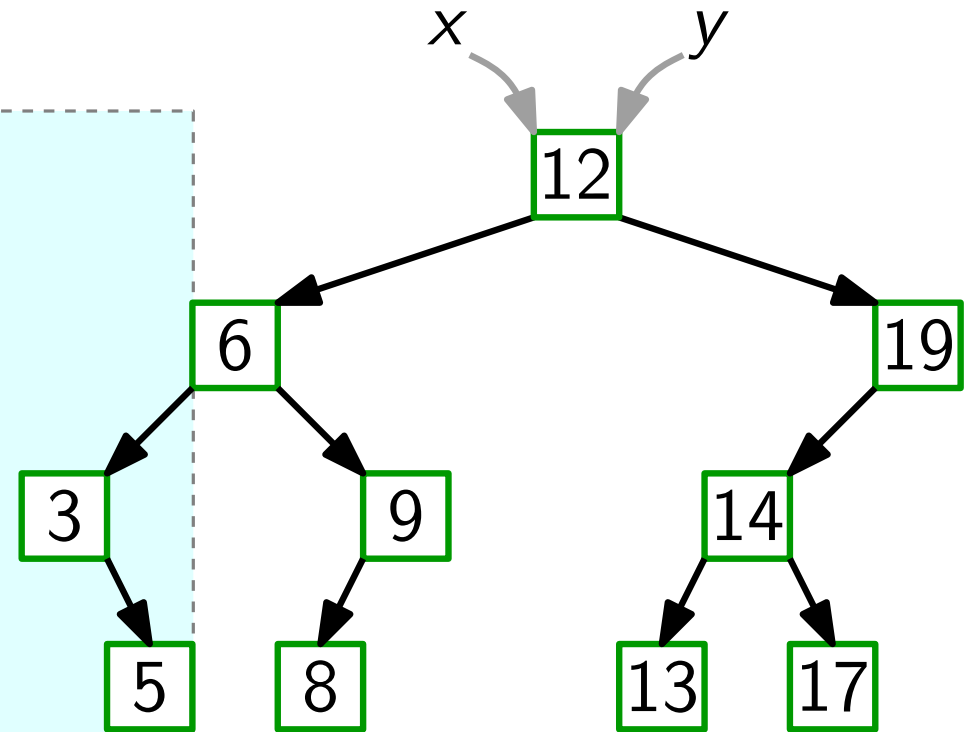
Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$

**while**  $x \neq nil$  **do**

$y = x$



Insert(11)

# Einfügen

Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$

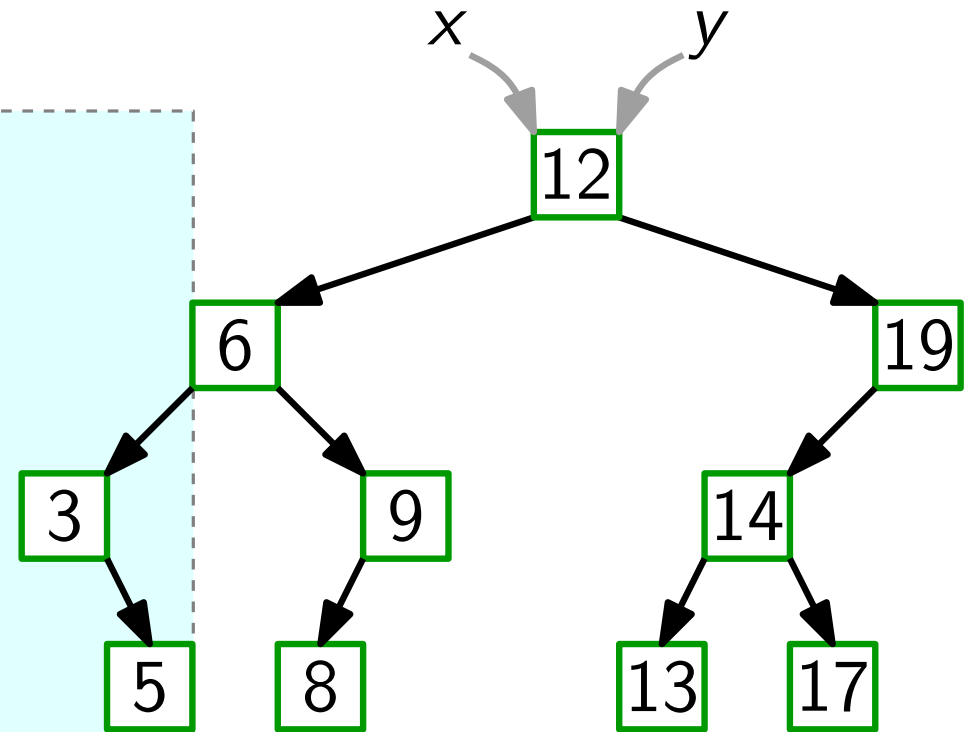
**while**  $x \neq nil$  **do**

$y = x$

**if**  $k < x.key$  **then**

$x = x.left$

**else**  $x = x.right$



Insert(11)



# Einfügen

Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$

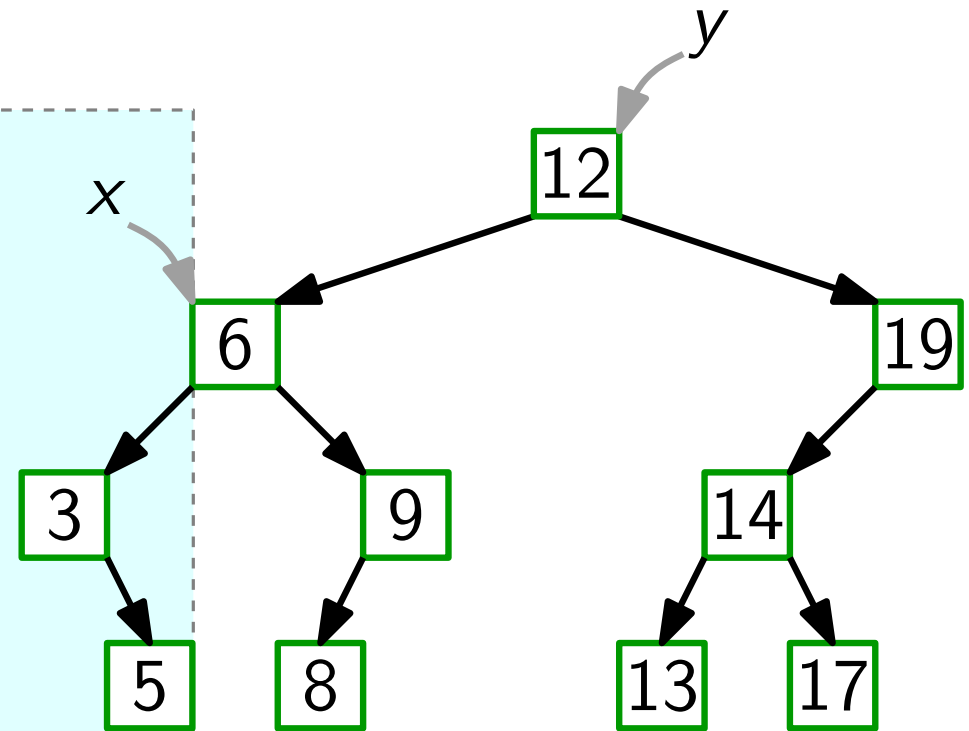
**while**  $x \neq nil$  **do**

$y = x$

**if**  $k < x.key$  **then**

$x = x.left$

**else**  $x = x.right$



Insert(11)

# Einfügen

Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$

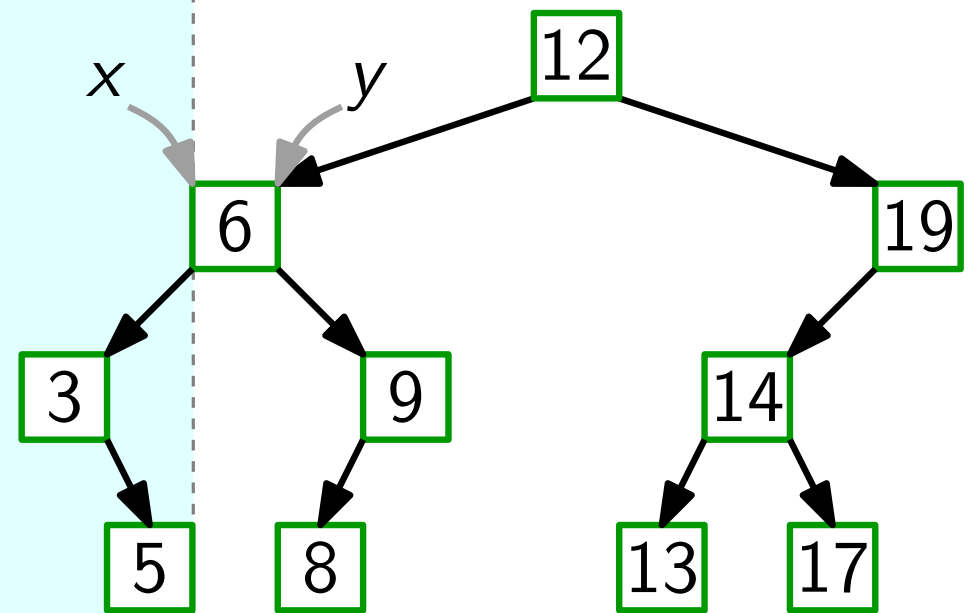
**while**  $x \neq nil$  **do**

$y = x$

**if**  $k < x.key$  **then**

$x = x.left$

**else**  $x = x.right$



Insert(11)

# Einfügen

Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$

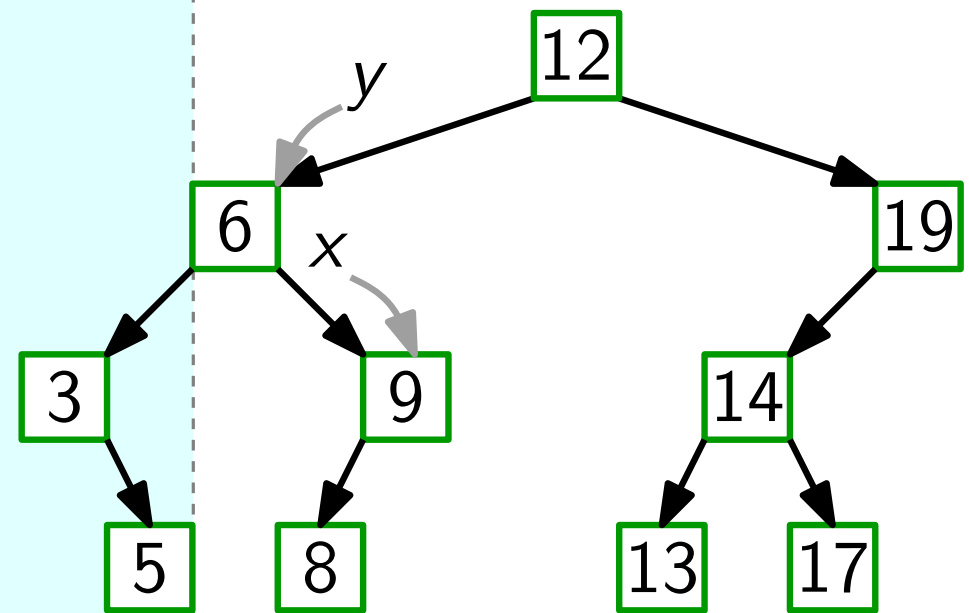
**while**  $x \neq nil$  **do**

$y = x$

**if**  $k < x.key$  **then**

$x = x.left$

**else**  $x = x.right$



Insert(11)

# Einfügen

Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$

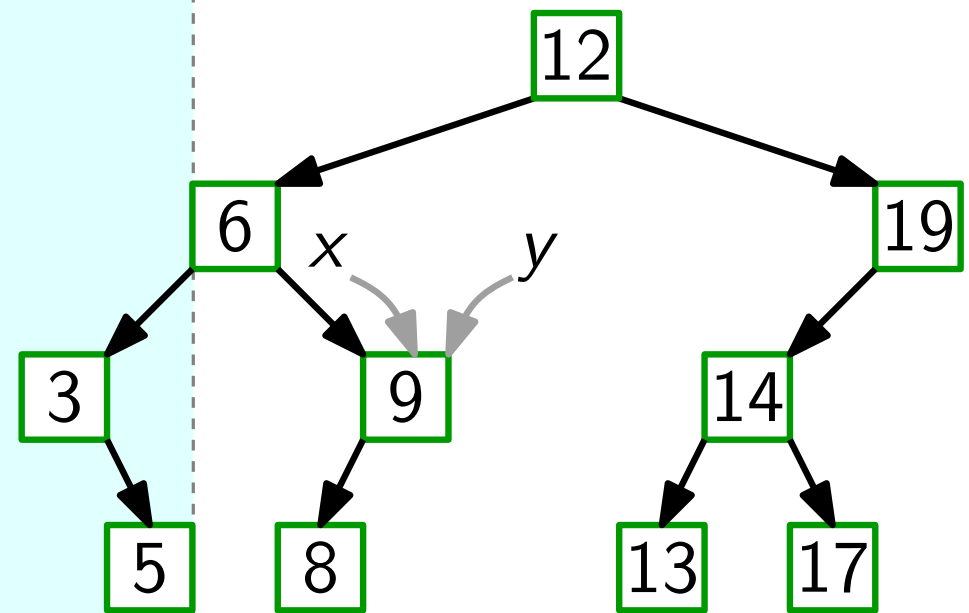
**while**  $x \neq nil$  **do**

$y = x$

**if**  $k < x.key$  **then**

$x = x.left$

**else**  $x = x.right$



Insert(11)

# Einfügen

Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$

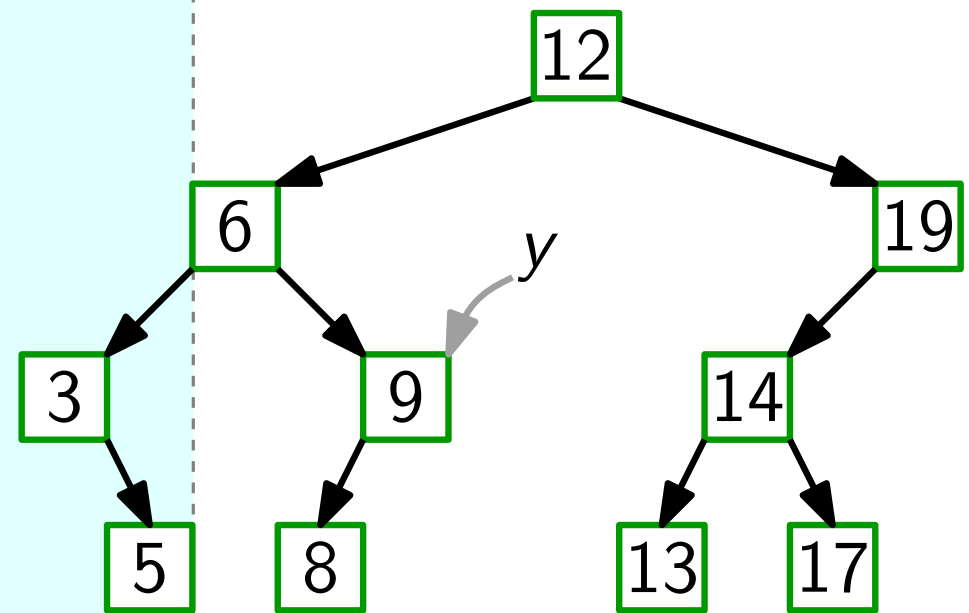
**while**  $x \neq nil$  **do**

$y = x$

**if**  $k < x.key$  **then**

$x = x.left$

**else**  $x = x.right$



Insert(11)

$x == nil$

# Einfügen

Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$

**while**  $x \neq nil$  **do**

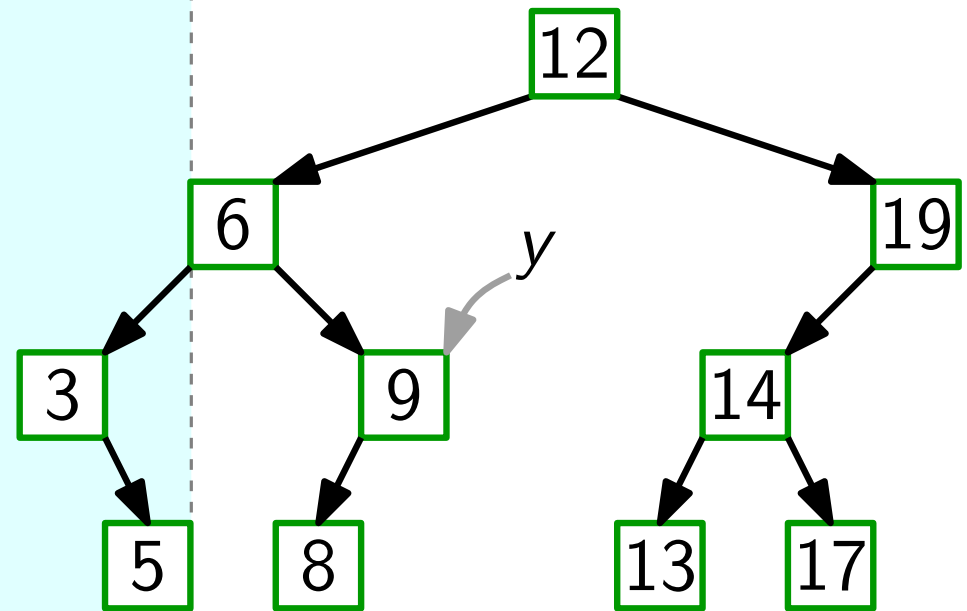
$y = x$

**if**  $k < x.key$  **then**

$x = x.left$

**else**  $x = x.right$

$z = \text{new Node}(k, y)$



Insert(11)

$x == nil$

# Einfügen

Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$

**while**  $x \neq nil$  **do**

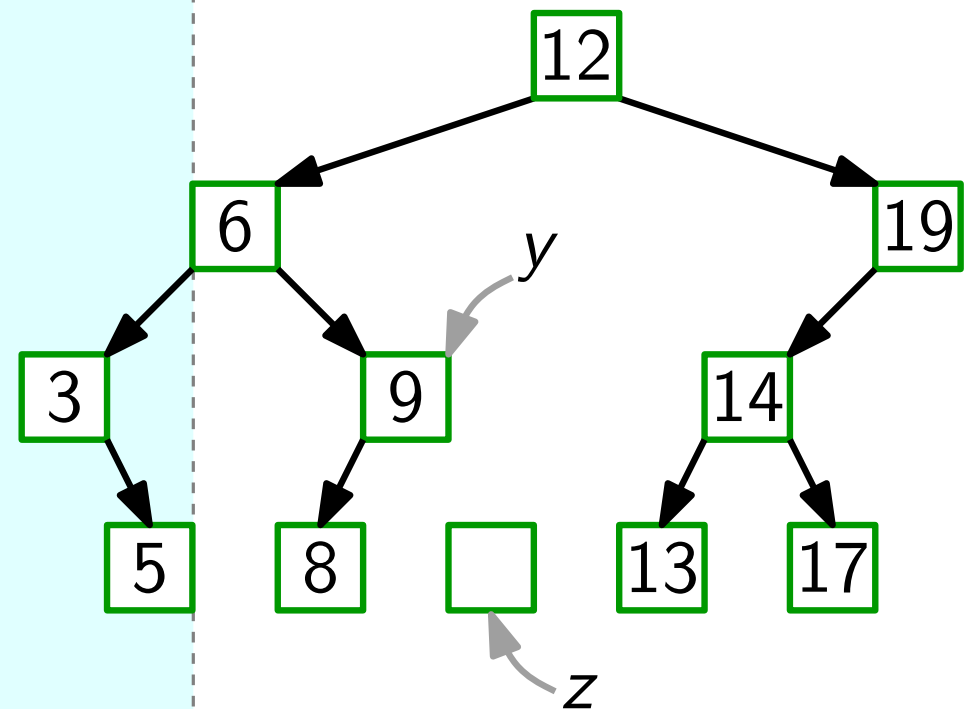
$y = x$

**if**  $k < x.key$  **then**

$x = x.left$

**else**  $x = x.right$

$z = \text{new Node}(k, y)$



Insert(11)

$x == nil$

# Einfügen

Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$

**while**  $x \neq nil$  **do**

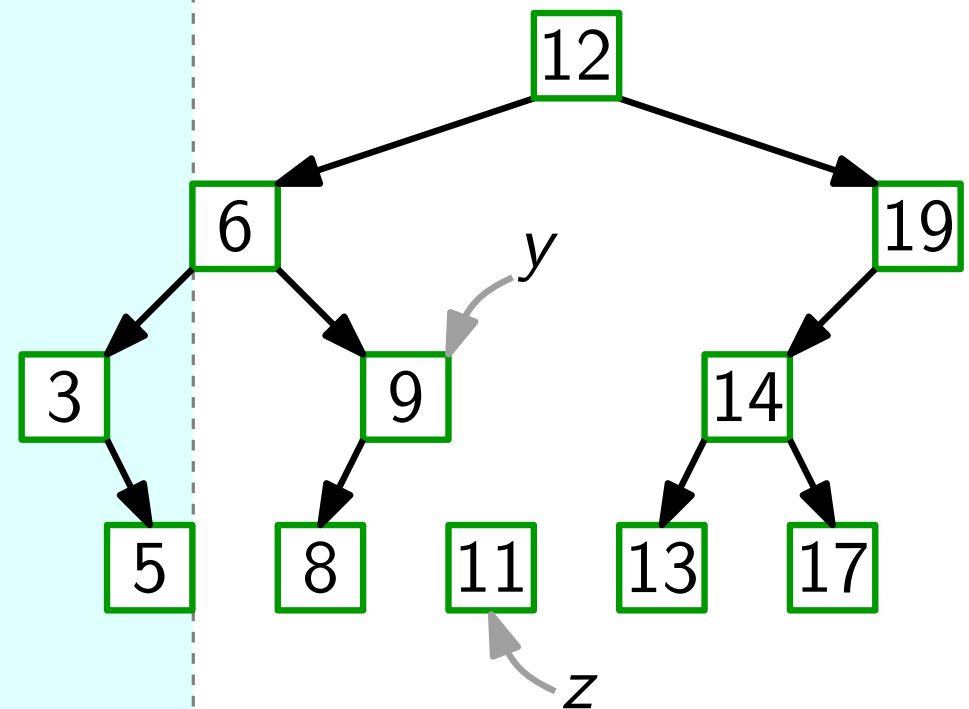
$y = x$

**if**  $k < x.key$  **then**

$x = x.left$

**else**  $x = x.right$

$z = \text{new Node}(k, y)$



Insert(11)

$x == nil$



# Einfügen

Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$

**while**  $x \neq nil$  **do**

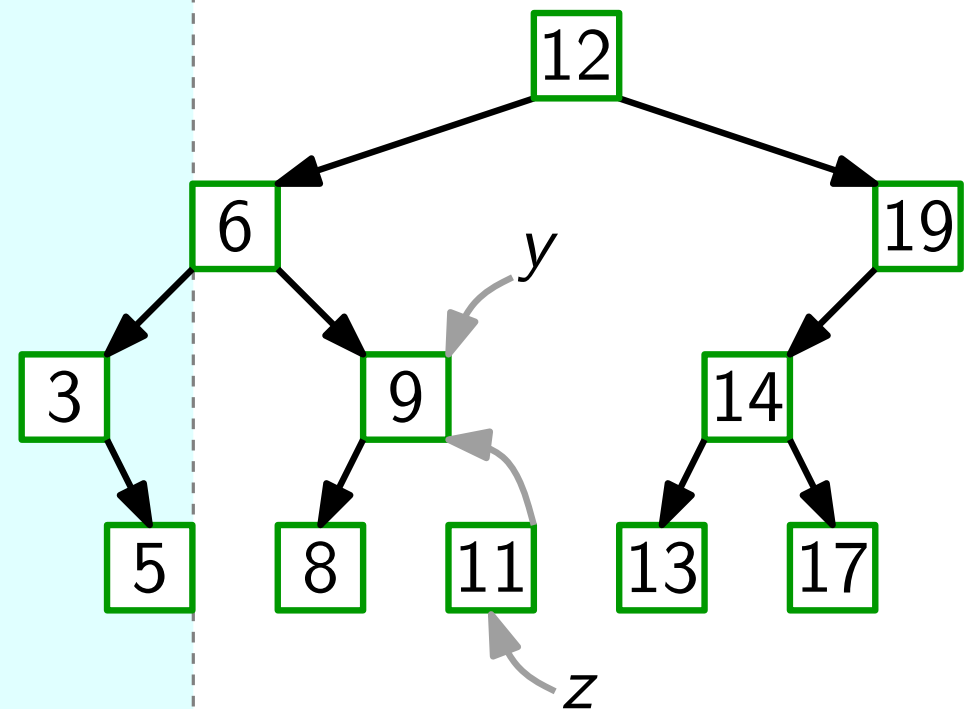
$y = x$

**if**  $k < x.key$  **then**

$x = x.left$

**else**  $x = x.right$

$z = \text{new Node}(k, y)$



Insert(11)

$x == nil$

# Einfügen

Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$

**while**  $x \neq nil$  **do**

$y = x$

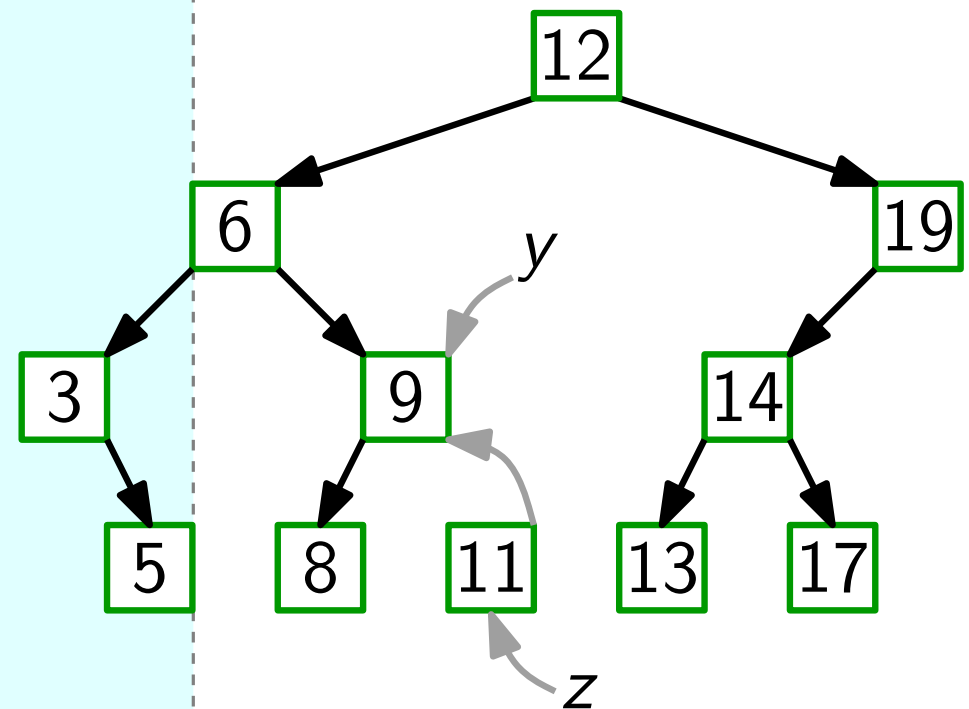
**if**  $k < x.key$  **then**

$x = x.left$

**else**  $x = x.right$

$z = \text{new Node}(k, y)$

**if**  $y == nil$  **then**  $root = z$



Insert(11)

$x == nil$

# Einfügen

Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$

**while**  $x \neq nil$  **do**

$y = x$

**if**  $k < x.key$  **then**

$x = x.left$

**else**  $x = x.right$

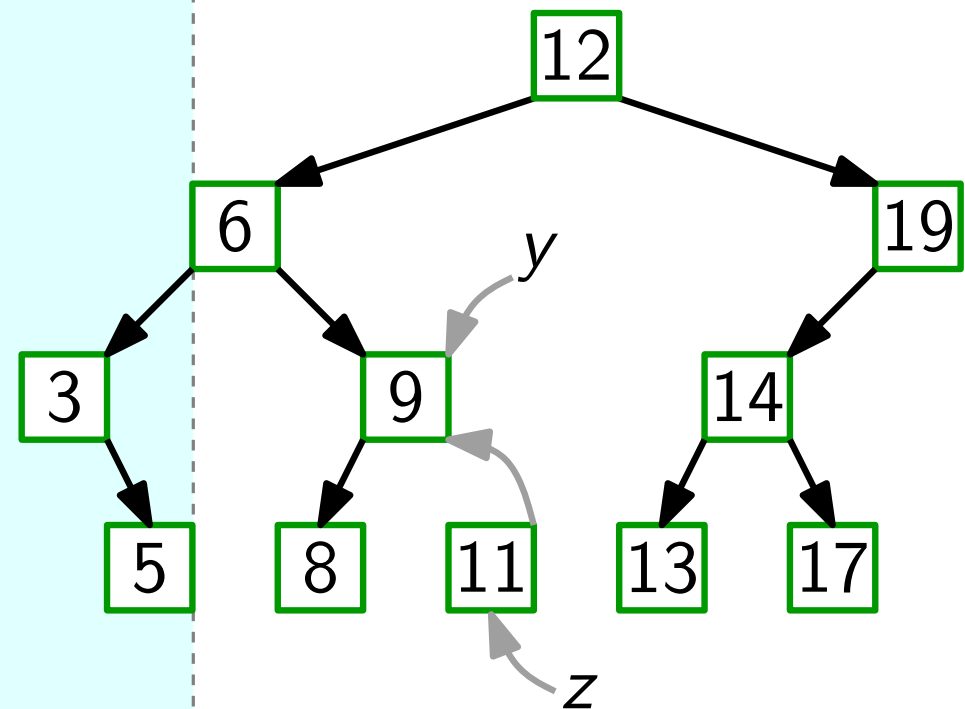
$z = \text{new Node}(k, y)$

**if**  $y == nil$  **then**  $root = z$

**else**

**if**  $k < y.key$  **then**  $y.left = z$

**else**  $y.right = z$



Insert(11)

$x == nil$

# Einfügen

Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$

**while**  $x \neq nil$  **do**

$y = x$

**if**  $k < x.key$  **then**

$x = x.left$

**else**  $x = x.right$

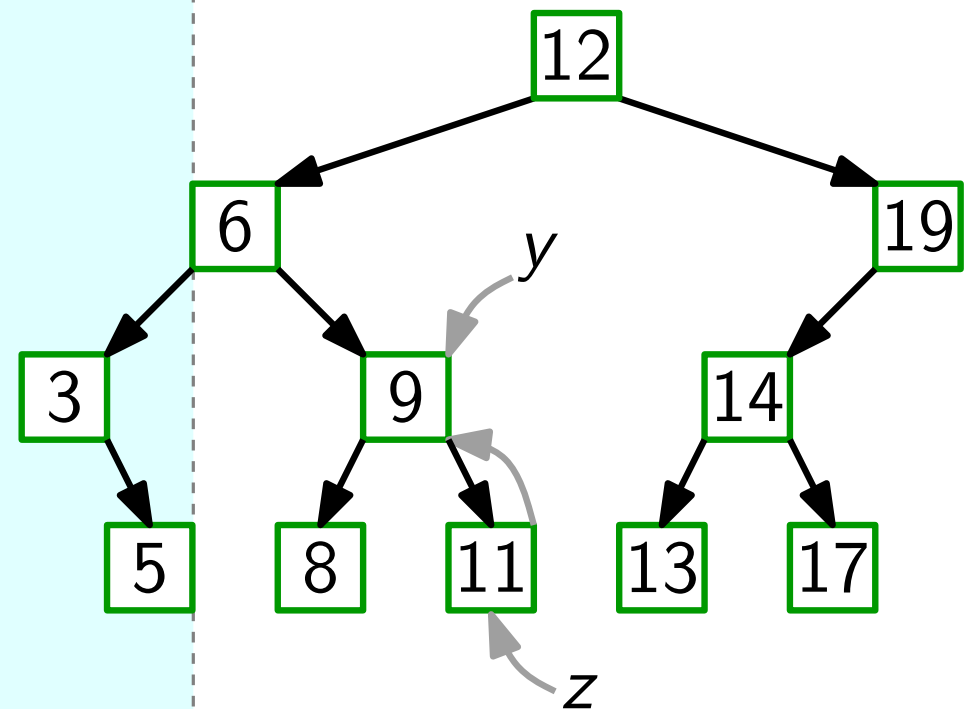
$z = \text{new Node}(k, y)$

**if**  $y == nil$  **then**  $root = z$

**else**

**if**  $k < y.key$  **then**  $y.left = z$

**else**  $y.right = z$



Insert(11)

$x == nil$

# Einfügen

Node Insert(key  $k$ )

$y = nil$

$x = root$

**while**  $x \neq nil$  **do**

$y = x$

**if**  $k < x.key$  **then**

$x = x.left$

**else**  $x = x.right$

$z = \text{new Node}(k, y)$

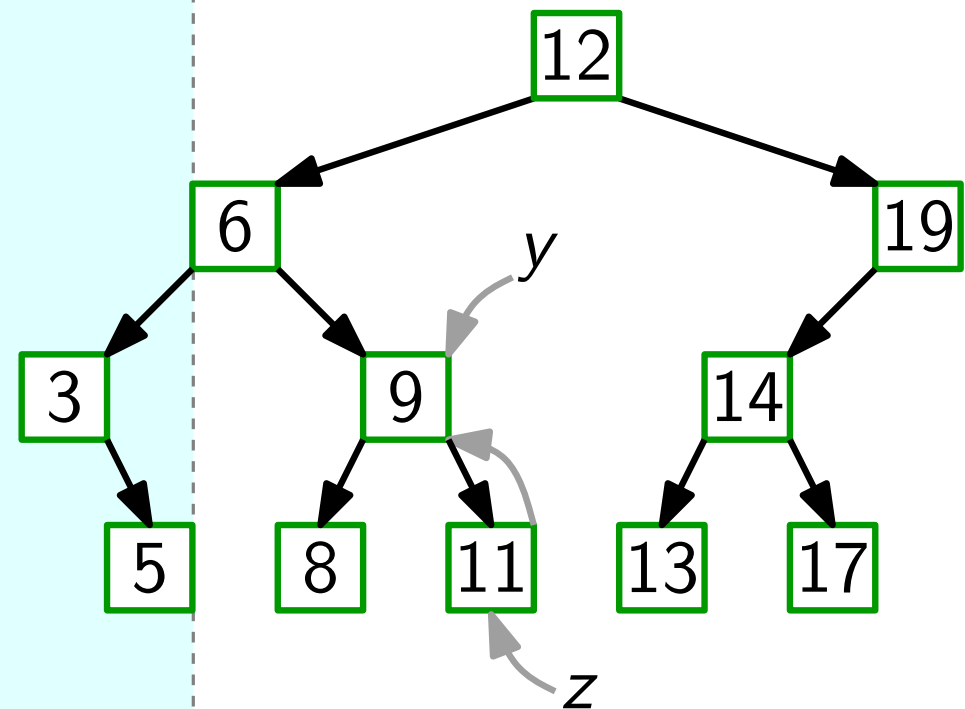
**if**  $y == nil$  **then**  $root = z$

**else**

**if**  $k < y.key$  **then**  $y.left = z$

**else**  $y.right = z$

**return**  $z$



Insert(11)

$x == nil$

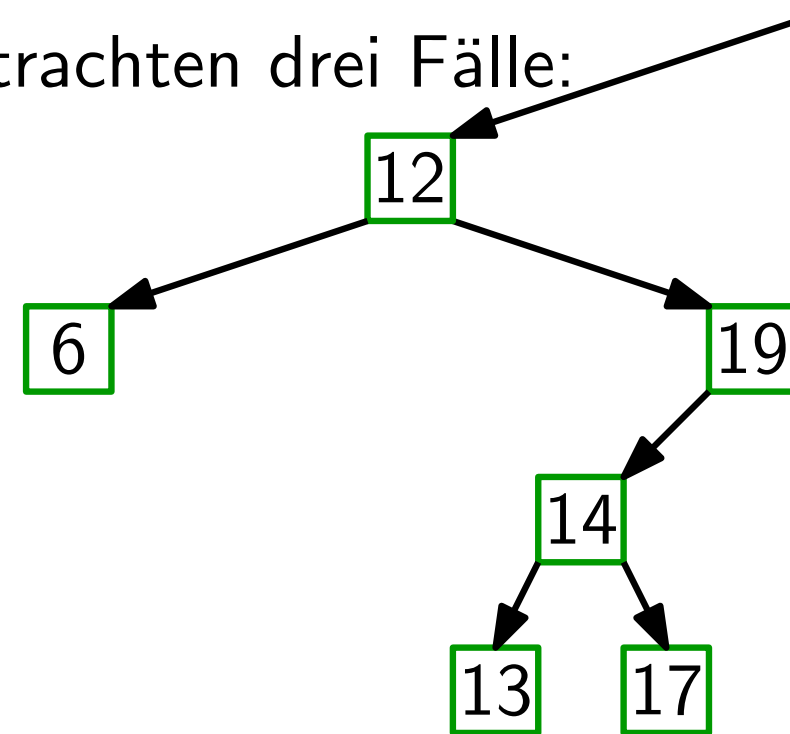
# Löschen

Sei  $z$  der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1.  $z$  hat keine Kinder.

2.  $z$  hat ein Kind  $x$ .

3.  $z$  hat zwei Kinder.



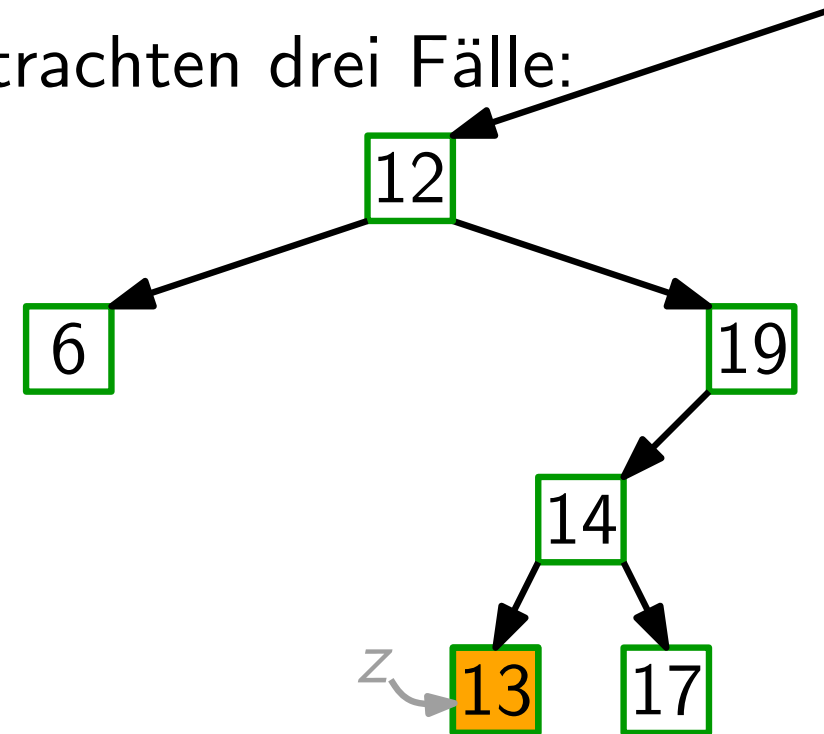
# Löschen

Sei  $z$  der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

**1.**  $z$  hat keine Kinder.

**2.**  $z$  hat ein Kind  $x$ .

**3.**  $z$  hat zwei Kinder.



# Löschen

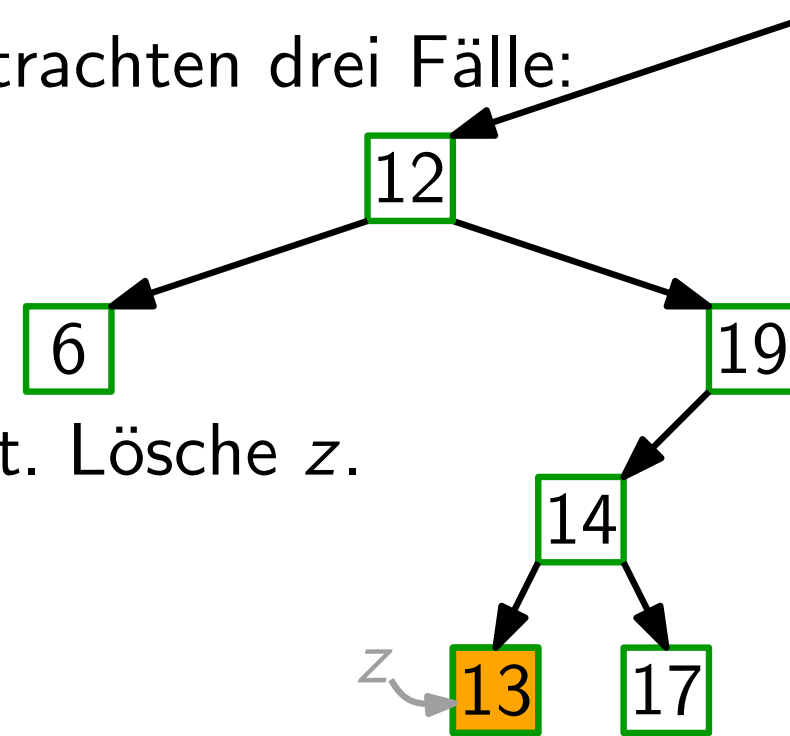
Sei  $z$  der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

**1.**  $z$  hat keine Kinder.

Falls  $z$  linkes Kind von  $z.p$  ist,  
setze  $z.p.left = nil$ ; sonst umgekehrt. Lösche  $z$ .

**2.**  $z$  hat ein Kind  $x$ .

**3.**  $z$  hat zwei Kinder.





# Löschen

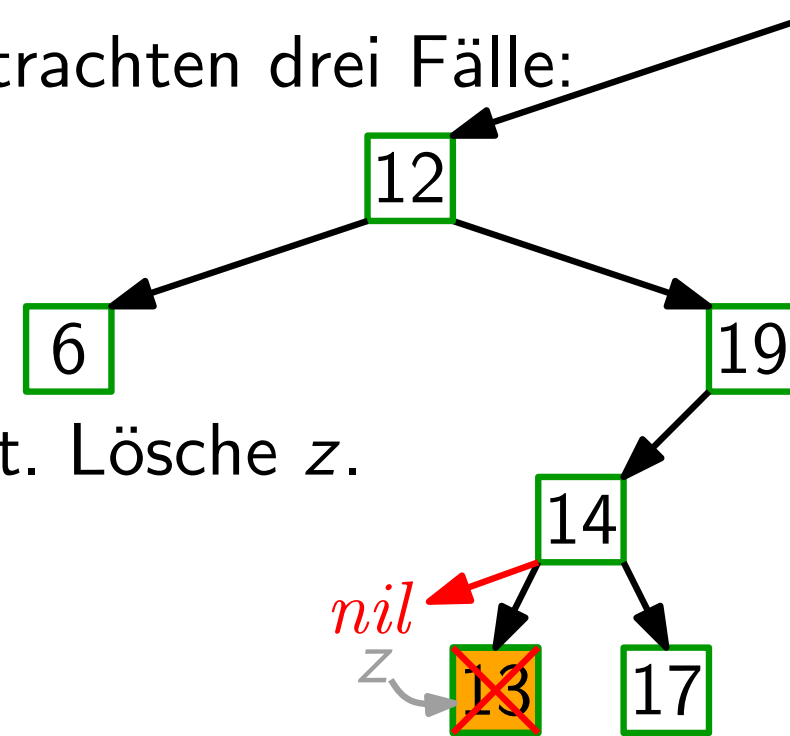
Sei  $z$  der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

**1.**  $z$  hat keine Kinder.

Falls  $z$  linkes Kind von  $z.p$  ist,  
setze  $z.p.left = nil$ ; sonst umgekehrt. Lösche  $z$ .

**2.**  $z$  hat ein Kind  $x$ .

**3.**  $z$  hat zwei Kinder.



# Löschen

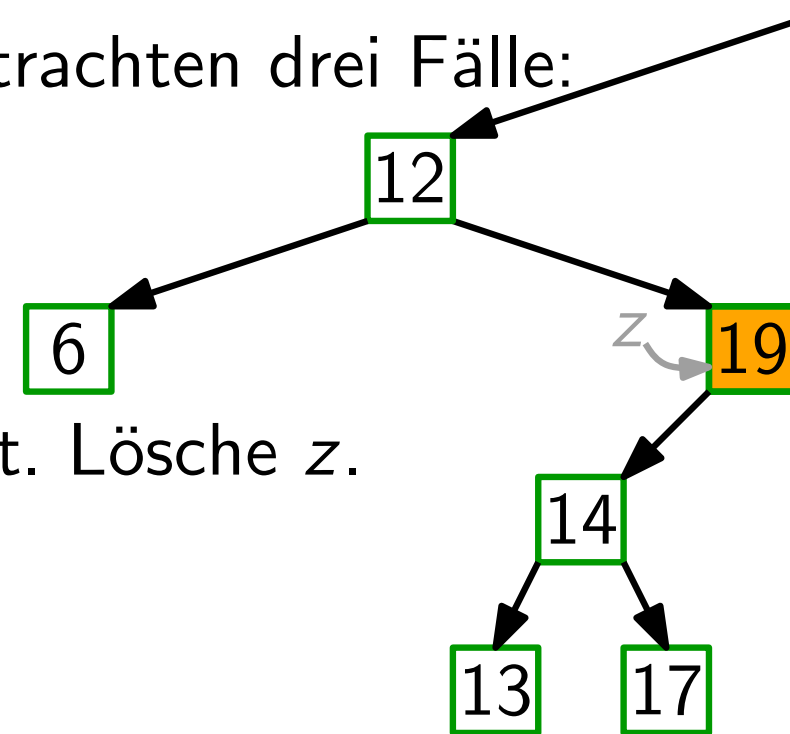
Sei  $z$  der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1.  $z$  hat keine Kinder.

Falls  $z$  linkes Kind von  $z.p$  ist,  
setze  $z.p.left = nil$ ; sonst umgekehrt. Lösche  $z$ .

2.  $z$  hat ein Kind  $x$ .

3.  $z$  hat zwei Kinder.



# Löschen

Sei  $z$  der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

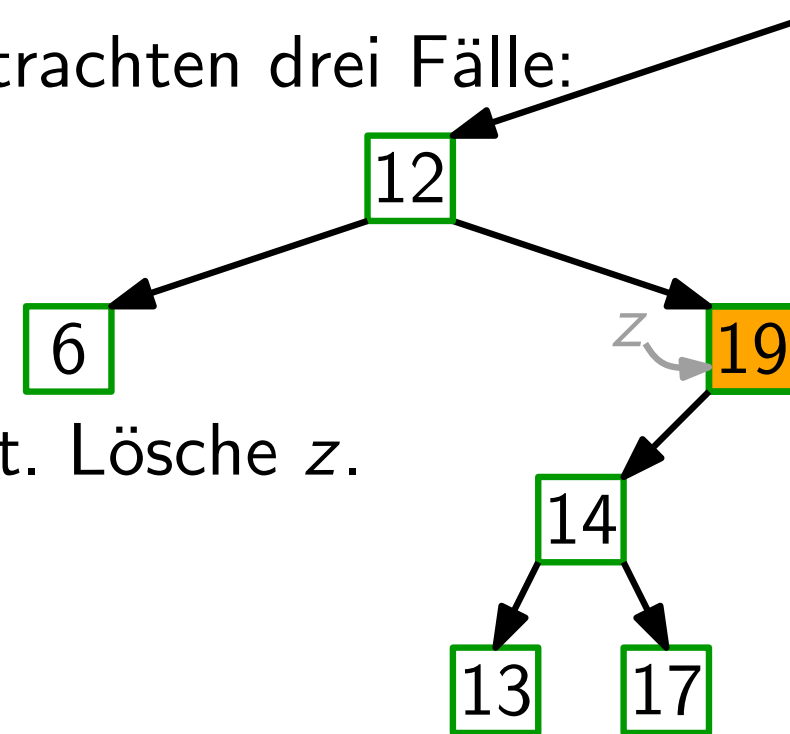
1.  $z$  hat keine Kinder.

Falls  $z$  linkes Kind von  $z.p$  ist,  
setze  $z.p.left = nil$ ; sonst umgekehrt. Lösche  $z$ .

2.  $z$  hat ein Kind  $x$ .

Setze den Zeiger von  $z.p$ , der auf  $z$  zeigt, auf  $x$ .  
Setze  $x.p = z.p$ . Lösche  $z$ .

3.  $z$  hat zwei Kinder.



# Löschen

Sei  $z$  der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

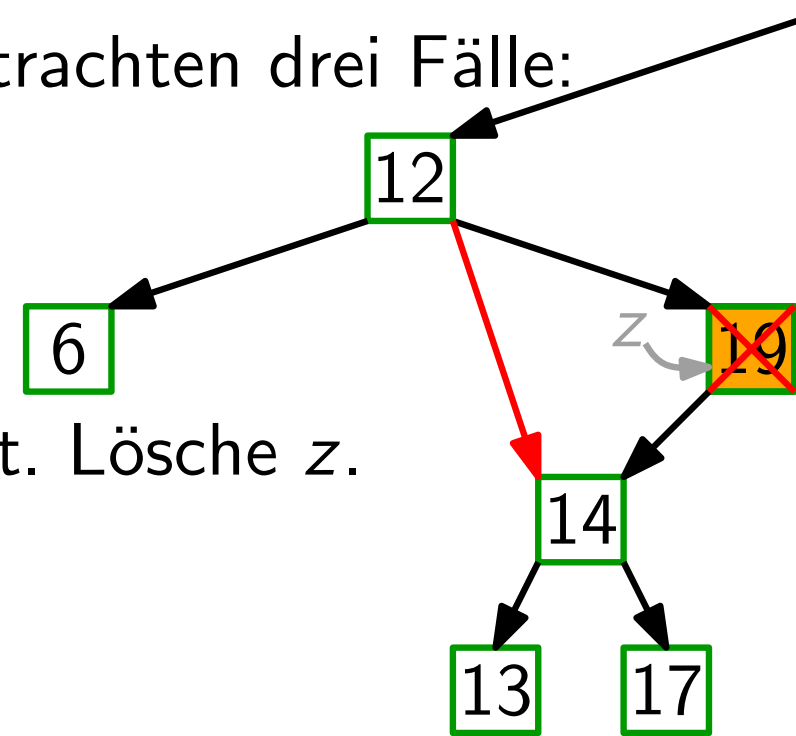
1.  $z$  hat keine Kinder.

Falls  $z$  linkes Kind von  $z.p$  ist, setze  $z.p.left = nil$ ; sonst umgekehrt. Lösche  $z$ .

2.  $z$  hat ein Kind  $x$ .

Setze den Zeiger von  $z.p$ , der auf  $z$  zeigt, auf  $x$ .  
Setze  $x.p = z.p$ . Lösche  $z$ .

3.  $z$  hat zwei Kinder.



# Löschen

Sei  $z$  der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

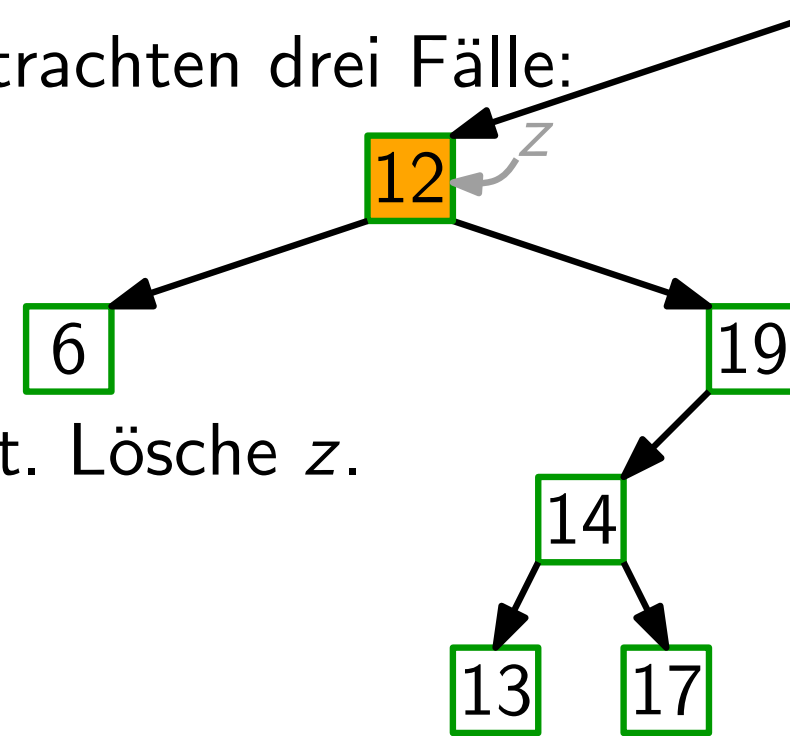
1.  $z$  hat keine Kinder.

Falls  $z$  linkes Kind von  $z.p$  ist,  
setze  $z.p.left = nil$ ; sonst umgekehrt. Lösche  $z$ .

2.  $z$  hat ein Kind  $x$ .

Setze den Zeiger von  $z.p$ , der auf  $z$  zeigt, auf  $x$ .  
Setze  $x.p = z.p$ . Lösche  $z$ .

3.  $z$  hat zwei Kinder.



# Löschen

Sei  $z$  der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1.  $z$  hat keine Kinder.

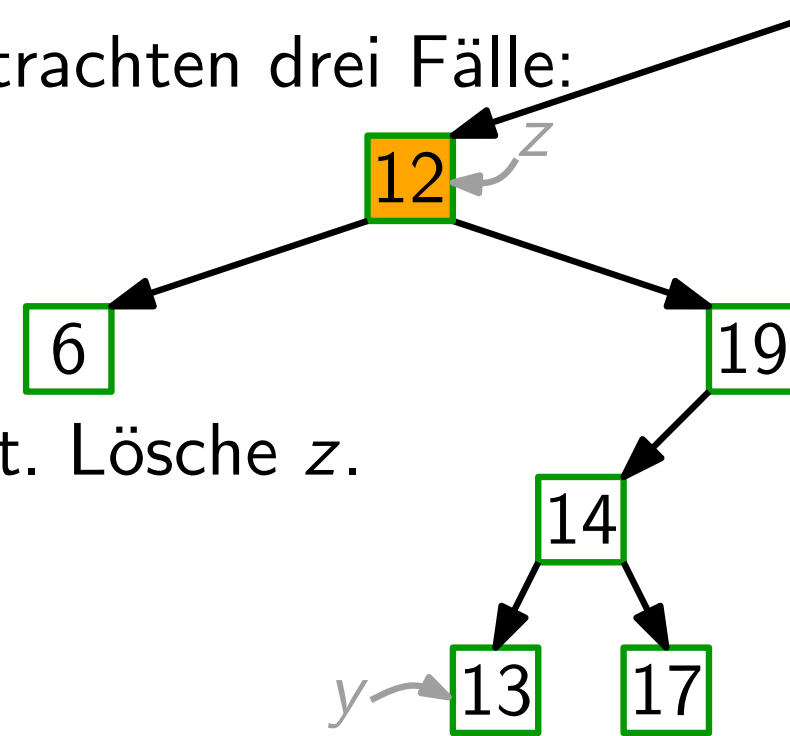
Falls  $z$  linkes Kind von  $z.p$  ist, setze  $z.p.left = nil$ ; sonst umgekehrt. Lösche  $z$ .

2.  $z$  hat ein Kind  $x$ .

Setze den Zeiger von  $z.p$ , der auf  $z$  zeigt, auf  $x$ .  
Setze  $x.p = z.p$ . Lösche  $z$ .

3.  $z$  hat zwei Kinder.

Setze  $y = \text{Successor}(z)$  und  $z.key = y.key$ . Lösche  $y$ . (Fall 1 oder 2!)



# Löschen

Sei  $z$  der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1.  $z$  hat keine Kinder.

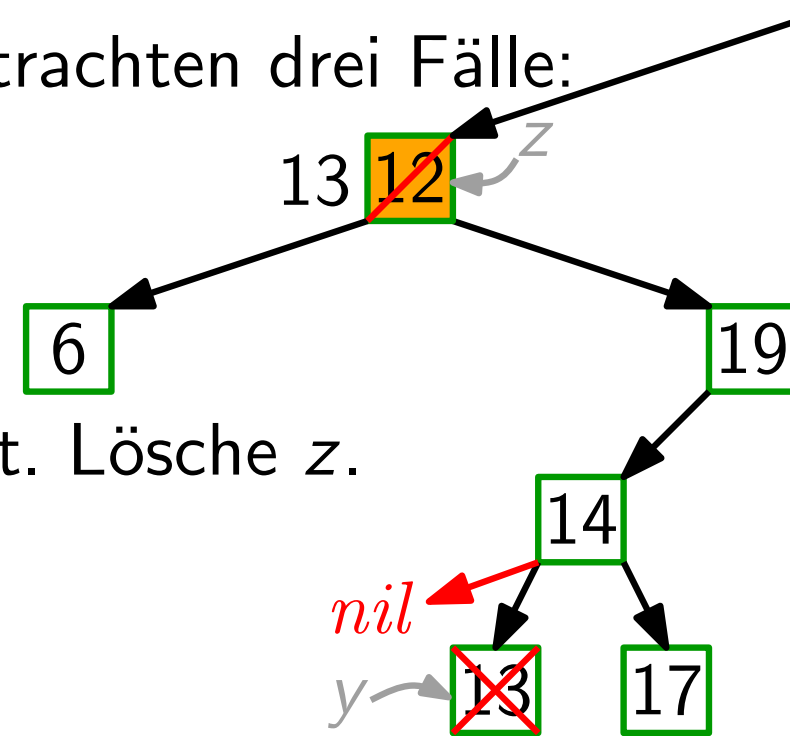
Falls  $z$  linkes Kind von  $z.p$  ist, setze  $z.p.left = nil$ ; sonst umgekehrt. Lösche  $z$ .

2.  $z$  hat ein Kind  $x$ .

Setze den Zeiger von  $z.p$ , der auf  $z$  zeigt, auf  $x$ .  
Setze  $x.p = z.p$ . Lösche  $z$ .

3.  $z$  hat zwei Kinder.

Setze  $y = \text{Successor}(z)$  und  $z.key = y.key$ . Lösche  $y$ . (Fall 1 oder 2!)



# Zusammenfassung

**Satz.** Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in  $O(h)$  Zeit, wobei  $h$  die momentane Höhe des Baums ist.



# Zusammenfassung

**Satz.** Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in  $O(h)$  Zeit, wobei  $h$  die momentane Höhe des Baums ist.

**Aber:**

# Zusammenfassung

**Satz.** Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in  $O(h)$  Zeit, wobei  $h$  die momentane Höhe des Baums ist.

**Aber:** Im schlechtesten Fall gilt  $h \in \Theta(n)$ .

# Zusammenfassung

**Satz.** Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in  $O(h)$  Zeit, wobei  $h$  die momentane Höhe des Baums ist.

**Aber:** Im schlechtesten Fall gilt  $h \in \Theta(n)$ .

**Ziel:**

# Zusammenfassung

**Satz.** Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in  $O(h)$  Zeit, wobei  $h$  die momentane Höhe des Baums ist.

**Aber:** Im schlechtesten Fall gilt  $h \in \Theta(n)$ .

**Ziel:** Suchbäume *balancieren*

# Zusammenfassung

**Satz.** Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in  $O(h)$  Zeit, wobei  $h$  die momentane Höhe des Baums ist.

**Aber:** Im schlechtesten Fall gilt  $h \in \Theta(n)$ .

**Ziel:** Suchbäume *balancieren*  $\Rightarrow h \in O(\log n)$