

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2021/22

8. Vorlesung

Sortieren – mit dem Würfel!

Und noch einmal: Sortieren!

Zur Erinnerung: MergeSort...

- + gute Worst-Case-Laufzeit (durch Teile-und-Herrsche)
- kein in-situ-Verfahren (benötigt extra Felder beim Mergen)

Ziel: Teile-&-Herrsche-Verfahren, das trotzdem in situ sortiert!

Sortiere ein Teilfeld $A[\ell..r]$ wie folgt: `QuickSort(int[] A, int ℓ , r)`

Teile:
`int Partition(A, ℓ , r)`
 [liefert m zurück] } Bestimme einen Index $m \in \{\ell, \dots, r\}$ und teile $A[\ell..r]$ so in $A[\ell..m-1]$ und $A[m+1..r]$ auf, dass alle Elemente im ersten Teilfeld kleiner gleich $A[m]$ sind und alle im zweiten größer als $A[m]$.

Herrsche: durch rekursives Sortieren der beiden Teilfelder.

Kombiniere: —

Schreiben Sie QuickSort in Pseudocode unter Verwendung von Partition(A, ℓ , r)!

QuickSort

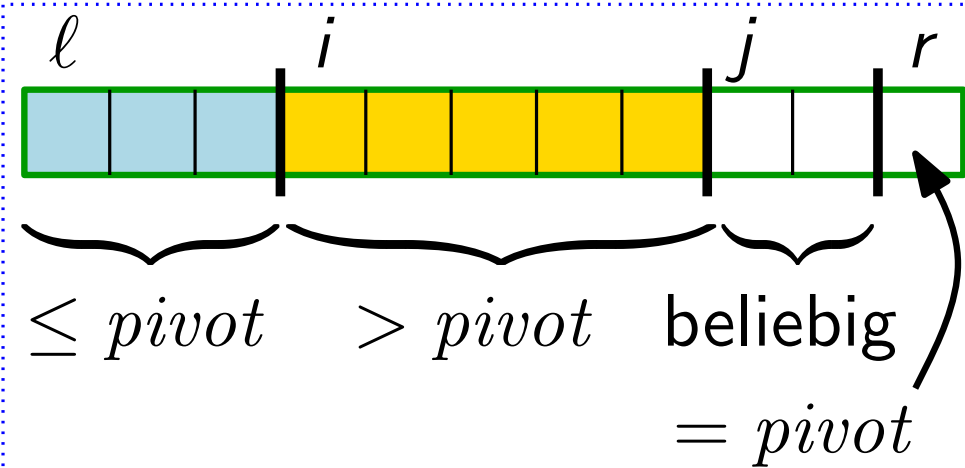
```
QuickSort( $A, \ell = 1, r = A.length$ )
```

```
if  $\ell < r$  then
```

```
     $m = \text{Partition}(A, \ell, r)$ 
```

```
    QuickSort( $A, \ell, m - 1$ )
```

```
    QuickSort( $A, m + 1, r$ )
```



Schleifeninvariante:

(i) Für $k = \ell, \dots, i - 1$ gilt $A[k] \leq pivot$.

(ii) Für $k = i, \dots, j - 1$ gilt $A[k] > pivot$.

(iii) $A[r] = pivot$.

(iv) $A[\ell..j-1]$ enthält die gleichen Elemente wie zu Beginn.

```
int Partition(int[] A, int  $\ell$ , int  $r$ )
```

```
     $pivot = A[r]$ 
```

```
     $i = \ell$ 
```

```
    for  $j = \ell$  to  $r - 1$  do
```

```
        if  $A[j] \leq pivot$  then
```

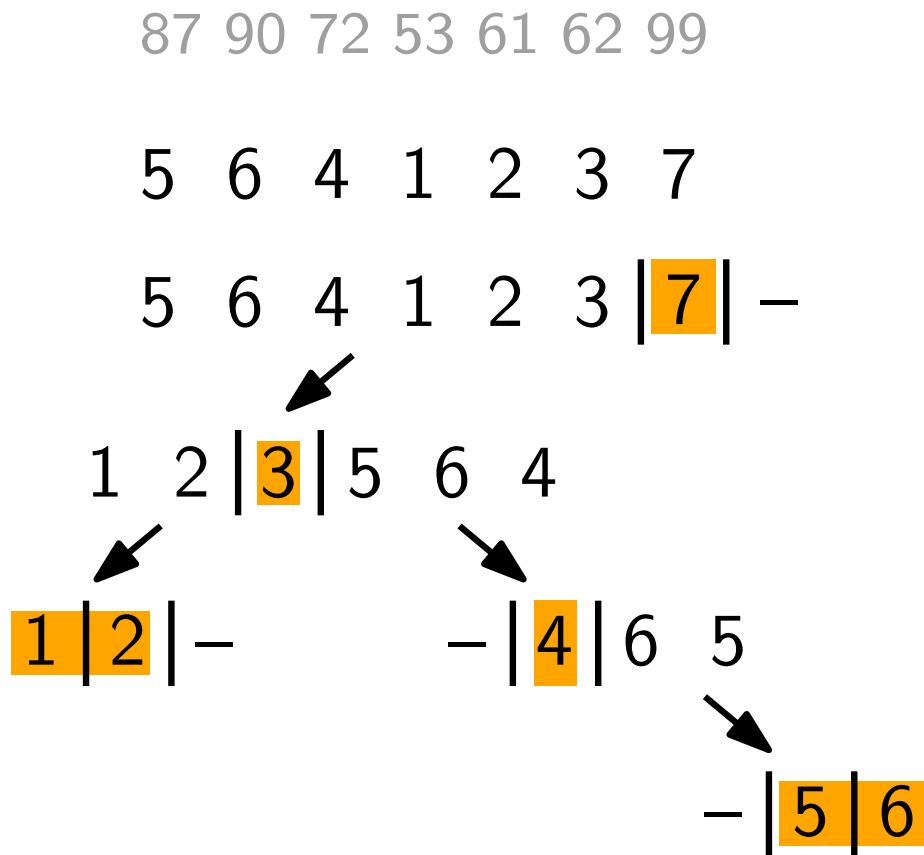
```
            Swap( $A, i, j$ )
```

```
             $i = i + 1$ 
```

```
    Swap( $A, i, r$ )
```

```
    return  $i$ 
```

Ein Beispiel



```
QuickSort( $A, \ell = 1, r = \dots$ )
```

```
  if  $\ell < r$  then
```

```
     $m = \text{Partition}(A, \ell, r)$ 
```

```
    QuickSort( $A, \ell, m - 1$ )
```

```
    QuickSort( $A, m + 1, r$ )
```

```
int Partition( $A, \ell, r$ )
```

```
   $pivot = A[r]$ 
```

```
   $i = \ell$ 
```

```
  for  $j = \ell$  to  $r - 1$  do
```

```
    if  $A[j] \leq pivot$  then
```

```
      Swap( $A, i, j$ )
```

```
       $i = i + 1$ 
```

```
  Swap( $A, i, r$ )
```

```
  return  $i$ 
```

Laufzeit

Zähle Anzahl der Vergleiche!

Beob. Partition benötigt *immer* $r - \ell$ Vergleiche.

Wovon hängt dann die Laufzeit ab?

$$T_{QS}(n) = T_{QS}(m - 1) + T_{QS}(n - m) + n - 1$$

1. Extremfall: m immer erstes Element

$$\begin{aligned} T_{QS}(n) &= T_{QS}(0) + T_{QS}(n - 1) + n - 1 \\ &= (T_{QS}(n - 2) + n - 2) + n - 1 \\ &\vdots \\ &= T_{QS}(1) + 1 + 2 + \dots + n - 2 + n - 1 \\ &\in \Theta(n^2) \end{aligned}$$

2. Extremfall: m immer mittleres Element

$$T_{QS}(n) \approx 2T_{QS}(n/2) + n - 1 \in \Theta(n \log n)$$

siehe MergeSort

```
QuickSort(A, ℓ = 1, r = ...)
  if ℓ < r then
    m = Partition(A, ℓ, r)
    QuickSort(A, ℓ, m - 1)
    QuickSort(A, m + 1, r)
```

```
int Partition(A, ℓ, r)
  pivot = A[r]
  i = ℓ
  for j = ℓ to r - 1 do
    if A[j] ≤ pivot then
      Swap(A, i, j)
      i = i + 1
  Swap(A, i, r)
  return i
```

Wo ist die Wahrheit?

M.a.W. was passiert im Durchschnittsfall (*average case*)?

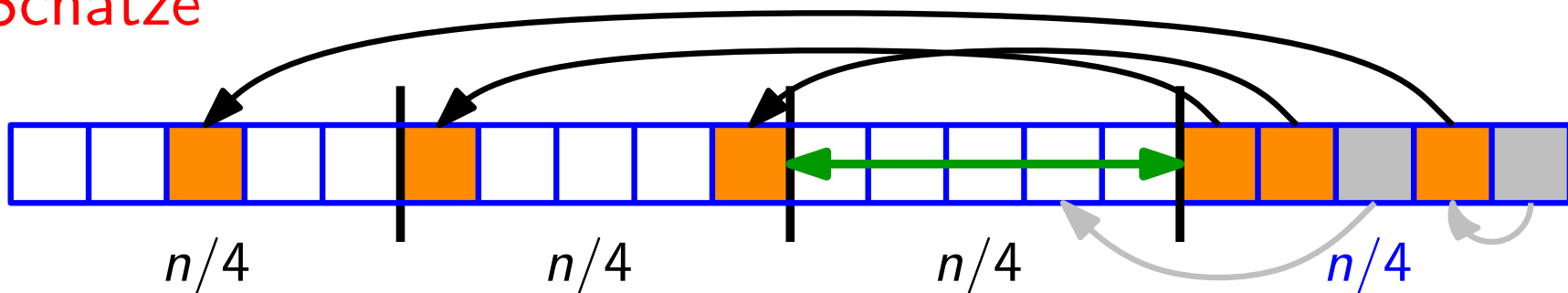
Vgl. InsertionSort: Bester Fall = $n - 1 \in \Theta(n)$ Vergleiche
 Schlechtester Fall = $\binom{n}{2} \in \Theta(n^2)$ Vergleiche
 Durchschnittsfall = $\Theta(n^2)$ ←

Mittle die Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe!

Schwierig...

Statt dessen:

~~Berechne~~ *Schätze* erwartete Laufzeit $E[T_{IS}]$ einer zufälligen Permutation *ab!*



$$E[T_{IS}] \geq E[\text{Aufwand für letzte } \frac{n}{4} \text{ Elem.}] \geq \frac{n}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{4} \in \Omega(n^2)$$

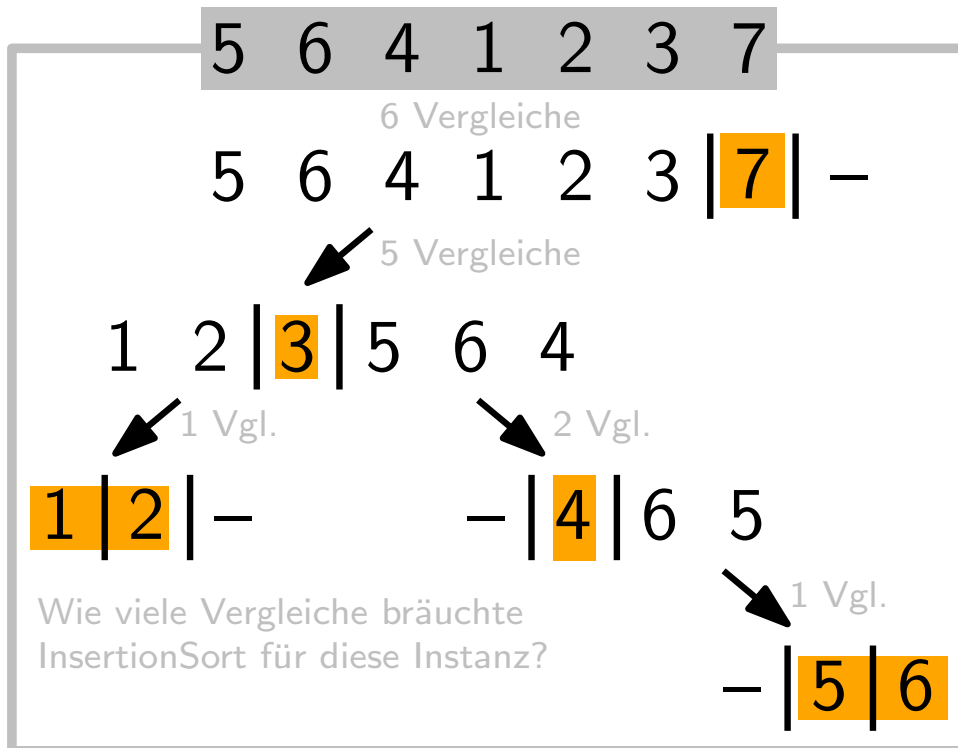
Zurück zu QuickSort

Idee: *Steck Zufall in den Algorithmus!*

Seien z_1, z_2, \dots, z_n die Elemente von A in sortierter Reihenfolge.

Wann vergleicht Alg. z_i und z_j ?

* höchstens ein Mal:
wenn eins von beiden *pivot* ist.



RandomizedPartition(A, ℓ, r)

$k = \text{Random}(\ell, r)$ Liefert Zufallszahl $\in \{\ell, \dots, r\}$.

Swap(A, r, k)

return Partition(A, ℓ, r)

Partition(A, ℓ, r)

$pivot = A[r]$

$i = \ell$

for $j = \ell$ **to** $r - 1$ **do**

if $A[j] \leq pivot$ **then**

 Swap(A, i, j)

$i = i + 1$

Swap(A, i, r)

return i

Zurück zu QuickSort

Idee: *Steck Zufall in den Algorithmus!*

Seien z_1, z_2, \dots, z_n die Elemente von A in sortierter Reihenfolge.

Wann vergleicht Alg. z_i und z_j ?

* höchstens ein Mal:
wenn eins von beiden *pivot* ist.

Definiere Indikator-Zufallsvariable:

$$V_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Alg. } z_i \text{ und } z_j \text{ vergleicht,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei V ZV für Gesamtanz. von Vgl.

$$\text{Dann gilt } V = \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij}.$$

$$\Rightarrow E[V] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} E[V_{ij}]$$

Linearität des Erwartungswerts!

RandomizedPartition(A, ℓ, r)

$k = \text{Random}(\ell, r)$ Liefert Zufallszahl $\in \{\ell, \dots, r\}$.

Swap(A, r, k)

return Partition(A, ℓ, r)

Partition(A, ℓ, r)

$pivot = A[r]$

$i = \ell$

for $j = \ell$ **to** $r - 1$ **do**

if $A[j] \leq pivot$ **then**

 Swap(A, i, j)

$i = i + 1$

Swap(A, i, r)

return i

First come, first serve

$$E[V_{ij}] = \Pr[\text{Alg. vergleicht } z_i \text{ und } z_j] =$$



Betrachte die Menge $Z_{ij} := \{z_i, z_{i+1}, \dots, z_j\}$.

Sei z^* die erste Zahl in Z_{ij} , die Pivot wird.

Es gilt: Alg. vergleicht z_i und $z_j \iff z^* = z_i$ oder $z^* = z_j$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Pr[\text{Alg. vergleicht } z_i \text{ und } z_j] &= \Pr[z^* = z_i \text{ oder } z^* = z_j] \\ &= \Pr[z^* = z_i] + \Pr[z^* = z_j] \\ &= \frac{1}{|Z_{ij}|} + \frac{1}{|Z_{ij}|} \\ &= \frac{2}{j - i + 1} \end{aligned}$$

Auf zum letzten Gefecht...

$$E[V_{ij}] = \Pr[\text{Alg. vergleicht } z_i \text{ und } z_j] = \frac{2}{j - i + 1}$$

Wir wissen:

$$E[V] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} E[V_{ij}] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{2}{j - i + 1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n \frac{2}{j - i + 1} \right)$$

Trick: ersetze $j - i$ durch k !

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k + 1} \right)$$

Auf zum letzten Gefecht...

$$E[V_{ij}] = \Pr[\text{Alg. vergleicht } z_i \text{ und } z_j] = \frac{2}{j-i+1}$$

Wir wissen:

$$E[V] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} E[V_{ij}] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{2}{j-i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{2}{j-i+1}$$

Trick: ersetze $j - i$ durch k !

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} < \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \in O(n \log n)$$

harmonische Reihe!

Satz: RandomizedQuickSort sortiert n Zahlen in $O(n \log n)$ erwarteter Zeit.

Zusammenfassung Sortierverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	QuickSort
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$
in situ ¹ (<i>in place</i>)	✓	✗	✓	(✓)*
stabil ²	✓	✓	✗	✗

¹) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

²) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenfolge belässt.

*) QuickSort muss für jeden rekursiven Aufruf die Variable m zwischenspeichern. Dafür wird im worst case $\Omega(n)$ zusätzlicher Speicherplatz benötigt. Mit Tricks kann man dieses Problem umgehen und so QuickSort in-situ machen.