

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2021/22

7. Vorlesung

Zufall!

Guten Morgen!

Tipps für unseren ersten Zwischentest am Do, 18. November:

- Lesen Sie die Definitionen der Klassen O , Ω und Θ gaaaaanz genau – bis Sie sie *restlos* verstehen! Besonders Beweise der Art $f \notin O(g)$ machen erfahrungsgemäß Schwierigkeiten.
- Lesen Sie alle Vorlesungsfolien (Vorlesungen 1–6) und Kap. 1–4 & 6 im Buch [CLRS]!
- Machen Sie möglichst viele Übungsaufgaben in Kap. 3, 4, 6 [CLRS]!
- Programmieren Sie – z.B. Pseudocode aus der Vorlesung!
- Stellen Sie Fragen – Kommilitonen, Tutoren, Erklärhiwis, mir!
- Haben Sie schon ein Buch??

Tipp: Das Buch „Algorithmen & Datenstrukturen: Die Grundwerkzeuge“ von Dietzfelbinger, Mehlhorn und Sanders (Springer, 2014) kann man im Uninetz kostenlos von der Unibib herunterladen.
- Erinnern Sie sich an die Linearzeitlösung für MaxSum? Beweisen Sie ihre Korrektheit mit einer Schleifeninvarianten! Lesen!!
- **Teilnahme:** Hier im Hörsaal ab 8:25 oder auf WueCampus, **8:40–10:00**. Hier: Ausdruck, zuhause pdf-Datei. Bearbeitung:
 - z.B. mit Acrobat Pro (RZ)
 - oder mit xournal(++)

Lösen der Übungsaufgaben

- Geben Sie auf Ihren Lösungen immer die Namen aller (≤ 3) Autoren an – nur die bekommen Punkte!
- Lösen Sie Aufgaben möglichst nur mit Mitgliedern *Ihrer* Übungsgruppe. So sehen Sie sich automatisch jede Woche.
- Wenn Sie nicht immer *alle* Aufgaben lösen können – nicht verzweifeln! Wichtig ist, dass Sie's probiert haben!
- Benützen Sie zum Fragen/Diskutieren den Chat!
Adresse: <https://chat.uni-wuerzburg.de/group/ads21>
Eintritt: <https://chat.uni-wuerzburg.de/invite/AvDQsy>

Bei Fragen im Diskussionforum in WueCampus bekommen 400 Leute eine Mail; im Chat sehen nur die Leute Ihre Frage, die sich freiwillig dort angemeldet haben.

Inhaltsverzeichnis

- Ein Zufallsexperiment
- InsertionSort: erwartete bzw. Durchschnittslaufzeit
- Das Geburtstagsparadoxon

Ein Experiment

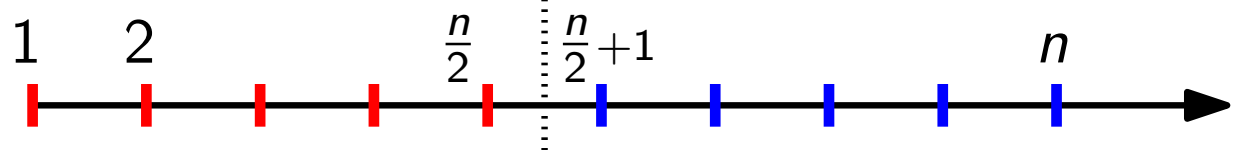
Ein Franke und ein Münchner gehen (unabhängig voneinander) n mal in verschiedenen Restaurants essen und benoten nach jedem Besuch ihr Essen.

Der Franke ist zufrieden, wenn er überdurchschnittlich gut isst, d. h. wenn seine aktuelle Note über dem **Mittel** liegt.

Der Münchner ist zufrieden, wenn er besser isst als er jemals vorher gegessen hat.

Wer is(s)t zufriedener?

Das Kleingedruckte:



Die Reihenfolge der Restaurants ist *zufällig*. Beide Gourmets müssen ihr Essen mit einer Zahl zwischen 1 (= sehr schlecht) und n (= sehr gut) bewerten und dürfen jede Zahl nur einmal vergeben. Die Zahl n sei gerade. Der Münchner ist beim ersten Essen zufrieden.

Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, n$.

Sei S_n die Menge all dieser Permutationen. $\Rightarrow |S_n| = n!$

Ergebnismenge Ω \rightarrow *Beobachtungsmenge Ω'*

Sei $M: S_n \rightarrow \{1, \dots, n\}$ eine *Zufallsvariable*, die angibt, wie oft der Münchner zufrieden ist.

Uns interessiert der erwartete Wert von M ,
kurz: der *Erwartungswert* $\mathbf{E}[M]$ von M .

Definition: $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$ (Def. für *diskrete ZV*)

„**gewichtetes Mittel**“ der Werte in Ω'

Es gilt: $\sum_{i \in \Omega'} \mathbf{Pr}[M = i] = \mathbf{1}$

Problem: Was ist $\mathbf{Pr}[M = 7]??$

Ein Trick

Definition: $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe **Indikator-Zufallsvariable** ein (für $i = 1, \dots, n$):

Sei $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

Beispiel: Zahlenfolge = $(7, 2, 8, 5, 9, 1, 4, 6, 3)$

$\mathbf{Pr}[M_i = 1] =$ WK, dass i . Zahl die bisher größte ist

$$\underline{\underline{=}} \frac{\text{Anz. der „guten“ Ergebnisse}}{\text{Anz. aller Ergebnisse}}$$

$$\underline{\underline{=}} \frac{\text{Anz. Perm., bei denen } i. \text{ Zahl am größten}}{\text{Anz. aller Permutationen von } i \text{ Zahlen}} = \frac{(i-1)!}{i!} = \frac{1}{i}$$

Voraussetzung:
Alle Ergebnisse sind
gleich wahrscheinlich!

Ein Trick

Definition: $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe **Indikator-Zufallsvariable** ein (für $i = 1, \dots, n$):

Sei $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

Beispiel: Zahlenfolge = $(7, 2, 8, 5, 9, 1, 4, 6, 3)$

$\mathbf{Pr}[F_i = 1] = \text{WK, dass } i. \text{ Zahl größer als } \frac{n+1}{2} \text{ ist}$

$$= \frac{\text{Anz. der „guten“ Ergebnisse}}{\text{Anz. aller Ergebnisse}}$$

$$= \frac{\text{Anz. Perm., bei denen } i. \text{ Zahl} > n/2}{\text{Anz. aller Permutationen von } n \text{ Zahlen}} = \frac{(n-1)! \cdot \frac{n}{2}}{n!} = \frac{1}{2}$$

Zurück zum Erwartungswert

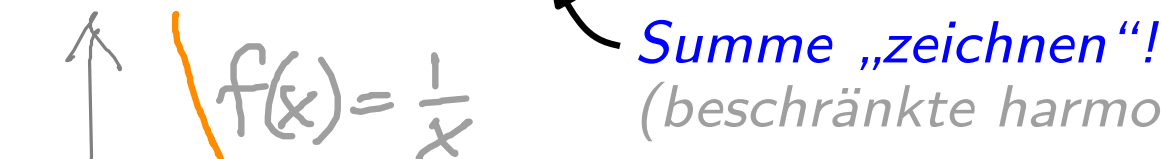
$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}\left[\sum_i M_i\right] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

Linearität des Erwartungswerts *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + (\ln x \Big|_1^n) = 1 + \ln n$$



Summe „zeichnen“!
(beschränkte harmonische Reihe)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

Linearität des Erwartungswerts *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + (\ln x \Big|_1^n) = 1 + \ln n$$

Summe „zeichnen“!

(beschränkte harmonische Reihe)

Entsprechend...

$$\mathbf{E}[F] = \sum_{i=1}^n \mathbf{Pr}[F_i = 1] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

M.a.W.: man kann erwarten,
dass der Franke *exponentiell zufriedener* ist als der Münchner!

; -)

Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

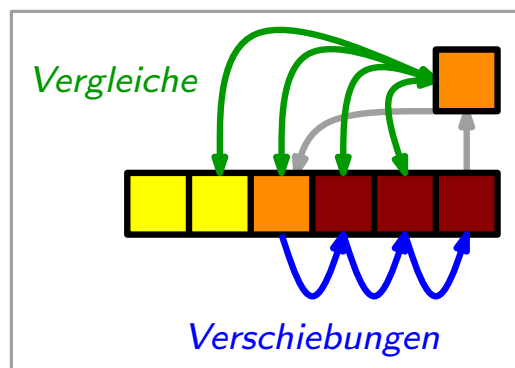
Beob. Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

Hier: Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe $A[1..n]$ (für festes n)?

Einfacher: Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$?

Wissen: $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

Beob. Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen T_{IS} zählen, denn



wenn wir ein Element einfügen
(innere Schleife von InsertionSort), gilt:

$\# \text{ Verschiebungen} \leq \# \text{ Vergleiche} \leq \# \text{ Verschiebungen} + 1$

d.h. insg. gilt: $T_{IS} \leq V_{IS} \leq T_{IS} + (n - 1).$

Average-Case-Laufzeit vs. erwartete Laufzeit

Beob. Statt der durchschnittlichen Laufzeit über alle Permutationen können wir auch die *erwartete* Laufzeit einer zufälligen Permutation betrachten.

Warum?

Betrachte Definition:

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{i=0}^{n^2} i \cdot \mathbf{Pr}[T = i]$$

hier: # Verschiebungen (d.h. Laufzeit) Anteil der Permutationen, die i Verschiebungen verursachen.

Erwartete Laufzeit von InsertionSort

T := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation $A[1..n]$ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um T auszudrücken?

$$T_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq n.$$

$$\Rightarrow T_j = \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} = \text{Anz. Pos., um die } A[j] \text{ n. li. verschoben wird.}$$

$$\Rightarrow T = \sum_{j=2}^n T_j = \sum \sum T_{ij} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}[T] = \sum \sum \mathbf{E}[T_{ij}]$$

Aber was ist $\mathbf{E}[T_{ij}]$? Laut Def. $\mathbf{E}[T_{ij}] = \mathbf{Pr}[T_{ij} = 1] = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[T] = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{E}[T_{ij}] = \sum_{j=2}^n \frac{j-1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{4} \quad \square$$

Zusammenfassung InsertionSort

Satz. [alt]

Im *besten Fall* benötigt InsertionSort $n - 1 \in \Theta(n)$ Vergleiche und 0 Verschiebungen.

Im *schlechtesten Fall* benötigt InsertionSort $n(n - 1)/2 \in \Theta(n^2)$ Vergleiche/Verschiebungen.

Satz. [neu]

Im *Durchschnitt* benötigt InsertionSort $n(n - 1)/4 \in \Theta(n^2)$ Verschiebungen und zwischen $n(n - 1)/4$ und $n(n - 1)/4 + (n - 1)$, d.h. $\Theta(n^2)$, Vergleiche.

Kurz: Bei InsertionSort gilt

Average Case =_{asymptotisch} Worst Case!

Geburtstagswahrscheinlichkeiten

Frage: Wie groß ist die *Wahrscheinlichkeit*, dass mindestens zwei Leute hier im Hörsaal am gleichen Tag Geburtstag haben? [siehe Abschnitt 5.4, CLRS]

Frage': Wie groß ist der *Erwartungswert* für die Anzahl X von Paaren von Leuten hier im Hörsaal, die am gleichen Tag Geburtstag haben?

Was wäre eine gute Indikatorvariable, um X auszudrücken?

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \text{ und } j \text{ gleichen Geburtstag haben} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{für} \\ 1 \leq i < j \leq k; \\ k = \text{Anz. Leute} \end{array} \right\}$$

$$\text{Dann gilt } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k X_{ij}.$$

Geburtstagserwartungen

Es gilt:

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{und } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}.$$

Geburtstag von Person j

Annahme: Alle n Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.

$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] = \sum_{t=1}^n \mathbf{Pr}[G_i = G_j = t] = \frac{n}{n^2} = 1/n.$$

Ereignisse schließen sich gegenseitig aus!

(Geht auch einfacher!)

Gesucht:

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E} \left[\sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij} \right] = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mathbf{E}[X_{ij}] =$$

$$= \binom{k}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{k(k-1)}{2n} \geq 1 \Leftrightarrow k(k-1) \geq 2n.$$

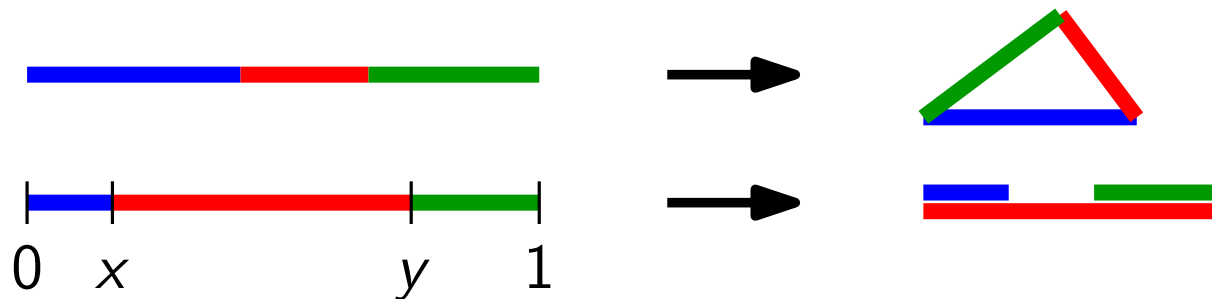
Linearität des Erwartungswerts!

Für ein Jahr mit $n = 365$ Tagen braucht man also nur $k \geq 28$ Personen um ein Pärchen mit gleichem Geburtstag erwarten zu können. \square

Bonustrack (Nur eine Frage, keine Antwort!)

Angenommen, Sie haben einen Stock der Länge 1 und zerbrechen ihn an zwei zufällig gewählten Stellen $x \in [0, 1]$ und $y \in [0, 1]$. (Die ZV x & y sind also nicht diskret!)

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie aus den drei Teilen ein Dreieck legen können?



Mit anderen Worten – was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\max\{x, y - x, 1 - y\} < 1/2$?

Tipp: Betrachten Sie das Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$.