

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2021/22

6. Vorlesung

Prioritäten setzen

Heute: Wir „bauen“ eine Datenstruktur

Datenstruktur:

Konzept, mit dem man Daten speichert und anordnet, so dass man sie schnell finden und ändern kann.



Heute: Wir „bauen“ eine Datenstruktur

Datenstruktur:

Konzept, mit dem man Daten speichert und anordnet, so dass man sie schnell finden und ändern kann.

Abstrakter Datentyp

Implementierung

Heute: Wir „bauen“ eine Datenstruktur

Datenstruktur:

Konzept, mit dem man Daten speichert und anordnet, so dass man sie schnell finden und ändern kann.

Abstrakter Datentyp

beschreibt die „Schnittstelle“ einer Datenstruktur – welche Operationen werden unterstützt?

Implementierung

Heute: Wir „bauen“ eine Datenstruktur

Datenstruktur:

Konzept, mit dem man Daten speichert und anordnet, so dass man sie schnell finden und ändern kann.

Abstrakter Datentyp

beschreibt die „Schnittstelle“ einer Datenstruktur – welche Operationen werden unterstützt?

Implementierung

wie wird die gewünschte Funktionalität realisiert:

- wie sind die Daten gespeichert (Feld, Liste, ...)?
- welche Algorithmen implementieren die Operationen?

Anwendung: Prozesssteuerung

Anwendung: steuere System durch Verwaltung von unterschiedlich wichtigen Prozessen

Anwendung: Prozesssteuerung

Anwendung: steuere System durch Verwaltung von unterschiedlich wichtigen Prozessen

Anforderung:

- Prozesse (mit ihrer Priorität) einfügen
- Prozess mit höchster Priorität finden/löschen
- Priorität von Prozessen erhöhen

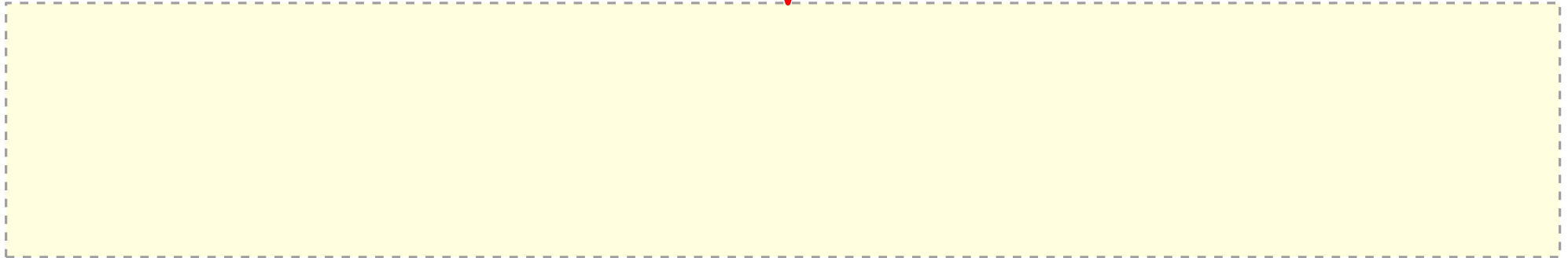
Anwendung: Prozesssteuerung

Anwendung: steuere System durch Verwaltung von unterschiedlich wichtigen Prozessen

Anforderung:

- Prozesse (mit ihrer Priorität) einfügen
- Prozess mit höchster Priorität finden/löschen
- Priorität von Prozessen erhöhen

modelliere



Anwendung: Prozesssteuerung

Anwendung: steuere System durch Verwaltung von unterschiedlich wichtigen Prozessen

Anforderung:

- Prozesse (mit ihrer Priorität) einfügen
- Prozess mit höchster Priorität finden/löschen
- Priorität von Prozessen erhöhen

modelliere



Abstrakter Datentyp: **Prioritätsschlange**

Anwendung: Prozesssteuerung

Anwendung: steuere System durch Verwaltung von unterschiedlich wichtigen Prozessen

Anforderung:

- Prozesse (mit ihrer Priorität) einfügen
- Prozess mit höchster Priorität finden/löschen
- Priorität von Prozessen erhöhen

modelliere



Abstrakter Datentyp: **Prioritätsschlange**

verwaltet Elemente einer Menge M ,
wobei jedes Element $x \in M$ eine Priorität $x.key$ hat.

Prioritätsschlange

Abstrakter Datentyp: **Prioritätsschlange**

verwaltet Elemente einer Menge M ,
wobei jedes Element $x \in M$ eine Priorität $x.key$ hat.

<i>Operation</i>	<i>Funktionalität</i>

Prioritätsschlange

Abstrakter Datentyp: **Prioritätsschlange**

verwaltet Elemente einer Menge M ,
wobei jedes Element $x \in M$ eine Priorität $x.key$ hat.

<i>Operation</i>	<i>Funktionalität</i>
Insert (element x)	
element FindMax ()	
element ExtractMax ()	
IncreaseKey (element x , priorität p)	

Prioritätsschlange

Abstrakter Datentyp: **Prioritätsschlange**

verwaltet Elemente einer Menge M ,
wobei jedes Element $x \in M$ eine Priorität $x.key$ hat.

<i>Operation</i>	<i>Funktionalität</i>
Insert (element x)	$M = M \cup \{x\}$
element FindMax ()	
element ExtractMax ()	
IncreaseKey (element x , priorität p)	

Prioritätsschlange

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge M ,
wobei jedes Element $x \in M$ eine Priorität $x.key$ hat.

Operation	Funktionalität
Insert (element x)	$M = M \cup \{x\}$
element FindMax ()	liefere $x \in M$ mit $x.key = \max\{y.key \mid y \in M\}$
element ExtractMax ()	
IncreaseKey (element x , priorität p)	

Prioritätsschlange

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge M ,
wobei jedes Element $x \in M$ eine Priorität $x.key$ hat.

Operation	Funktionalität
Insert (element x)	$M = M \cup \{x\}$
element FindMax ()	liefere $x \in M$ mit $x.key = \max\{y.key \mid y \in M\}$
element ExtractMax ()	$x = \text{FindMax}()$; $M = M \setminus \{x\}$; liefere x
IncreaseKey (element x , priorität p)	

Prioritätsschlange

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge M ,
wobei jedes Element $x \in M$ eine Priorität $x.key$ hat.

Operation	Funktionalität
Insert (element x)	$M = M \cup \{x\}$
element FindMax ()	liefere $x \in M$ mit $x.key = \max\{y.key \mid y \in M\}$
element ExtractMax ()	$x = \text{FindMax}()$; $M = M \setminus \{x\}$; liefere x
IncreaseKey (element x , priorität p)	$x.key = p$

Implementation

Aufgabe: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn:

- Wie würden Sie die Methoden einer Prioritätsschlange implementieren?
- Welche Laufzeiten liefert Ihre Implementierung im schlechtesten Fall?

W-C-Laufzeiten
meiner Implement.

Insert	FindMax	ExtractMax	IncreaseKey
$\Theta(\quad)$	$\Theta(\quad)$	$\Theta(\quad)$	$\Theta(\quad)$

Implementation

Aufgabe: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn:

- Wie würden Sie die Methoden einer Prioritätsschlange implementieren?
- Welche Laufzeiten liefert Ihre Implementierung im schlechtesten Fall?

W-C-Laufzeiten
meiner Implement.*

Insert	FindMax	ExtractMax	IncreaseKey
$\Theta(\quad)$	$\Theta(\quad)$	$\Theta(\quad)$	$\Theta(\quad)$

★ {

- Daten werden in einem Feld gespeichert.
- Neue Elemente werden hinten angehängt (unsortiert).
- Maximum wird immer aufrechterhalten.
- Bei IncreaseKey gehe ich von Direktzugriff (via Index) aus.

Implementation

Aufgabe: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn:

- Wie würden Sie die Methoden einer Prioritätsschlange implementieren?
- Welche Laufzeiten liefert Ihre Implementierung im schlechtesten Fall?

W-C-Laufzeiten
meiner Implement.*

Insert	FindMax	ExtractMax	IncreaseKey
$\Theta(1)$	$\Theta(\quad)$	$\Theta(\quad)$	$\Theta(\quad)$

★ {

- Daten werden in einem Feld gespeichert.
- Neue Elemente werden hinten angehängt (unsortiert).
- Maximum wird immer aufrechterhalten.
- Bei IncreaseKey gehe ich von Direktzugriff (via Index) aus.

Implementation

Aufgabe: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn:

- Wie würden Sie die Methoden einer Prioritätsschlange implementieren?
- Welche Laufzeiten liefert Ihre Implementierung im schlechtesten Fall?

W-C-Laufzeiten
meiner Implement.*

Insert	FindMax	ExtractMax	IncreaseKey
$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(\quad)$	$\Theta(\quad)$

★ {

- Daten werden in einem Feld gespeichert.
- Neue Elemente werden hinten angehängt (unsortiert).
- Maximum wird immer aufrechterhalten.
- Bei IncreaseKey gehe ich von Direktzugriff (via Index) aus.

Implementation

Aufgabe: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn:

- Wie würden Sie die Methoden einer Prioritätsschlange implementieren?
- Welche Laufzeiten liefert Ihre Implementierung im schlechtesten Fall?

W-C-Laufzeiten
meiner Implement.*

Insert	FindMax	ExtractMax	IncreaseKey
$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(\quad)$

★ {

- Daten werden in einem Feld gespeichert.
- Neue Elemente werden hinten angehängt (unsortiert).
- Maximum wird immer aufrechterhalten.
- Bei IncreaseKey gehe ich von Direktzugriff (via Index) aus.

Implementation

Aufgabe: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn:

- Wie würden Sie die Methoden einer Prioritätsschlange implementieren?
- Welche Laufzeiten liefert Ihre Implementierung im schlechtesten Fall?

W-C-Laufzeiten
meiner Implement.*

Insert	FindMax	ExtractMax	IncreaseKey
$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$

* {
 – Daten werden in einem Feld gespeichert.
 – Neue Elemente werden hinten angehängt (unsortiert).
 – Maximum wird immer aufrechterhalten.
 – Bei IncreaseKey gehe ich von Direktzugriff (via Index) aus.

Achtung: Das Feld bekommt bei einer naiven Implementierung durch ExtractMax im Laufe der Zeit Lücken. Wie kann man das verhindern, ohne Elemente zu verschieben?

Implementation

Aufgabe: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn:

- Wie würden Sie die Methoden einer Prioritätsschlange implementieren?
- Welche Laufzeiten liefert Ihre Implementierung im schlechtesten Fall?

W-C-Laufzeiten
meiner Implement.*

Insert	FindMax	ExtractMax	IncreaseKey
$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$

heute:
Implementierung
als Heap (Haufen)

- ★ {
- Daten werden in einem Feld gespeichert.
 - Neue Elemente werden hinten angehängt (unsortiert).
 - Maximum wird immer aufrechterhalten.
 - Bei IncreaseKey gehe ich von Direktzugriff (via Index) aus.

Achtung: Das Feld bekommt bei einer naiven Implementierung durch ExtractMax im Laufe der Zeit Lücken. Wie kann man das verhindern, ohne Elemente zu verschieben?

Implementation

Aufgabe: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn:

- Wie würden Sie die Methoden einer Prioritätsschlange implementieren?
- Welche Laufzeiten liefert Ihre Implementierung im schlechtesten Fall?

	Insert	FindMax	ExtractMax	IncreaseKey
W-C-Laufzeiten meiner Implement.*	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$
heute: Implementierung als Heap (Haufen)	$\Theta(\log n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$

★ {

- Daten werden in einem Feld gespeichert.
- Neue Elemente werden hinten angehängt (unsortiert).
- Maximum wird immer aufrechterhalten.
- Bei IncreaseKey gehe ich von Direktzugriff (via Index) aus.

Achtung: Das Feld bekommt bei einer naiven Implementierung durch ExtractMax im Laufe der Zeit Lücken. Wie kann man das verhindern, ohne Elemente zu verschieben?

Implementation

Aufgabe: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn:

- Wie würden Sie die Methoden einer Prioritätsschlange implementieren?
- Welche Laufzeiten liefert Ihre Implementierung im schlechtesten Fall?

W-C-Laufzeiten
meiner Implement.*

heute:
Implementierung
als Heap (Haufen)

Insert	FindMax	ExtractMax	IncreaseKey
$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$
$\Theta(\log n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$

Das ist exponentiell besser!

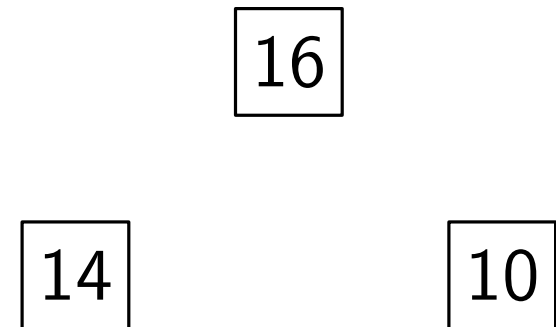
- ★ {
- Daten werden in einem Feld gespeichert.
 - Neue Elemente werden hinten angehängt (unsortiert).
 - Maximum wird immer aufrechterhalten.
 - Bei IncreaseKey gehe ich von Direktzugriff (via Index) aus.

Achtung: Das Feld bekommt bei einer naiven Implementierung durch ExtractMax im Laufe der Zeit Lücken. Wie kann man das verhindern, ohne Elemente zu verschieben?

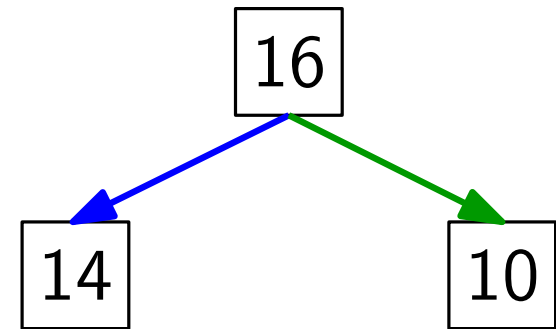
Bäume, gut gepackt

16

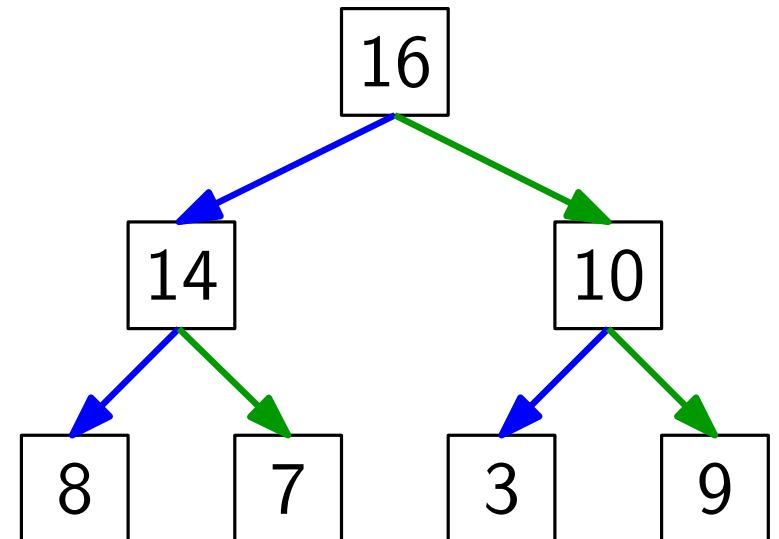
Bäume, gut gepackt



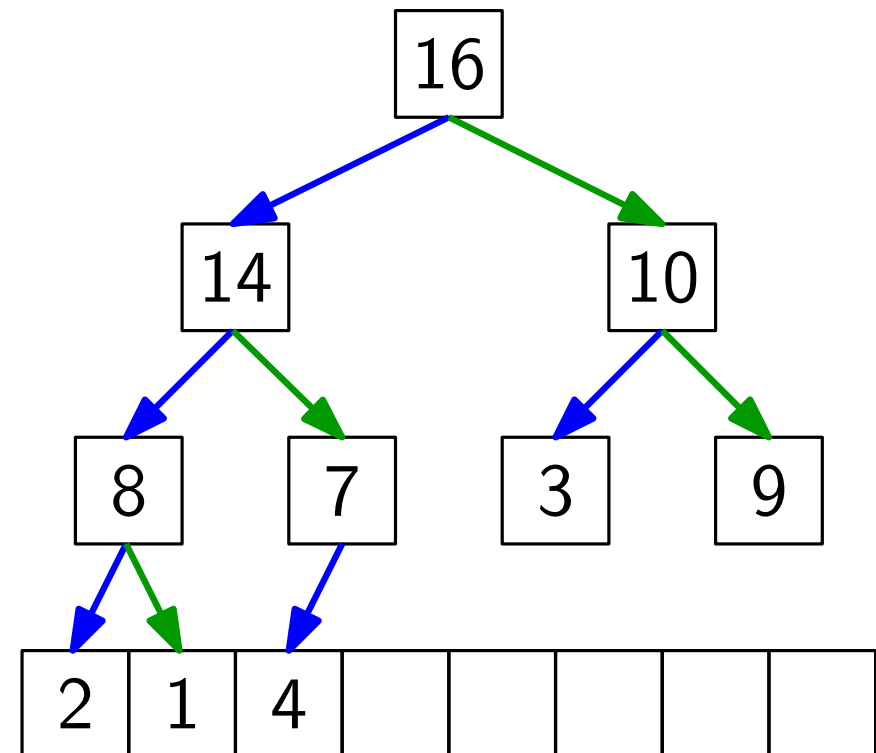
Bäume, gut gepackt



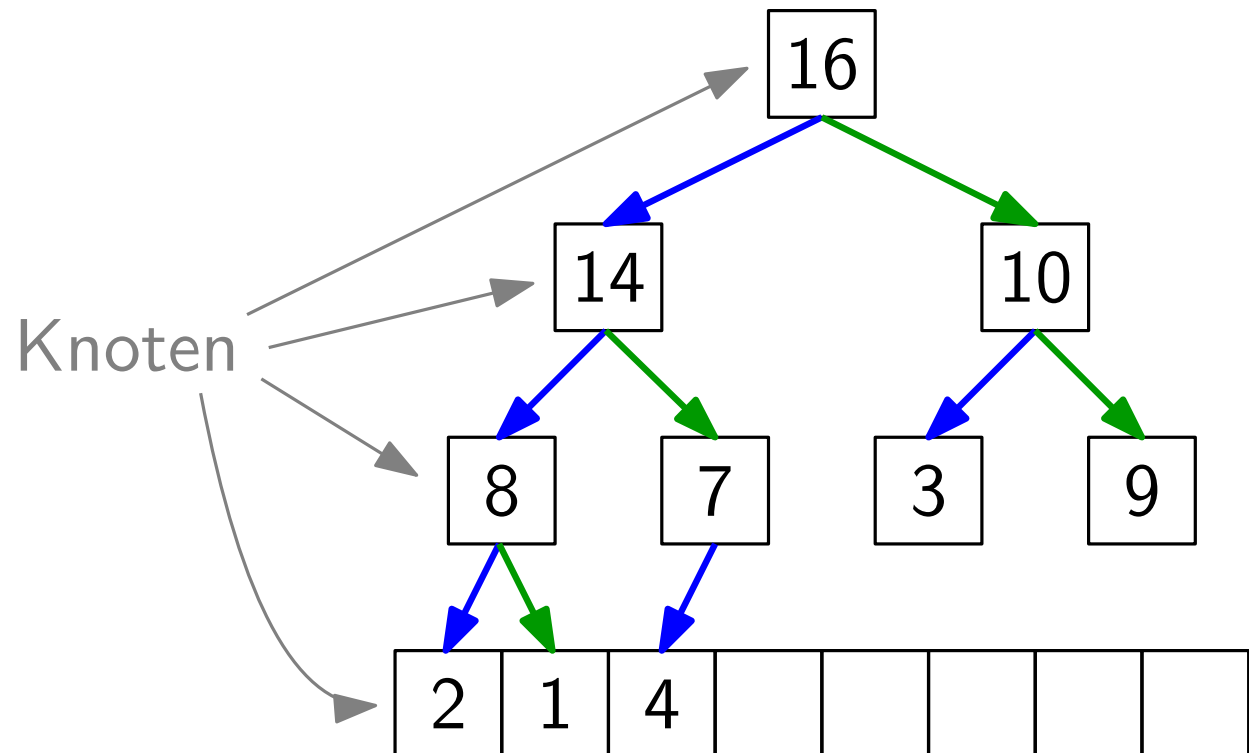
Bäume, gut gepackt



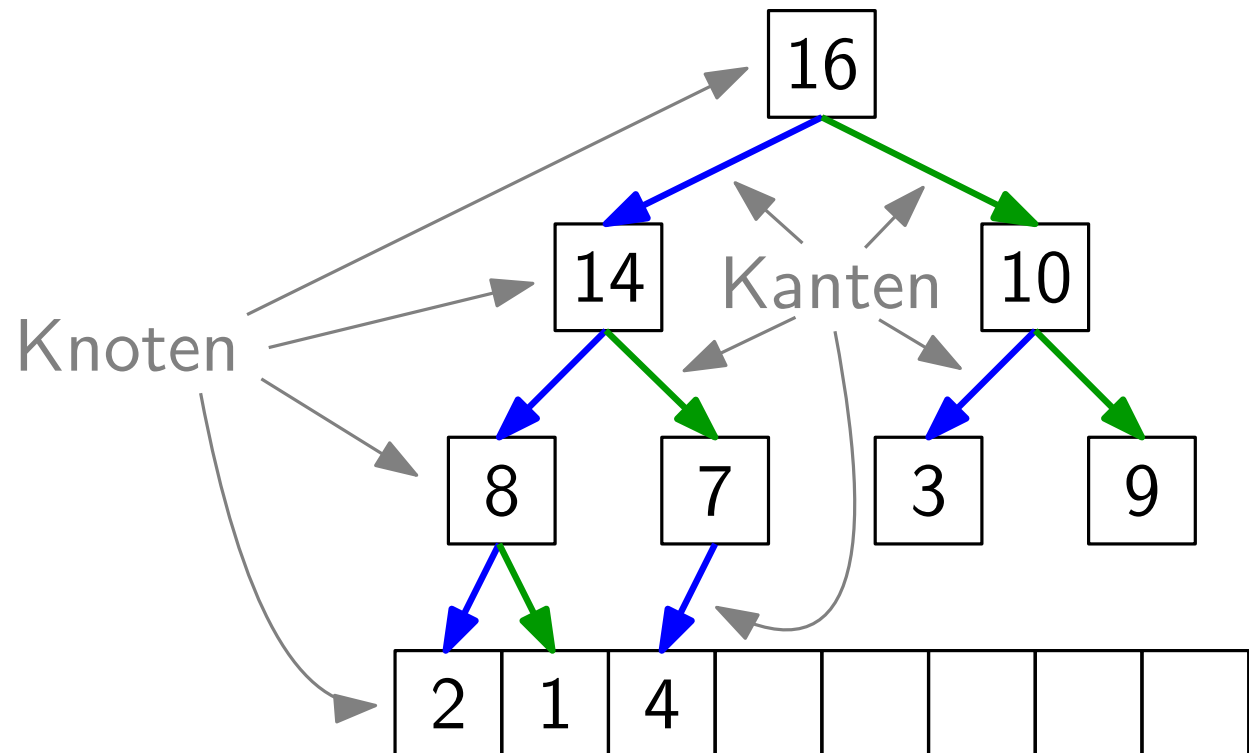
Bäume, gut gepackt



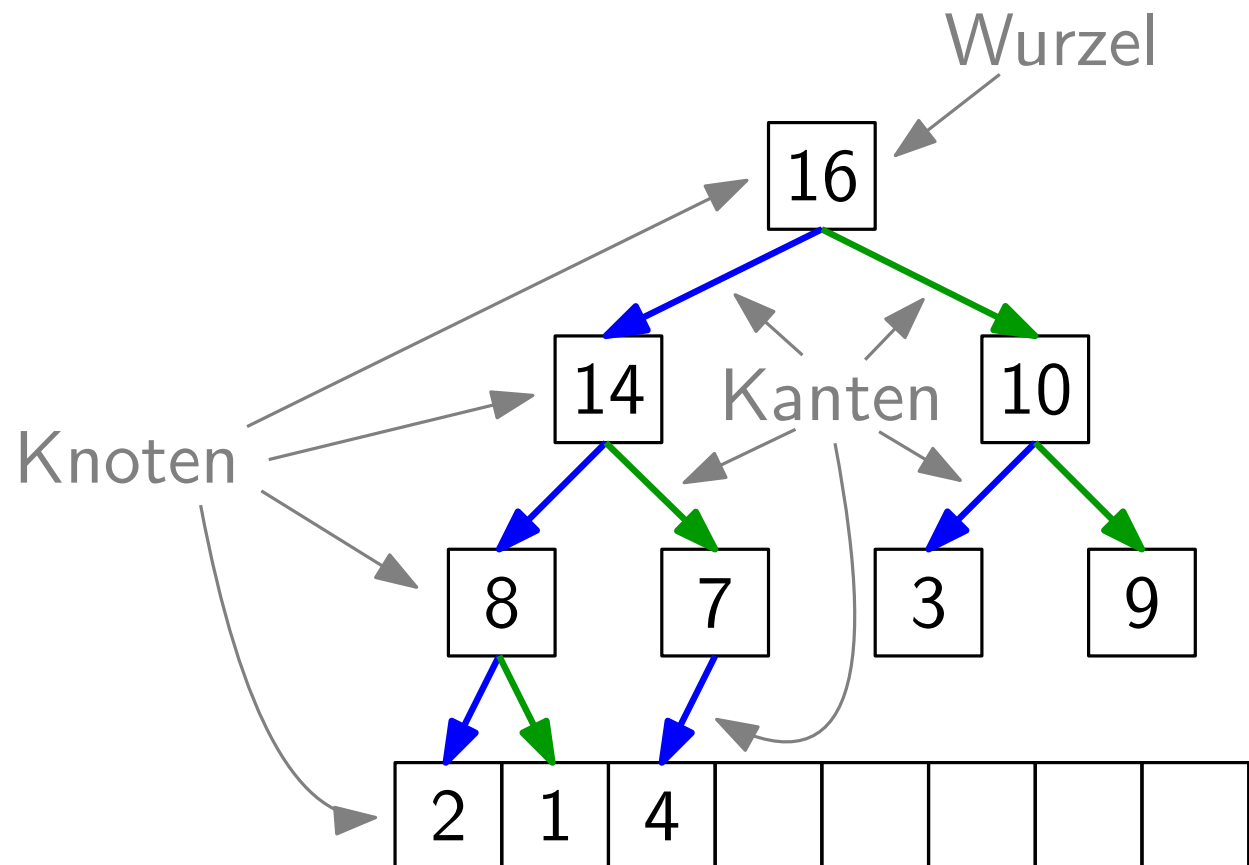
Bäume, gut gepackt



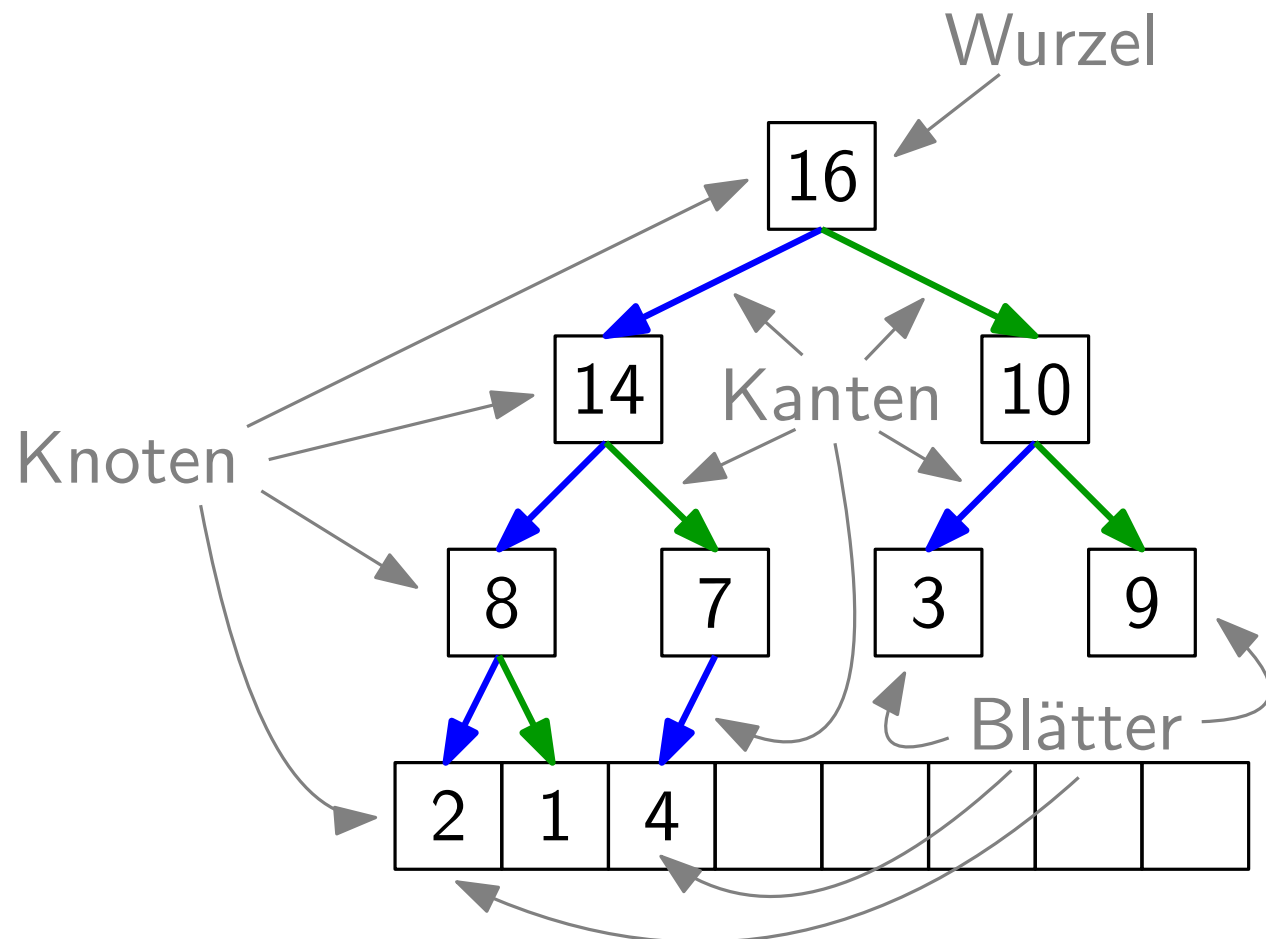
Bäume, gut gepackt



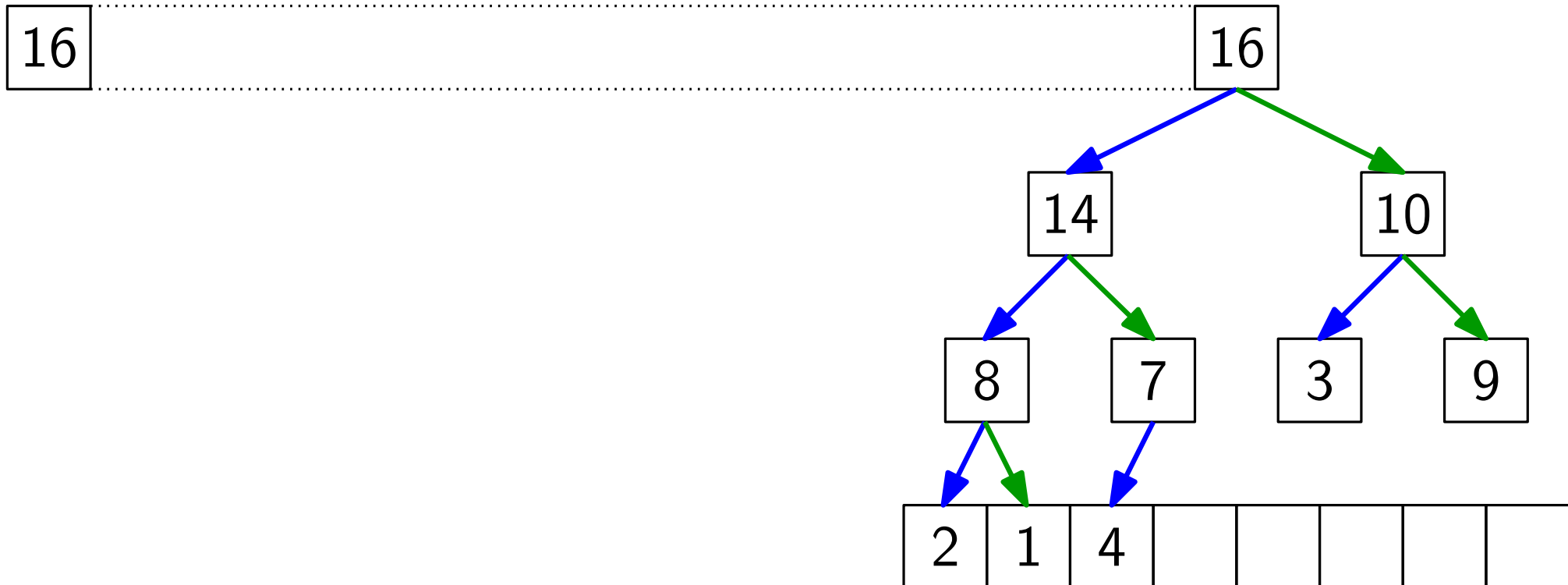
Bäume, gut gepackt



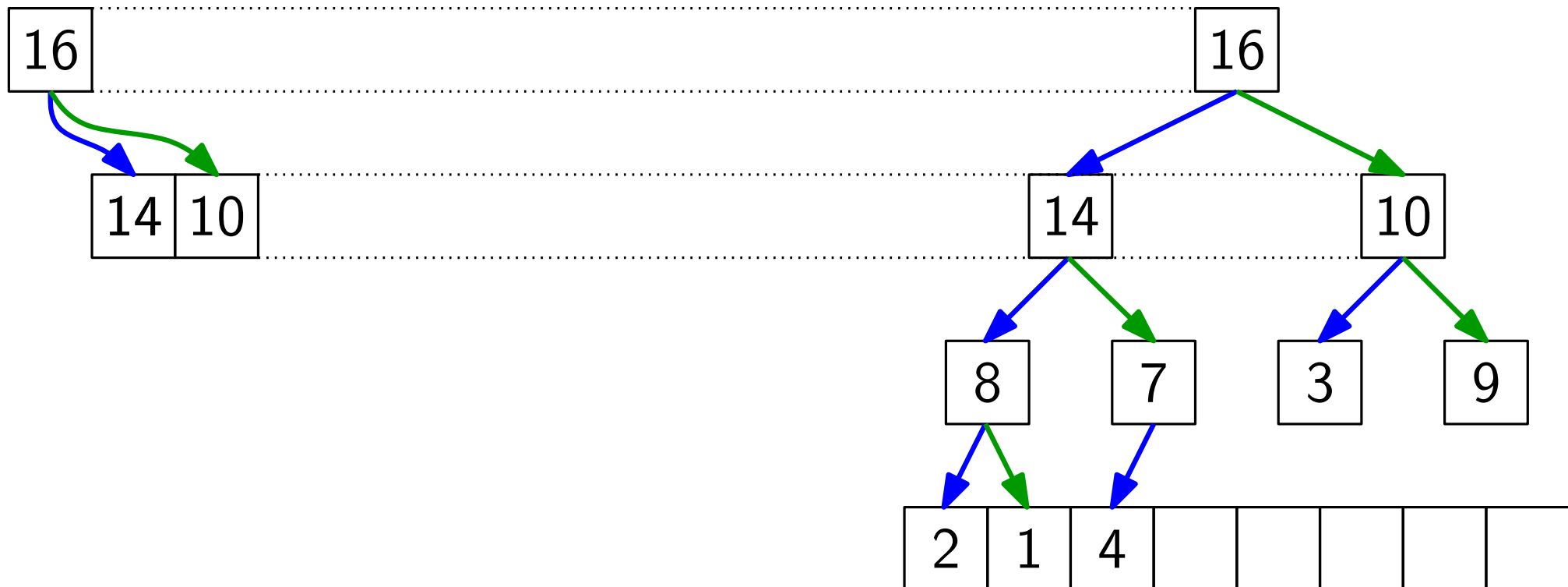
Bäume, gut gepackt



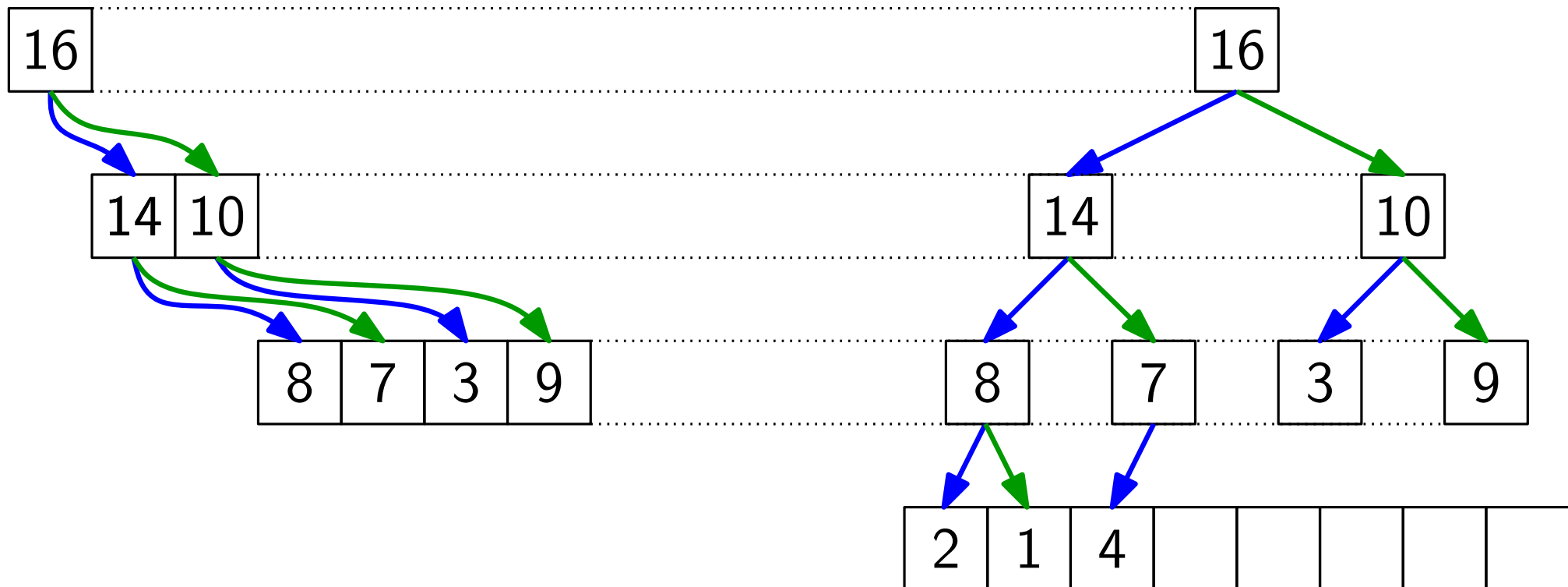
Bäume, gut gepackt



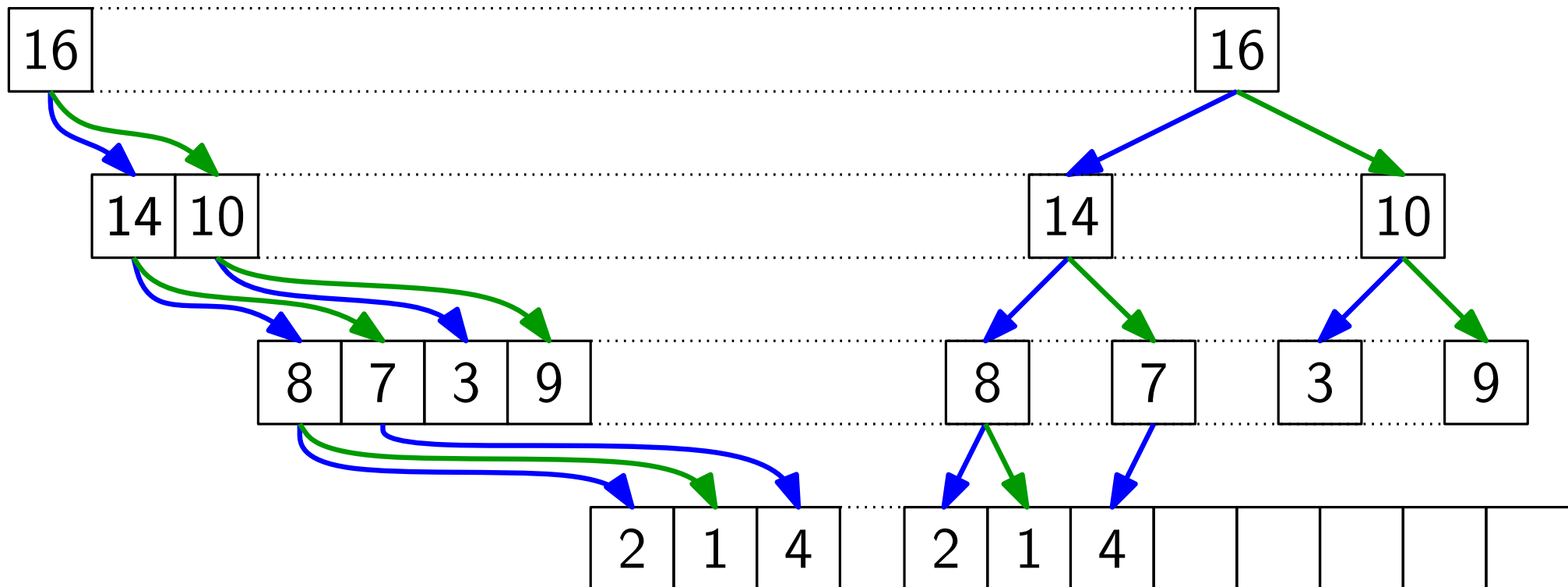
Bäume, gut gepackt



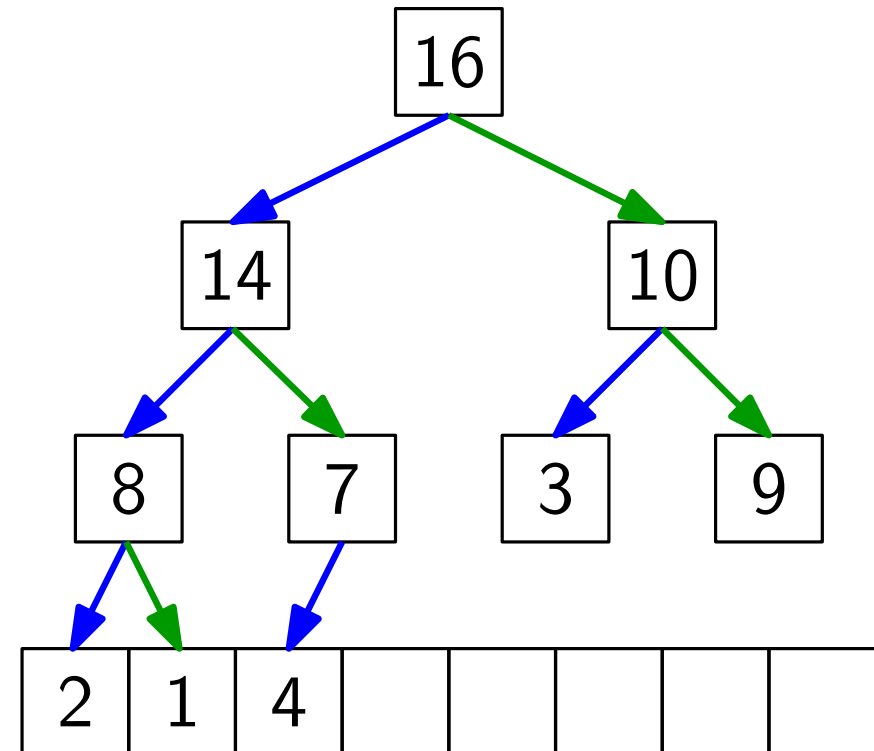
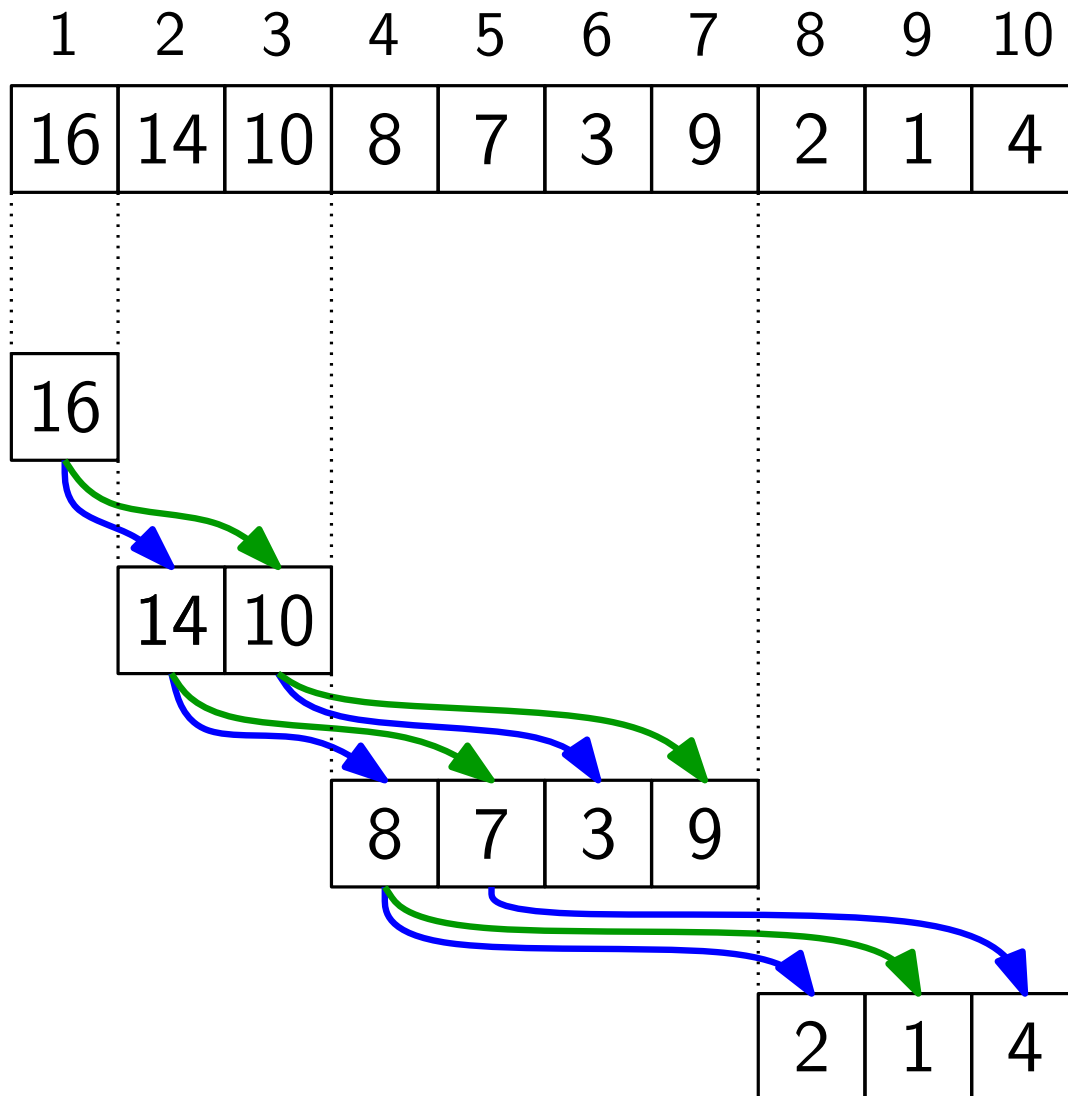
Bäume, gut gepackt



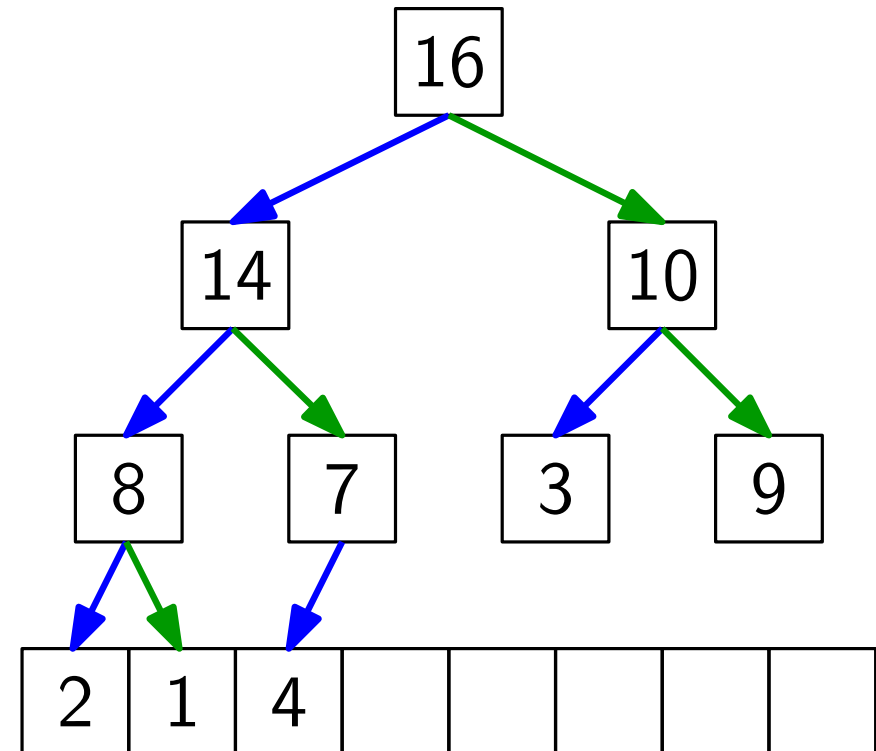
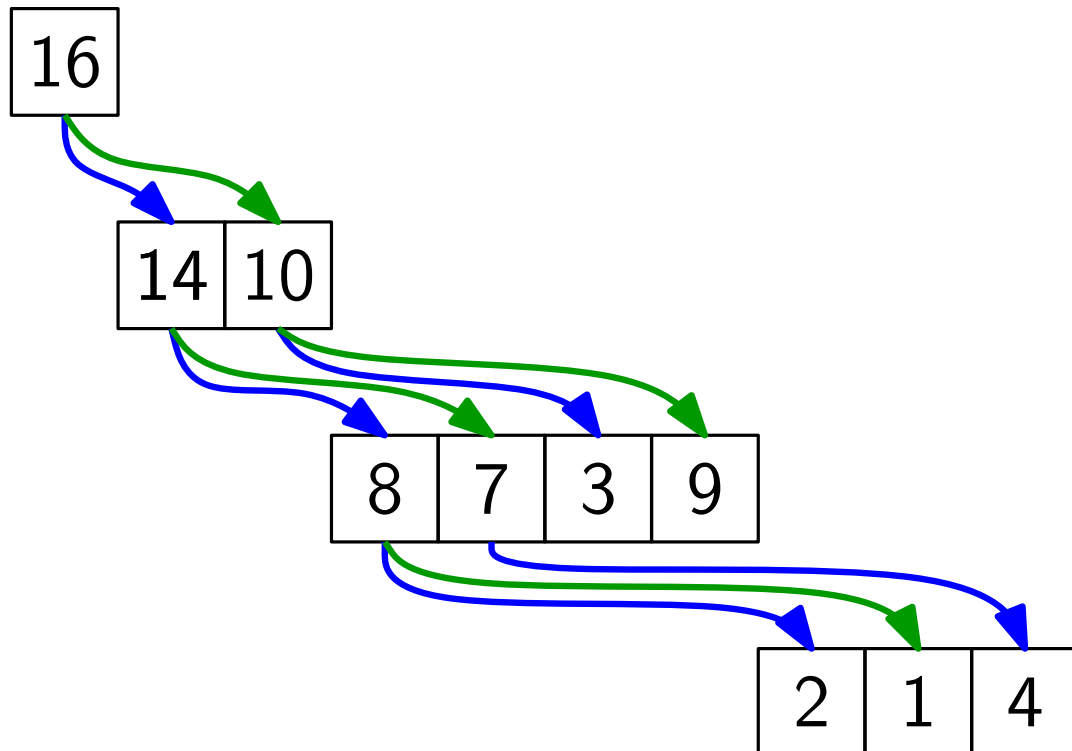
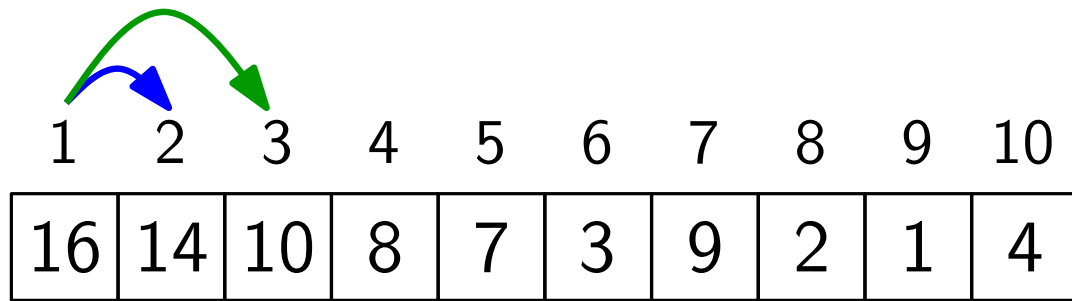
Bäume, gut gepackt



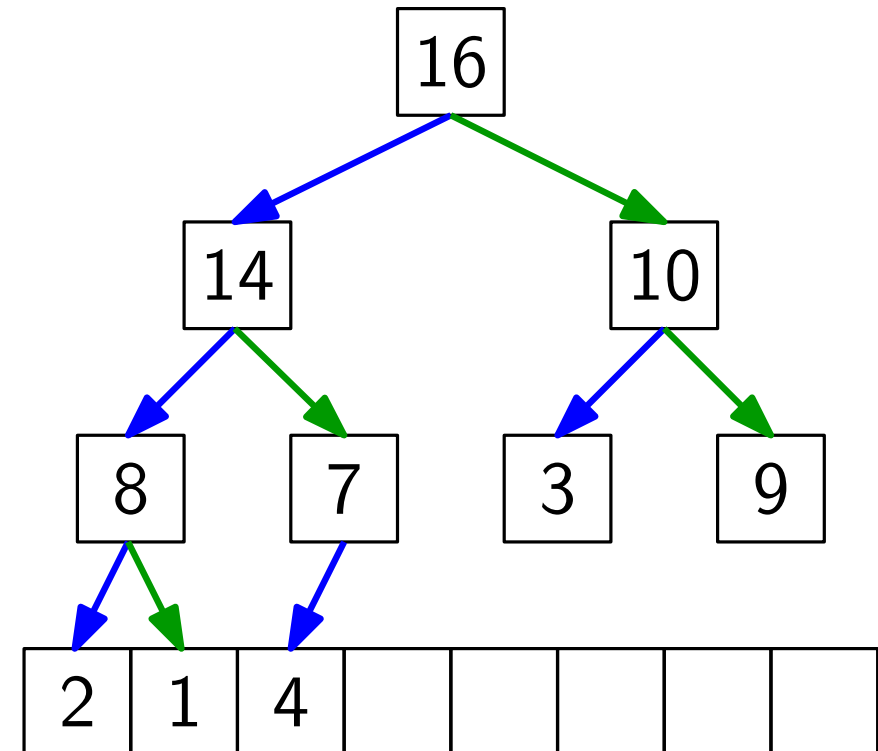
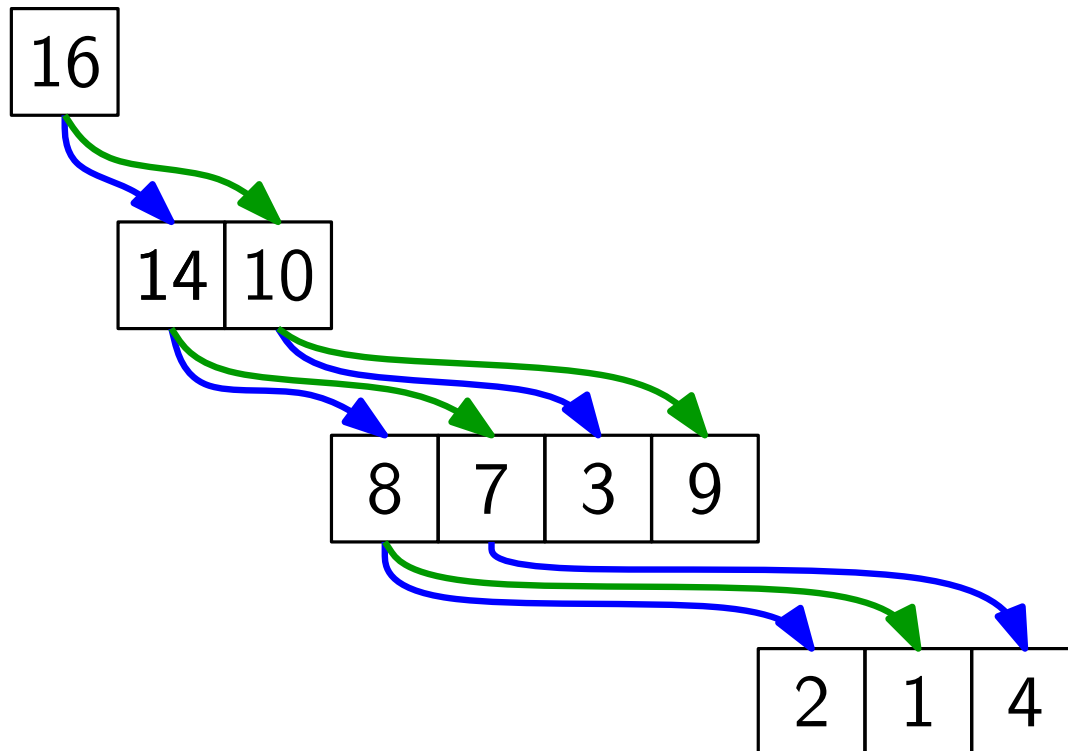
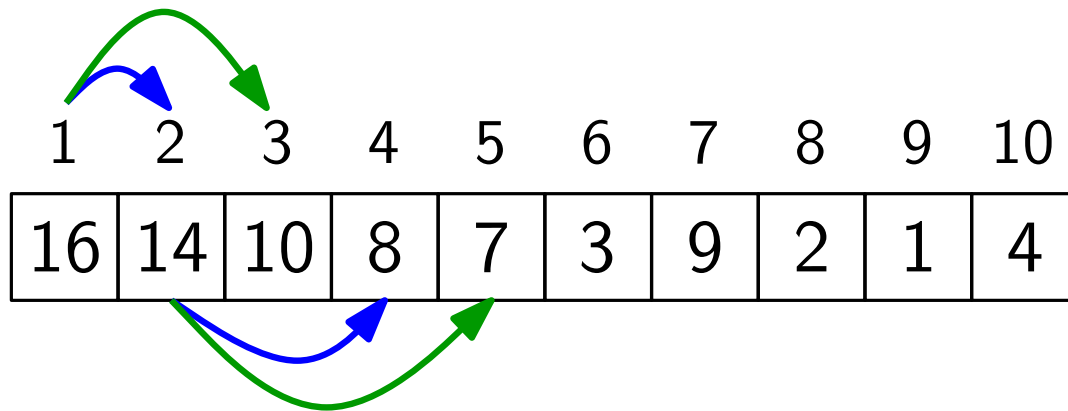
Bäume, gut gepackt



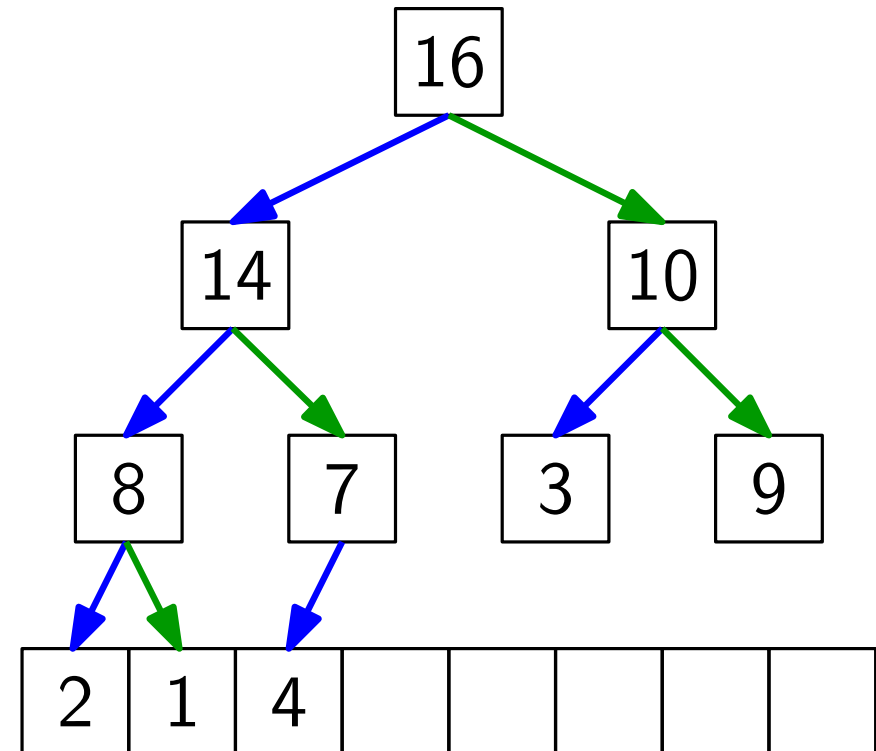
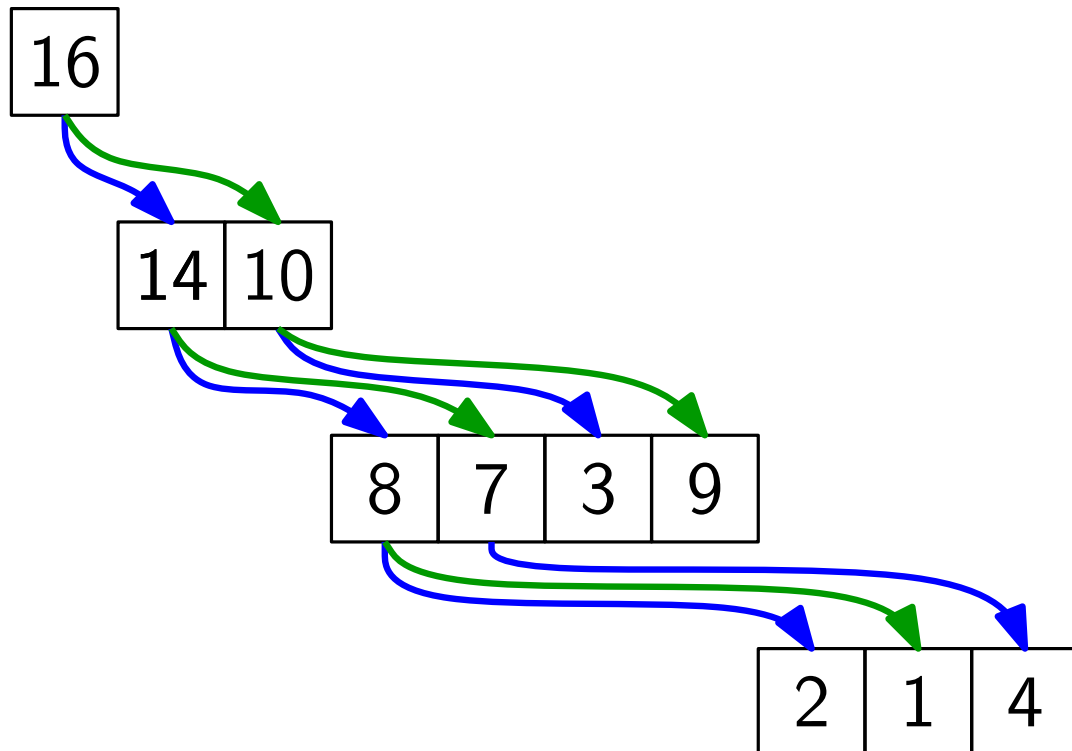
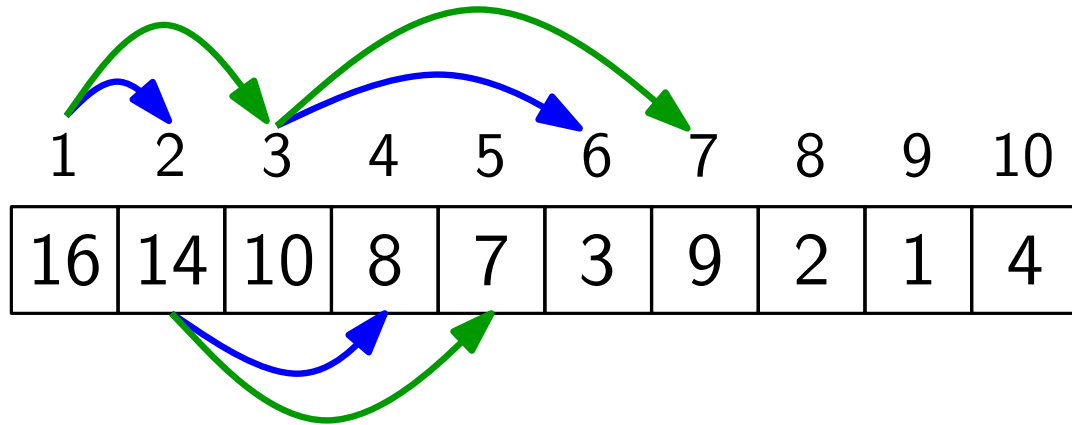
Bäume, gut gepackt



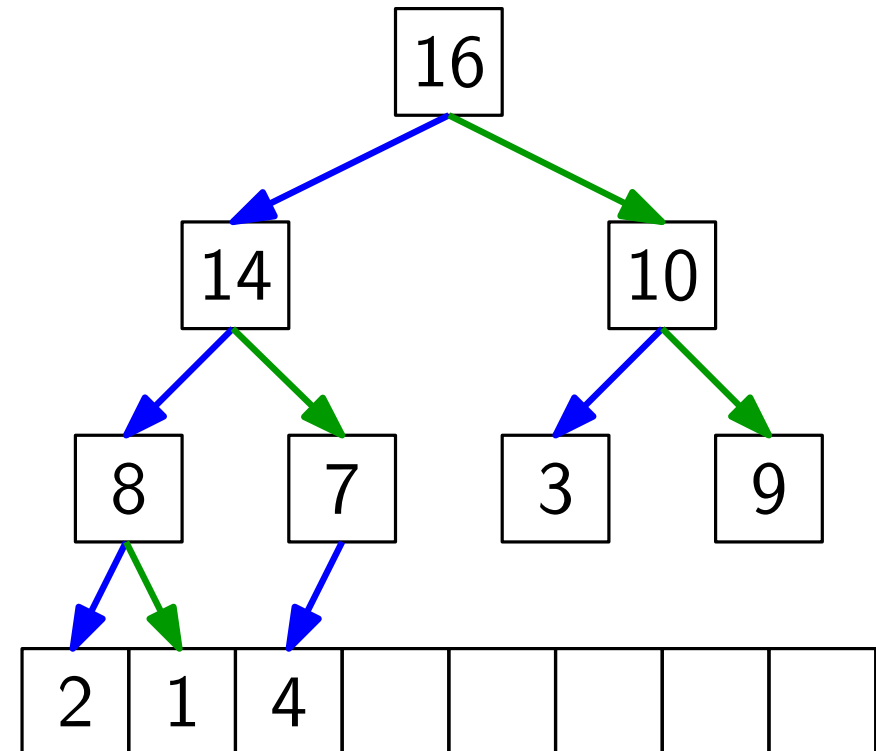
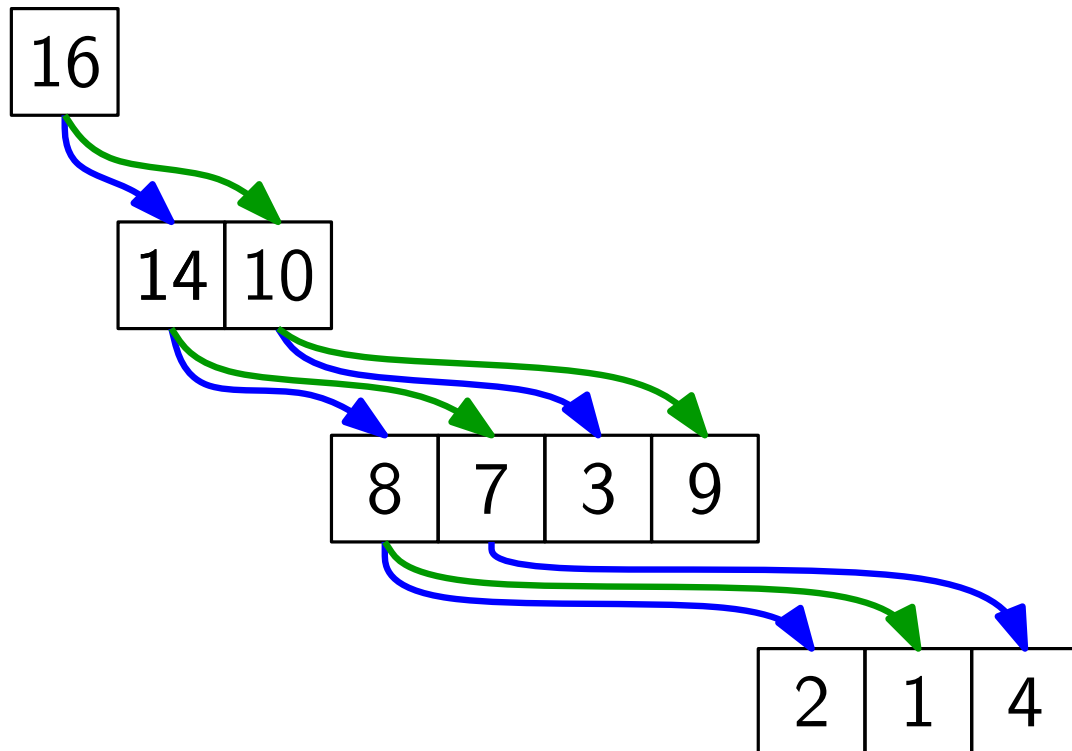
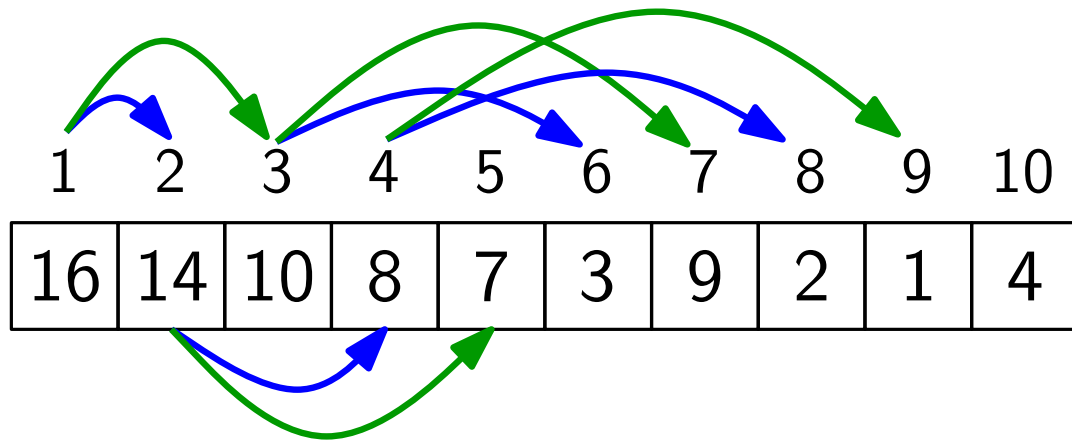
Bäume, gut gepackt



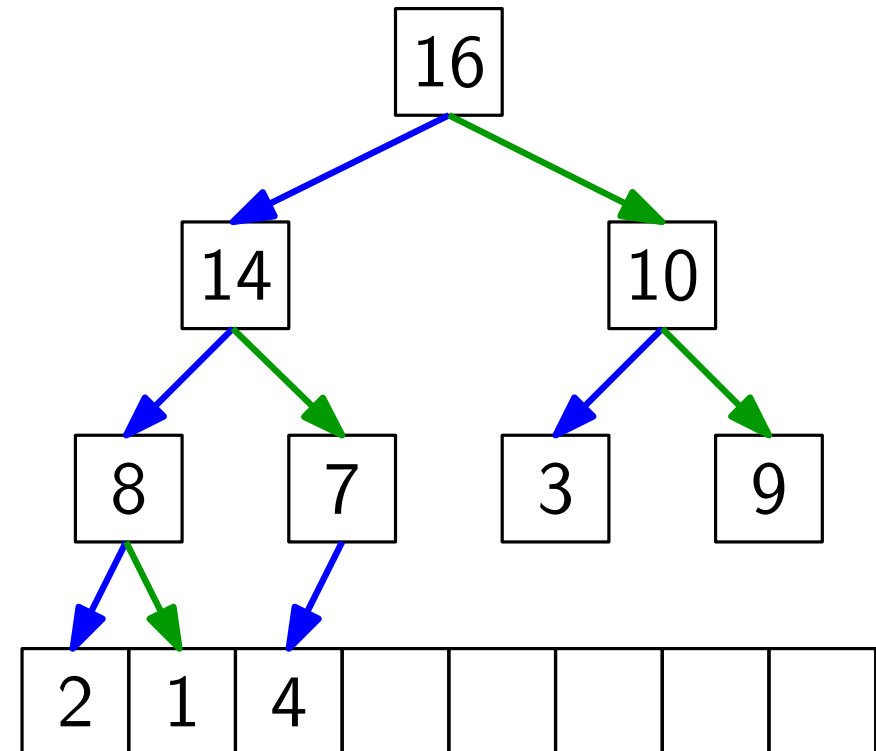
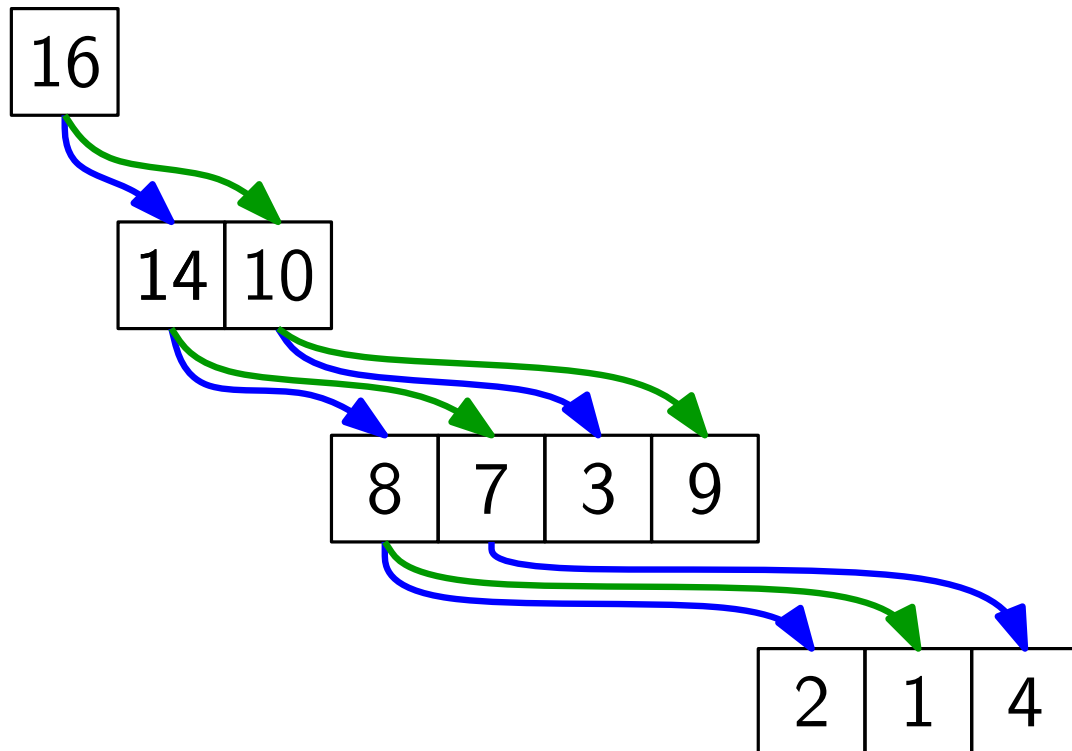
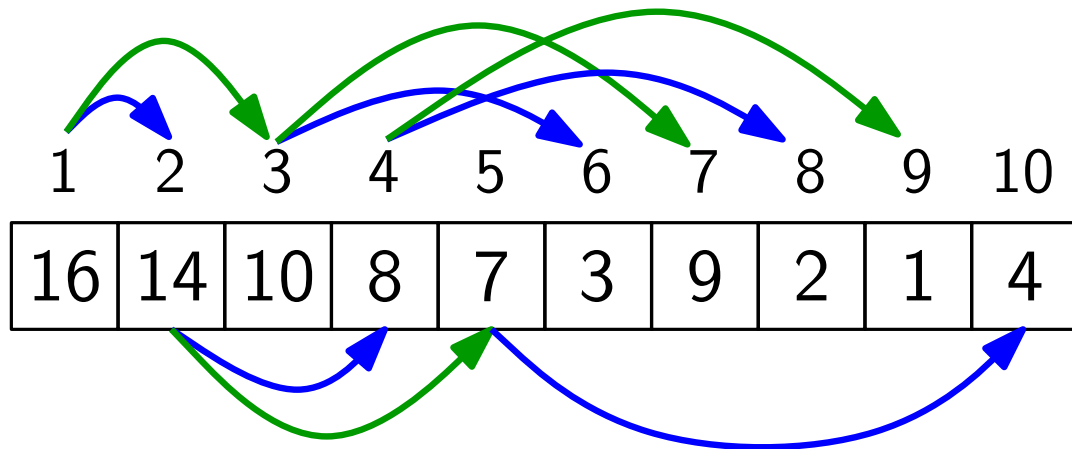
Bäume, gut gepackt



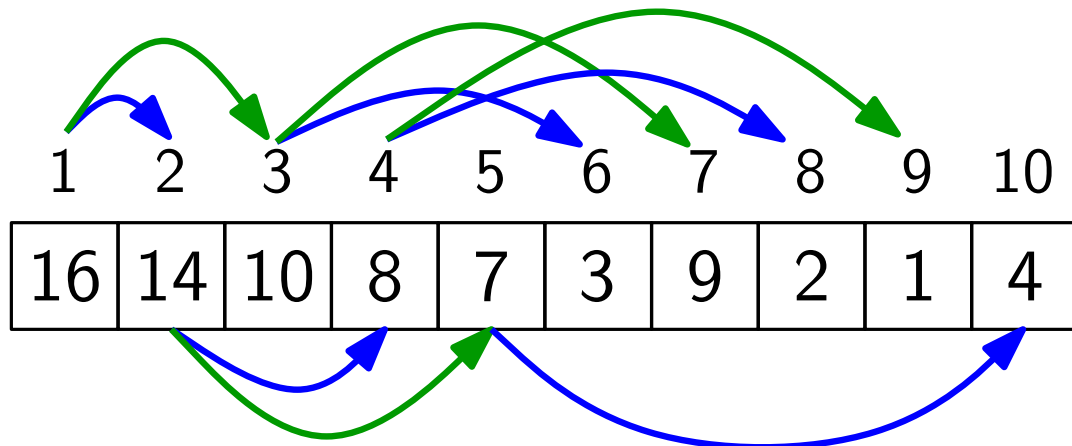
Bäume, gut gepackt



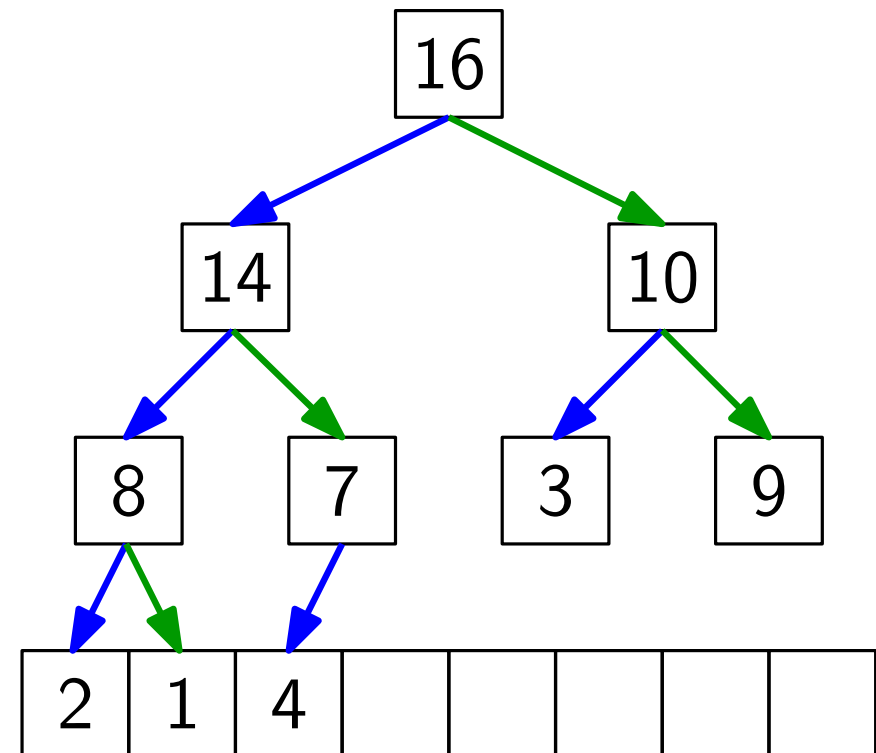
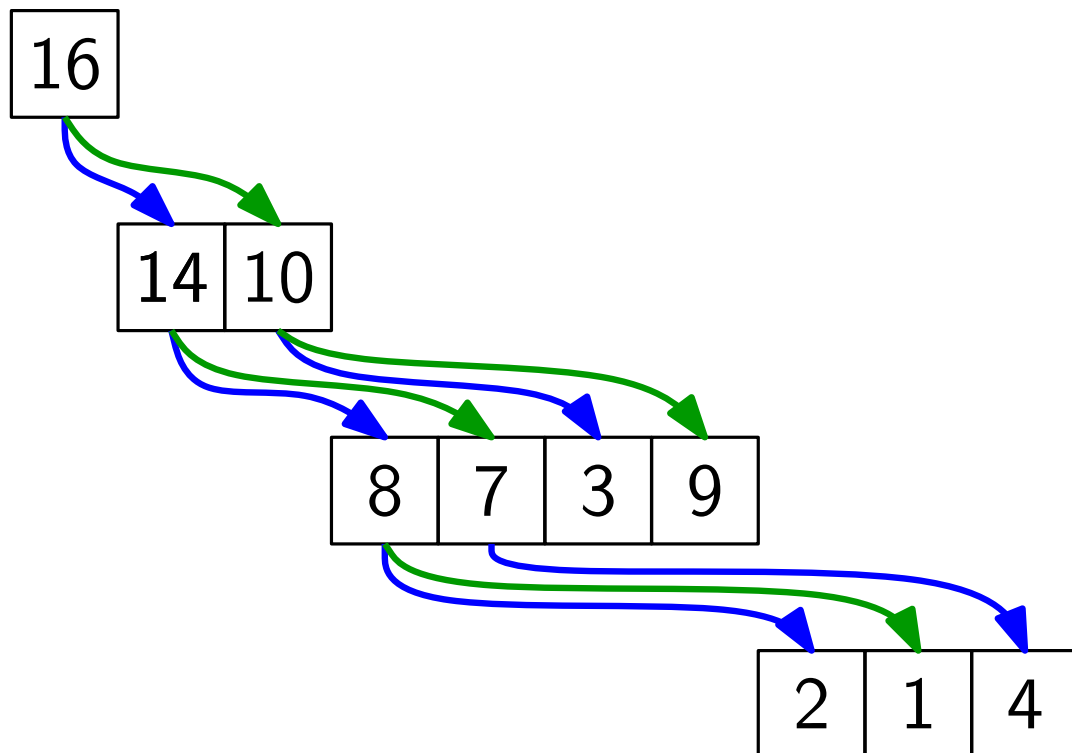
Bäume, gut gepackt



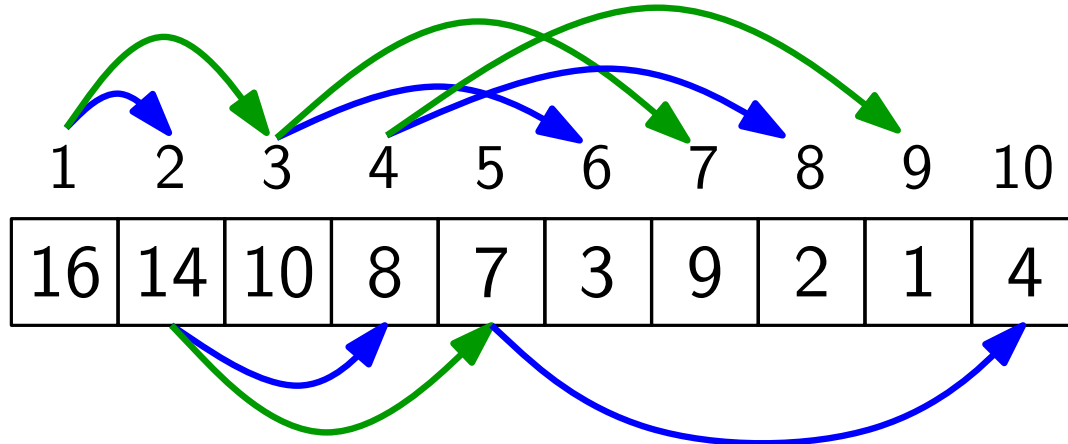
Bäume, gut gepackt



Pfeile implementieren:



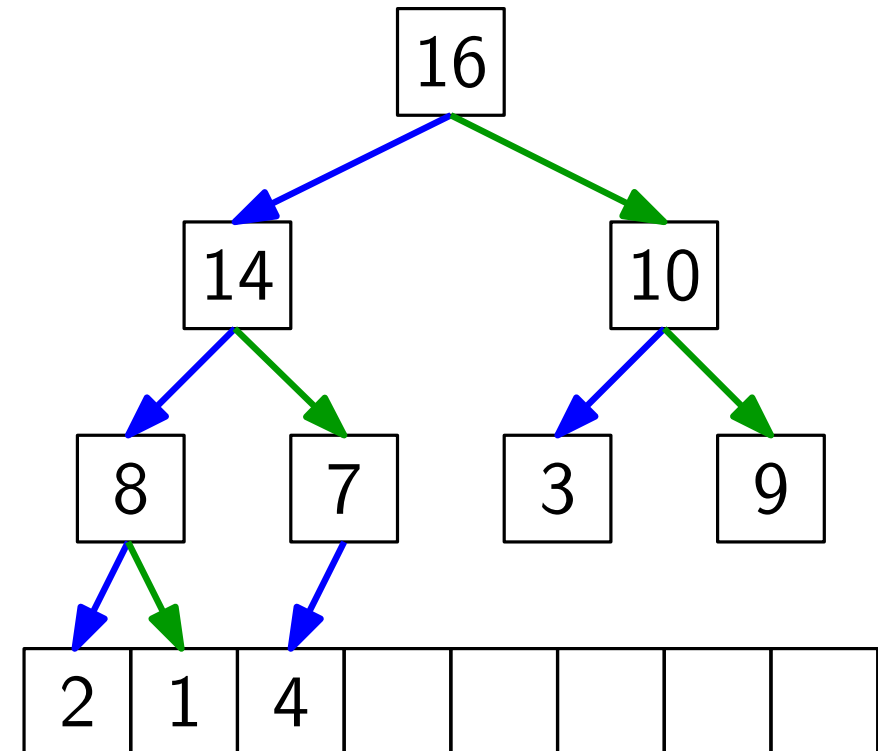
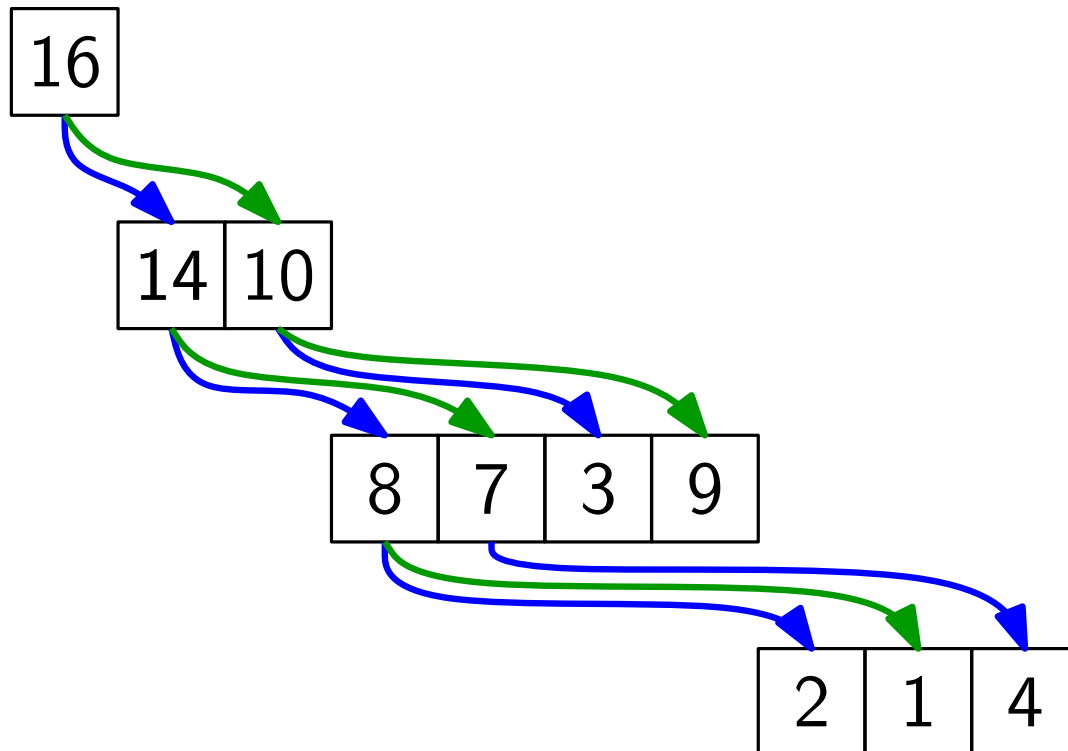
Bäume, gut gepackt



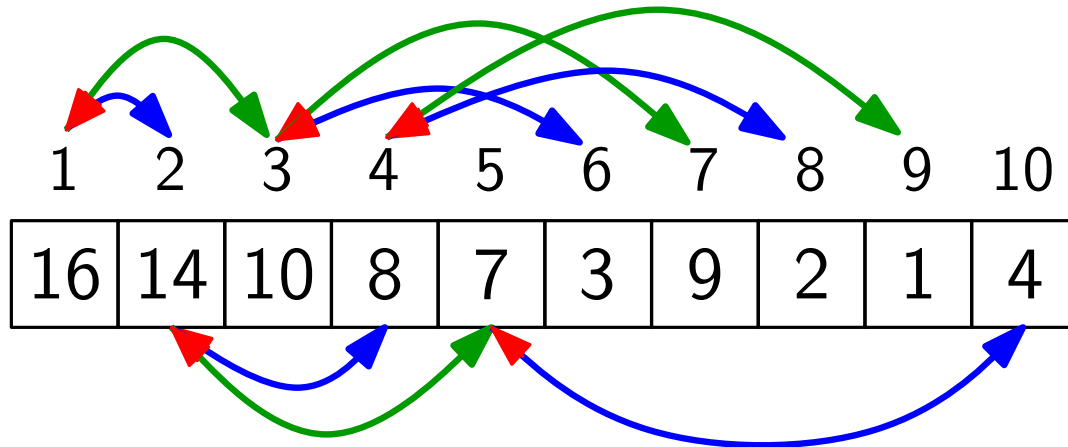
Pfeile implementieren:

left(index i) **return** ...

right(index i) **return** ...



Bäume, gut gepackt

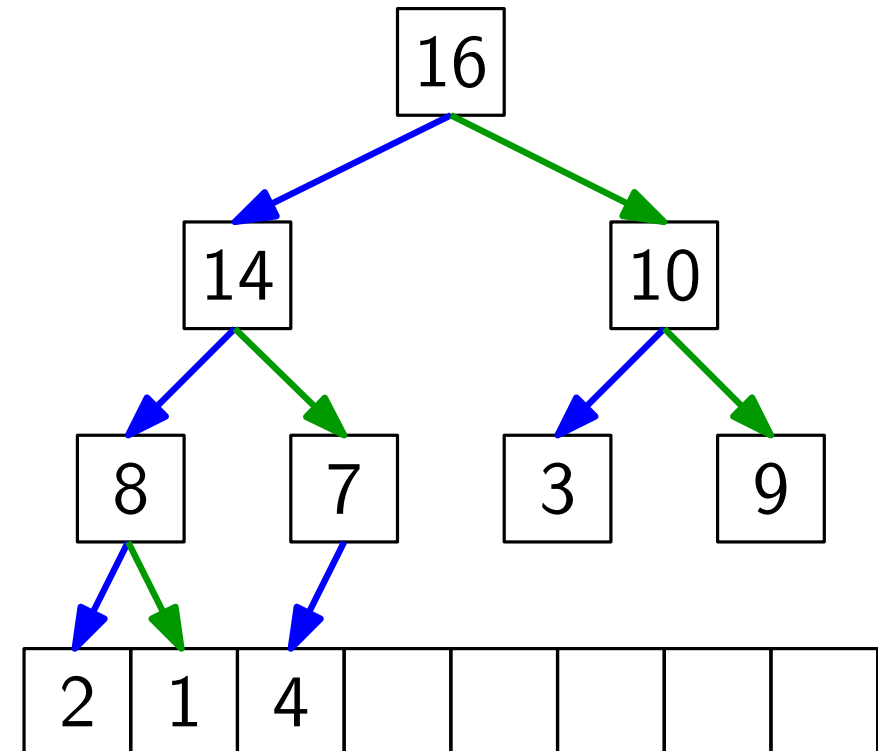
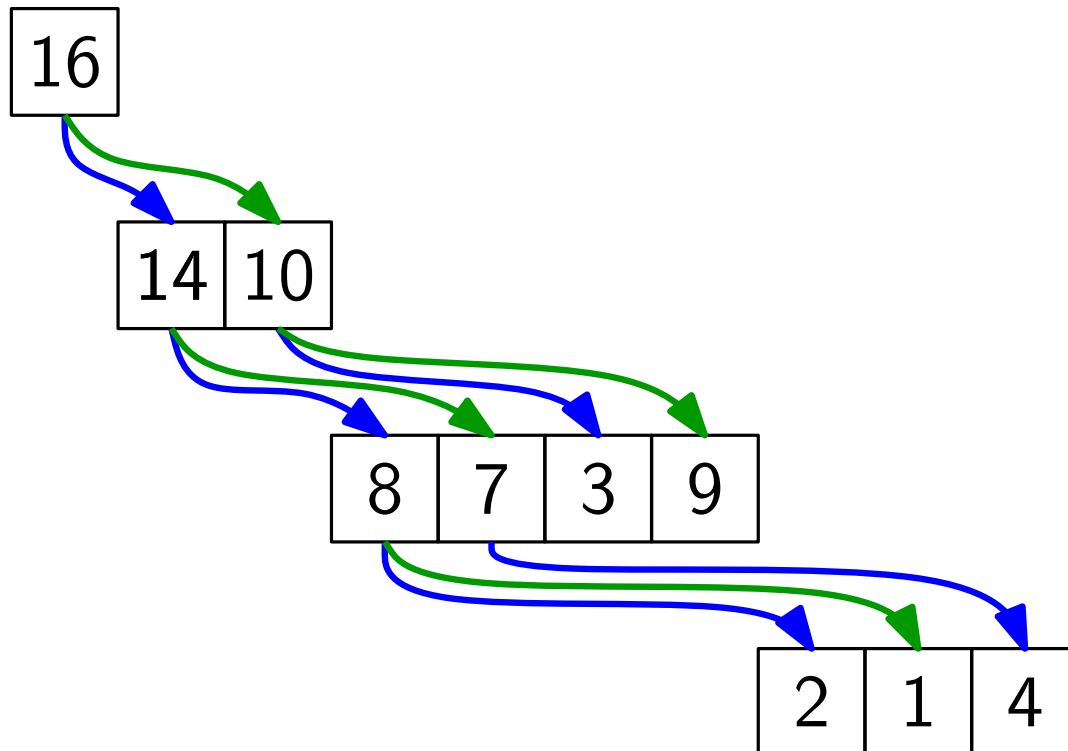


Pfeile implementieren:

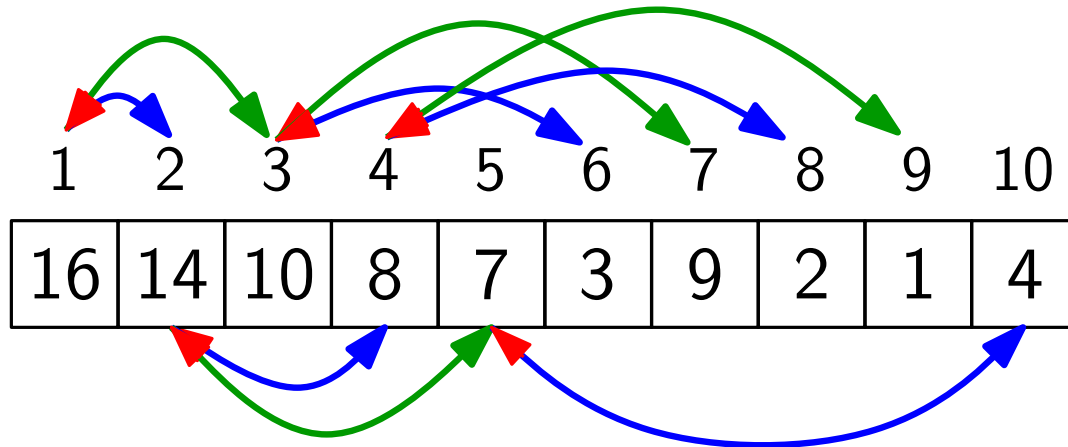
left(index i) **return** ...

right(index i) **return** ...

parent(index i) **return** ...



Bäume, gut gepackt

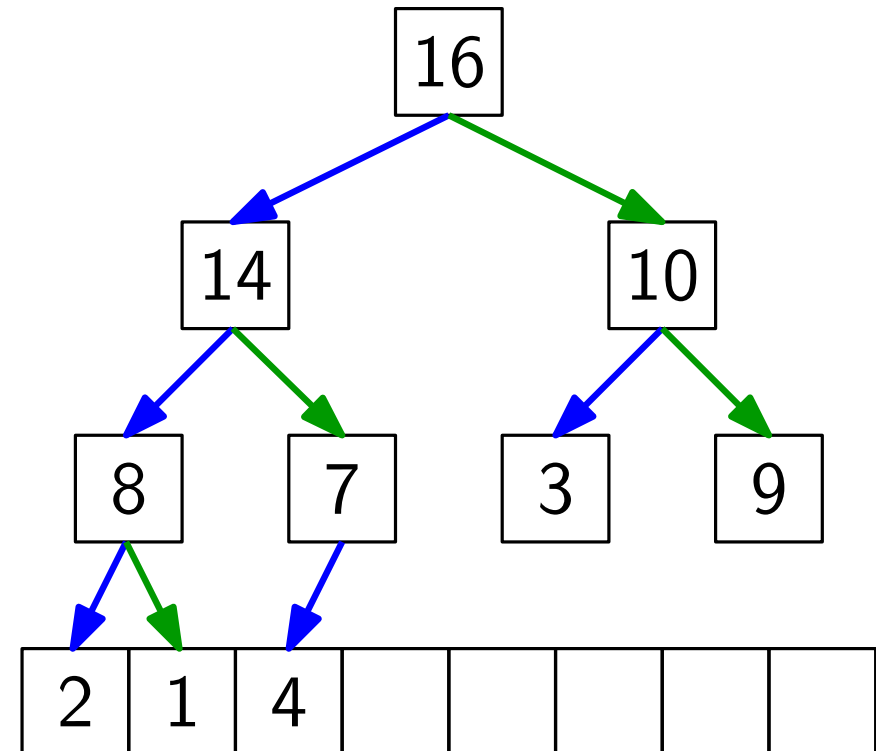
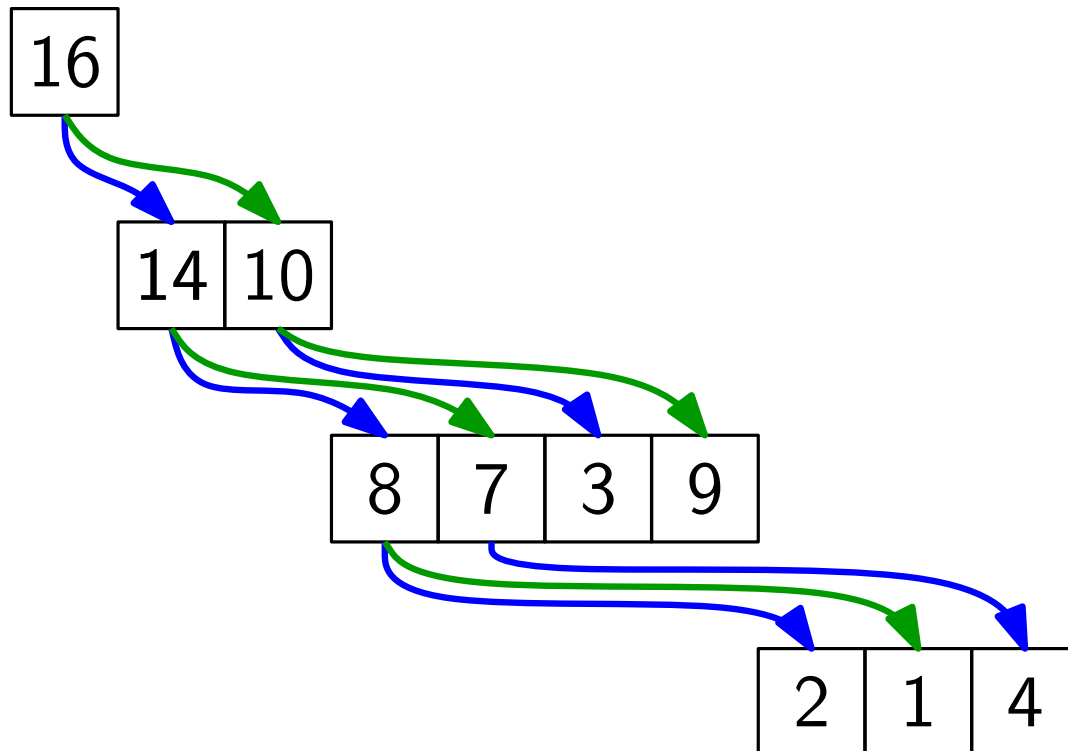


Pfeile implementieren:

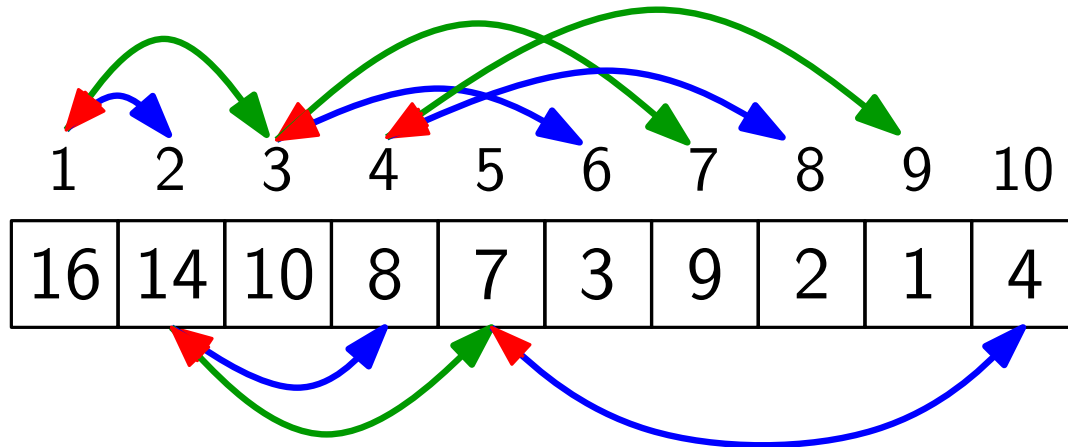
left(index i) **return** $2i$

right(index i) **return** ...

parent(index i) **return** ...



Bäume, gut gepackt

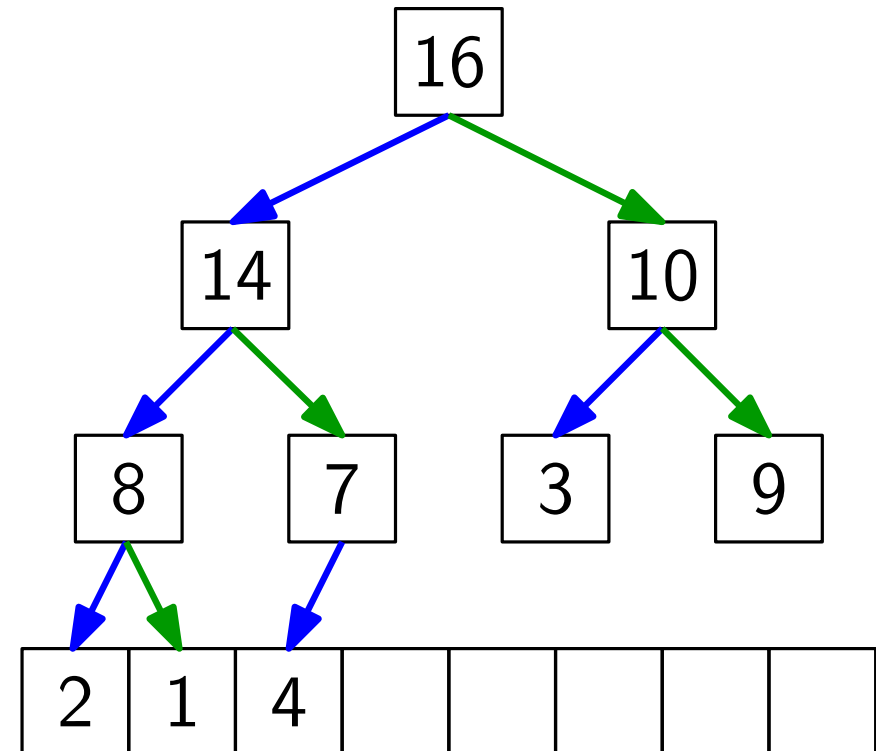
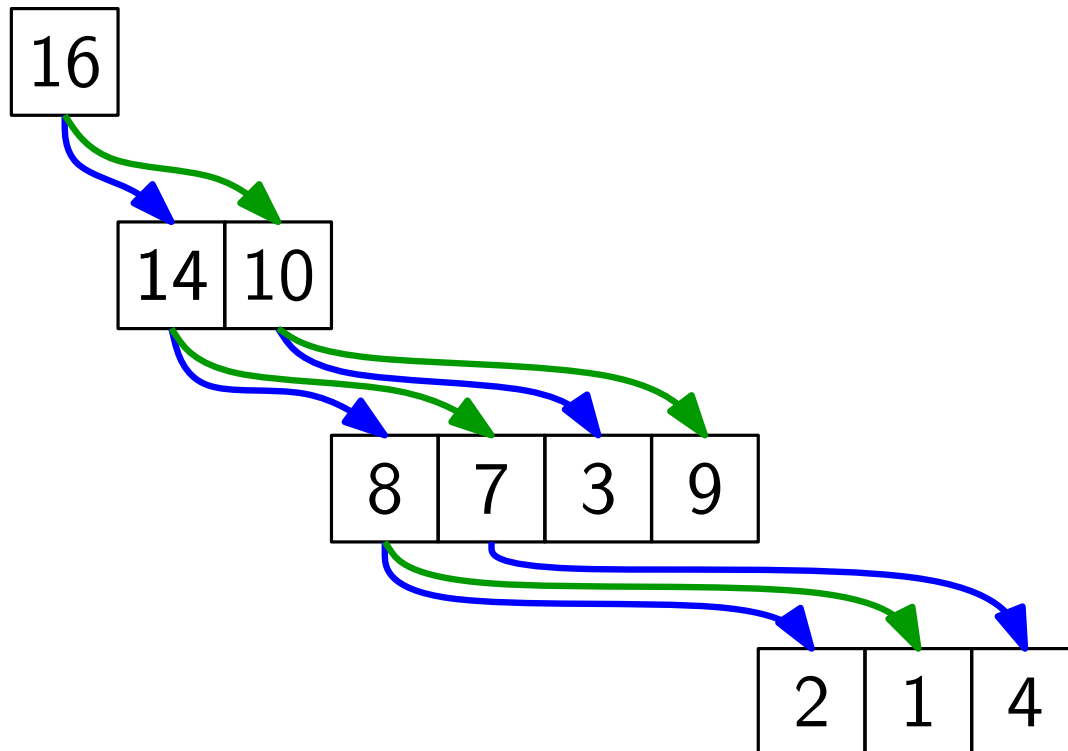


Pfeile implementieren:

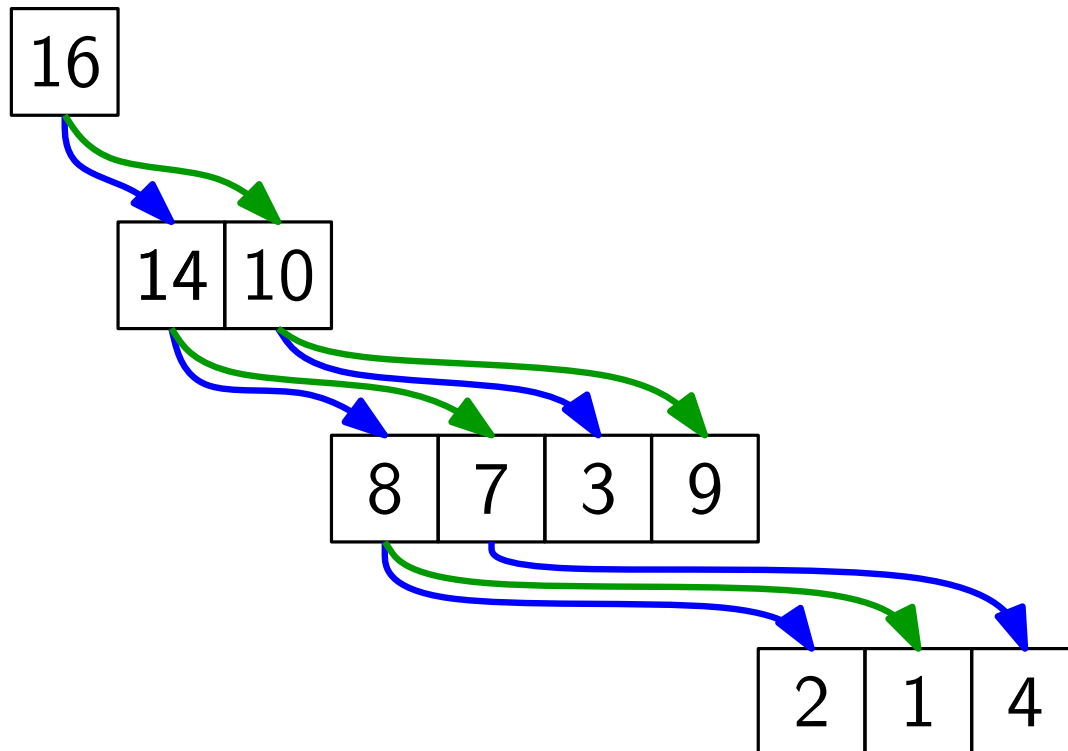
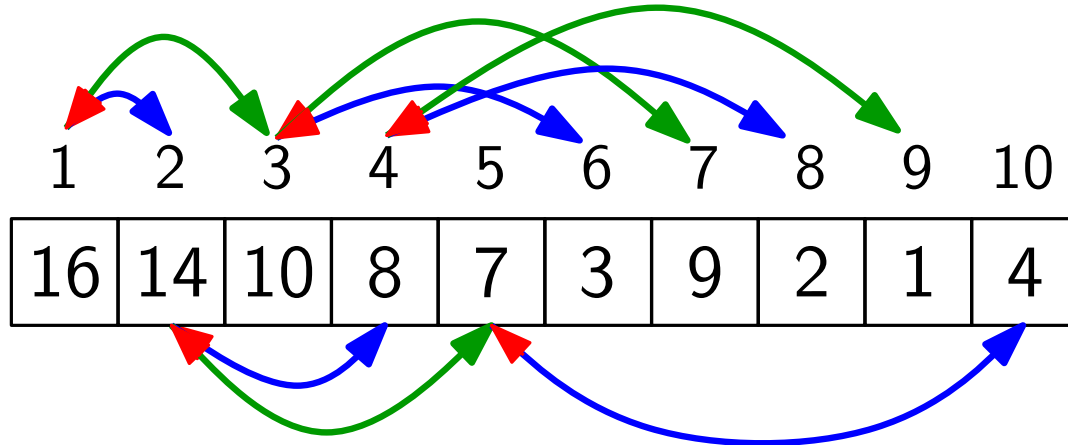
left(index i) **return** $2i$

right(index i) **return** $2i + 1$

parent(index i) **return** ...



Bäume, gut gepackt

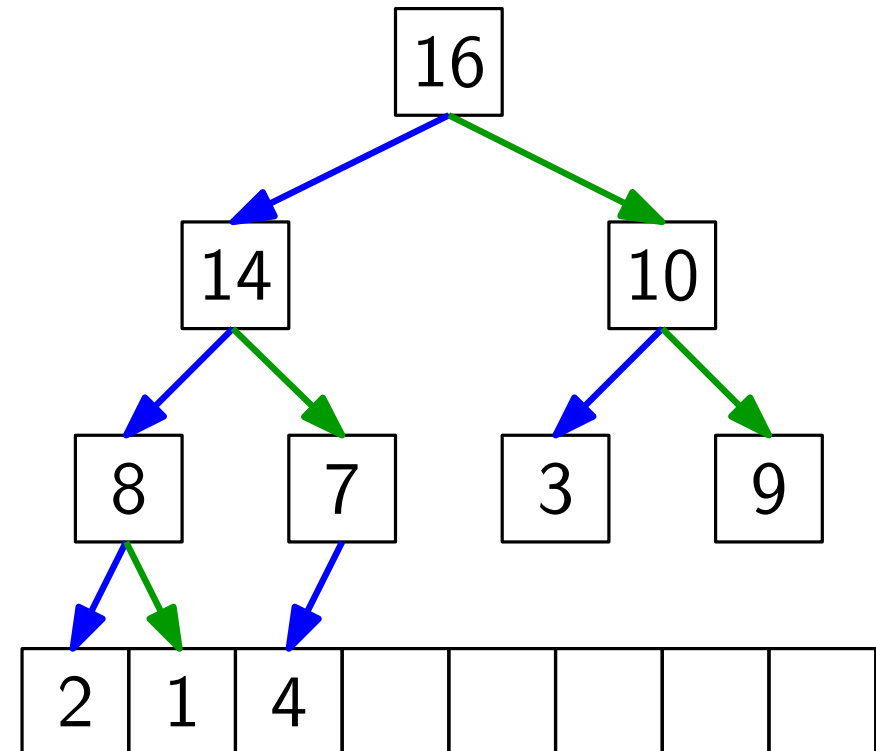


Pfeile implementieren:

left(index i) **return** $2i$

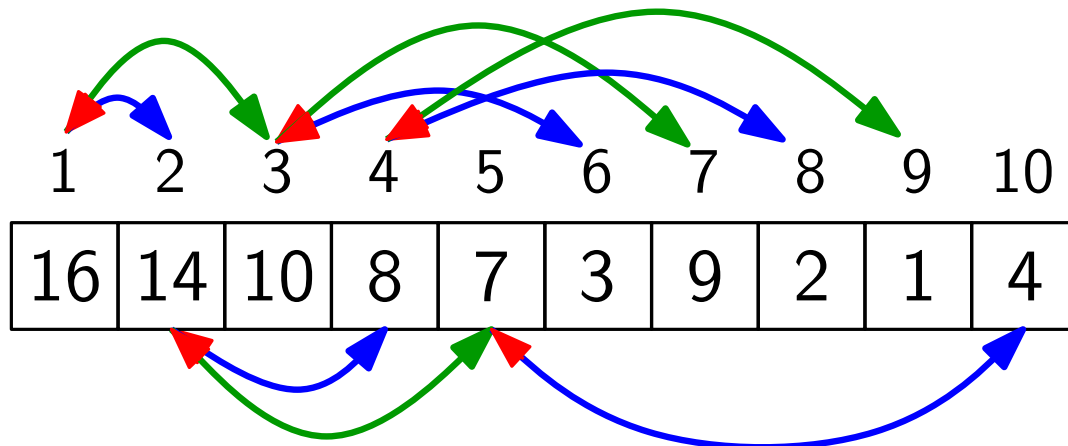
right(index i) **return** $2i + 1$

parent(index i) **return** $\lfloor i/2 \rfloor$



Bäume, gut gepackt

sehr schnelle Rechenoperationen!

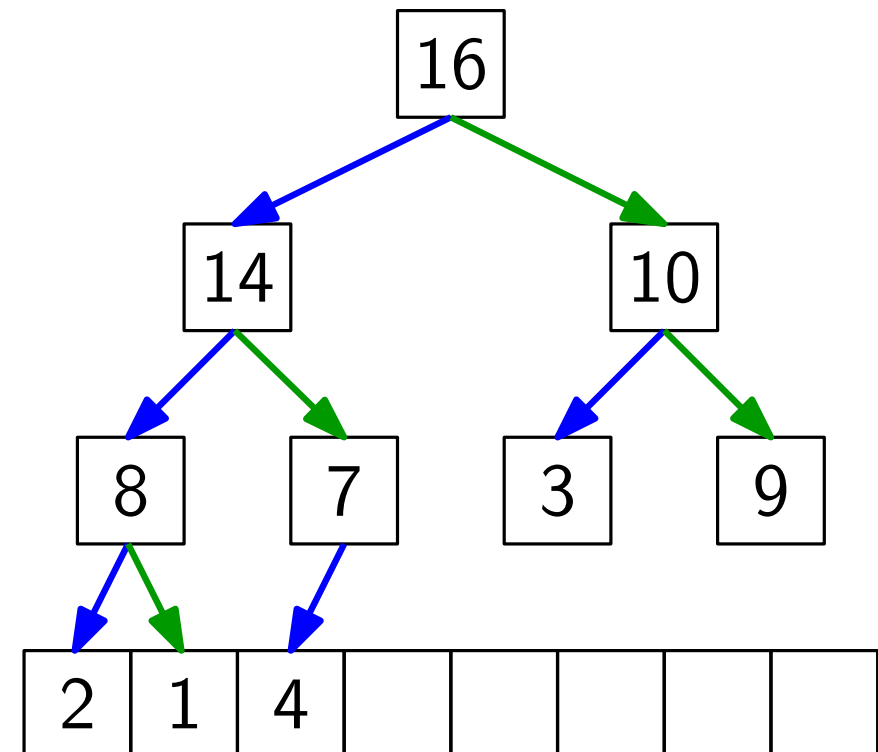
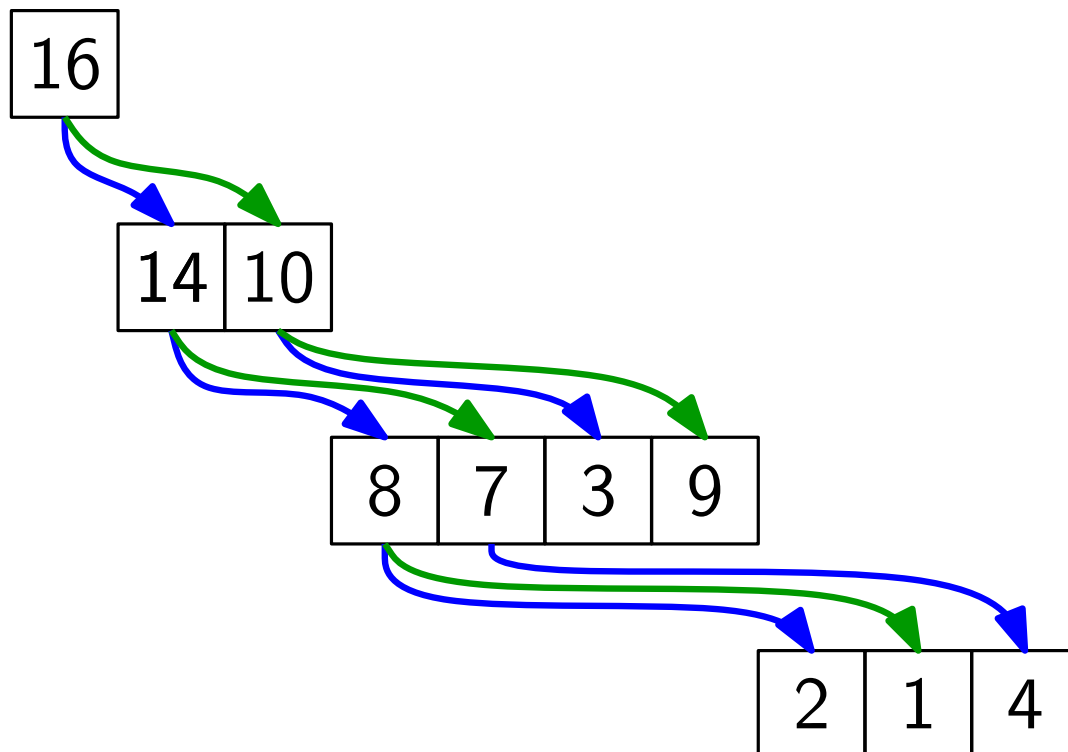


Pfeile implementieren:

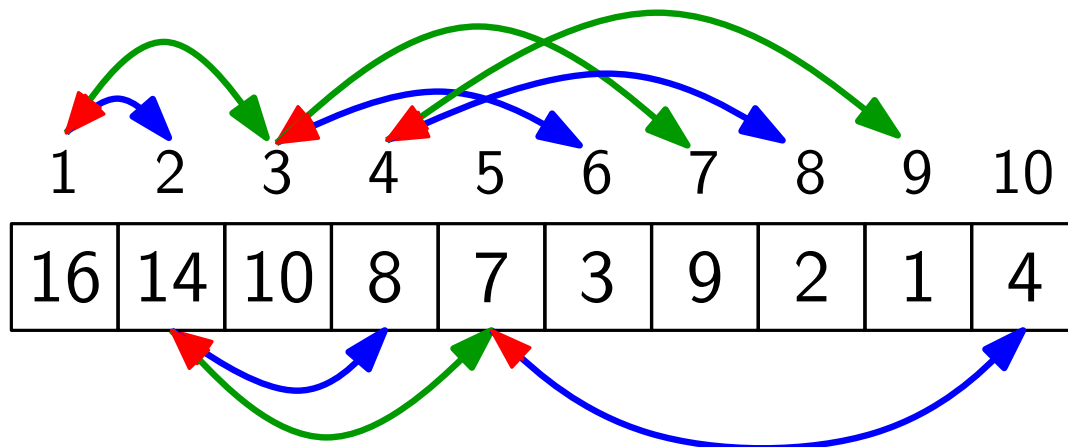
left(index i) **return** $2i$

right(index i) **return** $2i + 1$

parent(index i) **return** $\lfloor i/2 \rfloor$



Bäume, gut gepackt



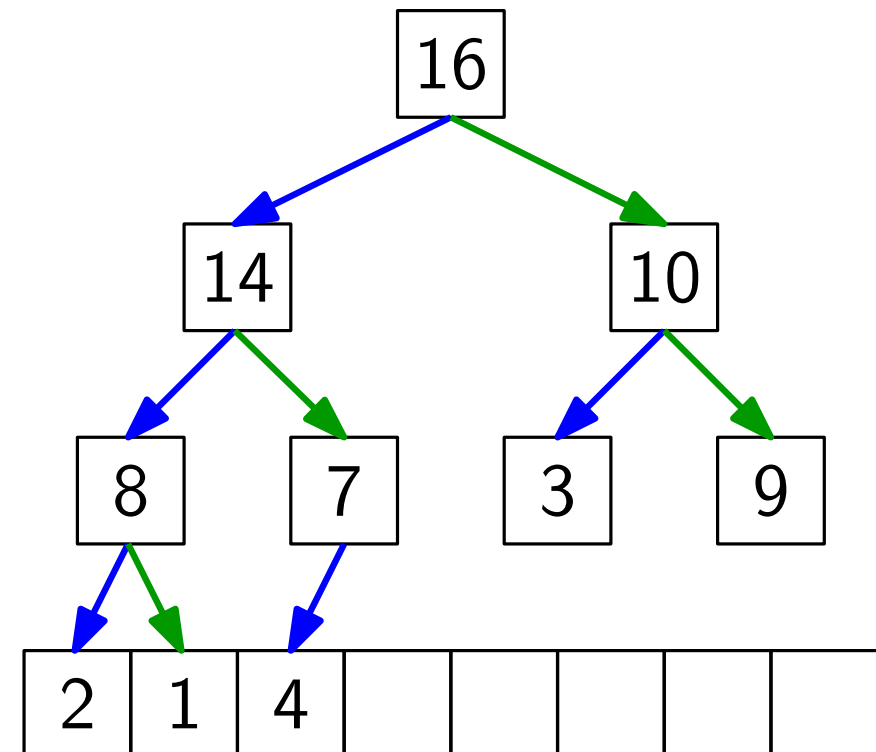
Definition:

Ein *Heap* ist ein Feld, das einem binären Baum entspricht, bei dem

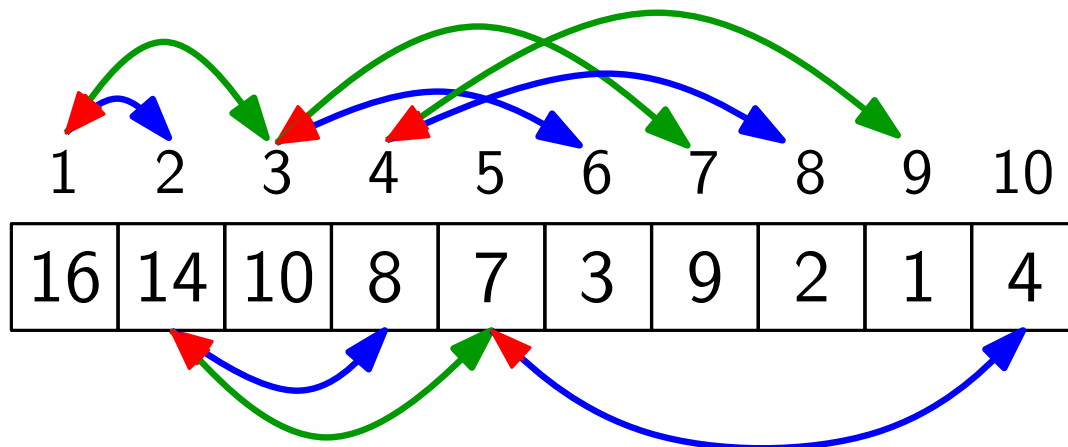
sehr schnelle Rechenoperationen!

Pfeile implementieren:

$\text{left}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i$
 $\text{right}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i + 1$
 $\text{parent}(\text{index } i) \quad \text{return } \lfloor i/2 \rfloor$



Bäume, gut gepackt



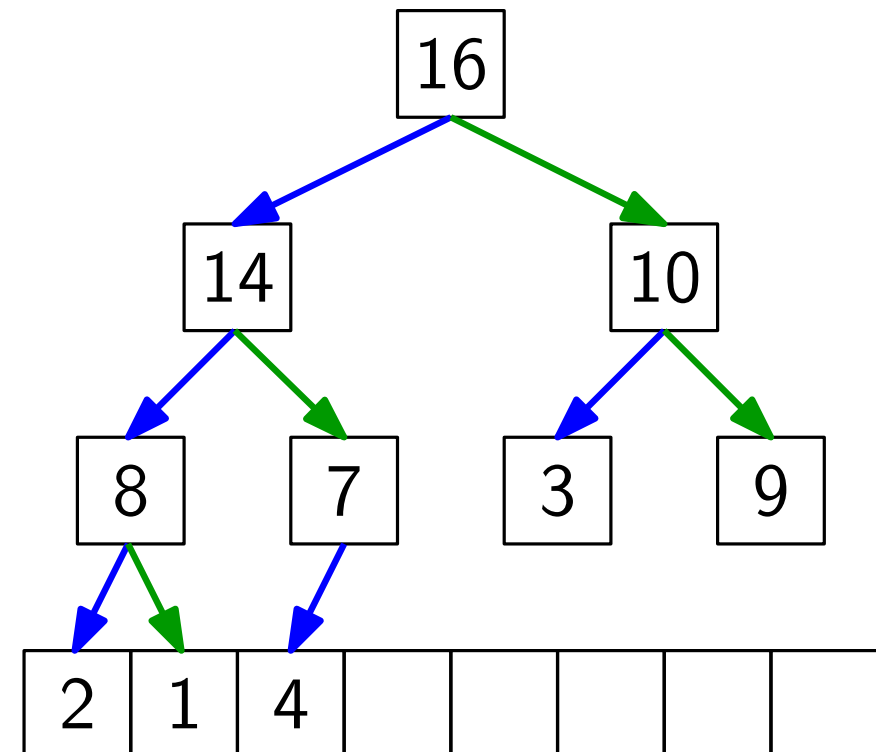
Definition:

Ein *Heap* ist ein Feld, das einem binären Baum entspricht, bei dem

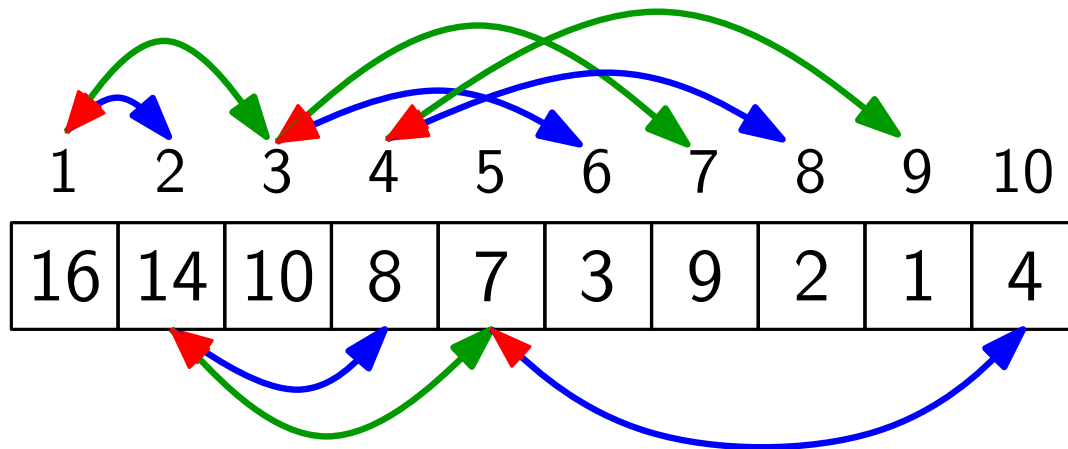
sehr schnelle Rechenoperationen!

Pfeile implementieren:

$\text{left}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i$
 $\text{right}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i + 1$
 $\text{parent}(\text{index } i) \quad \text{return } \lfloor i/2 \rfloor$



Bäume, gut gepackt



Definition:

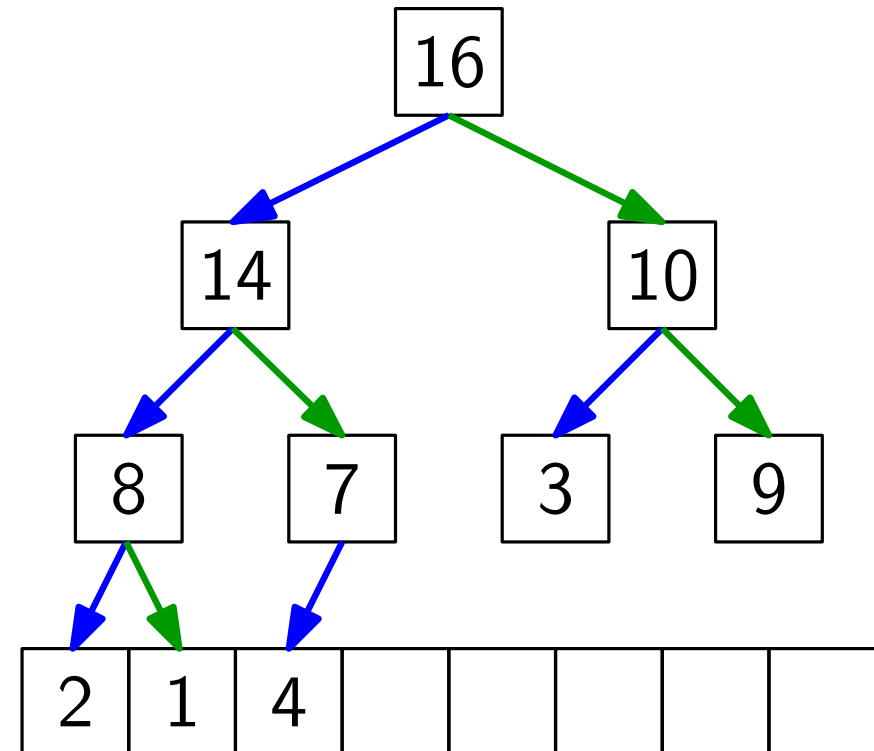
Ein *Heap* ist ein Feld, das einem **binären** Baum entspricht, bei dem

- alle Ebenen außer der letzten voll sind,

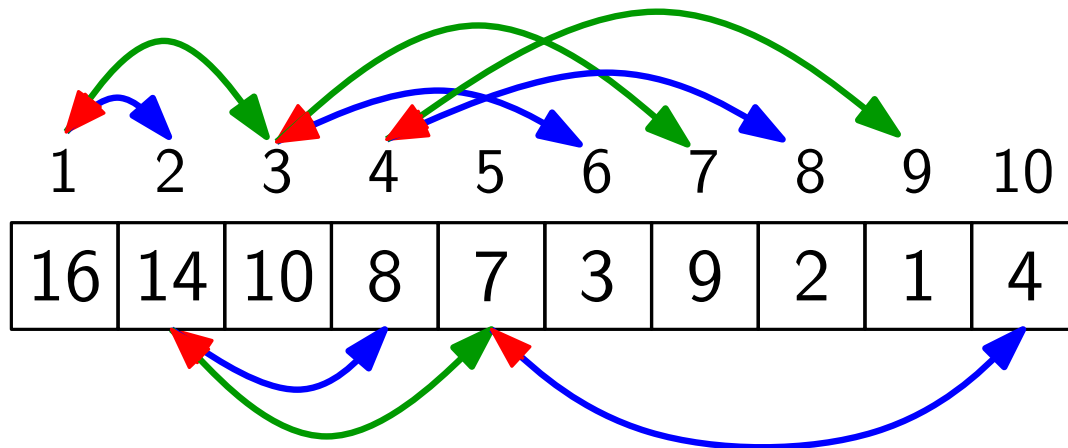
sehr schnelle Rechenoperationen!

Pfeile implementieren:

$\text{left}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i$
 $\text{right}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i + 1$
 $\text{parent}(\text{index } i) \quad \text{return } \lfloor i/2 \rfloor$



Bäume, gut gepackt



Definition:

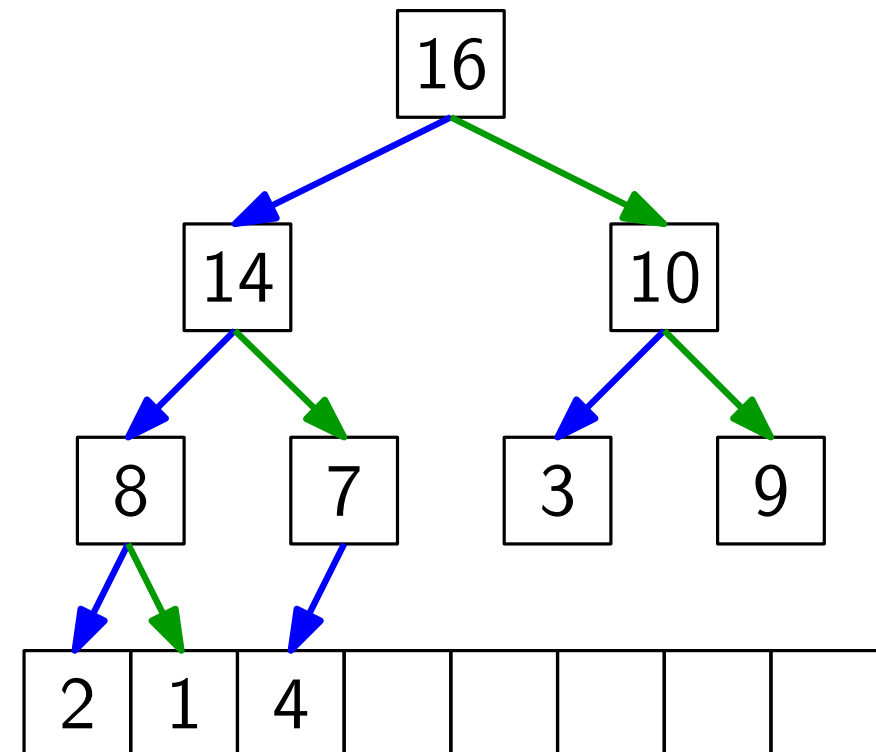
Ein *Heap* ist ein Feld, das einem **binären** Baum entspricht, bei dem

- alle Ebenen außer der letzten voll sind,
- die letzte Ebene v.l.n.r. gefüllt ist und

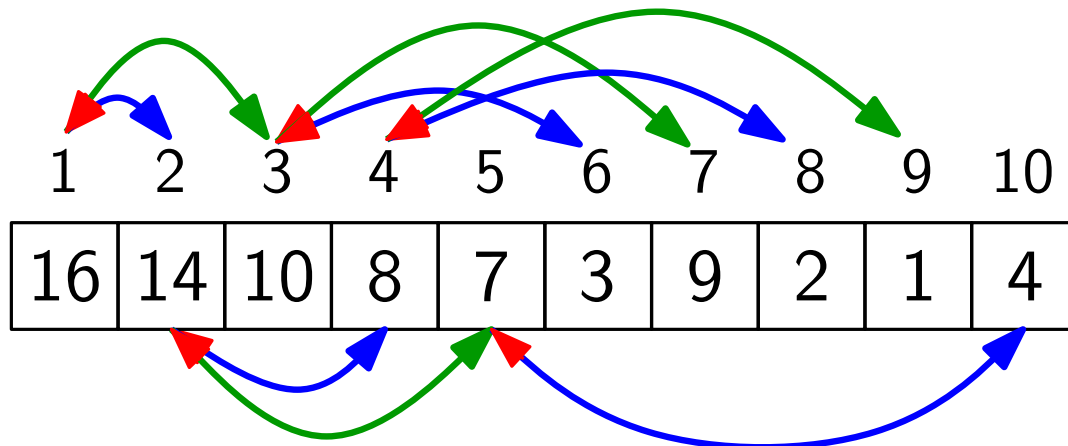
sehr schnelle Rechenoperationen!

Pfeile implementieren:

$\text{left}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i$
 $\text{right}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i + 1$
 $\text{parent}(\text{index } i) \quad \text{return } \lfloor i/2 \rfloor$



Bäume, gut gepackt



Definition:

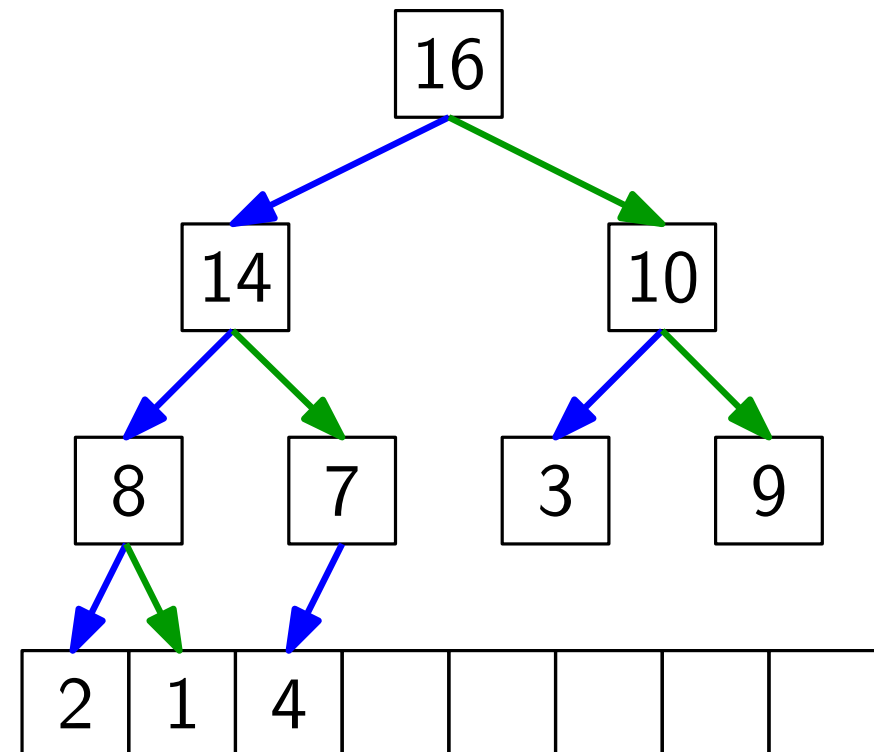
Ein *Heap* ist ein Feld, das einem **binären** Baum entspricht, bei dem

- alle Ebenen außer der letzten voll sind,
- die letzte Ebene v.l.n.r. gefüllt ist und
- die *Heap-Eigenschaft* gilt.

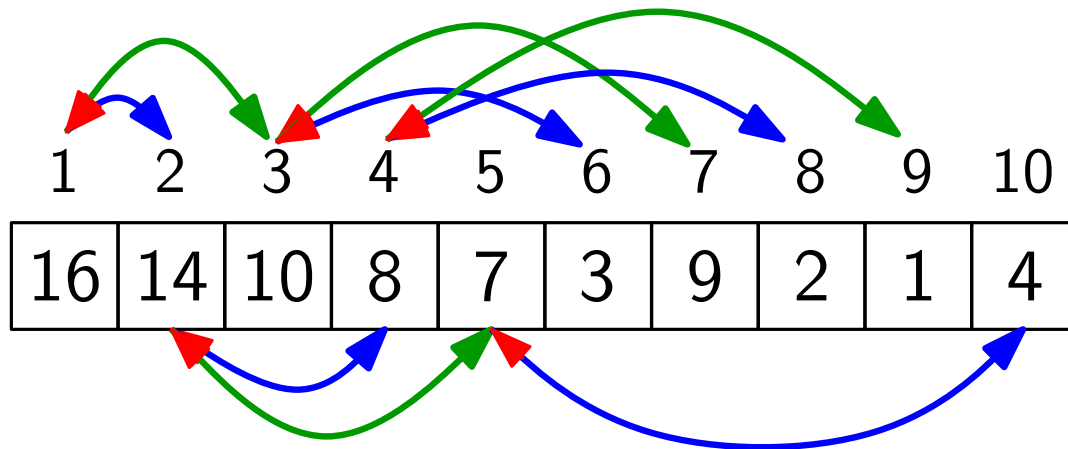
sehr schnelle Rechenoperationen!

Pfeile implementieren:

$\text{left}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i$
 $\text{right}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i + 1$
 $\text{parent}(\text{index } i) \quad \text{return } \lfloor i/2 \rfloor$



Bäume, gut gepackt



Definition:

Ein Heap hat die
Max-Heap-Eigenschaft,

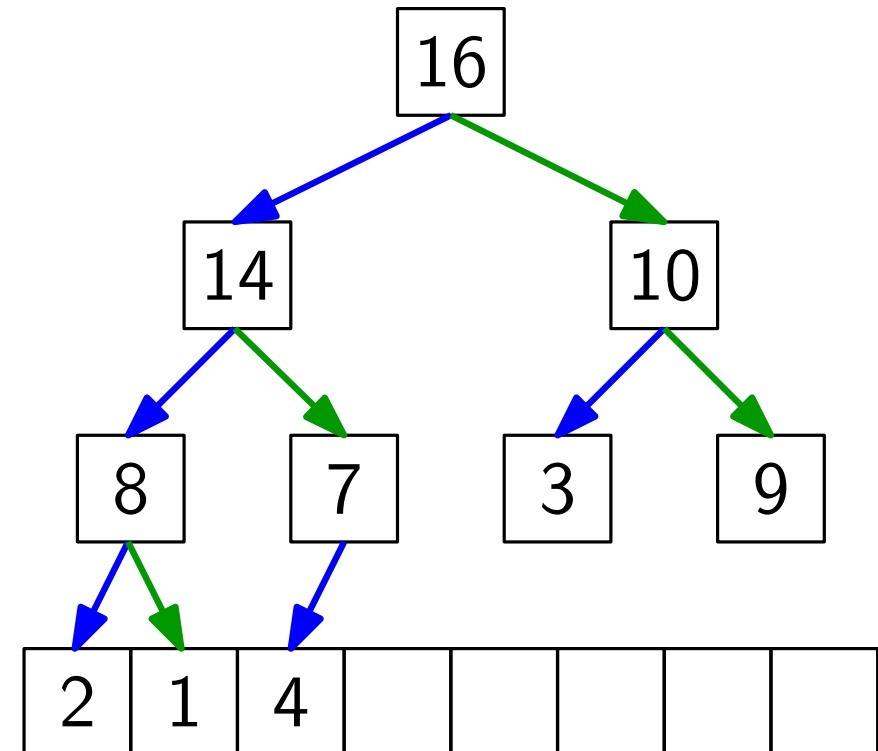
sehr schnelle Rechenoperationen!

Pfeile implementieren:

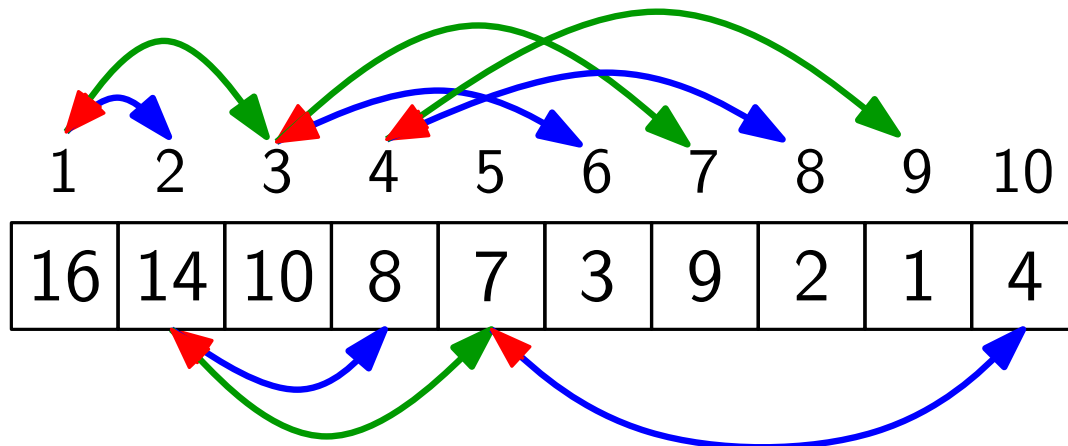
left(index i) **return** $2i$

right(index i) **return** $2i + 1$

parent(index i) **return** $\lfloor i/2 \rfloor$



Bäume, gut gepackt



Definition:

Ein Heap hat die

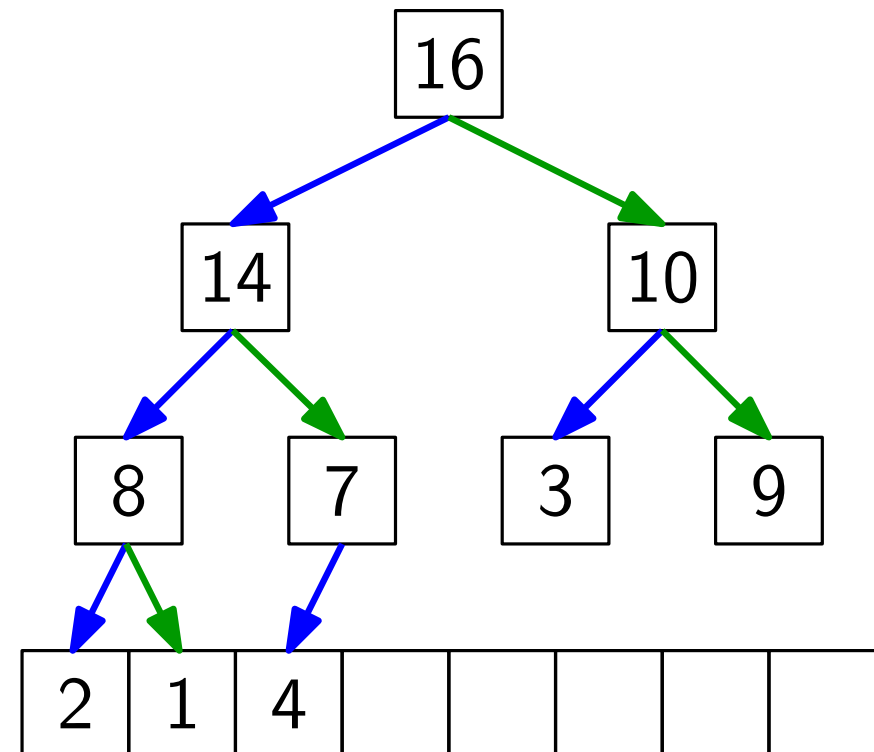
Max-Heap-Eigenschaft,

wenn für jeden Knoten $i > 1$ gilt:
 $A[\text{parent}(i)] \geq A[i]$.

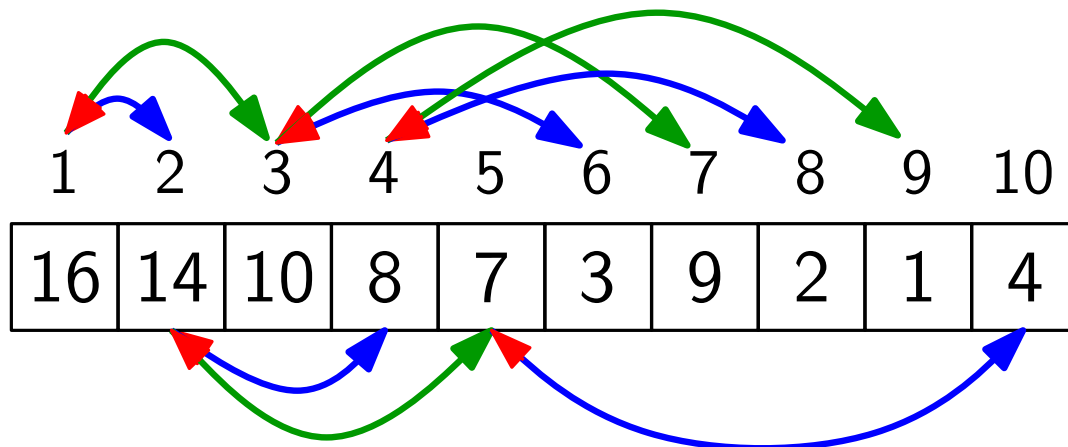
sehr schnelle Rechenoperationen!

Pfeile implementieren:

$\text{left}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i$
 $\text{right}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i + 1$
 $\text{parent}(\text{index } i) \quad \text{return } \lfloor i/2 \rfloor$



Bäume, gut gepackt



Definition:

Ein Heap hat die

Max-Heap-Eigenschaft,

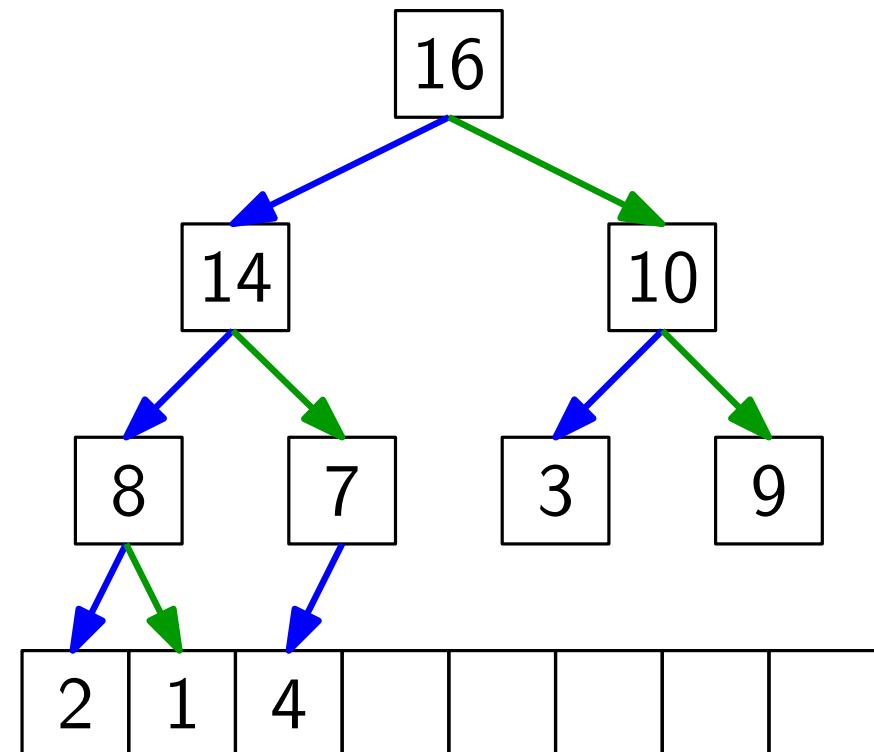
wenn für jeden Knoten $i > 1$ gilt:
 $A[\text{parent}(i)] \geq A[i]$.

So ein Heap heißt *Max-Heap*.

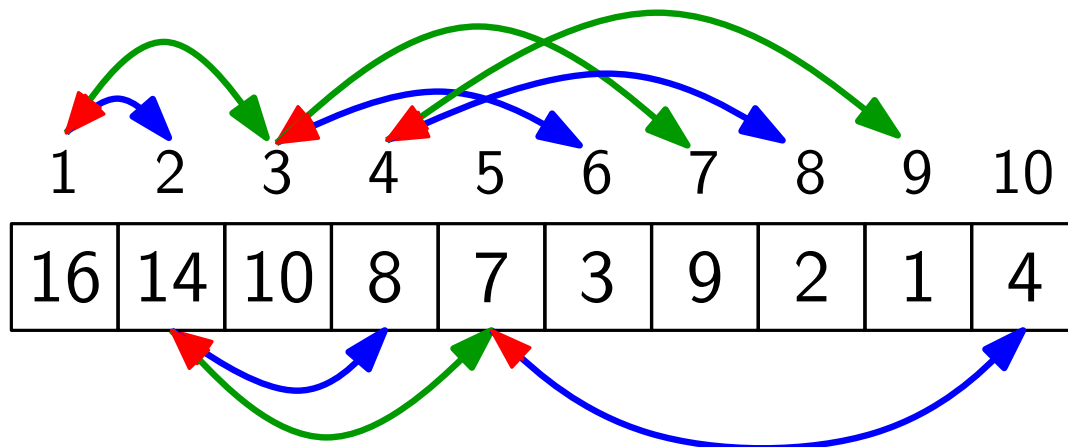
sehr schnelle Rechenoperationen!

Pfeile implementieren:

$\text{left}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i$
 $\text{right}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i + 1$
 $\text{parent}(\text{index } i) \quad \text{return } \lfloor i/2 \rfloor$



Bäume, gut gepackt



Definition:

Ein Heap hat die

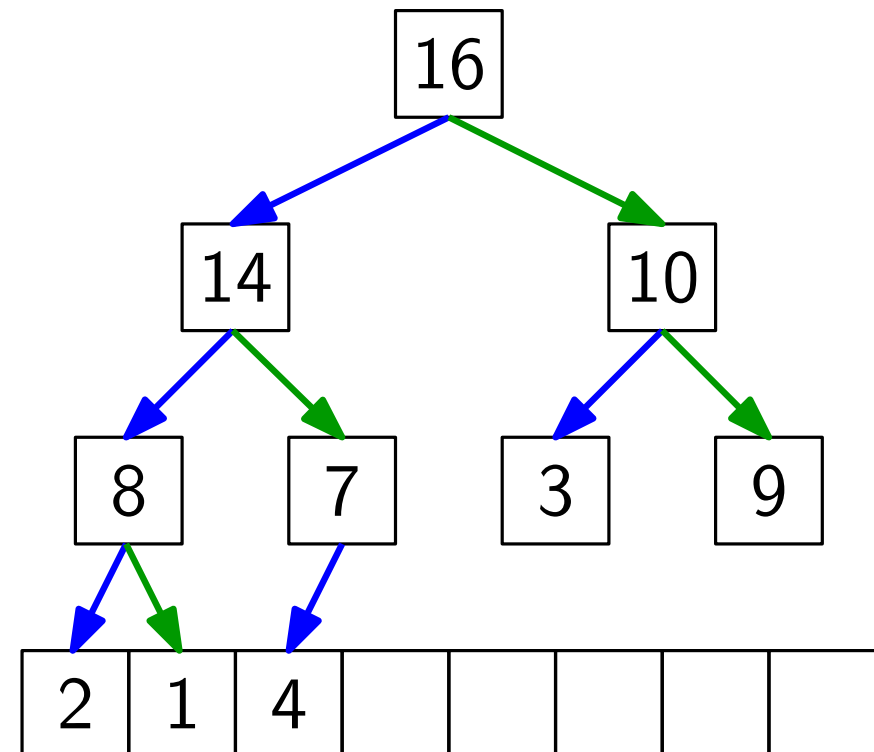
~~Max-Heap-Eigenschaft~~,
wenn für jeden Knoten $i > 1$ gilt:
 $A[\text{parent}(i)] \not\geq A[i]$.

So ein Heap heißt ~~Max-Heap~~.

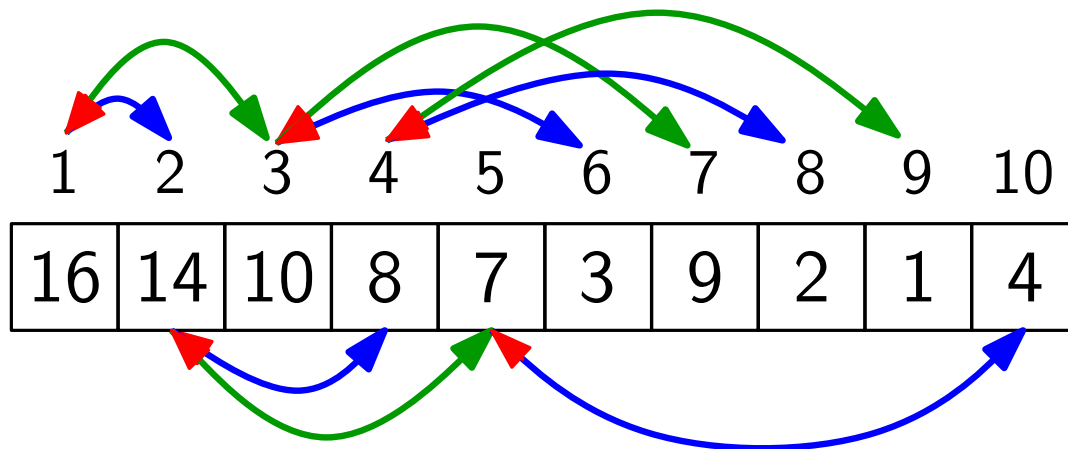
sehr schnelle Rechenoperationen!

Pfeile implementieren:

$\text{left}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i$
 $\text{right}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i + 1$
 $\text{parent}(\text{index } i) \quad \text{return } \lfloor i/2 \rfloor$



Bäume, gut gepackt



Definition:

Ein Heap hat die

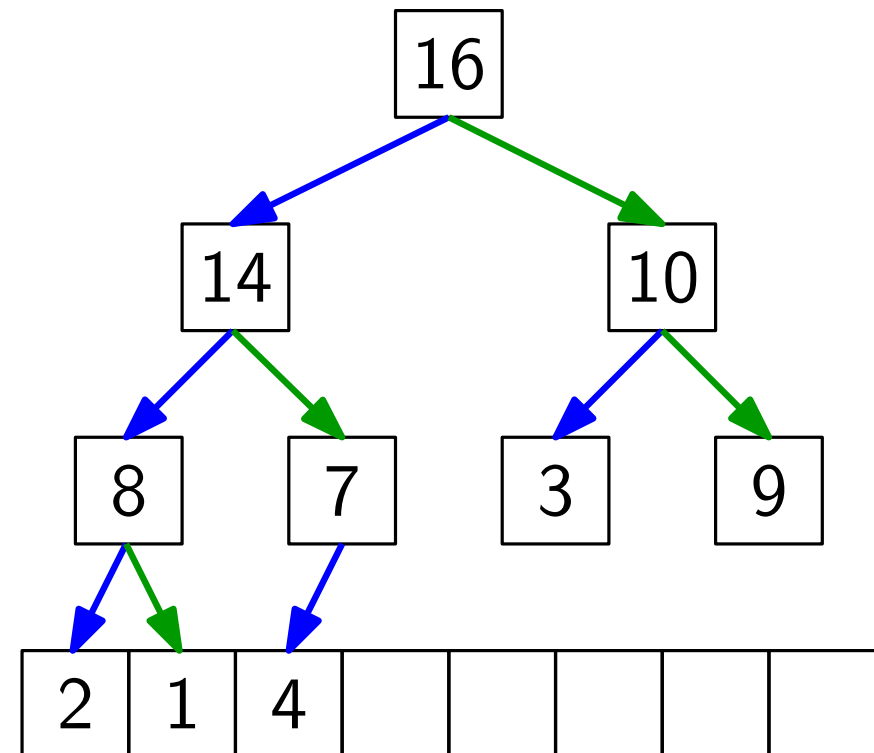
~~Min~~ ~~Max~~-Heap-Eigenschaft,
wenn für jeden Knoten $i > 1$ gilt:
 $A[\text{parent}(i)] \not\leq A[i]$.

So ein Heap heißt ~~Max~~-Heap.

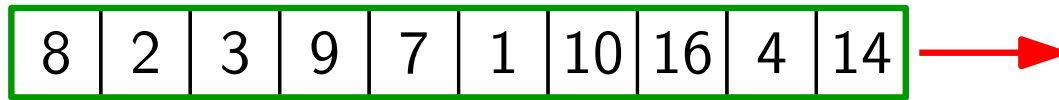
sehr schnelle Rechenoperationen!

Pfeile implementieren:

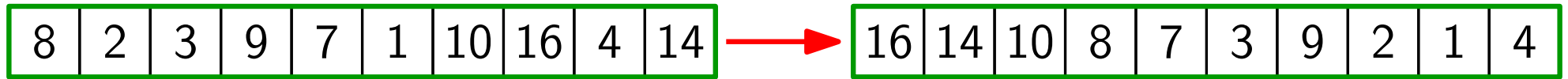
$\text{left}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i$
 $\text{right}(\text{index } i) \quad \text{return } 2i + 1$
 $\text{parent}(\text{index } i) \quad \text{return } \lfloor i/2 \rfloor$



Baustelle



Baustelle



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„totales Chaos“



16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„totales Chaos“



16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„totales Chaos“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„totales Chaos“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„totales Chaos“



16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!



16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

Fertig?

Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„totales Chaos“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„totales Chaos“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„totales Chaos“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!

Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„**totales Chaos**“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

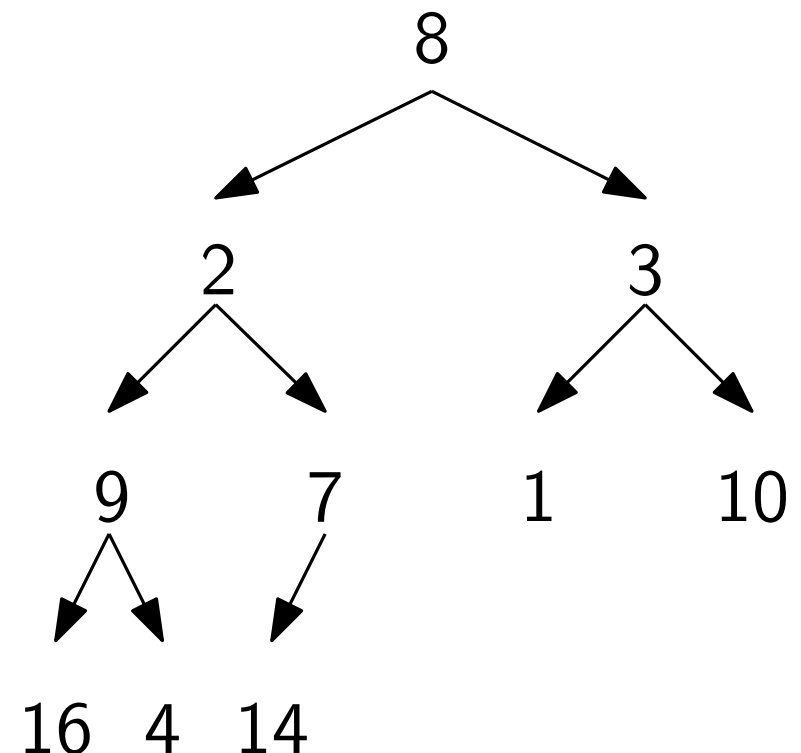
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„**totales Chaos**“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

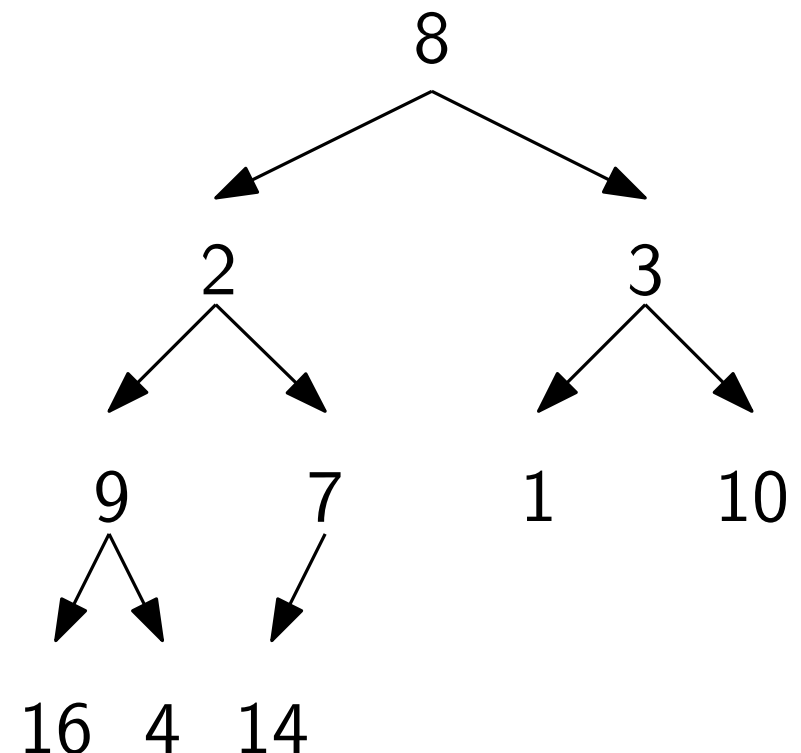
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle



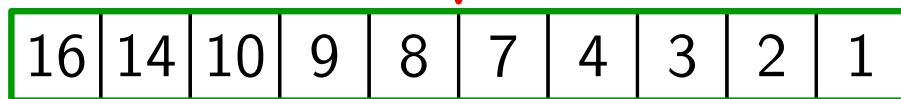
„**totales Chaos**“



Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

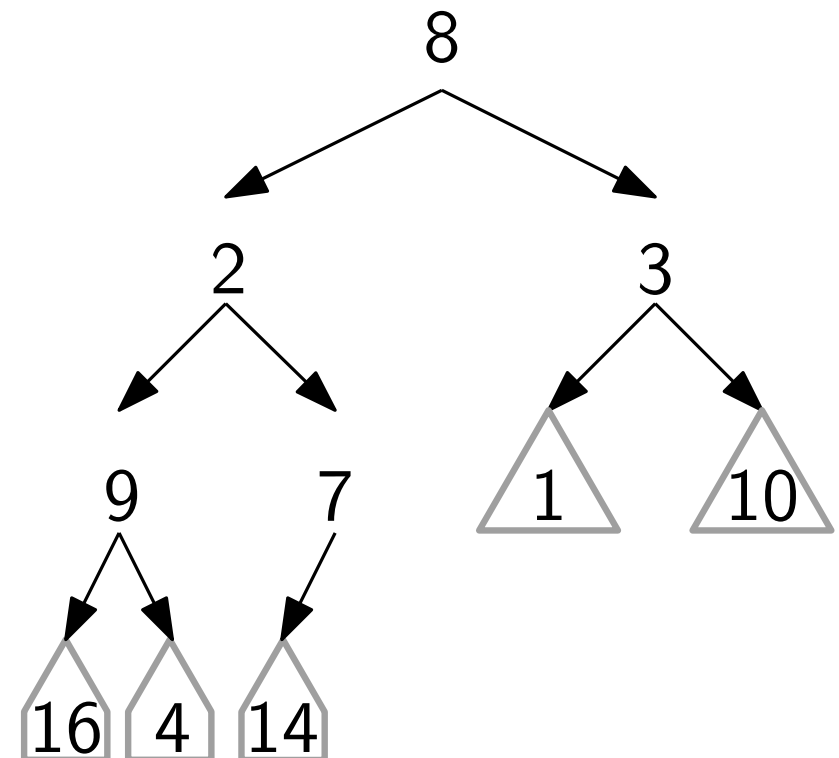


Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle



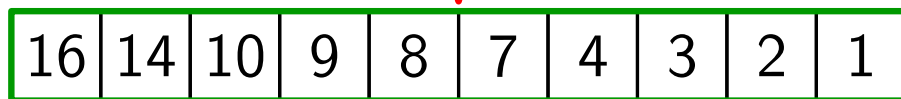
„**totales Chaos**“



Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

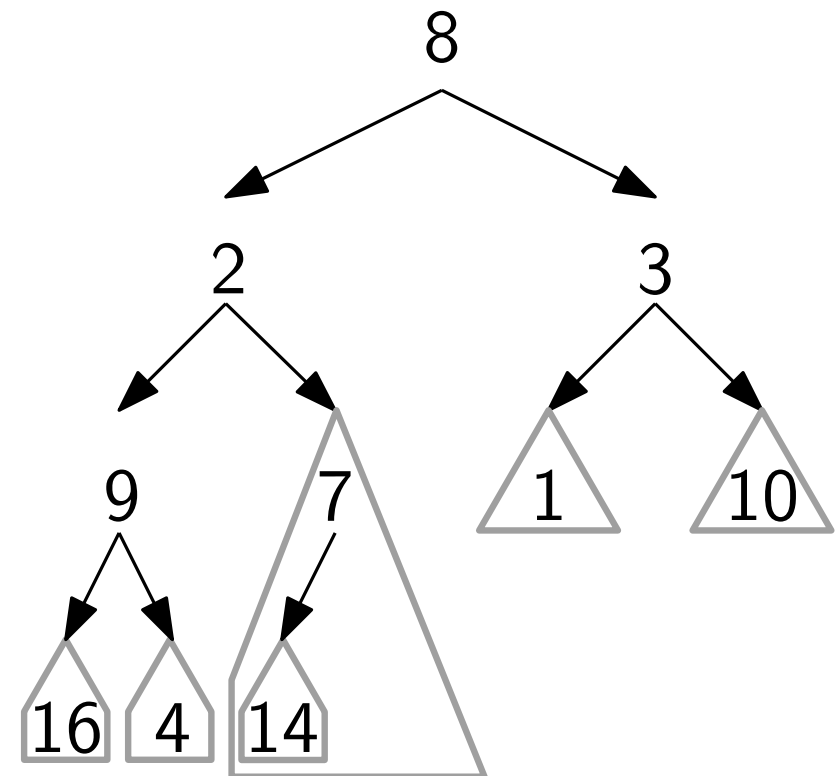


Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

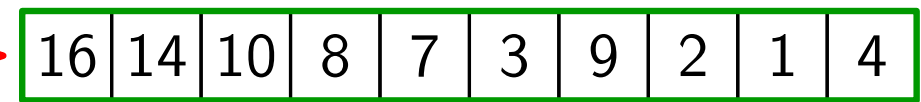
Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle



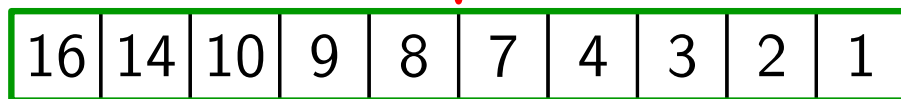
„**totales Chaos**“



Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

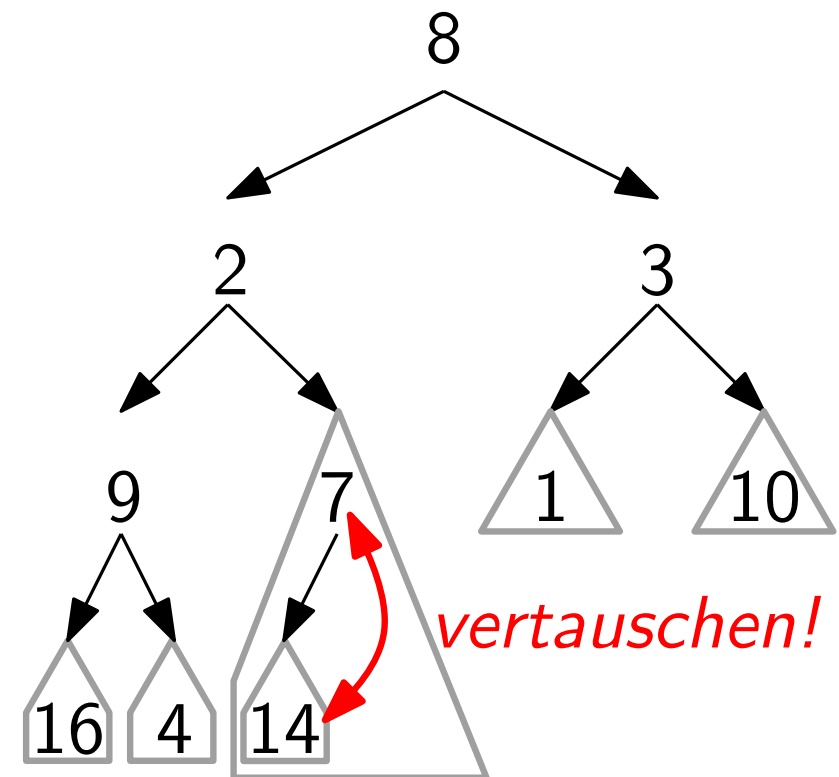


Absteigende Sortierung

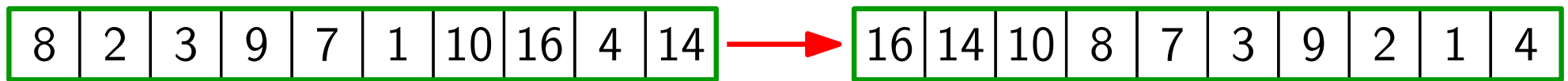
Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

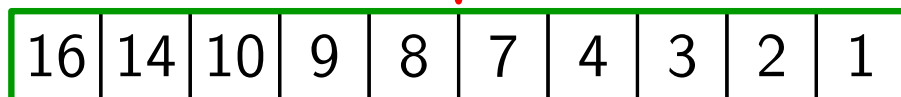


„totales Chaos“

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

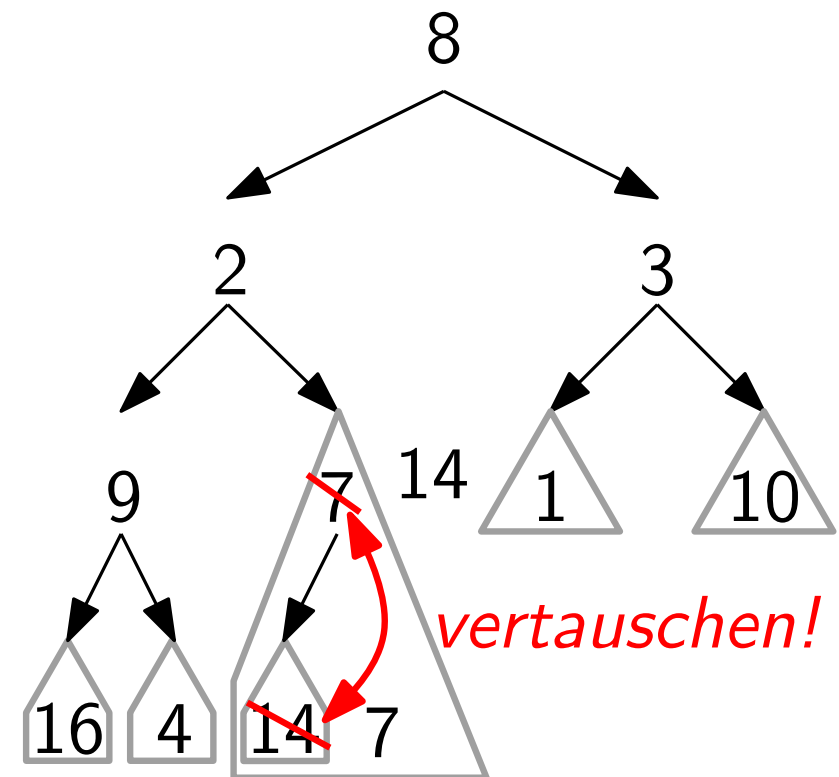


Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle



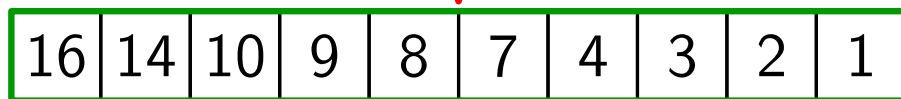
„**totales Chaos**“



Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

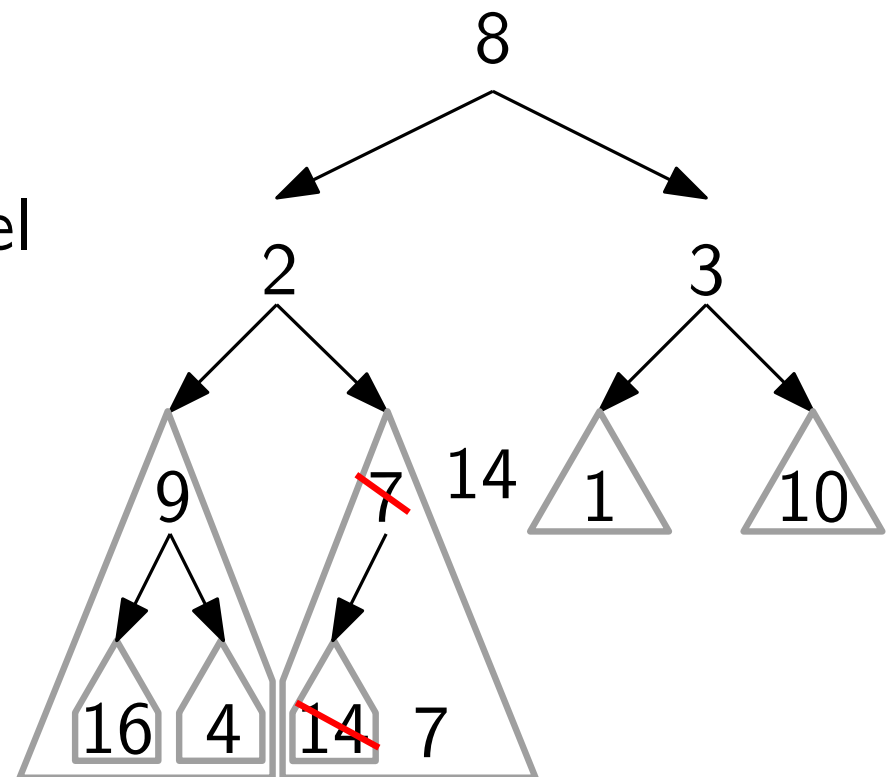


Absteigende Sortierung

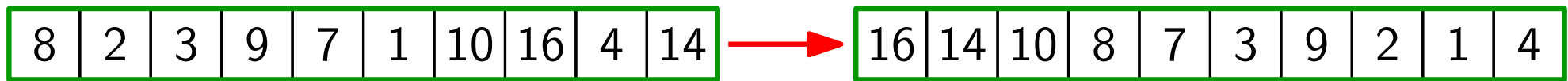
Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

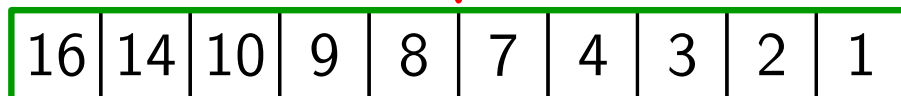


„totales|Chaos“

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

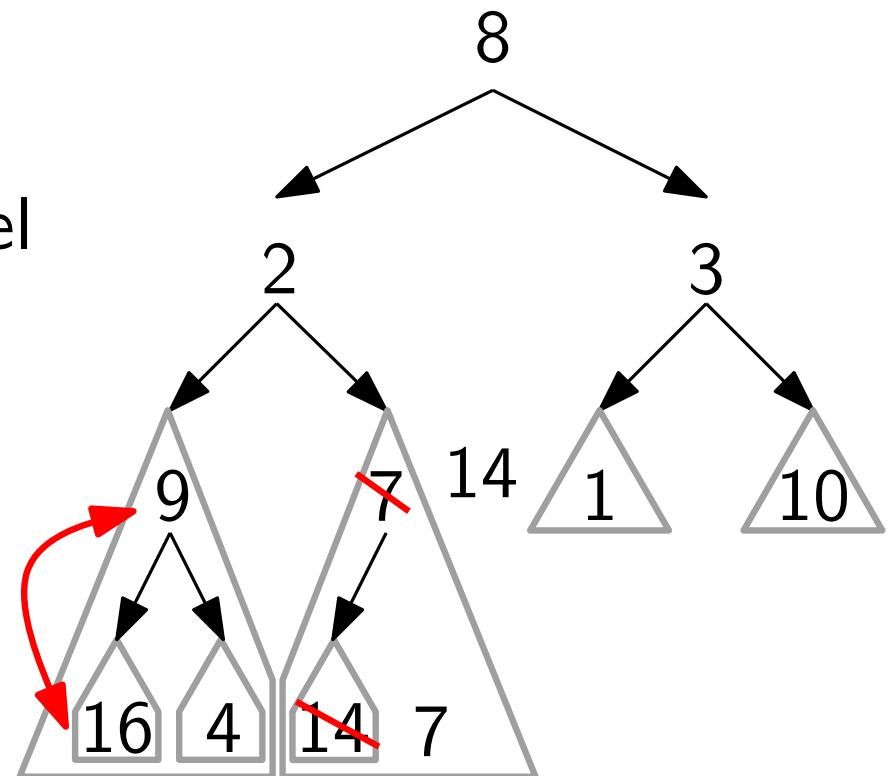


Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„**totales Chaos**“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

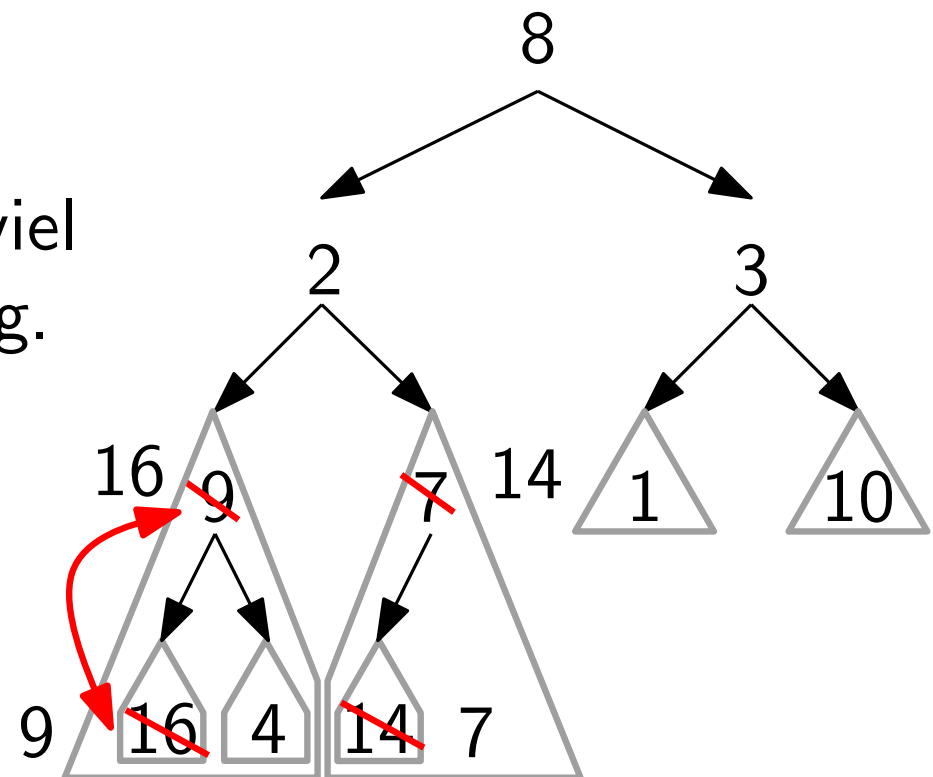
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

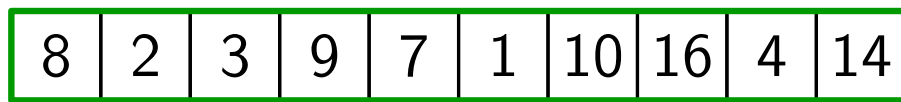
Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle



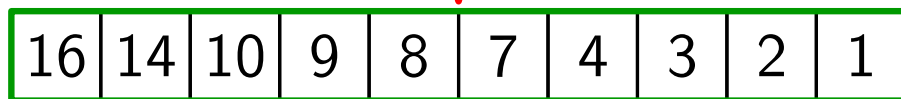
„**totales Chaos**“



Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

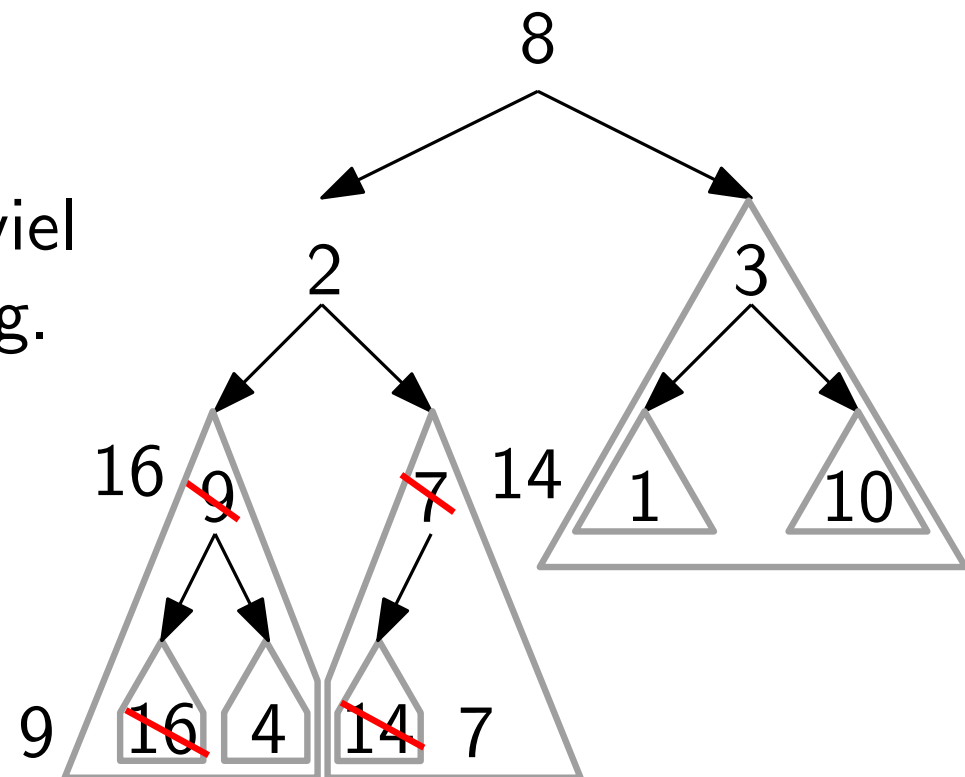


Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle



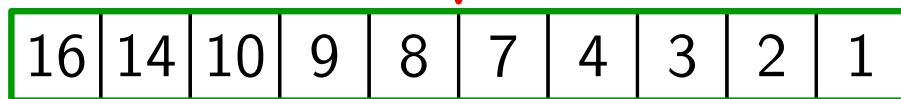
„**totales Chaos**“



Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

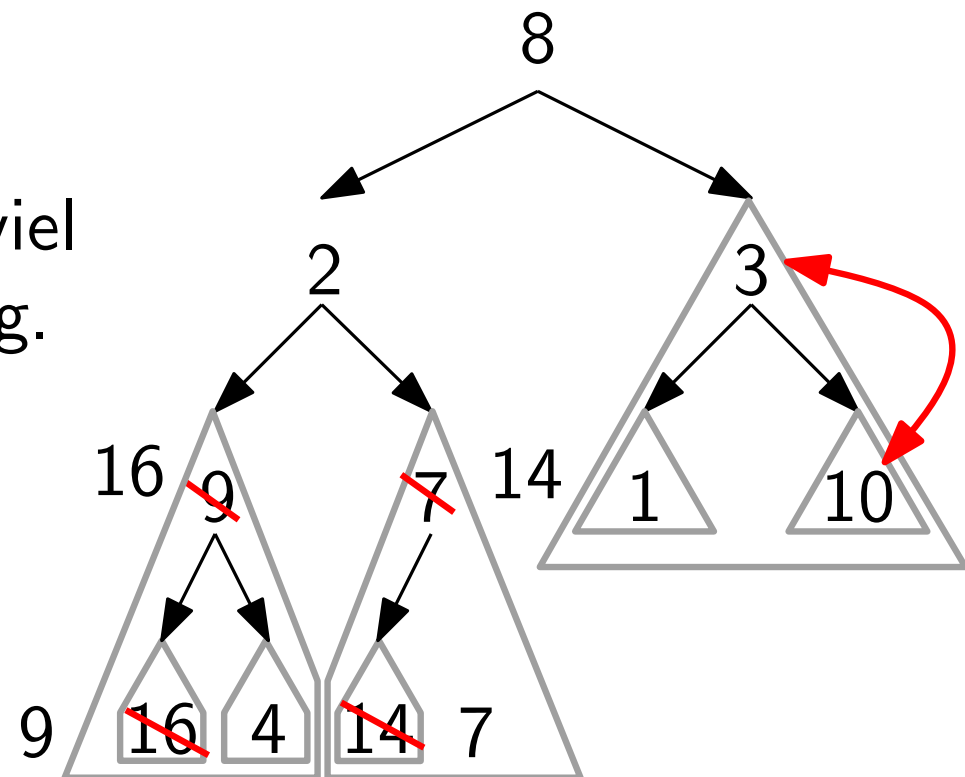


Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„**totales Chaos**“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

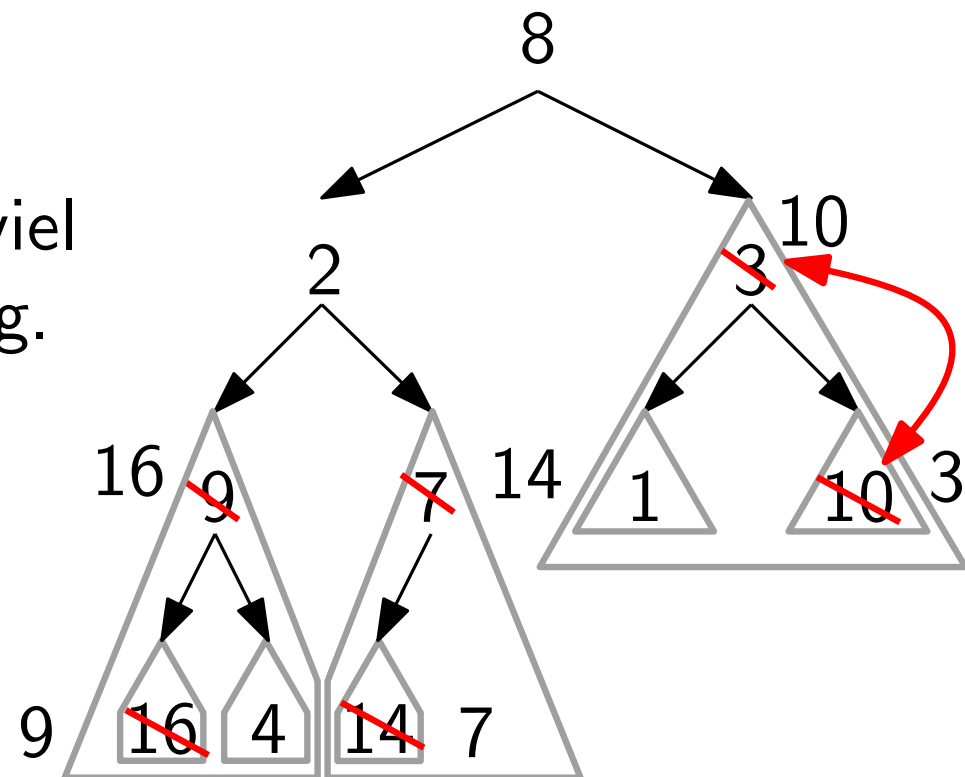
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„**totales Chaos**“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

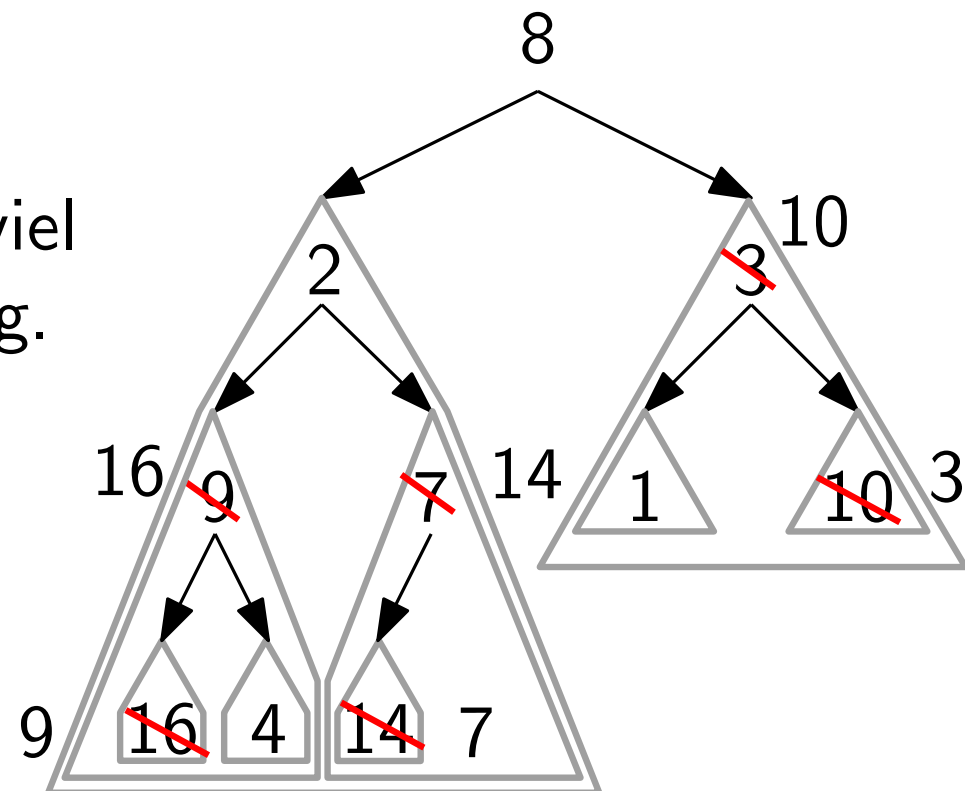
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„**totales Chaos**“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

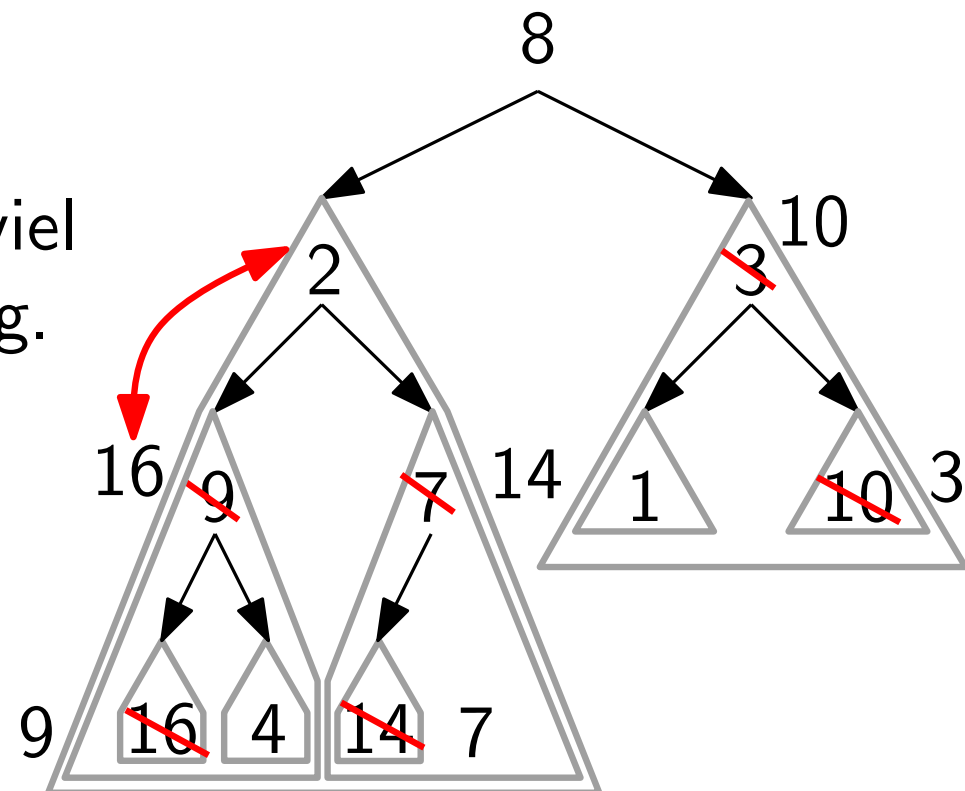
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„**totales Chaos**“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

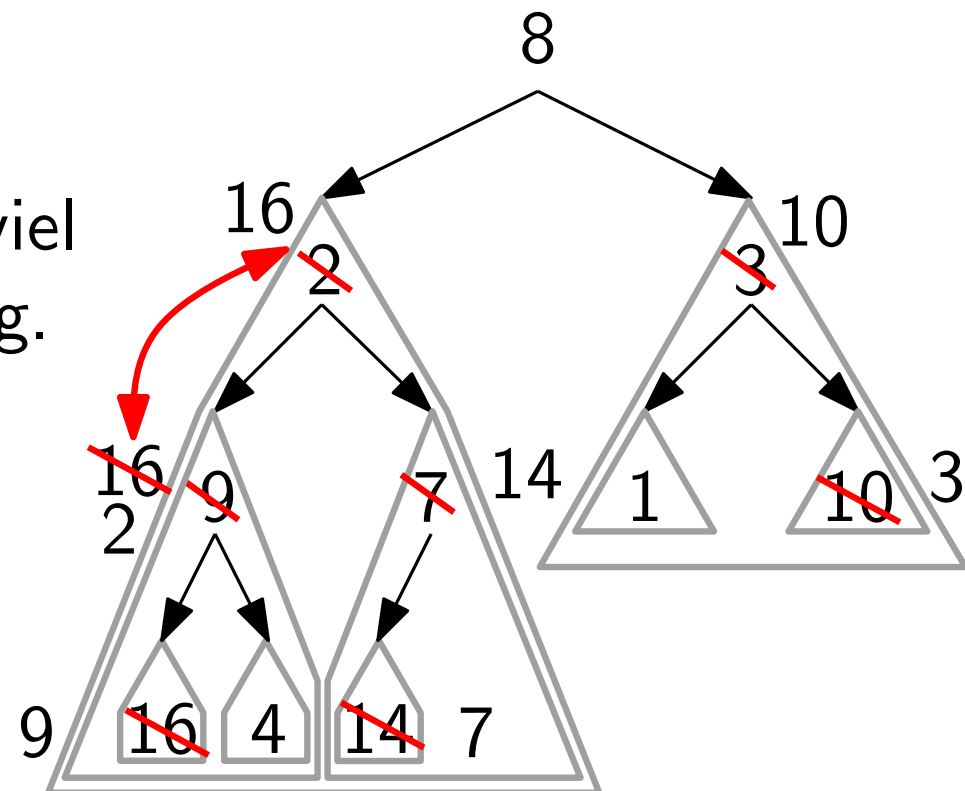
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

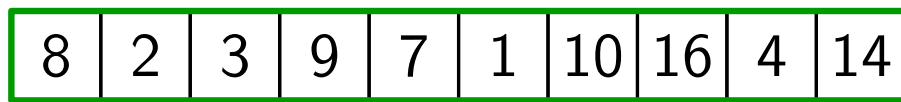
Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

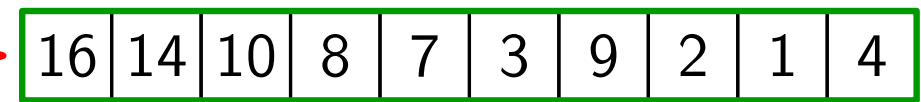
Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle



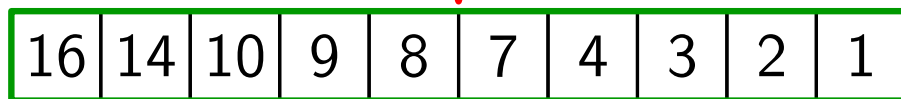
„**totales Chaos**“



Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

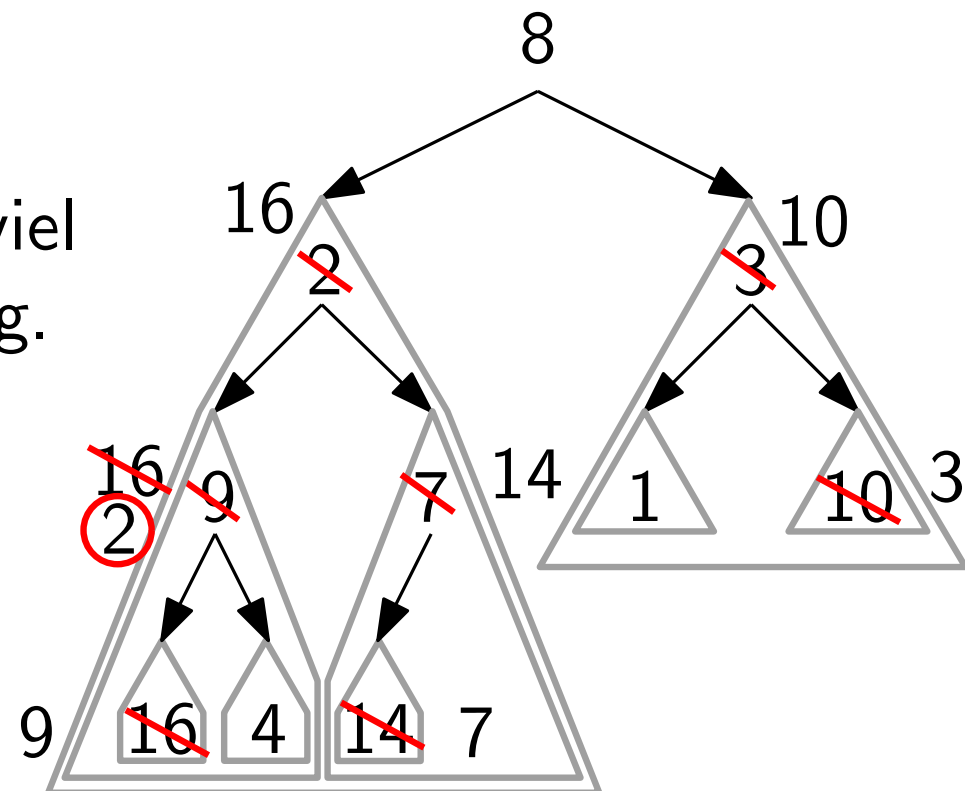


Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

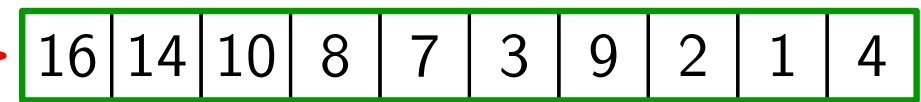
Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle



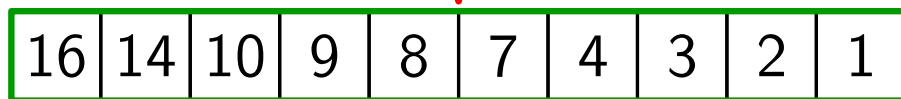
„**totales Chaos**“



Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

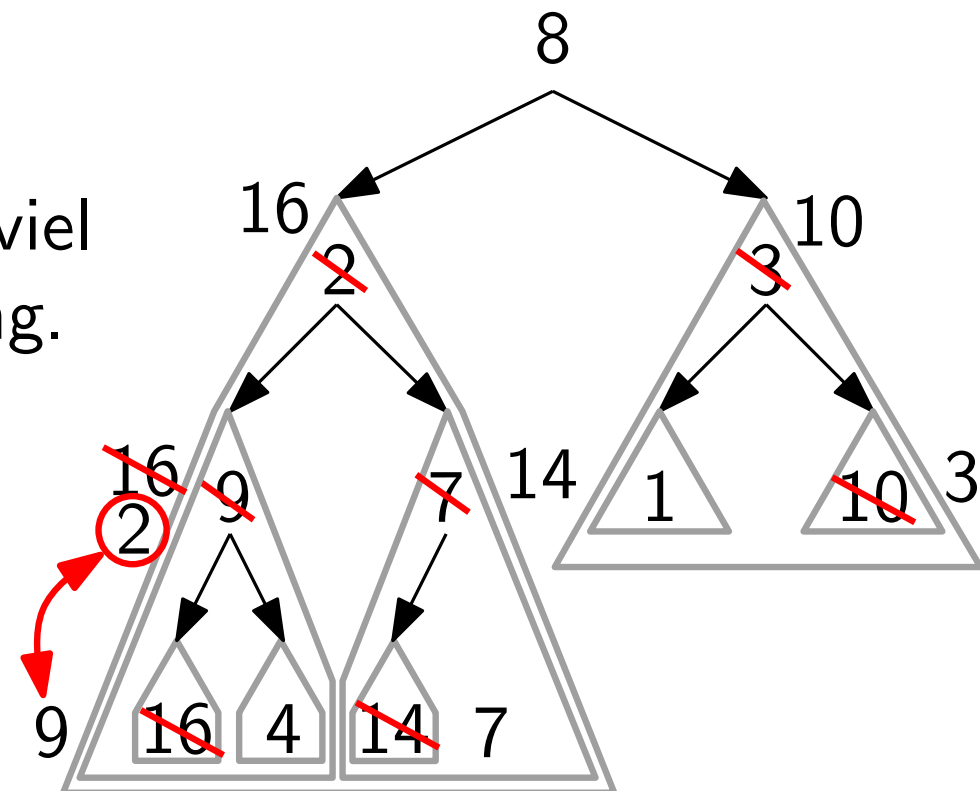


Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„**totales Chaos**“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

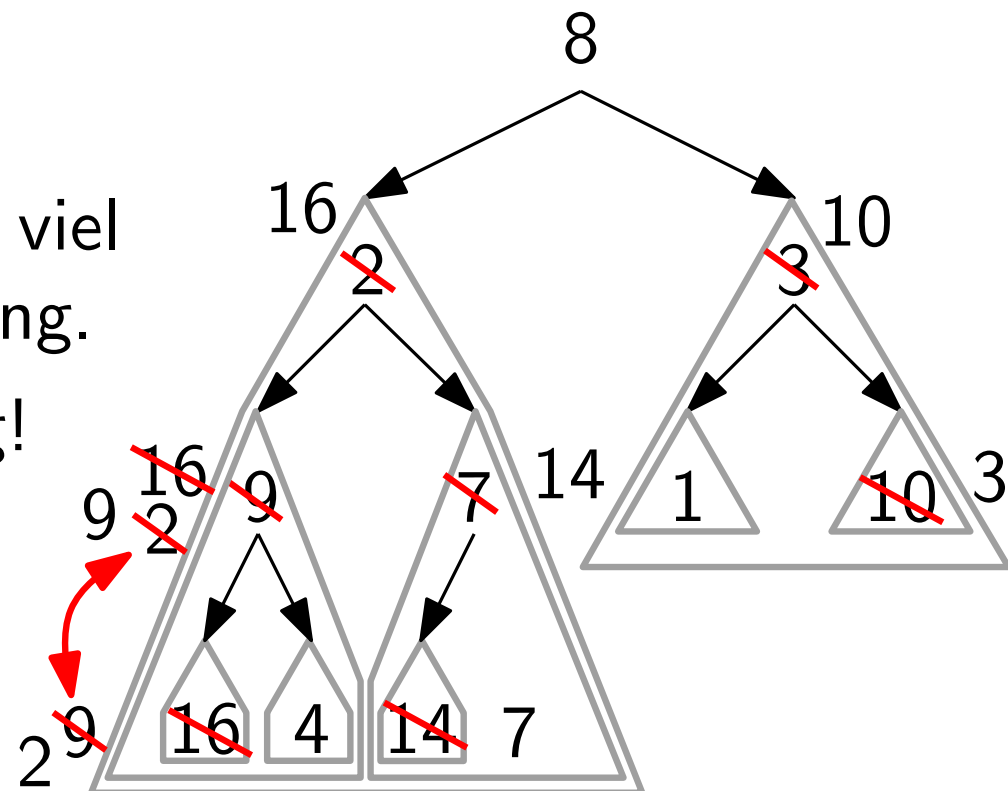
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„**totales Chaos**“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

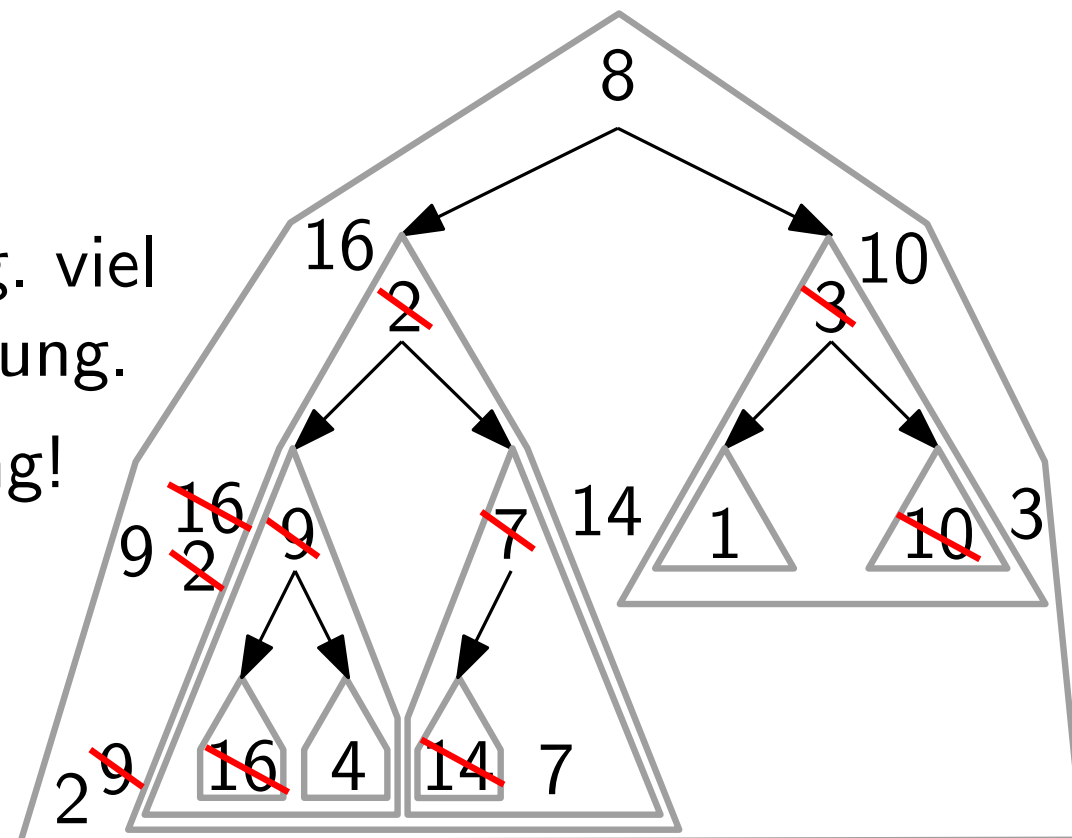
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„**totales Chaos**“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

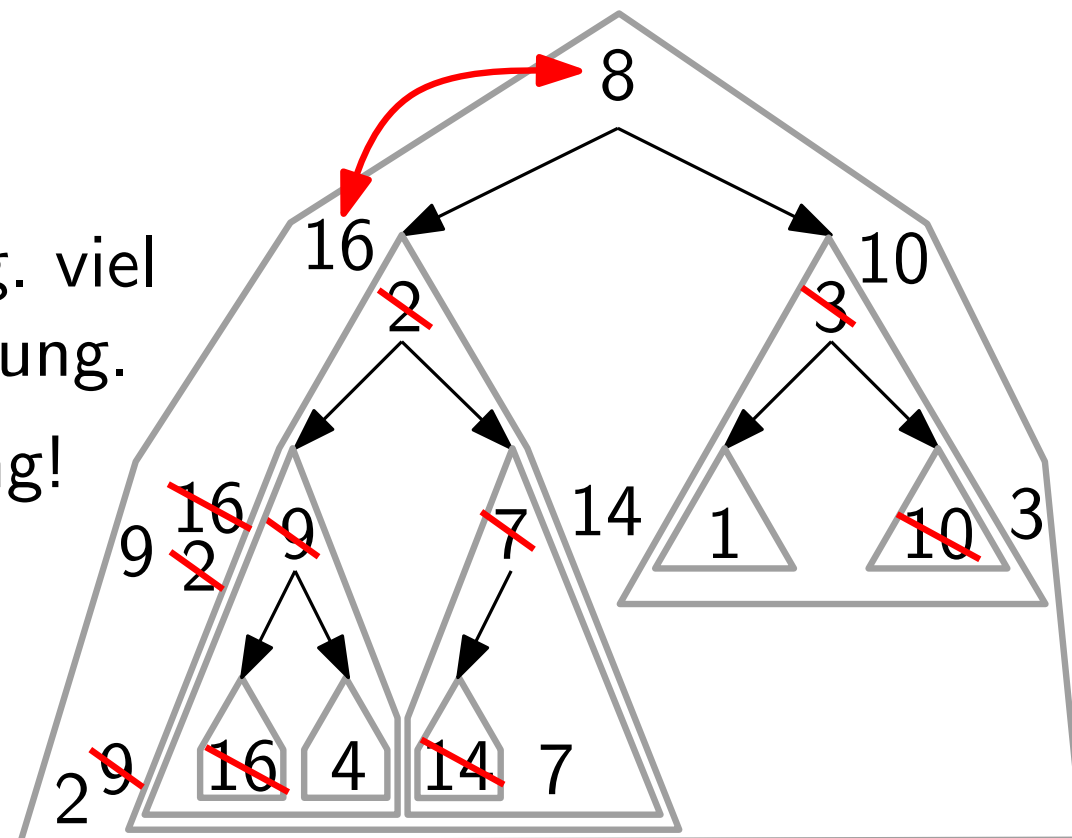
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„**totales Chaos**“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

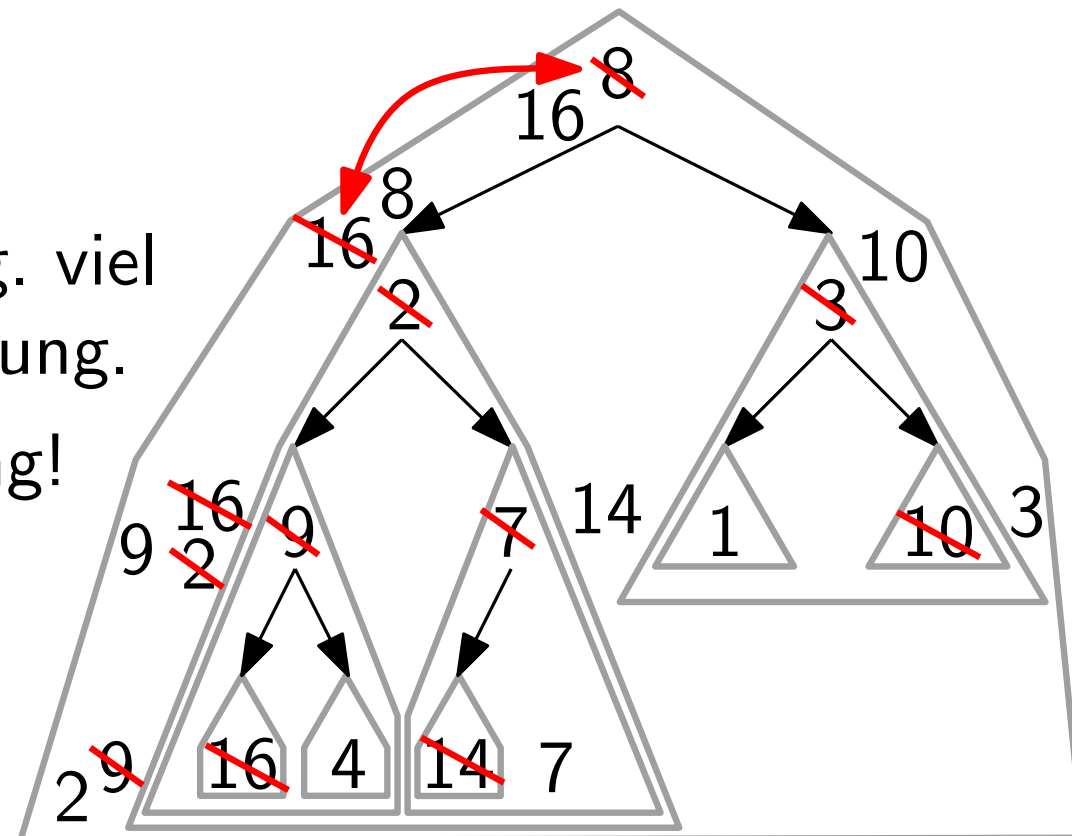
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

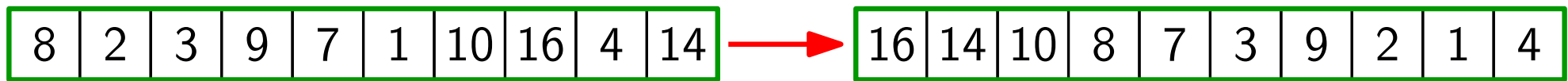
Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

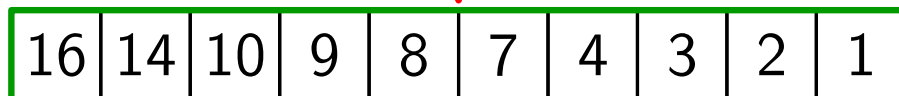


„totales|Chaos“

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

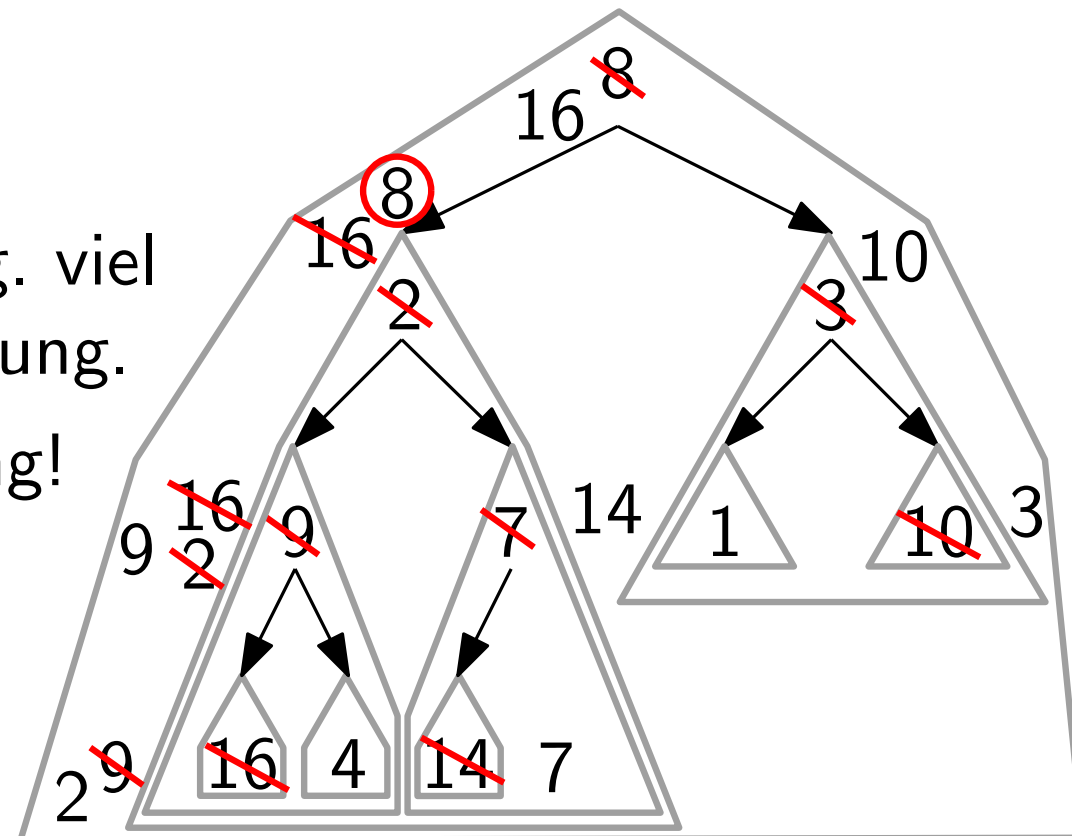


Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„**totales Chaos**“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

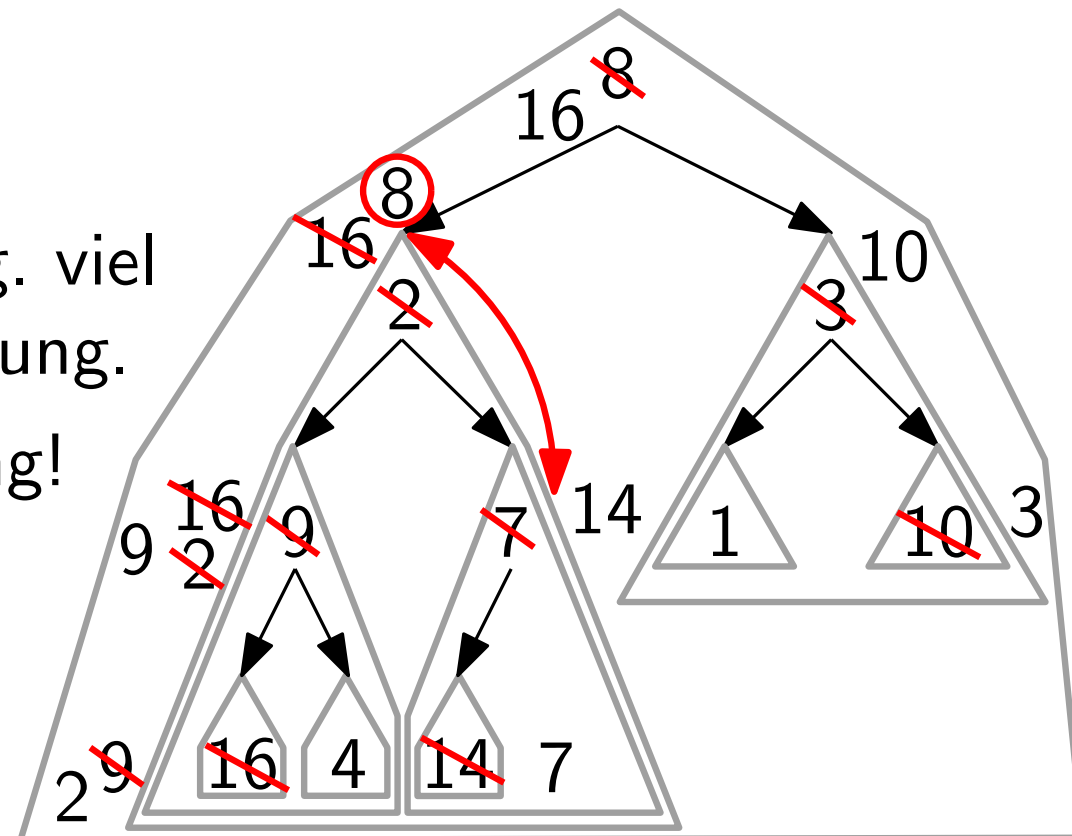
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„**totales Chaos**“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

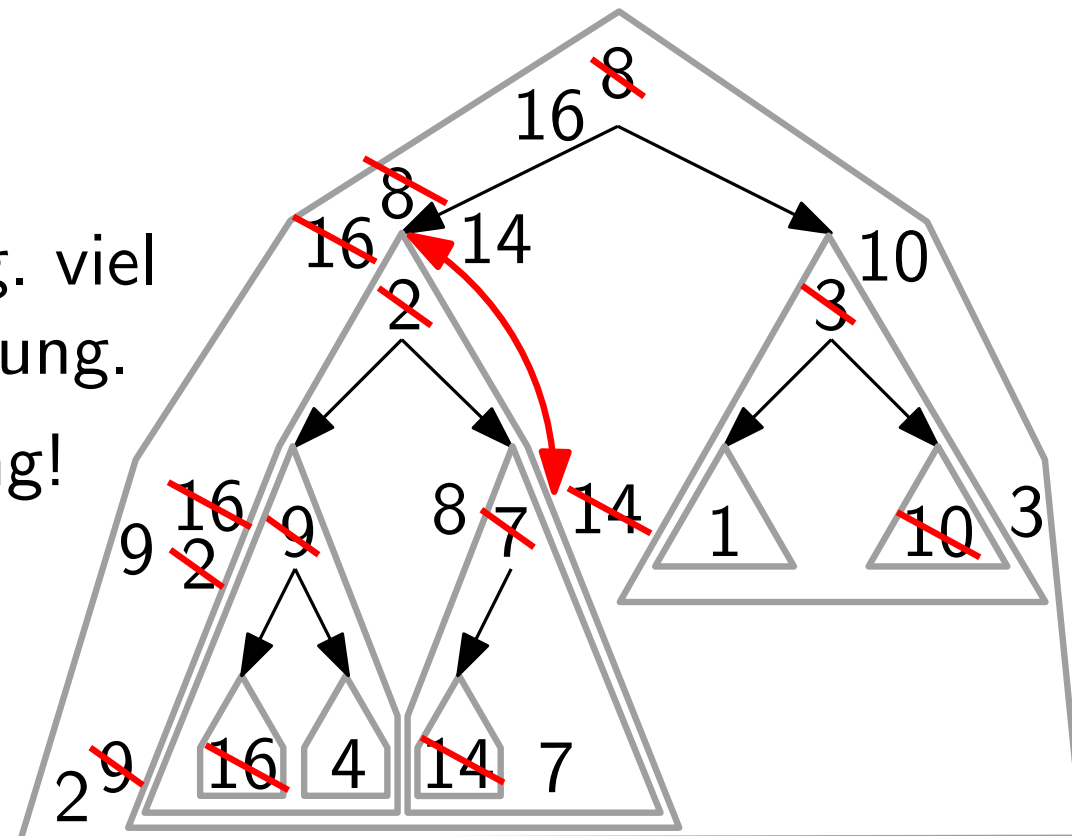
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„**totales Chaos**“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

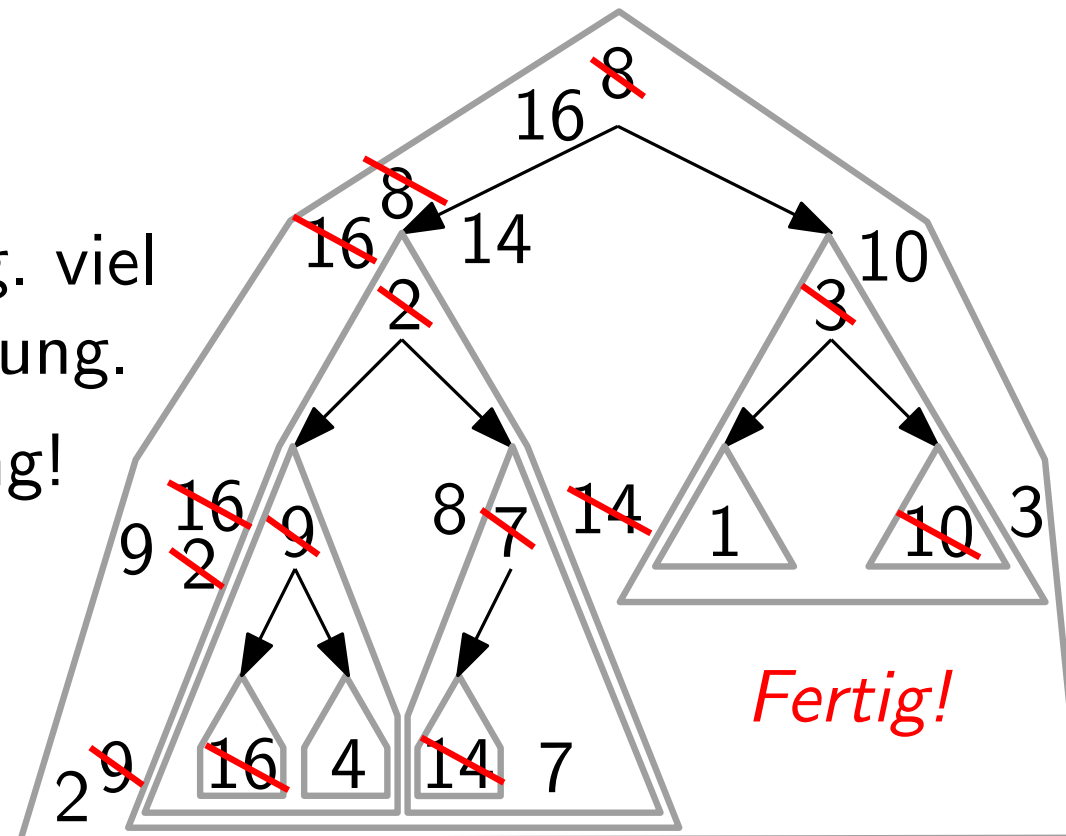
16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„**totales Chaos**“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

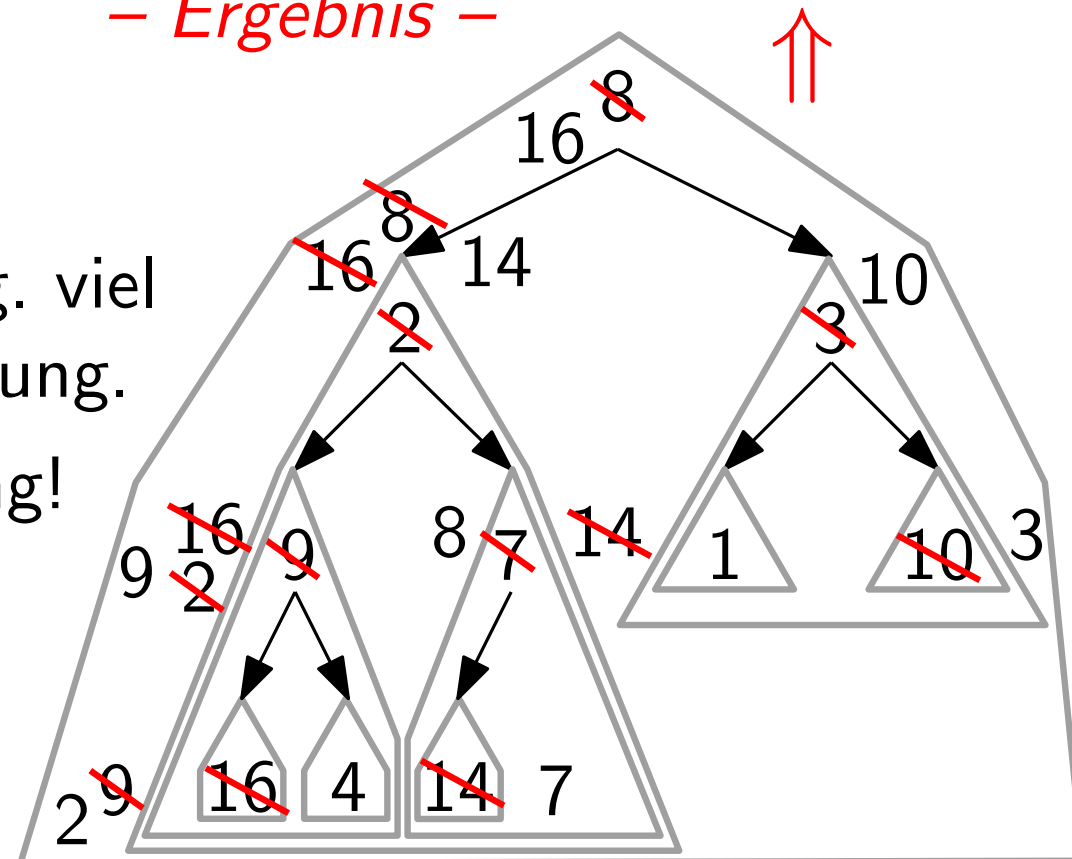
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

– **Ergebnis** –

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite **bottom-up**:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„**totales Chaos**“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

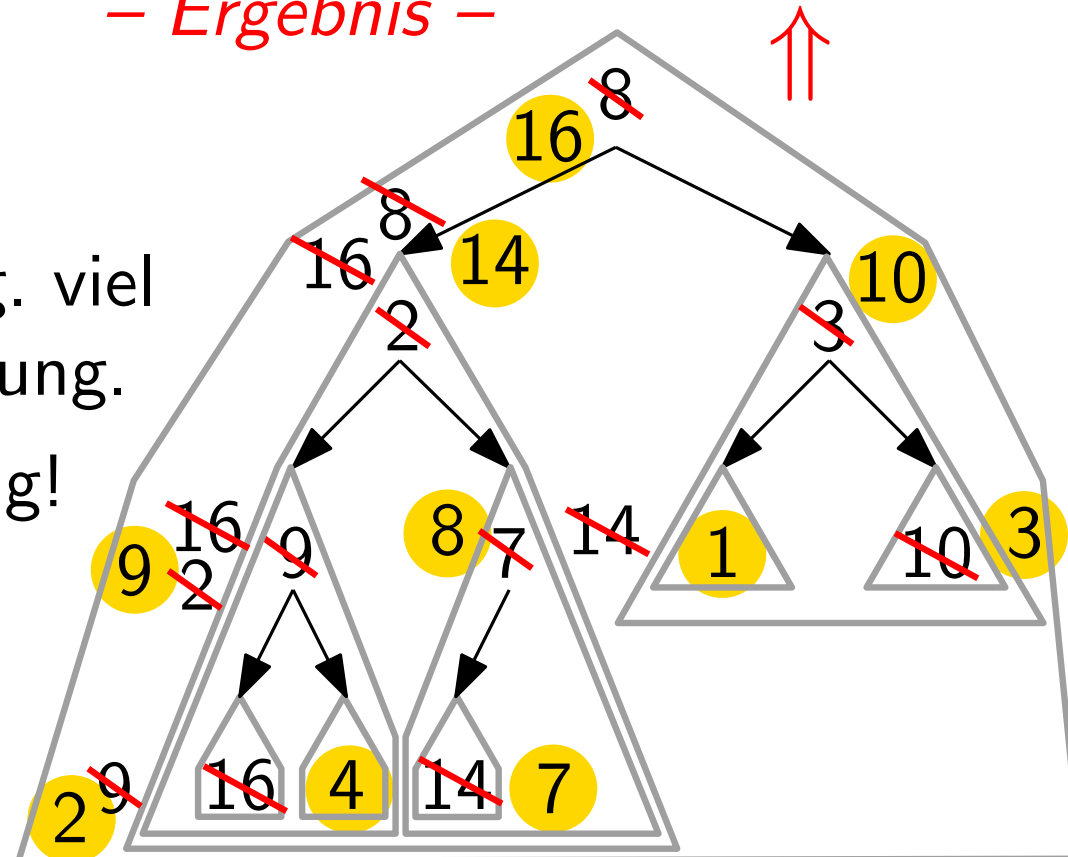
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

– **Ergebnis** –

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite **bottom-up**:
Erst die Blätter...



Baustelle

8	2	3	9	7	1	10	16	4	14
---	---	---	---	---	---	----	----	---	----

„**totales Chaos**“

16	14	10	8	7	3	9	2	1	4
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!

16	14	10	9	8	7	4	3	2	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

Absteigende Sortierung

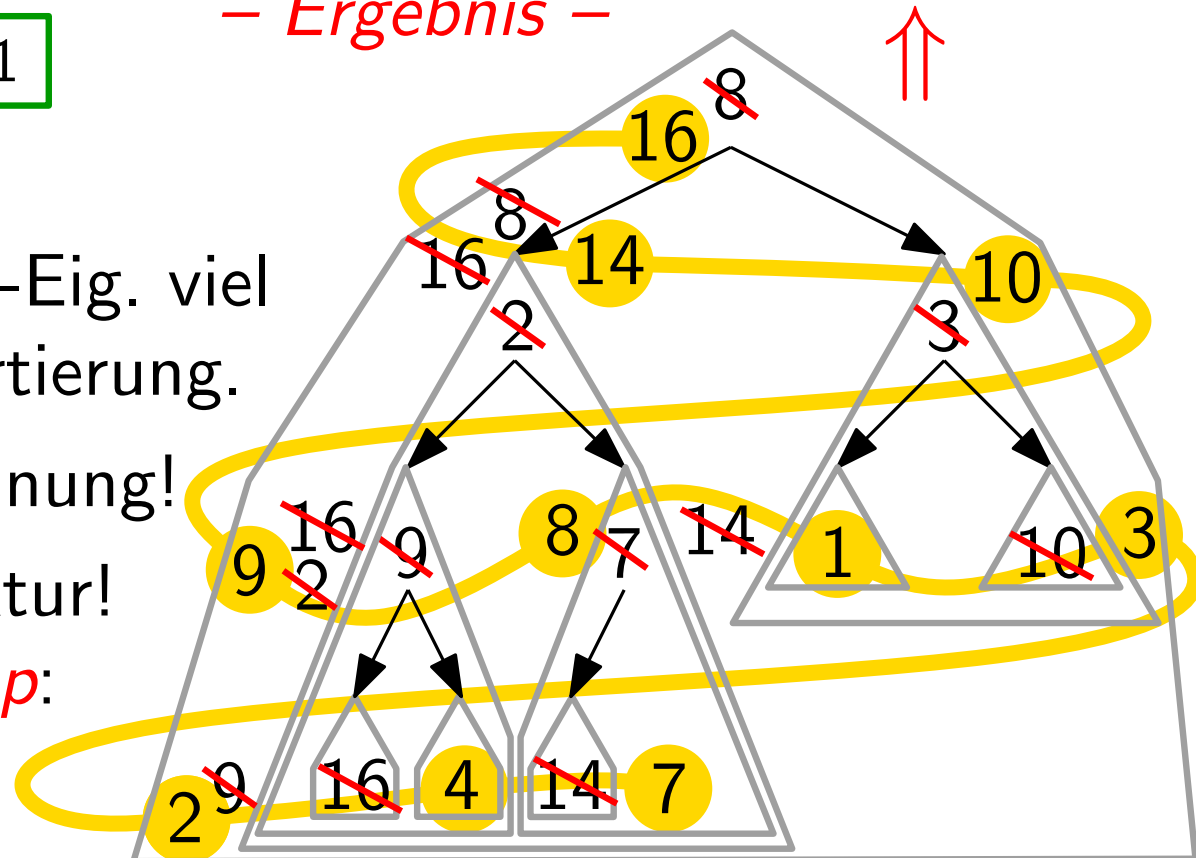
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

– **Ergebnis** –

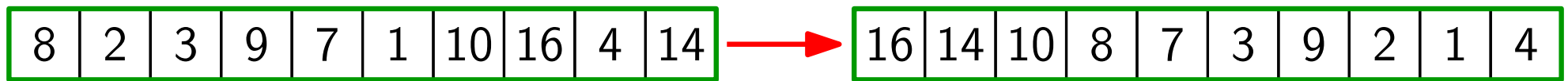
Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite **bottom-up**:
Erst die Blätter...



Baustelle

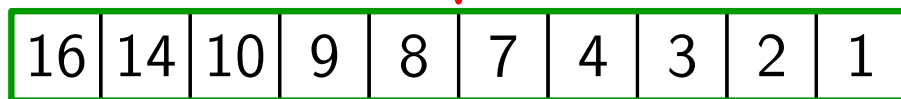


„totales|Chaos“

Max-Heap-Eigenschaft

Aufgabe: Berechnen Sie in $O(n \log n)$ Zeit einen Max-Heap!

Nimm MergeSort!



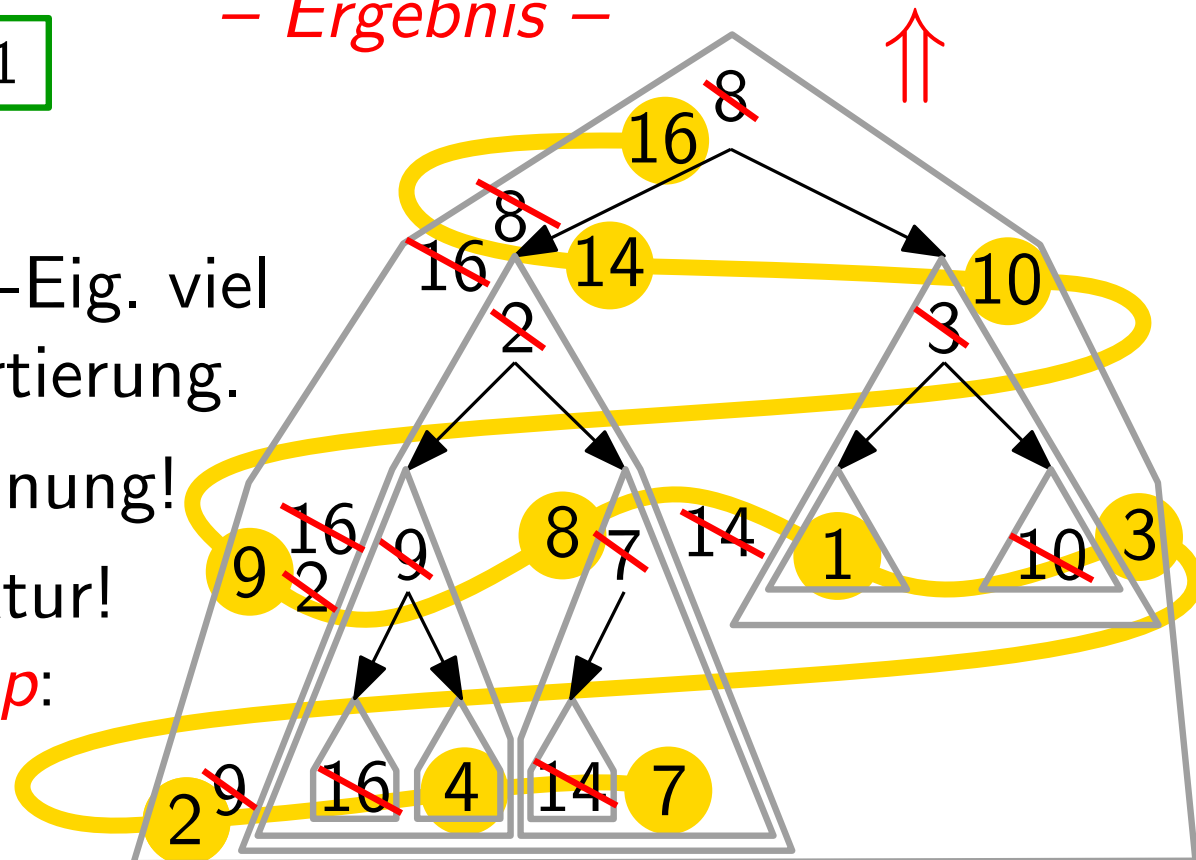
Absteigende Sortierung

– Ergebnis –

Fertig? Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

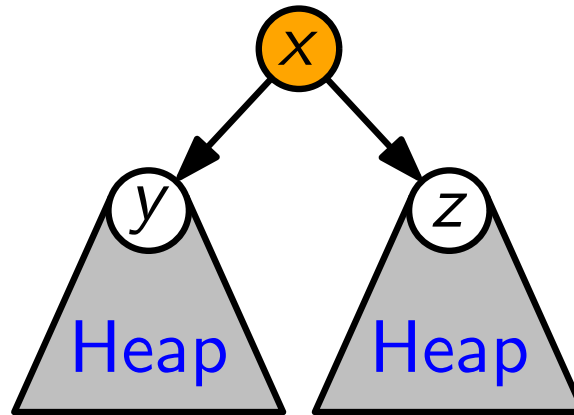
Hoffen: Schnellere Berechnung!

Idee: Nutze Baumstruktur!
Arbeite *bottom-up*:
Erst die Blätter...



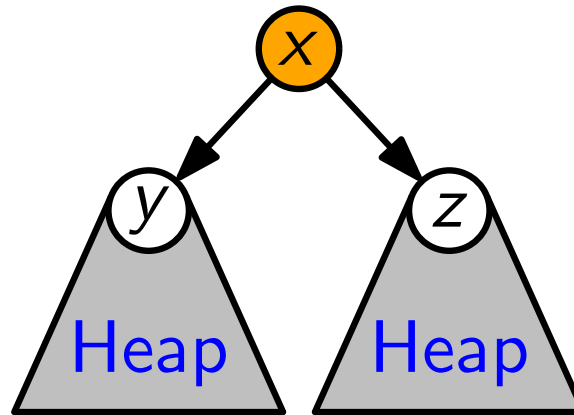
Elementaroperation

„*Versickere*“ x , falls x zu klein



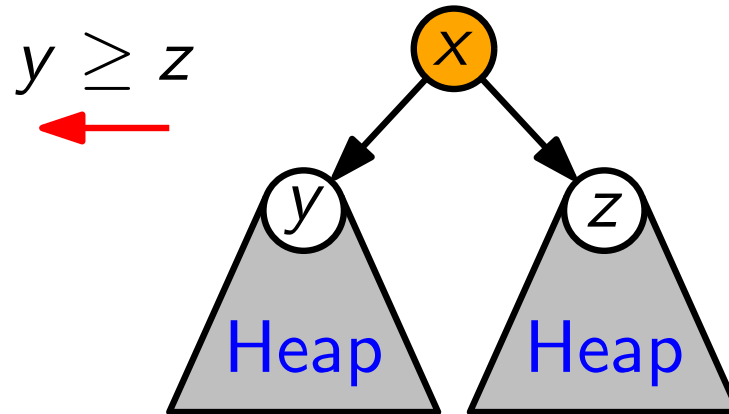
Elementaroperation

„*Versickere*“ x , falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



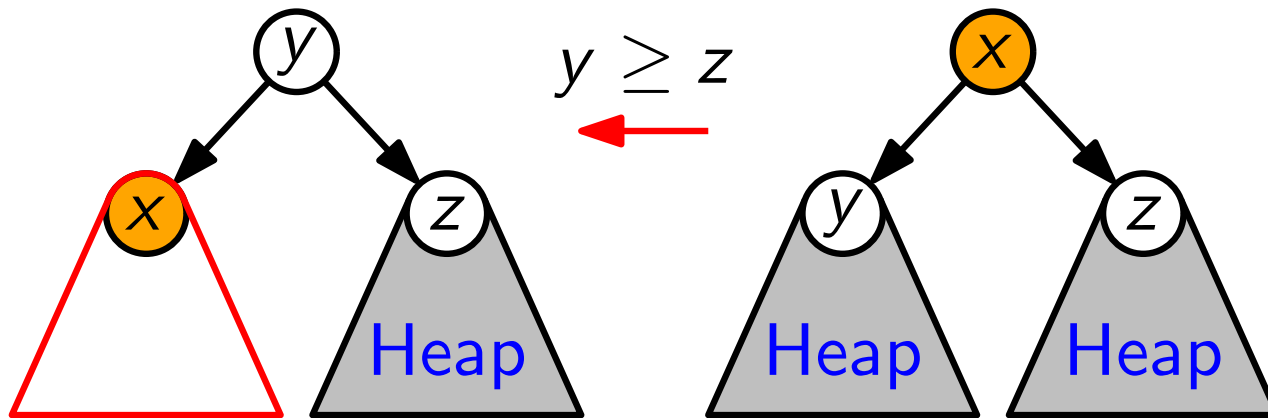
Elementaroperation

„*Versickere*“ x , falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



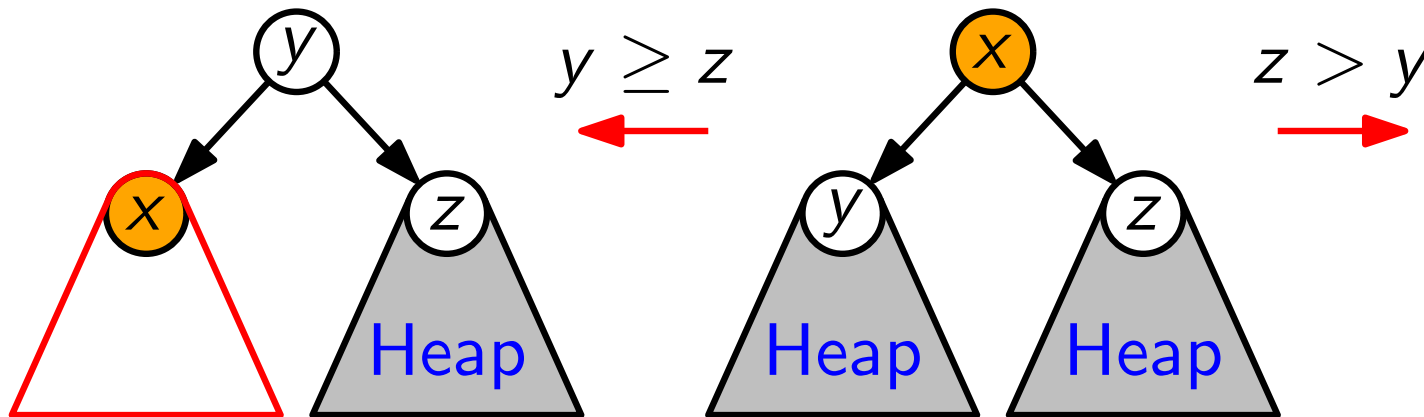
Elementaroperation

„*Versickere*“ x , falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



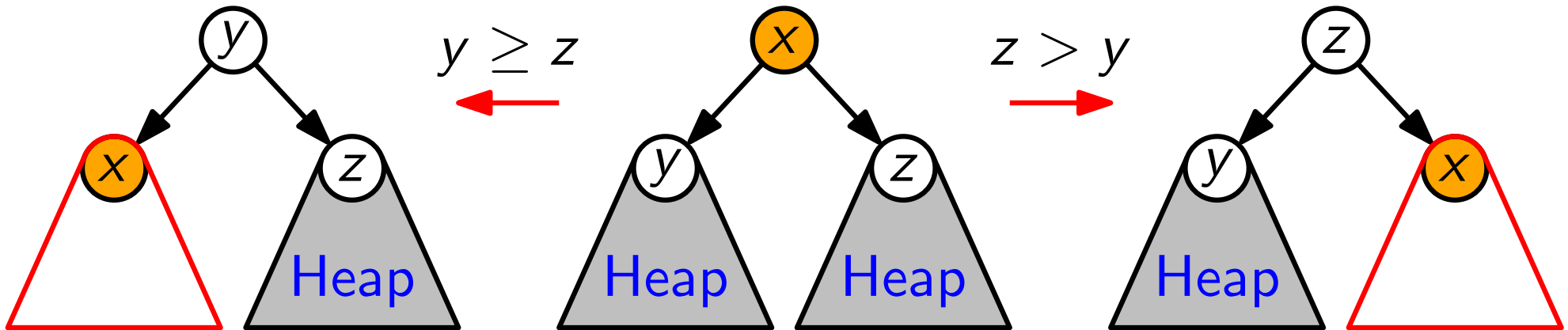
Elementaroperation

„Versickere“ x , falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



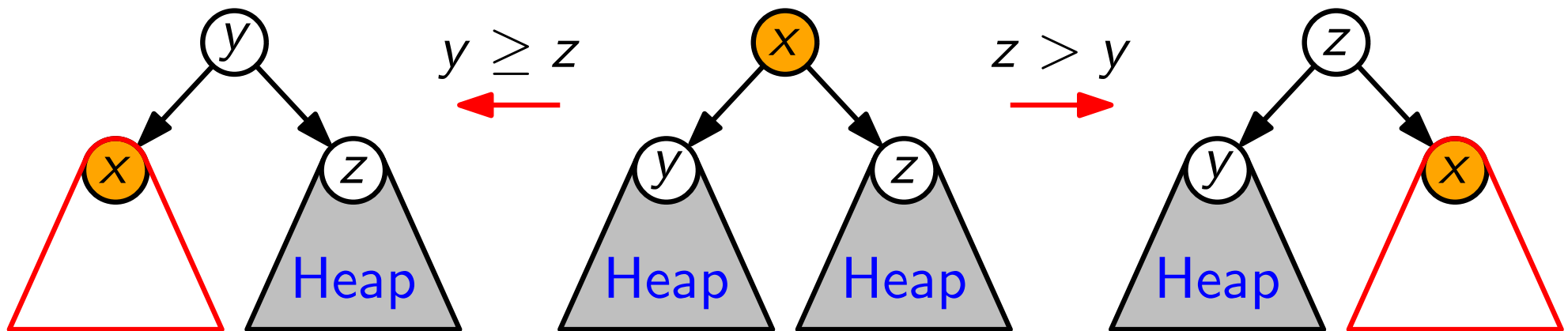
Elementaroperation

„Versickere“ x , falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



Elementaroperation

„Versickere“ x , falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



```
MaxHeapify(int A[], index i)
```

```
   $\ell = \text{left}(i)$ ;  $r = \text{right}(i)$ 
```

```
  if  $\ell \leq A.\text{heap-size}$  and  $A[\ell] > A[i]$  then
```

```
     $\lfloor$   $\text{largest} = \ell$ 
```

```
  else  $\text{largest} = i$ 
```

```
  if  $r \leq A.\text{heap-size}$  and  $A[r] > A[\text{largest}]$ 
```

```
     $\lfloor$   $\text{largest} = r$ 
```

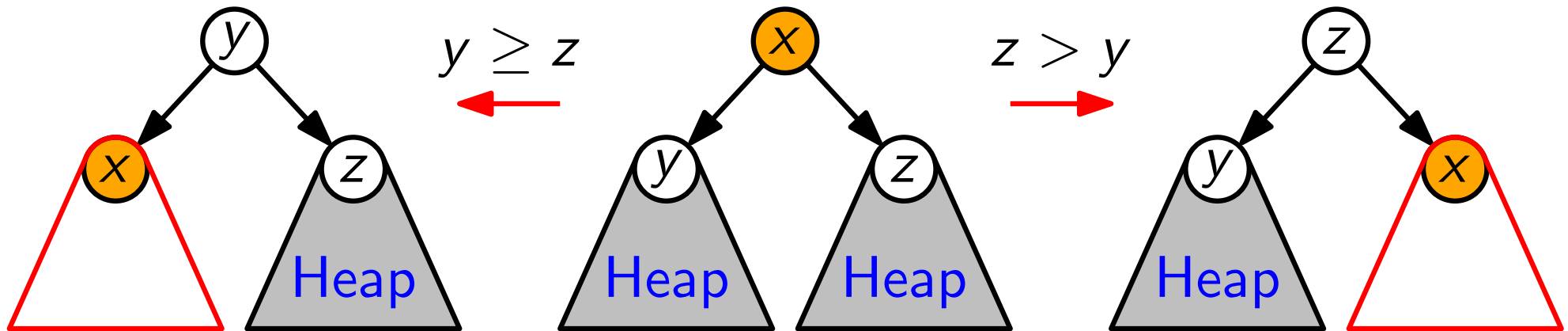
```
  if  $\text{largest} \neq i$  then
```

```
     $\lfloor$  swap( $A, i, \text{largest}$ )
```

```
     $\lfloor$  MaxHeapify( $A, \text{largest}$ )
```

Elementaroperation

„Versickere“ x , falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



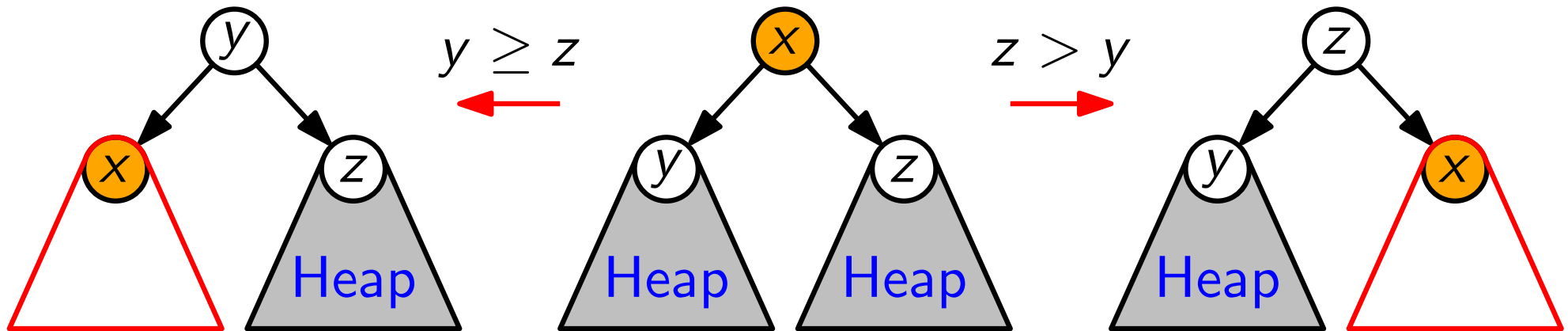
```

MaxHeapify(int A[], index i)
  ℓ = left(i); r = right(i)
  if ℓ ≤ A.heap-size and A[ℓ] > A[i] then
    | largest = ℓ
  else largest = i
  if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[largest]
    | largest = r
  if largest ≠ i then
    | swap(A, i, largest)
    | MaxHeapify(A, largest)
  
```

Lokale Strategie: *top-down*

Elementaroperation

„*Versickere*“ x , falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



```

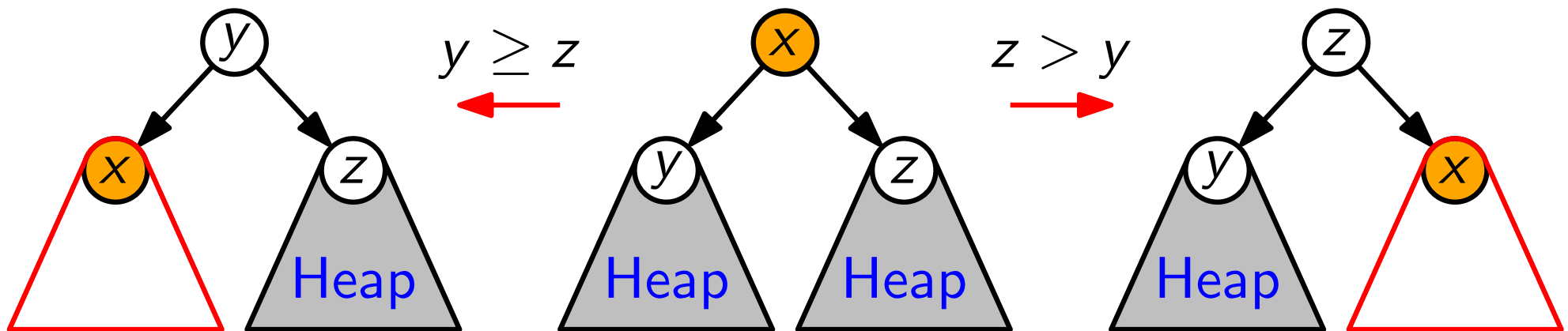
MaxHeapify(int A[], index i)
  ℓ = left(i); r = right(i)
  if ℓ ≤ A.heap-size and A[ℓ] > A[i] then
    | largest = ℓ
  else largest = i
  if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[largest]
    | largest = r
  if largest ≠ i then
    | swap(A, i, largest)
    | MaxHeapify(A, largest)
  
```

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit?

Elementaroperation

„Versickere“ x , falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



```

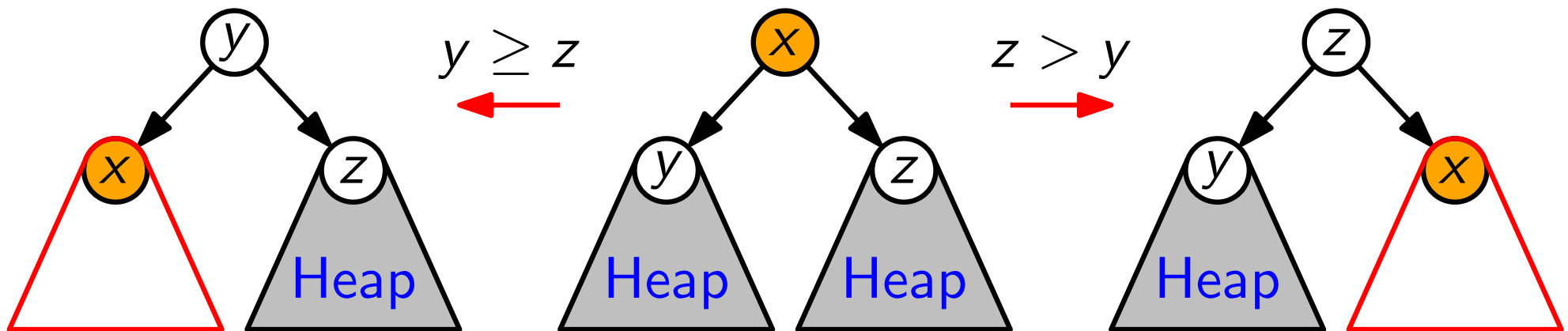
MaxHeapify(int A[], index i)
  ℓ = left(i); r = right(i)
  if ℓ ≤ A.heap-size and A[ℓ] > A[i] then
    | largest = ℓ
  else largest = i
  if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[largest]
    | largest = r
  if largest ≠ i then
    | swap(A, i, largest)
    | MaxHeapify(A, largest)
  
```

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit? $T_{MH}(n, i)$

Elementaroperation

„Versickere“ x , falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



```

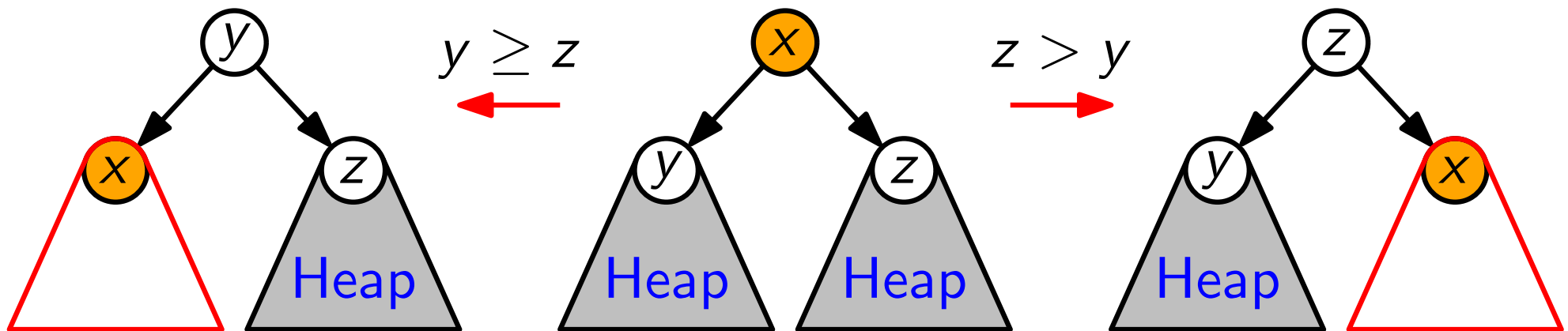
MaxHeapify(int A[], index i)
  ℓ = left(i); r = right(i)
  if ℓ ≤ A.heap-size and A[ℓ] > A[i] then
    | largest = ℓ
  else largest = i
  if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[largest]
    | largest = r
  if largest ≠ i then
    | swap(A, i, largest)
    | MaxHeapify(A, largest)
  
```

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit? $T_{MH}(n, i)$
 $:=$ Anzahl der Swaps

Elementaroperation

„Versickere“ x , falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



```

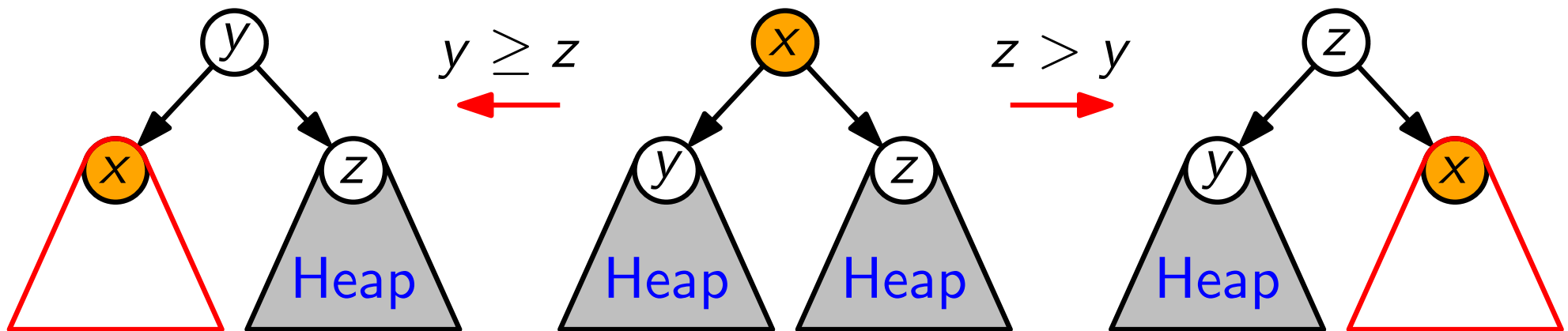
MaxHeapify(int A[], index i)
  ℓ = left(i); r = right(i)
  if ℓ ≤ A.heap-size and A[ℓ] > A[i] then
    largest = ℓ
  else largest = i
  if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[largest]
    largest = r
  if largest ≠ i then
    swap(A, i, largest)
    MaxHeapify(A, largest)
  
```

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit? $T_{MH}(n, i)$
 := Anzahl der Swaps
 ≤ Länge des Weges von
 Knoten i zu einem Blatt

Elementaroperation

„Versickere“ x , falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



```

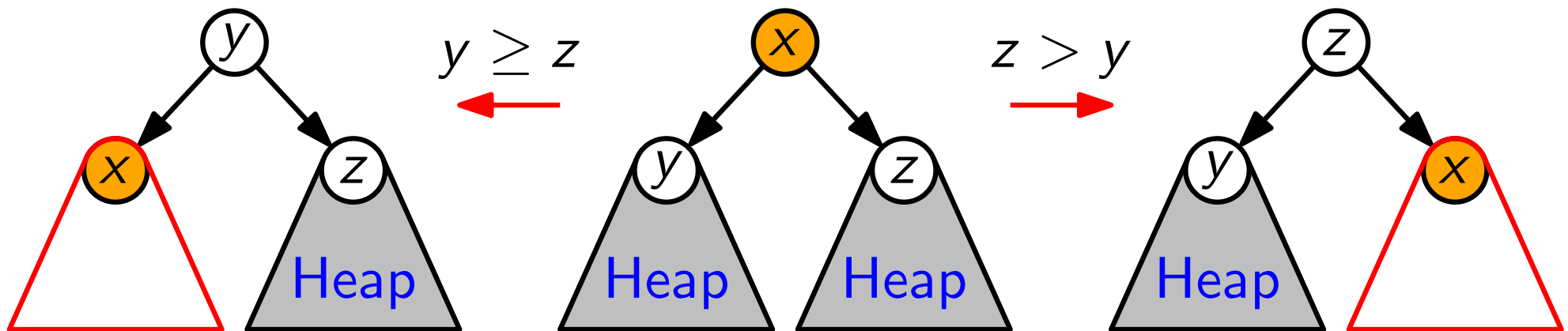
MaxHeapify(int A[], index i)
  ℓ = left(i); r = right(i)
  if ℓ ≤ A.heap-size and A[ℓ] > A[i] then
    largest = ℓ
  else largest = i
  if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[largest]
    largest = r
  if largest ≠ i then
    swap(A, i, largest)
    MaxHeapify(A, largest)
  
```

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit? $T_{MH}(n, i)$
 := Anzahl der Swaps
 ≤ Länge des Weges von Knoten i zu einem Blatt
 ≤ Höhe von i im Heap

Elementaroperation

„Versickere“ x , falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



```

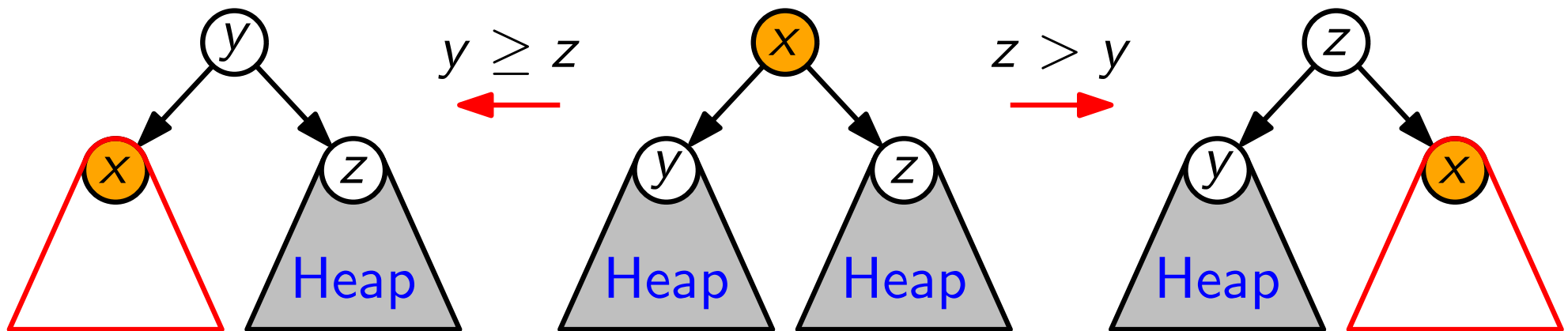
MaxHeapify(int A[], index i)
  ℓ = left(i); r = right(i)
  if ℓ ≤ A.heap-size and A[ℓ] > A[i] then
    largest = ℓ
  else largest = i
  if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[largest]
    largest = r
  if largest ≠ i then
    swap(A, i, largest)
    MaxHeapify(A, largest)
  
```

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit? $T_{MH}(n, i)$
 := Anzahl der Swaps
 ≤ Länge des Weges von Knoten i zu einem Blatt
 ≤ Höhe von i im Heap
 ≤ Höhe des Heaps

Elementaroperation

„Versickere“ x , falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



```

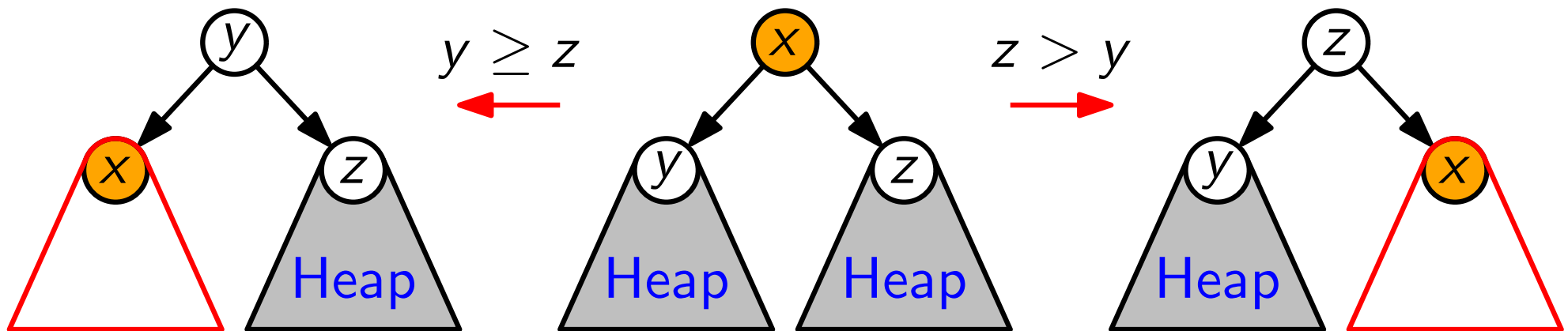
MaxHeapify(int A[], index i)
  ℓ = left(i); r = right(i)
  if ℓ ≤ A.heap-size and A[ℓ] > A[i] then
    largest = ℓ
  else largest = i
  if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[largest]
    largest = r
  if largest ≠ i then
    swap(A, i, largest)
    MaxHeapify(A, largest)
  
```

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit? $T_{MH}(n, i)$
 := Anzahl der Swaps
 \leq Länge des Weges von Knoten i zu einem Blatt
 \leq Höhe von i im Heap
 \leq Höhe des Heaps
 $\leq \lfloor \log_2 n \rfloor$

Elementaroperation

„Versickere“ x , falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$

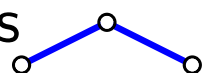


```

MaxHeapify(int A[], index i)
  ℓ = left(i); r = right(i)
  if ℓ ≤ A.heap-size and A[ℓ] > A[i] then
    largest = ℓ
  else largest = i
  if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[largest]
    largest = r
  if largest ≠ i then
    swap(A, i, largest)
    MaxHeapify(A, largest)
  
```

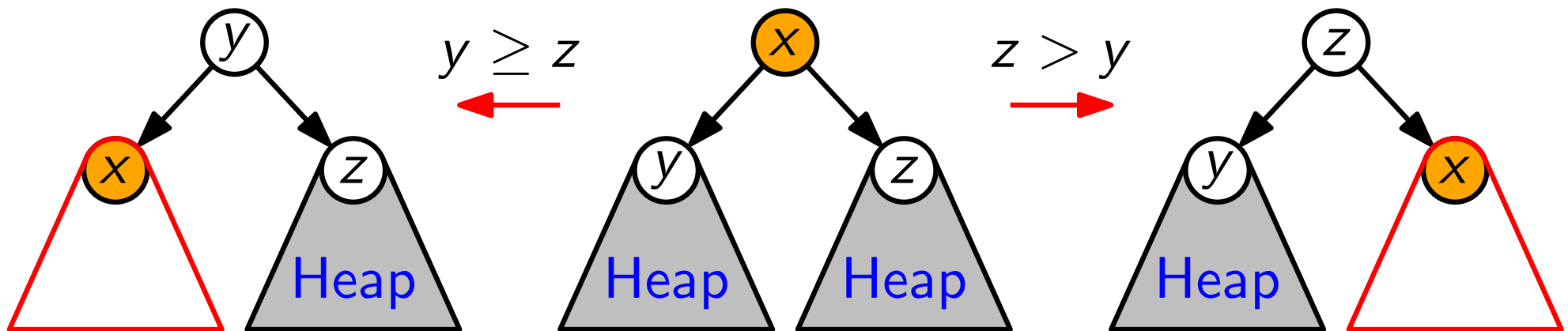
Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit? $T_{MH}(n, i)$
 := Anzahl der Swaps
 ≤ Länge des Weges von Knoten i zu einem Blatt
 ≤ Höhe von i im Heap
 ≤ Höhe des Heaps
 ≤ $\lfloor \log_2 n \rfloor$



Elementaroperation

„Versickere“ x , falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



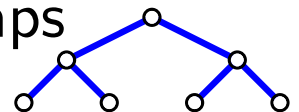
```

MaxHeapify(int A[], index i)
  ℓ = left(i); r = right(i)
  if ℓ ≤ A.heap-size and A[ℓ] > A[i] then
    | largest = ℓ
  else largest = i
  if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[largest]
    | largest = r
  if largest ≠ i then
    | swap(A, i, largest)
    | MaxHeapify(A, largest)
  
```

Lokale Strategie: *top-down*

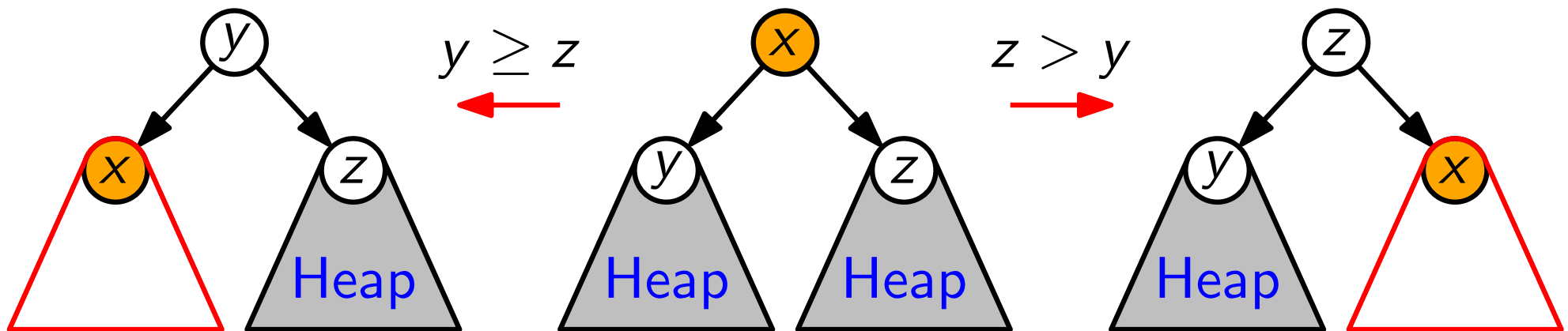
Laufzeit? $T_{MH}(n, i)$

- \coloneqq Anzahl der Swaps
- \leq Länge des Weges von Knoten i zu einem Blatt
- \leq Höhe von i im Heap
- \leq Höhe des Heaps
- $\leq \lfloor \log_2 n \rfloor$



Elementaroperation

„Versickere“ x , falls x zu klein, d.h. falls $x < \max(y, z)$



```

MaxHeapify(int A[], index i)
  ℓ = left(i); r = right(i)
  if ℓ ≤ A.heap-size and A[ℓ] > A[i] then
    largest = ℓ
  else largest = i
  if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[largest]
    largest = r
  if largest ≠ i then
    swap(A, i, largest)
    MaxHeapify(A, largest)
  
```

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit? $T_{MH}(n, i)$

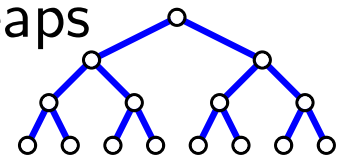
\coloneqq Anzahl der Swaps

\leq Länge des Weges von Knoten i zu einem Blatt

\leq Höhe von i im Heap

\leq Höhe des Heaps

$\leq \lfloor \log_2 n \rfloor$




The diagram illustrates the 'Push' operation in a binary heap through three stages:

- Initial State:** Node x (orange) is added as the left child of node y (white). Node z (white) is the right child of y . A red arrow points to x with the condition $y \geq z$.
- Swap:** Node x is swapped with its parent y because $y \geq z$. The resulting structure shows y as the root, with x as its left child and z as its right child. Both y and z are now inside gray triangles labeled 'Heap'.
- Final State:** Node x is added as the right child of node z . A red arrow points to x with the condition $z > y$.

Lokale Strategie: *top-down*

aps



Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

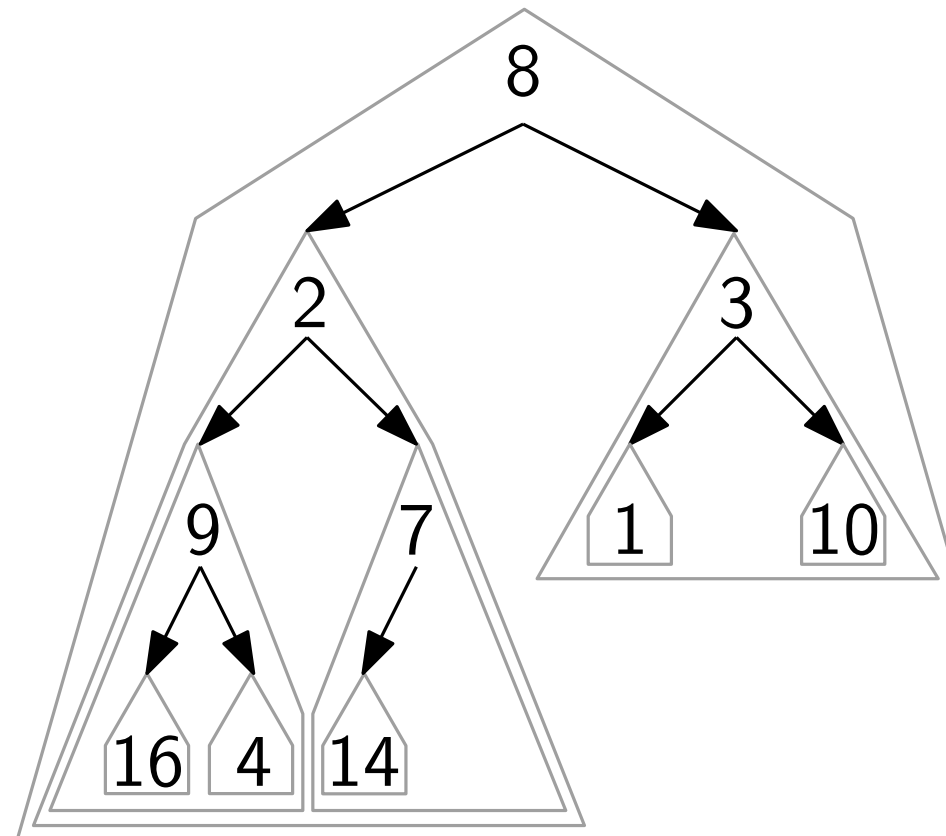
Laufzeit: $T_{\text{MH}}(n, i) \leq$ Höhe von Knoten i im Heap der Größe n

Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit: $T_{MH}(n, i) \leq \text{Höhe von Knoten } i \text{ im Heap der Größe } n$

Globale Strategie: *bottom-up*



Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

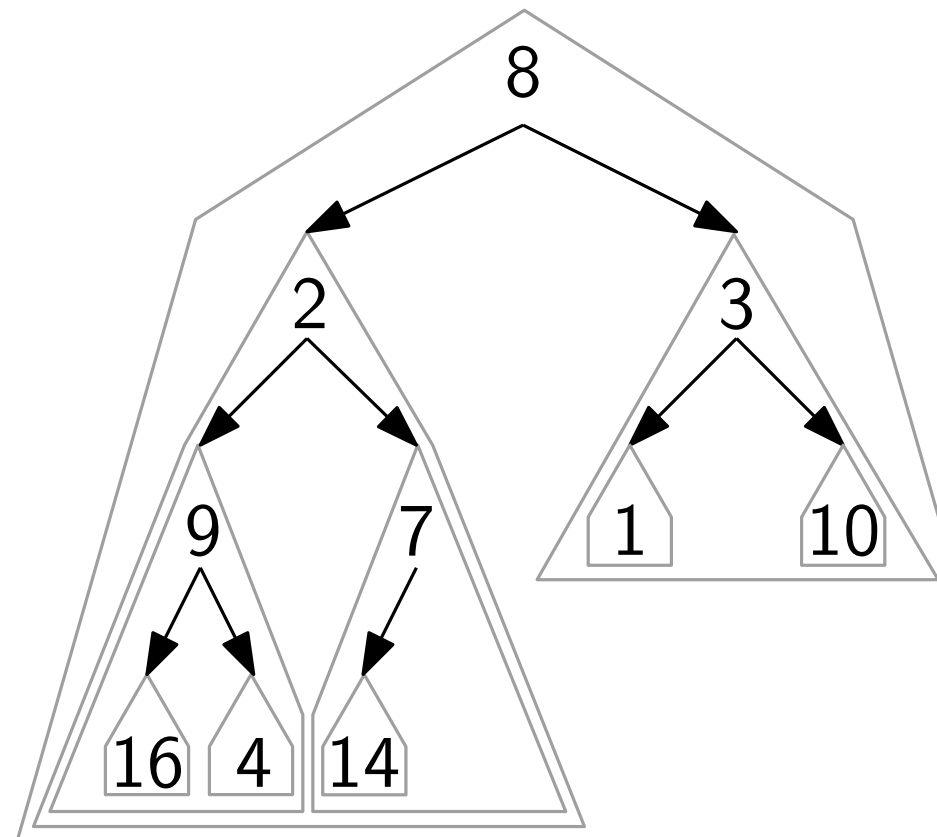
Laufzeit: $T_{MH}(n, i) \leq \text{Höhe von Knoten } i \text{ im Heap der Größe } n$

Globale Strategie: *bottom-up*

```
BuildMaxHeap(int A[])
```

```
    A.heap-size = A.length
```

```
    for  $i = \lfloor A.length/2 \rfloor$  downto 1  
        do MaxHeapify(A, i)
```



Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit: $T_{MH}(n, i) \leq \text{Höhe von Knoten } i \text{ im Heap der Größe } n$

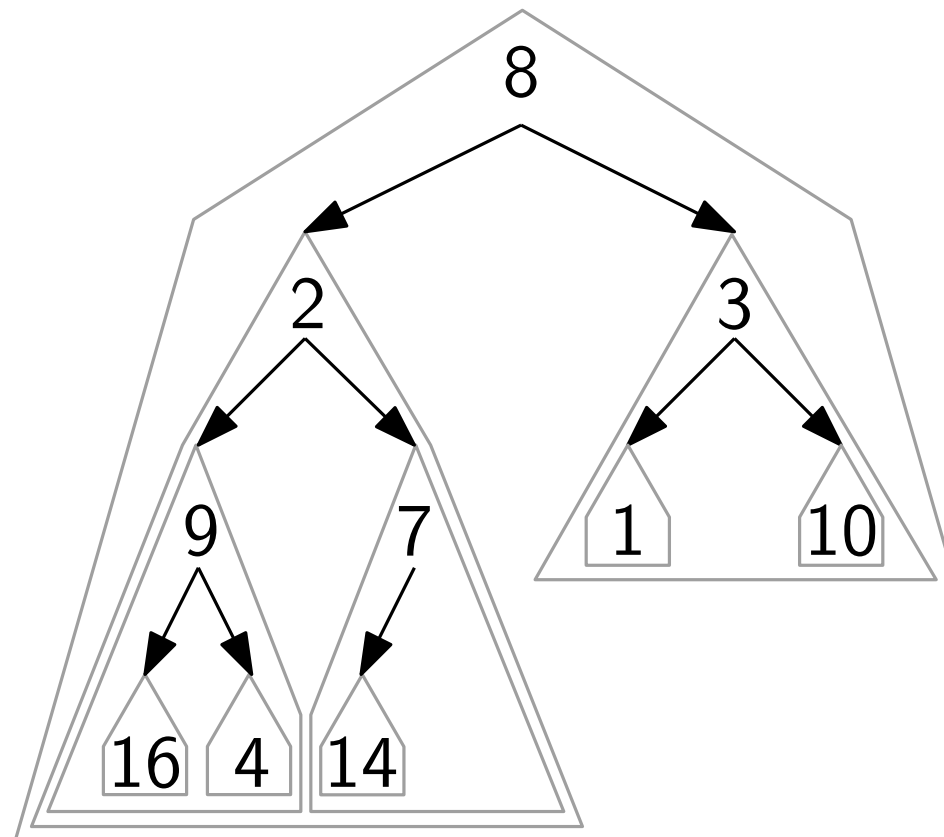
Globale Strategie: *bottom-up*

```
BuildMaxHeap(int A[])
```

```
  A.heap-size = A.length
```

```
  for  $i = \lfloor A.length/2 \rfloor$  downto 1  
    do MaxHeapify(A, i)
```

Laufzeit.



Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit: $T_{MH}(n, i) \leq \text{Höhe von Knoten } i \text{ im Heap der Größe } n$

Globale Strategie: *bottom-up*

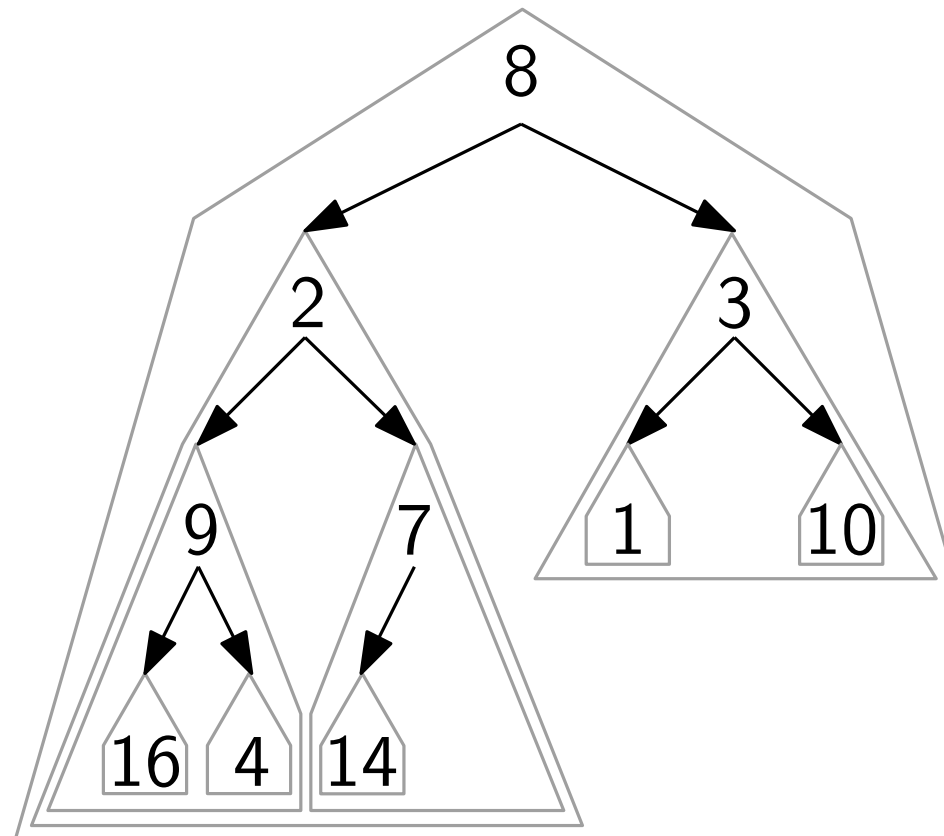
```
BuildMaxHeap(int A[])
```

```
    A.heap-size = A.length
```

```
    for  $i = \lfloor A.length/2 \rfloor$  downto 1
```

```
        do MaxHeapify(A, i)
```

Laufzeit. grob: $O(n \log n)$



Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit: $T_{MH}(n, i) \leq \text{Höhe von Knoten } i \text{ im Heap der Größe } n$

Globale Strategie: *bottom-up*

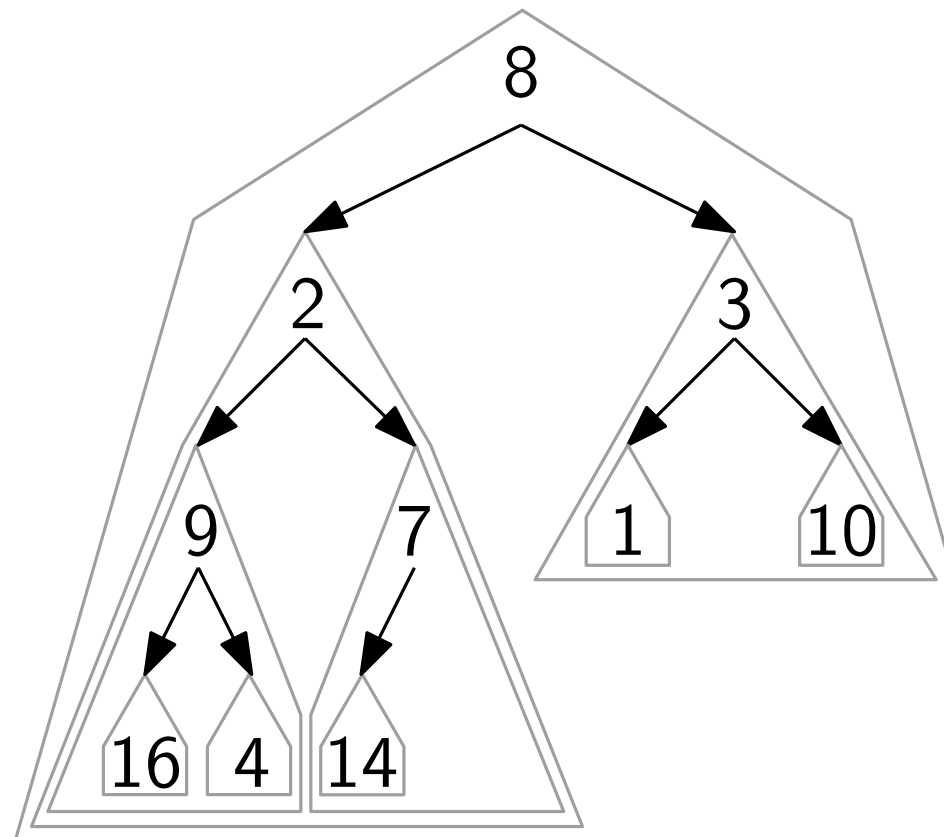
```
BuildMaxHeap(int A[])
```

```
    A.heap-size = A.length
```

```
    for  $i = \lfloor A.length/2 \rfloor$  downto 1  
        do MaxHeapify(A, i)
```

Laufzeit. grob: $O(n \log n)$

genauer: $T_{BMH}(n) =$



Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit: $T_{MH}(n, i) \leq \text{Höhe von Knoten } i \text{ im Heap der Größe } n$

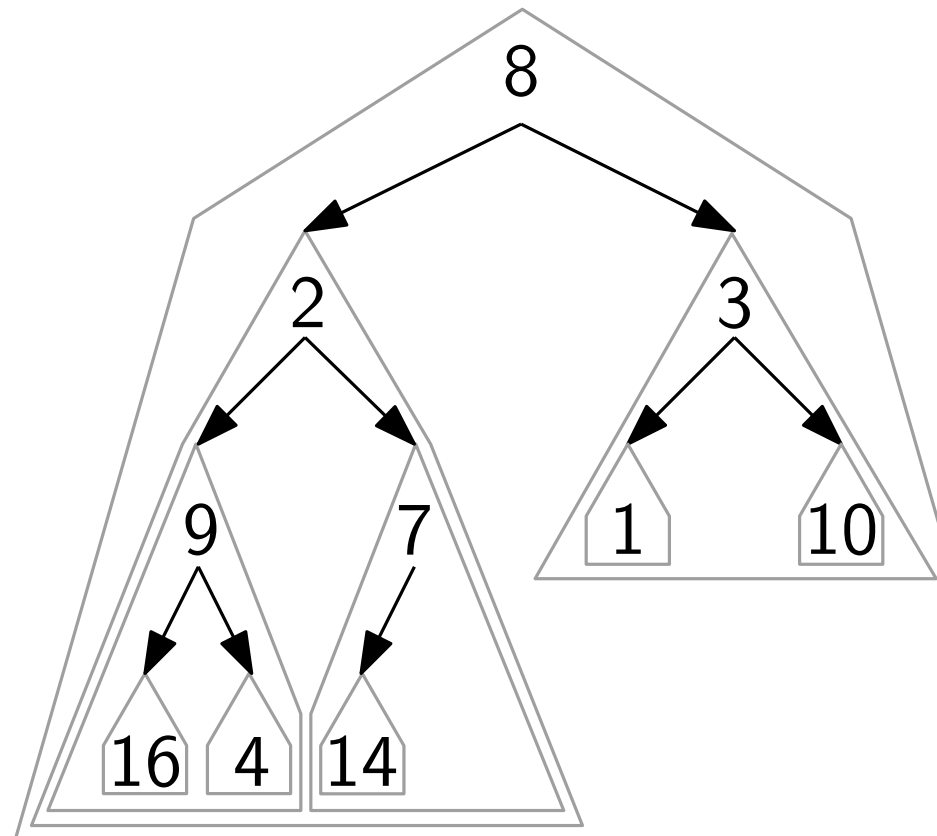
Globale Strategie: *bottom-up*

```
BuildMaxHeap(int A[])
  A.heap-size = A.length
  for i =  $\lfloor A.length/2 \rfloor$  downto 1
    do MaxHeapify(A, i)
```

Laufzeit. grob: $O(n \log n)$

genauer: $T_{BMH}(n) =$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} T_{MH}(n, i)$$



Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit: $T_{MH}(n, i) \leq \text{Höhe von Knoten } i \text{ im Heap der Größe } n$

Globale Strategie: *bottom-up*

```
BuildMaxHeap(int A[])
```

```
  A.heap-size = A.length
```

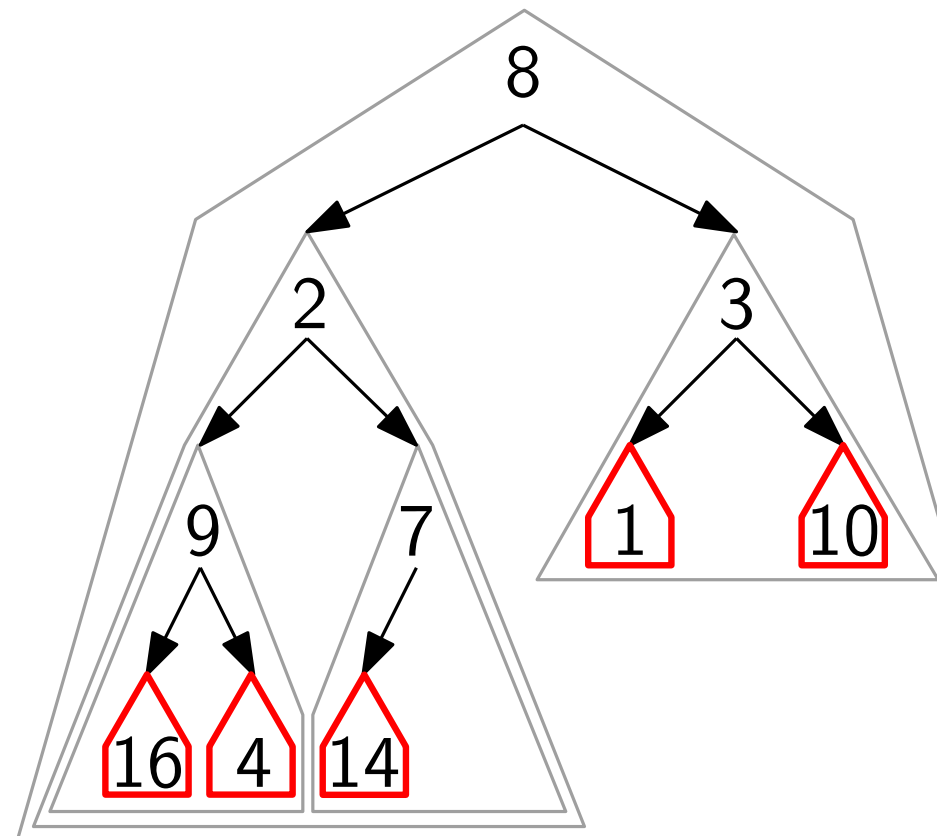
```
  for  $i = \lfloor A.length/2 \rfloor$  downto 1  
    do MaxHeapify(A, i)
```

Laufzeit. grob: $O(n \log n)$

genauer: $T_{BMH}(n) =$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} T_{MH}(n, i)$$

\approx



Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit: $T_{MH}(n, i) \leq \text{Höhe von Knoten } i \text{ im Heap der Größe } n$

Globale Strategie: *bottom-up*

```
BuildMaxHeap(int A[])
```

```
  A.heap-size = A.length
```

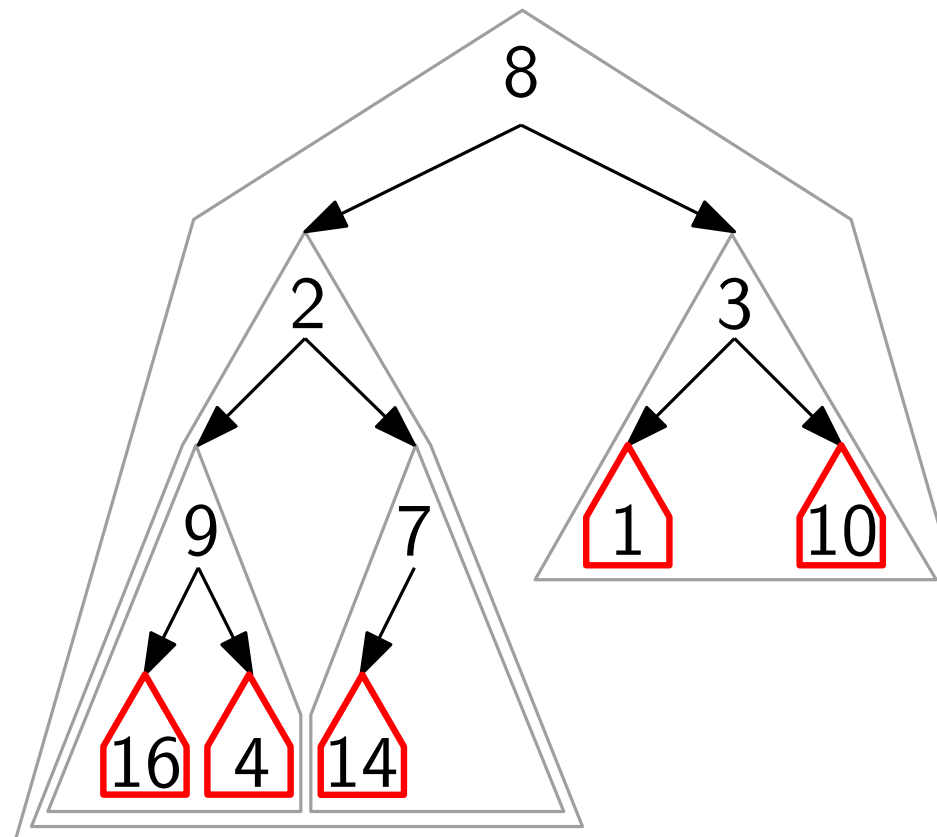
```
  for  $i = \lfloor A.length/2 \rfloor$  downto 1  
    do MaxHeapify(A, i)
```

Laufzeit. grob: $O(n \log n)$

genauer: $T_{BMH}(n) =$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} T_{MH}(n, i)$$

$$\approx \frac{n}{2} \cdot 0 +$$



Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit: $T_{MH}(n, i) \leq \text{Höhe von Knoten } i \text{ im Heap der Größe } n$

Globale Strategie: *bottom-up*

```
BuildMaxHeap(int A[])
```

```
  A.heap-size = A.length
```

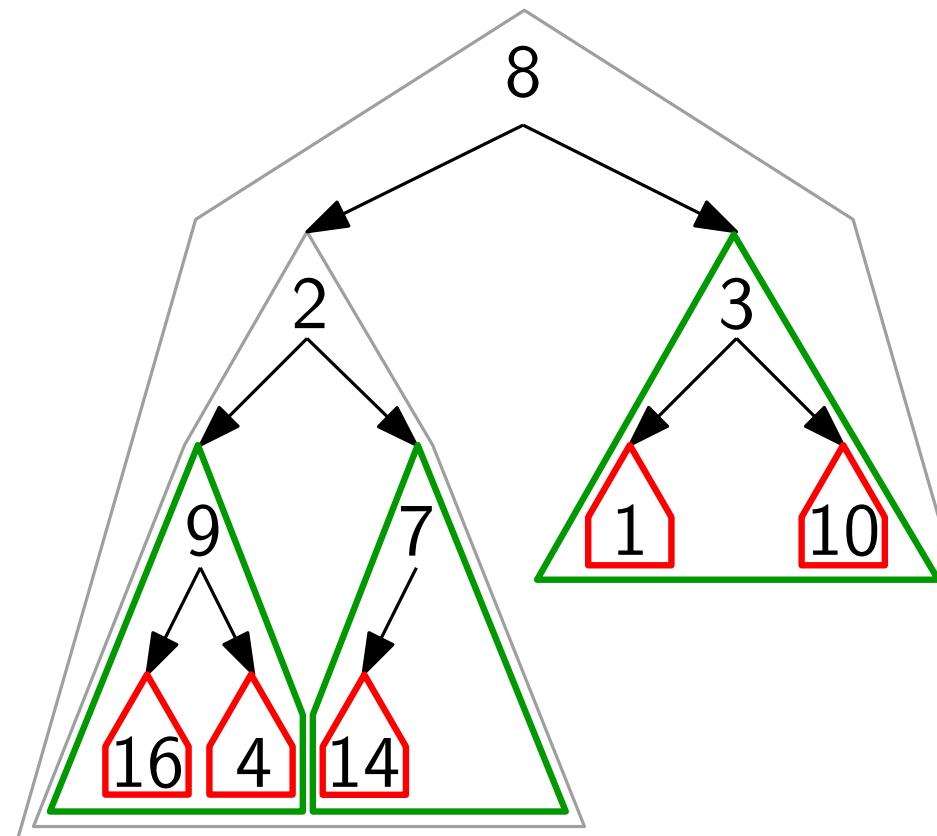
```
  for  $i = \lfloor A.length/2 \rfloor$  downto 1  
    do MaxHeapify(A, i)
```

Laufzeit. grob: $O(n \log n)$

genauer: $T_{BMH}(n) =$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} T_{MH}(n, i)$$

$$\approx \frac{n}{2} \cdot 0 +$$



Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit: $T_{MH}(n, i) \leq \text{Höhe von Knoten } i \text{ im Heap der Größe } n$

Globale Strategie: *bottom-up*

```
BuildMaxHeap(int A[])
```

```
  A.heap-size = A.length
```

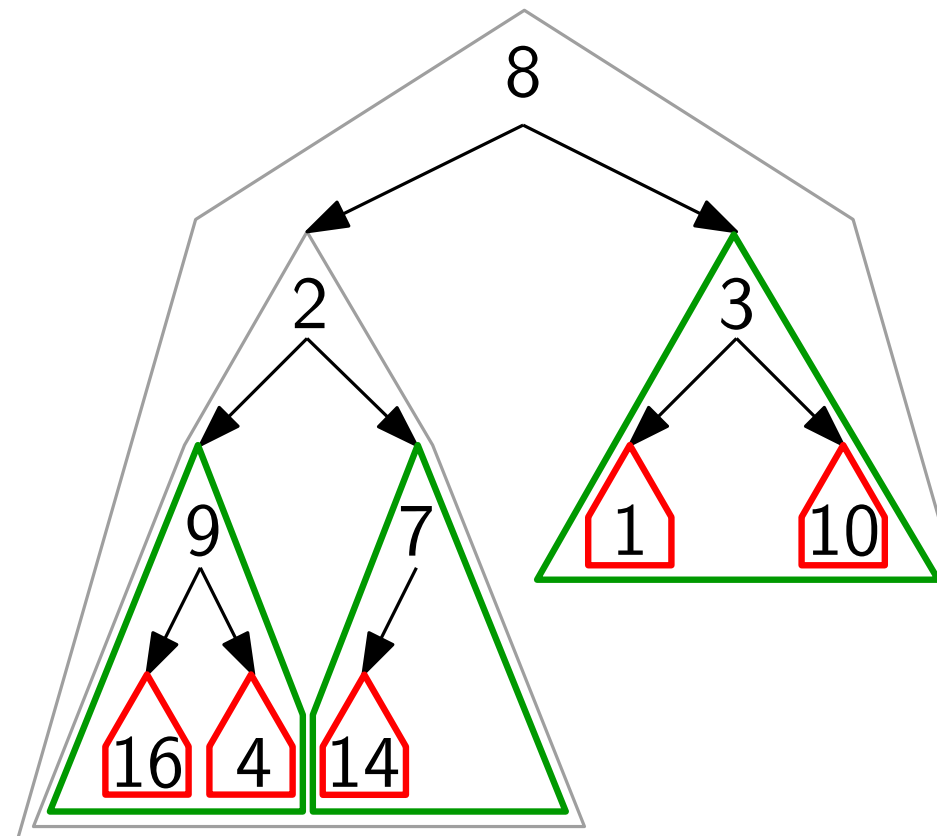
```
  for  $i = \lfloor A.length/2 \rfloor$  downto 1  
    do MaxHeapify(A, i)
```

Laufzeit. grob: $O(n \log n)$

genauer: $T_{BMH}(n) =$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} T_{MH}(n, i)$$

$$\approx \frac{n}{2} \cdot 0 + \frac{n}{4} \cdot 1 +$$



Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit: $T_{MH}(n, i) \leq \text{Höhe von Knoten } i \text{ im Heap der Größe } n$

Globale Strategie: *bottom-up*

```
BuildMaxHeap(int A[])
```

```
  A.heap-size = A.length
```

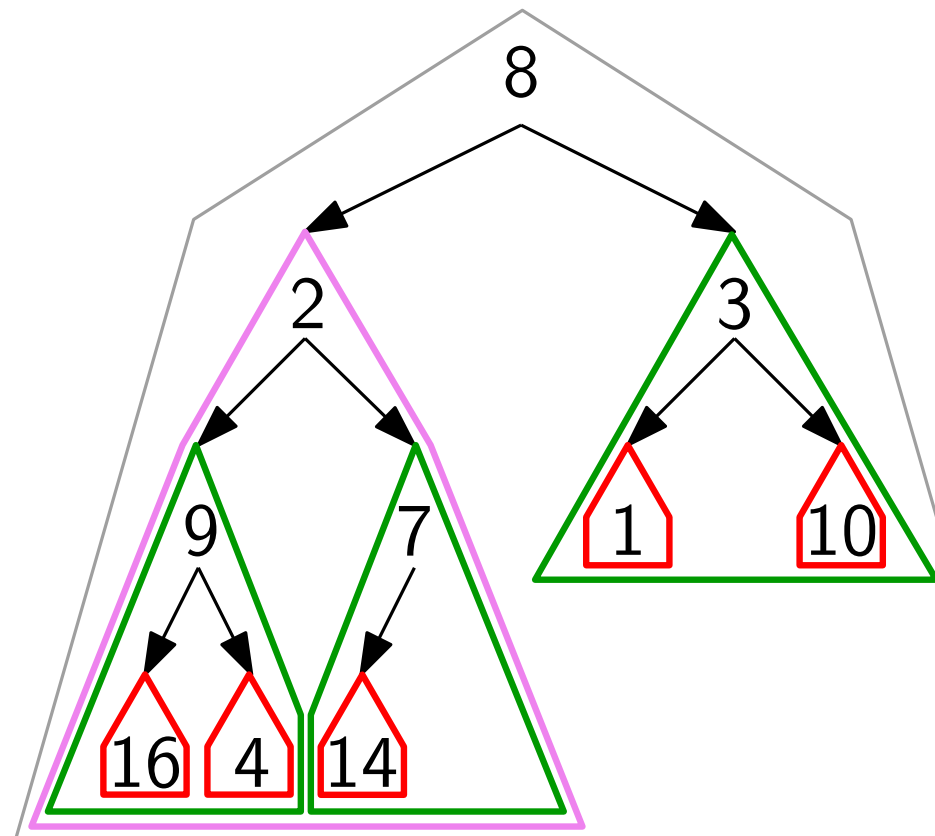
```
  for  $i = \lfloor A.length/2 \rfloor$  downto 1  
    do MaxHeapify(A, i)
```

Laufzeit. grob: $O(n \log n)$

genauer: $T_{BMH}(n) =$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} T_{MH}(n, i)$$

$$\approx \frac{n}{2} \cdot 0 + \frac{n}{4} \cdot 1 +$$



Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit: $T_{MH}(n, i) \leq \text{Höhe von Knoten } i \text{ im Heap der Größe } n$

Globale Strategie: *bottom-up*

```
BuildMaxHeap(int A[])
```

```
  A.heap-size = A.length
```

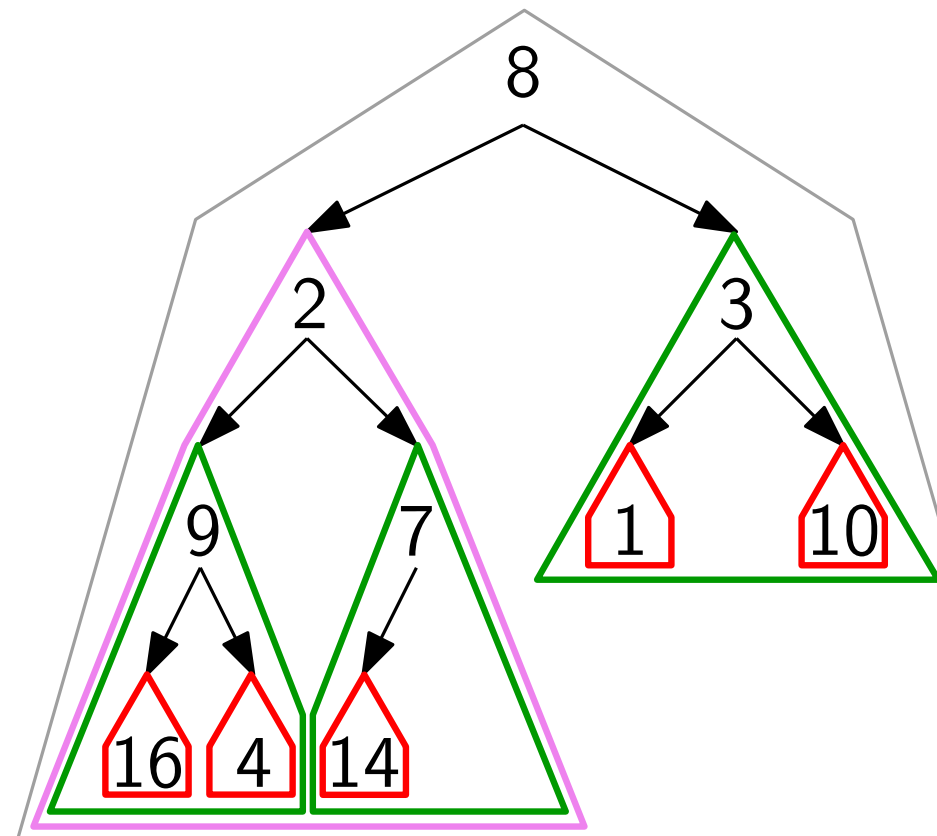
```
  for  $i = \lfloor A.length/2 \rfloor$  downto 1  
    do MaxHeapify(A, i)
```

Laufzeit. grob: $O(n \log n)$

genauer: $T_{BMH}(n) =$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} T_{MH}(n, i)$$

$$\approx \frac{n}{2} \cdot 0 + \frac{n}{4} \cdot 1 + \frac{n}{8} \cdot 2 +$$



Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit: $T_{MH}(n, i) \leq \text{Höhe von Knoten } i \text{ im Heap der Größe } n$

Globale Strategie: *bottom-up*

```
BuildMaxHeap(int A[])
```

```
  A.heap-size = A.length
```

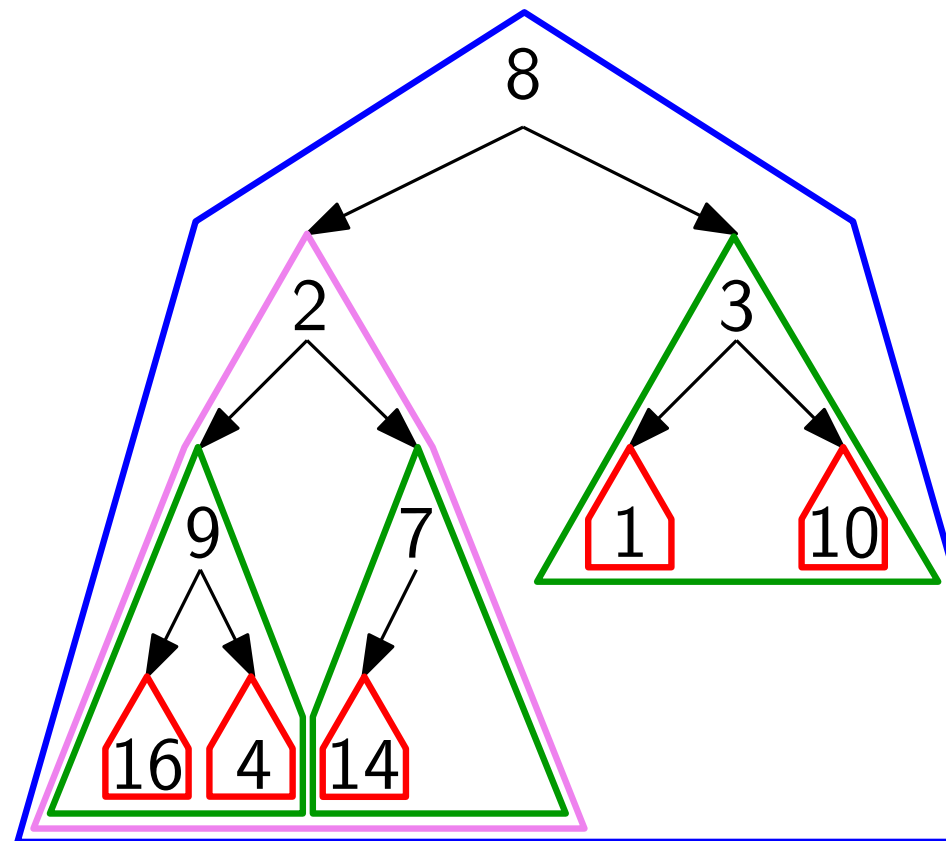
```
  for  $i = \lfloor A.length/2 \rfloor$  downto 1  
    do MaxHeapify(A, i)
```

Laufzeit. grob: $O(n \log n)$

genauer: $T_{BMH}(n) =$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} T_{MH}(n, i)$$

$$\approx \frac{n}{2} \cdot 0 + \frac{n}{4} \cdot 1 + \frac{n}{8} \cdot 2 +$$



Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit: $T_{MH}(n, i) \leq \text{Höhe von Knoten } i \text{ im Heap der Größe } n$

Globale Strategie: *bottom-up*

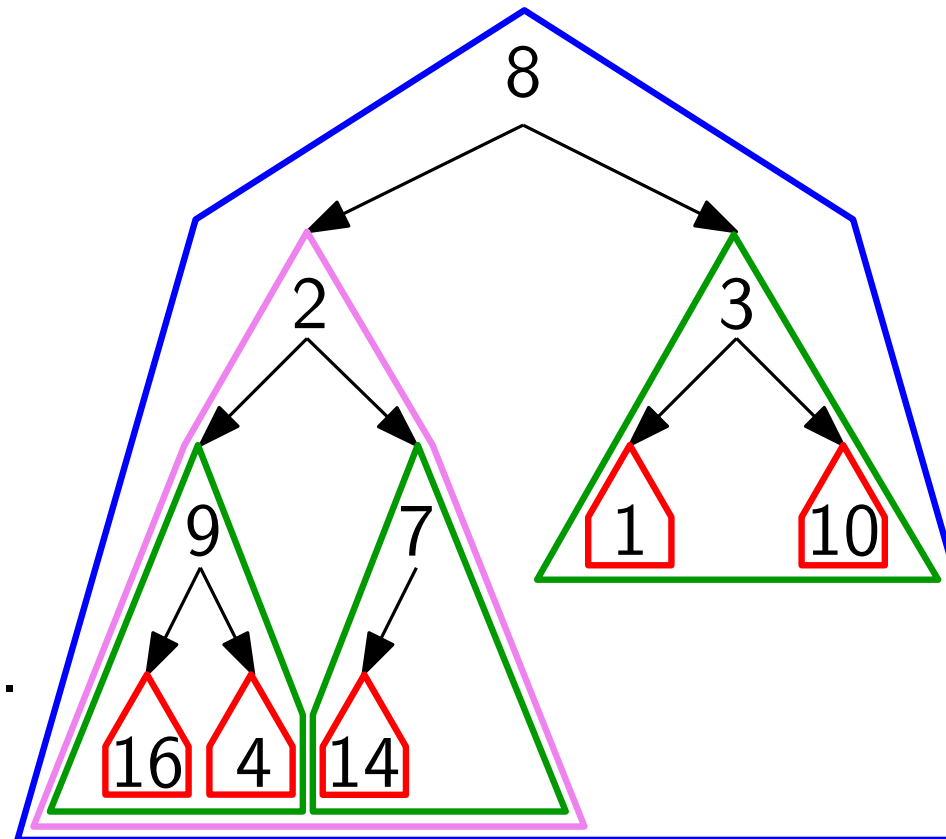
```
BuildMaxHeap(int A[])
  A.heap-size = A.length
  for i = ⌊A.length/2⌋ downto 1
    do MaxHeapify(A, i)
```

Laufzeit. grob: $O(n \log n)$

genauer: $T_{BMH}(n) =$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} T_{MH}(n, i)$$

$$\approx \frac{n}{2} \cdot 0 + \frac{n}{4} \cdot 1 + \frac{n}{8} \cdot 2 + \frac{n}{16} \cdot 3 + \dots$$



Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit: $T_{MH}(n, i) \leq \text{Höhe von Knoten } i \text{ im Heap der Größe } n$

Globale Strategie: *bottom-up*

```
BuildMaxHeap(int A[])
  A.heap-size = A.length
  for i =  $\lfloor A.length/2 \rfloor$  downto 1
    do MaxHeapify(A, i)
```

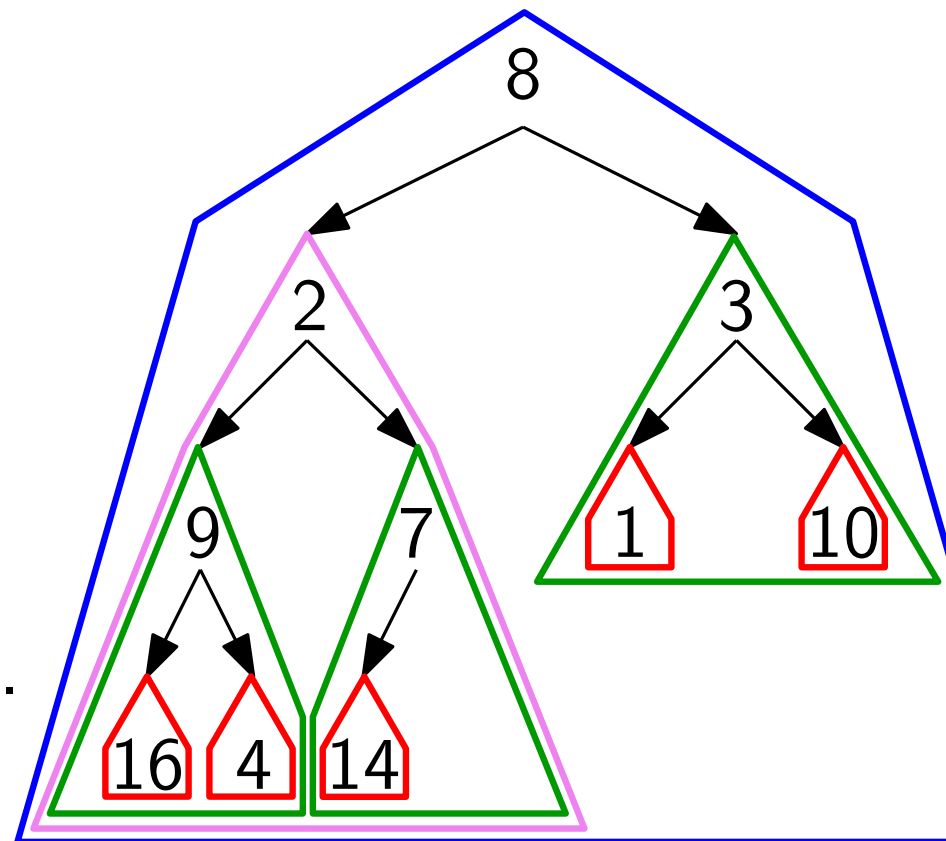
Laufzeit. grob: $O(n \log n)$

genauer: $T_{BMH}(n) =$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} T_{MH}(n, i)$$

$$\approx \frac{n}{2} \cdot 0 + \frac{n}{4} \cdot 1 + \frac{n}{8} \cdot 2 + \frac{n}{16} \cdot 3 + \dots$$

$$= n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \cdot i$$



Das große Ganze

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit: $T_{MH}(n, i) \leq \text{Höhe von Knoten } i \text{ im Heap der Größe } n$

Globale Strategie: *bottom-up*

```
BuildMaxHeap(int A[])
  A.heap-size = A.length
  for i = ⌊A.length/2⌋ downto 1
    do MaxHeapify(A, i)
```

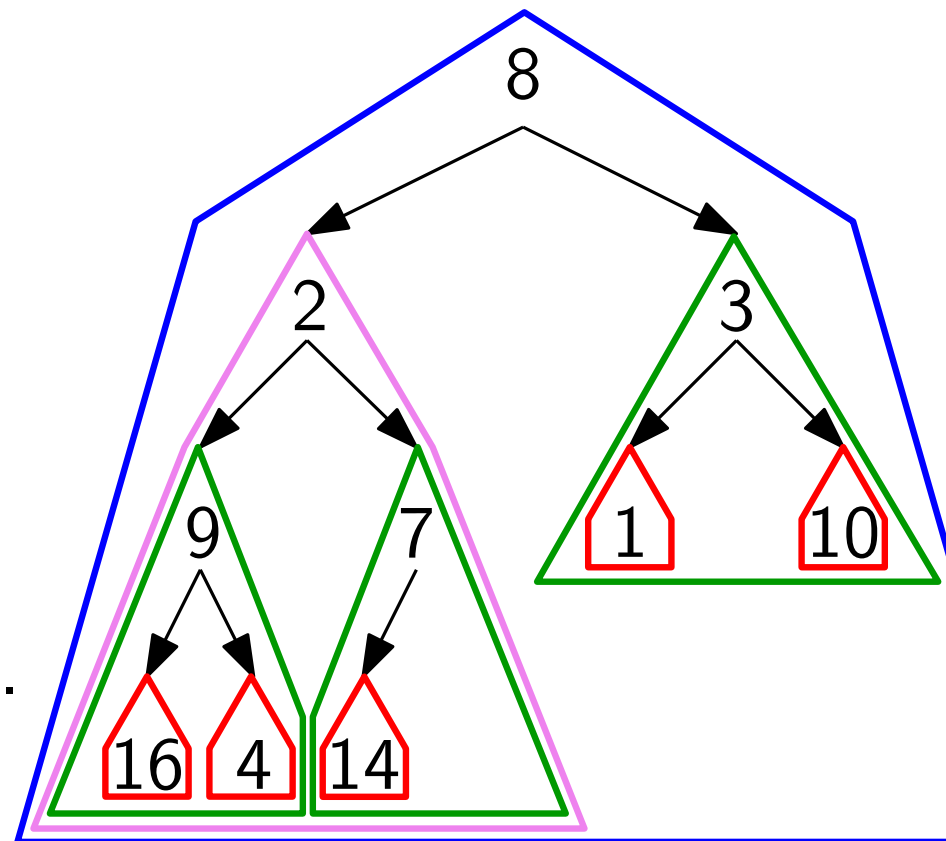
Laufzeit. grob: $O(n \log n)$

genauer: $T_{BMH}(n) =$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} T_{MH}(n, i)$$

$$\approx \frac{n}{2} \cdot 0 + \frac{n}{4} \cdot 1 + \frac{n}{8} \cdot 2 + \frac{n}{16} \cdot 3 + \dots$$

$$= n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \cdot i = ?$$



Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$$

Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad (\text{falls } |x| < 1)$

Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad (\text{falls } |x| < 1)$

Wir hätten gerne:

Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ (falls $|x| < 1$)

Wir hätten gerne: $\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} =$

Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \stackrel{\text{blue}}{\leq} \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\overset{\text{blue}}{\infty} \cancel{\lfloor \log n \rfloor}} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad (\text{falls } |x| < 1)$

Wir hätten gerne: $\sum_{i=1}^{\infty} \textcolor{red}{i} x^{\textcolor{red}{i}-1} = \textcolor{red}{?}$

Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ (falls $|x| < 1$)

Wir hätten gerne: $\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = ?$

Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad (\text{falls } |x| < 1)$

ableiten!

Wir hätten gerne: $\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = ?$

Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \stackrel{\text{blue}}{=} \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\overset{\infty}{\cancel{\lfloor \log n \rfloor}}} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad (\text{falls } |x| < 1)$

ableiten!

Wir hätten gerne: $\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = ?$

Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad (\text{falls } |x| < 1)$

ableiten!

Wir hätten gerne: $\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = ?$

ableiten!

Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad (\text{falls } |x| < 1)$

ableiten!

Wir hätten gerne:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = ?$$

ableiten!

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - g'f}{g^2}$$

Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad (\text{falls } |x| < 1)$

ableiten!

Wir hätten gerne:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

ableiten!

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - g'f}{g^2}$$

Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad (\text{falls } |x| < 1)$

ableiten!

Wir hätten gerne: $\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

ableiten!

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - g'f}{g^2}$$

$$\Rightarrow T_{\text{BMH}}(n) \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad (\text{falls } |x| < 1)$

ableiten!

Wir hätten gerne:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

ableiten!

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g f' - g' f}{g^2}$$

$$\Rightarrow T_{\text{BMH}}(n) \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} =$$

Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \stackrel{\text{blue}}{=} \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad (\text{falls } |x| < 1)$

ableiten!

Wir hätten gerne: $\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$\Rightarrow T_{\text{BMH}}(n) \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{n}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

ableiten!

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - g'f}{g^2}$$

Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad (\text{falls } |x| < 1)$

ableiten!

Wir hätten gerne:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

ableiten!

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - g'f}{g^2}$$

$$\Rightarrow T_{\text{BMH}}(n) \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{n}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = n$$

Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ (falls $|x| < 1$)

ableiten!

Wir hätten gerne: $\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Quotientenregel:
 $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - g'f}{g^2}$

$$\Rightarrow T_{\text{BMH}}(n) \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{n}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = n$$

Satz. Ein Heap von n Elementen kann in $\Theta(n)$ Zeit berechnet werden.

Übung Heap-Aufbau

Aufgabe: Bauen Sie einen Heap mit BuildMaxHeap!



```
BuildMaxHeap(int A[])
  A.heap-size = A.length
  for  $i = \lfloor A.length/2 \rfloor$  downto 1 do
    MaxHeapify(A, i)
```

```
MaxHeapify(int A[], index i)
   $\ell = \text{left}(i)$ ;  $r = \text{right}(i)$ 
  if  $\ell \leq A.\text{heap-size}$  and  $A[\ell] > A[i]$  then
     $\ell = \text{largest} = \ell$ 
  else  $\text{largest} = i$ 
  if  $r \leq A.\text{heap-size}$  and  $A[r] > A[\text{largest}]$  then
     $\text{largest} = r$ 
  if  $\text{largest} \neq i$  then
    swap(A, i, largest)
    MaxHeapify(A, largest)
```

Übung Heap-Aufbau

Aufgabe: Bauen Sie einen Heap mit BuildMaxHeap!



```
BuildMaxHeap(int A[])
  A.heap-size = A.length
  for  $i = \lfloor A.length/2 \rfloor$  downto 1 do
    MaxHeapify(A, i)
```

```
MaxHeapify(int A[], index  $i$ )
   $\ell = \text{left}(i)$ ;  $r = \text{right}(i)$ 
  if  $\ell \leq A.\text{heap-size}$  and  $A[\ell] > A[i]$  then
     $\ell = \text{largest} = \ell$ 
  else  $\text{largest} = i$ 
  if  $r \leq A.\text{heap-size}$  and  $A[r] > A[\text{largest}]$  then
     $\text{largest} = r$ 
  if  $\text{largest} \neq i$  then
    swap( $A, i, \text{largest}$ )
    MaxHeapify( $A, \text{largest}$ )
```

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: **Prioritätsschlange**

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: **Prioritätsschlange**

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: **Prioritätsschlange**

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

```
FindMax()  
  return A[1]
```

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: **Prioritätsschlange**

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()
return $A[1]$

ExtractMax()

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: **Prioritätsschlange**

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()

return $A[1]$

ExtractMax()

if $A.heap-size < 1$ **then**
 error "Heap underflow"

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: **Prioritätsschlange**

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()

return $A[1]$

ExtractMax()

if $A.heap-size < 1$ **then**
 error "Heap underflow"

$max = A[1]$

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: **Prioritätsschlange**

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()

return $A[1]$

ExtractMax()

if $A.heap-size < 1$ **then**
 error "Heap underflow"

$max = A[1]$

$A[1] = A[A.heap-size]$

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: **Prioritätsschlange**

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()

return $A[1]$

ExtractMax()

if $A.heap-size < 1$ **then**
 error "Heap underflow"

$max = A[1]$

$A[1] = A[A.heap-size]$

$A.heap-size \leftarrow A.heap-size - 1$

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: **Prioritätsschlange**

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()

return $A[1]$

ExtractMax()

if $A.heap-size < 1$ **then**
 error "Heap underflow"

$max = A[1]$

$A[1] = A[A.heap-size]$

$A.heap-size \leftarrow A.heap-size - 1$

MaxHeapify($A, 1$)

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: **Prioritätsschlange**

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()

return $A[1]$

ExtractMax()

if $A.heap-size < 1$ **then**
 error "Heap underflow"

$max = A[1]$

$A[1] = A[A.heap-size]$

$A.heap-size \leftarrow A.heap-size - 1$

MaxHeapify($A, 1$)

return max

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()
return $A[1]$

ExtractMax()
if $A.heap-size < 1$ **then**
 error "Heap underflow"
 $max = A[1]$
 $A[1] = A[A.heap-size]$
 $A.heap-size \leftarrow A.heap-size - 1$
 $MaxHeapify(A, 1)$
return max

IncreaseKey(index i , prio. p)

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()

return $A[1]$

IncreaseKey(index i , prio. p)

if $p < A[i]$ **then error** "prio. too small"

ExtractMax()

if $A.heap-size < 1$ **then**
 error "Heap underflow"

$max = A[1]$

$A[1] = A[A.heap-size]$

$A.heap-size \leftarrow A.heap-size - 1$

MaxHeapify($A, 1$)

return max

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()

return $A[1]$

ExtractMax()

if $A.heap-size < 1$ **then**
 error "Heap underflow"

$max = A[1]$

$A[1] = A[A.heap-size]$

$A.heap-size \leftarrow A.heap-size - 1$

MaxHeapify($A, 1$)

return max

IncreaseKey(index i , prio. p)

if $p < A[i]$ **then error** "prio. too small"

$A[i] = p$

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()

return $A[1]$

ExtractMax()

if $A.heap-size < 1$ **then**
 error "Heap underflow"

$max = A[1]$

$A[1] = A[A.heap-size]$

$A.heap-size \leftarrow A.heap-size - 1$

MaxHeapify($A, 1$)

return max

IncreaseKey(index i , prio. p)

if $p < A[i]$ **then error** "prio. too small"

$A[i] = p$

while $i > 1$ **and** $A[\text{parent}(i)] < A[i]$
 |

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: **Prioritätsschlange**

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()

return $A[1]$

ExtractMax()

if $A.heap-size < 1$ **then**
 error "Heap underflow"

$max = A[1]$

$A[1] = A[A.heap-size]$

$A.heap-size \leftarrow A.heap-size - 1$

MaxHeapify($A, 1$)

return max

IncreaseKey(index i , prio. p)

if $p < A[i]$ **then error** "prio. too small"

$A[i] = p$

while $i > 1$ **and** $A[\text{parent}(i)] < A[i]$

$\text{swap}(A, i, \text{parent}(i))$

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()

return $A[1]$

ExtractMax()

if $A.heap-size < 1$ **then**
 error "Heap underflow"

$max = A[1]$

$A[1] = A[A.heap-size]$

$A.heap-size \leftarrow A.heap-size - 1$

MaxHeapify($A, 1$)

return max

IncreaseKey(index i , prio. p)

if $p < A[i]$ **then error** "prio. too small"

$A[i] = p$

while $i > 1$ **and** $A[parent(i)] < A[i]$

$swap(A, i, parent(i))$

$i = parent(i)$

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()

return $A[1]$

ExtractMax()

if $A.heap-size < 1$ **then**
 error "Heap underflow"

$max = A[1]$

$A[1] = A[A.heap-size]$

$A.heap-size --$

MaxHeapify($A, 1$)

return max

IncreaseKey(index i , prio. p)

if $p < A[i]$ **then error** "prio. too small"

$A[i] = p$

while $i > 1$ **and** $A[parent(i)] < A[i]$

 swap($A, i, parent(i)$)

$i = parent(i)$

Insert(priorität p)

$A.heap-size ++$

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()

return $A[1]$

ExtractMax()

if $A.heap-size < 1$ **then**
 error "Heap underflow"

$max = A[1]$

$A[1] = A[A.heap-size]$

$A.heap-size --$

MaxHeapify($A, 1$)

return max

IncreaseKey(index i , prio. p)

if $p < A[i]$ **then error** "prio. too small"

$A[i] = p$

while $i > 1$ **and** $A[parent(i)] < A[i]$

 swap($A, i, parent(i)$)

$i = parent(i)$

Insert(priorität p)

$A.heap-size ++$

if $A.heap-size > A.length$ **then error...**

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()

return $A[1]$

ExtractMax()

if $A.heap-size < 1$ **then**
 error "Heap underflow"

$max = A[1]$

$A[1] = A[A.heap-size]$

$A.heap-size --$

MaxHeapify($A, 1$)

return max

IncreaseKey(index i , prio. p)

if $p < A[i]$ **then error** "prio. too small"

$A[i] = p$

while $i > 1$ **and** $A[parent(i)] < A[i]$

 swap($A, i, parent(i)$)

$i = parent(i)$

Insert(priorität p)

$A.heap-size ++$

if $A.heap-size > A.length$ **then error...**

$A[A.heap-size] = -\infty$

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()

return $A[1]$

ExtractMax()

if $A.heap-size < 1$ **then**
 error "Heap underflow"

$max = A[1]$

$A[1] = A[A.heap-size]$

$A.heap-size --$

MaxHeapify($A, 1$)

return max

IncreaseKey(index i , prio. p)

if $p < A[i]$ **then error** "prio. too small"

$A[i] = p$

while $i > 1$ **and** $A[parent(i)] < A[i]$

 swap($A, i, parent(i)$)

$i = parent(i)$

Insert(priorität p)

$A.heap-size ++$

if $A.heap-size > A.length$ **then error...**

$A[A.heap-size] = -\infty$

IncreaseKey($A.heap-size, p$)

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax() $O(\quad)$
return $A[1]$

Laufzeiten?

ExtractMax() $O(\quad)$
if $A.heap-size < 1$ then
 error "Heap underflow"
 $max = A[1]$
 $A[1] = A[A.heap-size]$
 $A.heap-size --$
MaxHeapify($A, 1$)
return max

IncreaseKey(index i , prio. p) $O(\quad)$
if $p < A[i]$ then error "prio. too small"
 $A[i] = p$
while $i > 1$ and $A[parent(i)] < A[i]$
 swap($A, i, parent(i)$)
 $i = parent(i)$

Insert(priorität p) $O(\quad)$
 $A.heap-size ++$
if $A.heap-size > A.length$ then error...
 $A[A.heap-size] = -\infty$
IncreaseKey($A.heap-size, p$)

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax() $O(1)$
return $A[1]$

Laufzeiten?

ExtractMax() $O(\quad)$
if $A.heap-size < 1$ then
 error "Heap underflow"
 $max = A[1]$
 $A[1] = A[A.heap-size]$
 $A.heap-size --$
MaxHeapify($A, 1$)
return max

IncreaseKey(index i , prio. p) $O(\quad)$
if $p < A[i]$ then error "prio. too small"
 $A[i] = p$
while $i > 1$ and $A[parent(i)] < A[i]$
 swap($A, i, parent(i)$)
 $i = parent(i)$

Insert(priorität p) $O(\quad)$
 $A.heap-size ++$
if $A.heap-size > A.length$ then error...
 $A[A.heap-size] = -\infty$
IncreaseKey($A.heap-size, p$)

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()
return $A[1]$

$O(1)$

Laufzeiten?

ExtractMax() $O(\log n)$

if $A.heap-size < 1$ then
 error "Heap underflow"

$max = A[1]$

$A[1] = A[A.heap-size]$

$A.heap-size --$

MaxHeapify($A, 1$)

return max

IncreaseKey(index i , prio. p) $O(\quad)$

if $p < A[i]$ then error "prio. too small"

$A[i] = p$

while $i > 1$ and $A[parent(i)] < A[i]$

 swap($A, i, parent(i)$)

$i = parent(i)$

Insert(priorität p)

$O(\quad)$

$A.heap-size ++$

if $A.heap-size > A.length$ then error...

$A[A.heap-size] = -\infty$

IncreaseKey($A.heap-size, p$)

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax() $O(1)$
return $A[1]$

Laufzeiten?

ExtractMax() $O(\log n)$
if $A.heap-size < 1$ then
 error "Heap underflow"
 $max = A[1]$
 $A[1] = A[A.heap-size]$
 $A.heap-size --$
MaxHeapify($A, 1$)
return max

IncreaseKey(index i , prio. p) $O(\log n)$
if $p < A[i]$ then error "prio. too small"
 $A[i] = p$
while $i > 1$ and $A[parent(i)] < A[i]$
 swap($A, i, parent(i)$)
 $i = parent(i)$

Insert(priorität p) $O(\quad)$
 $A.heap-size ++$
if $A.heap-size > A.length$ then error...
 $A[A.heap-size] = -\infty$
IncreaseKey($A.heap-size, p$)

Zurück zu Prioritätsschlangen

Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge,
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax() $O(1)$
return $A[1]$

Laufzeiten?

ExtractMax() $O(\log n)$
if $A.heap-size < 1$ then
 error "Heap underflow"
 $max = A[1]$
 $A[1] = A[A.heap-size]$
 $A.heap-size --$
MaxHeapify($A, 1$)
return max

IncreaseKey(index i , prio. p) $O(\log n)$
if $p < A[i]$ then error "prio. too small"
 $A[i] = p$
while $i > 1$ and $A[parent(i)] < A[i]$
 swap($A, i, parent(i)$)
 $i = parent(i)$

Insert(priorität p) $O(\log n)$
 $A.heap-size ++$
if $A.heap-size > A.length$ then error...
 $A[A.heap-size] = -\infty$
IncreaseKey($A.heap-size, p$)

Vom Heap zur Sortierung

Idee:

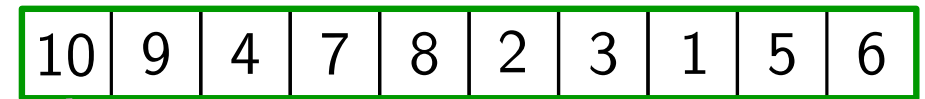
Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.

10	9	4	7	8	2	3	1	5	6
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Vom Heap zur Sortierung

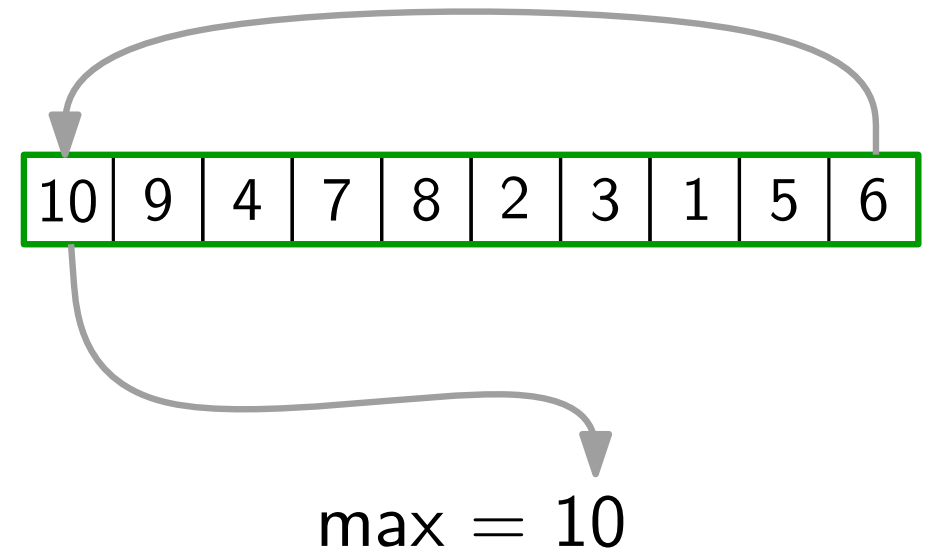
- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.



max = 10

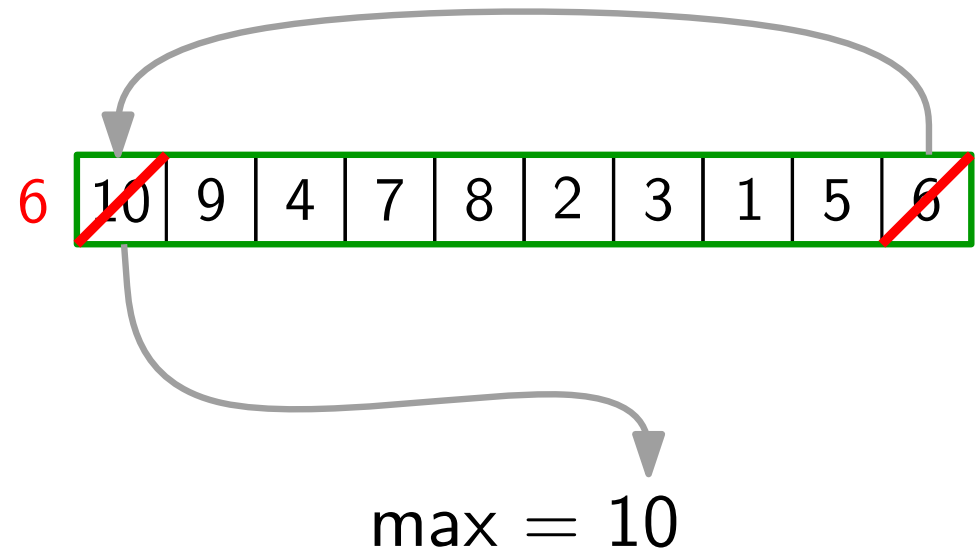
Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.



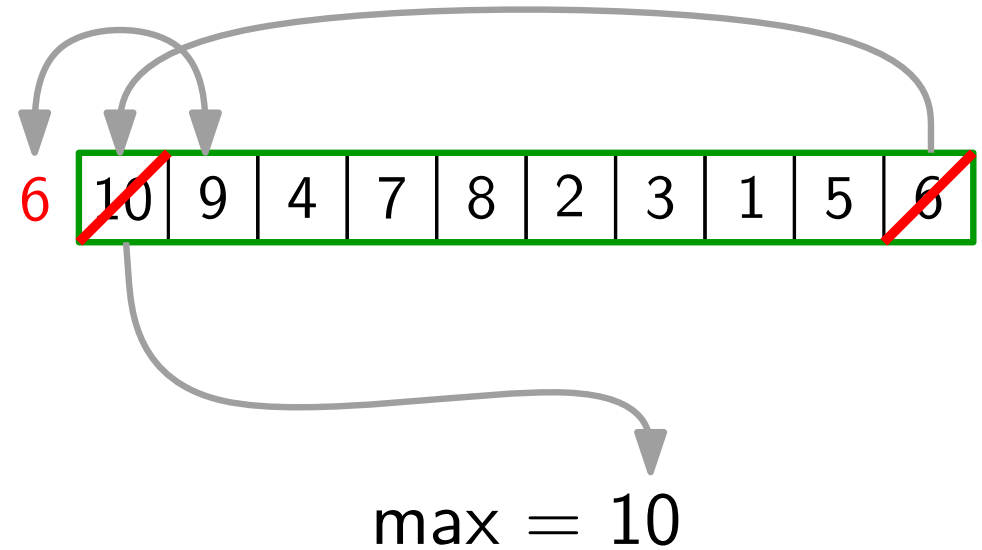
Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.



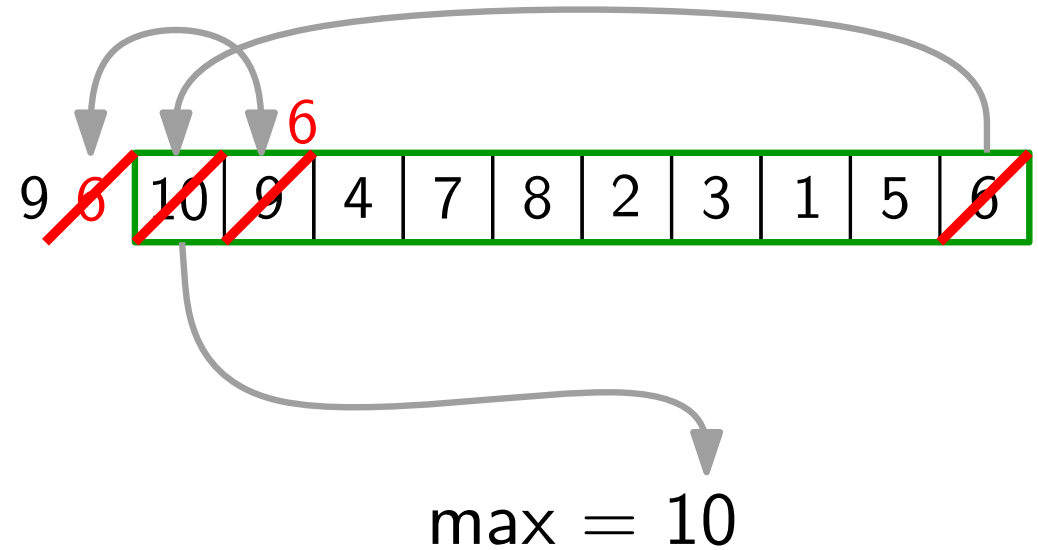
Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.



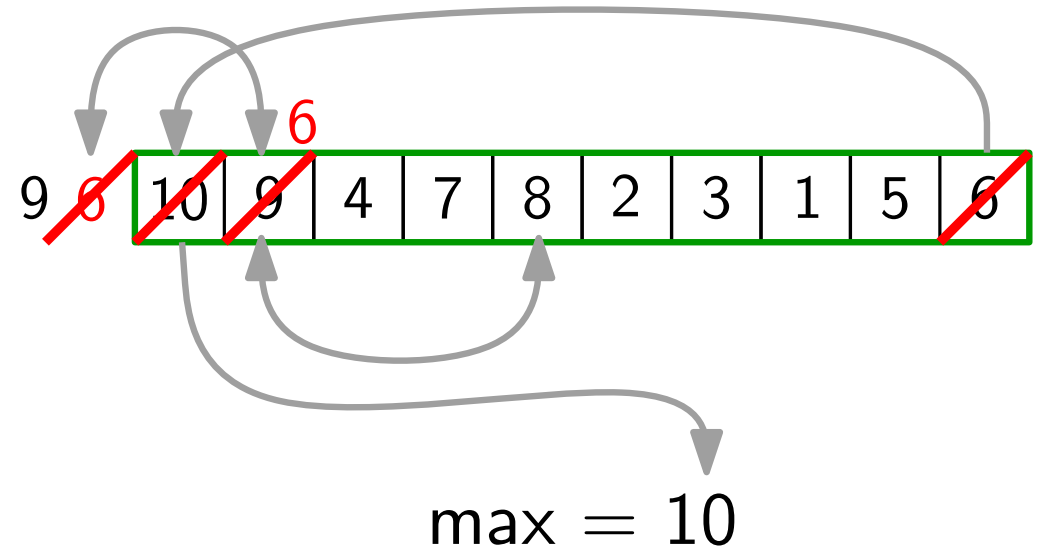
Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.



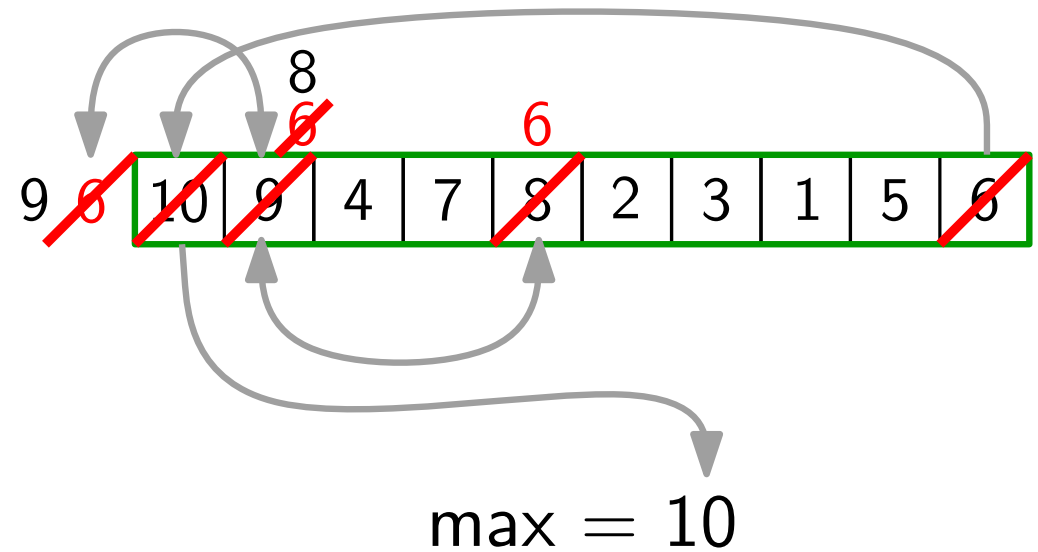
Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.



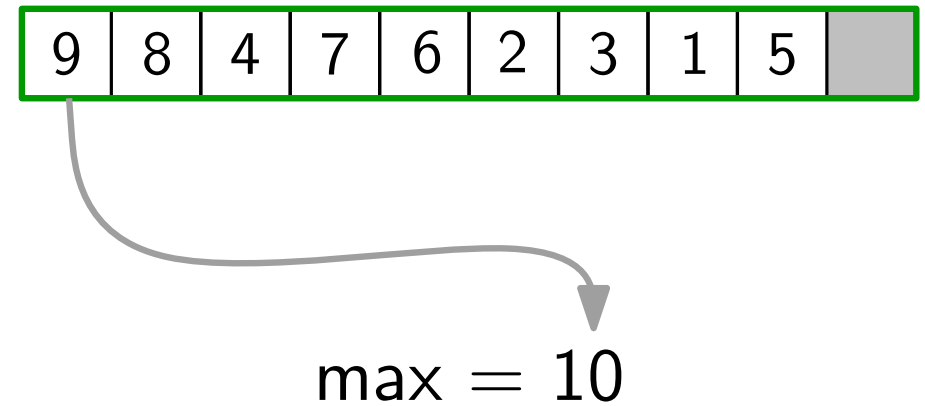
Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.



Vom Heap zur Sortierung

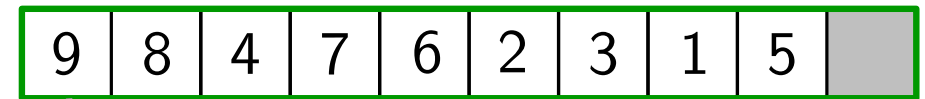
- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.



Vom Heap zur Sortierung

Idee:

- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
- Speichere dort das extrahierte Maximum.

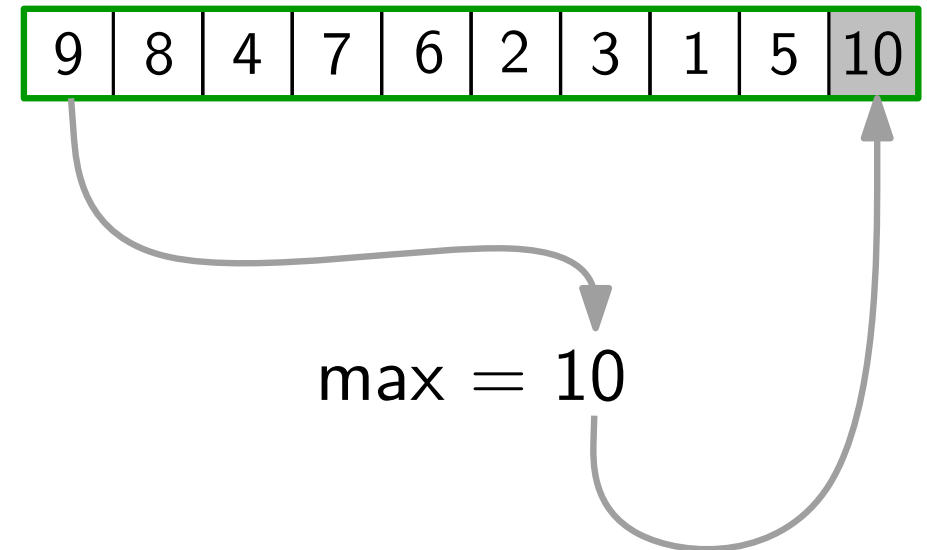


max = 10

Vom Heap zur Sortierung

Idee:

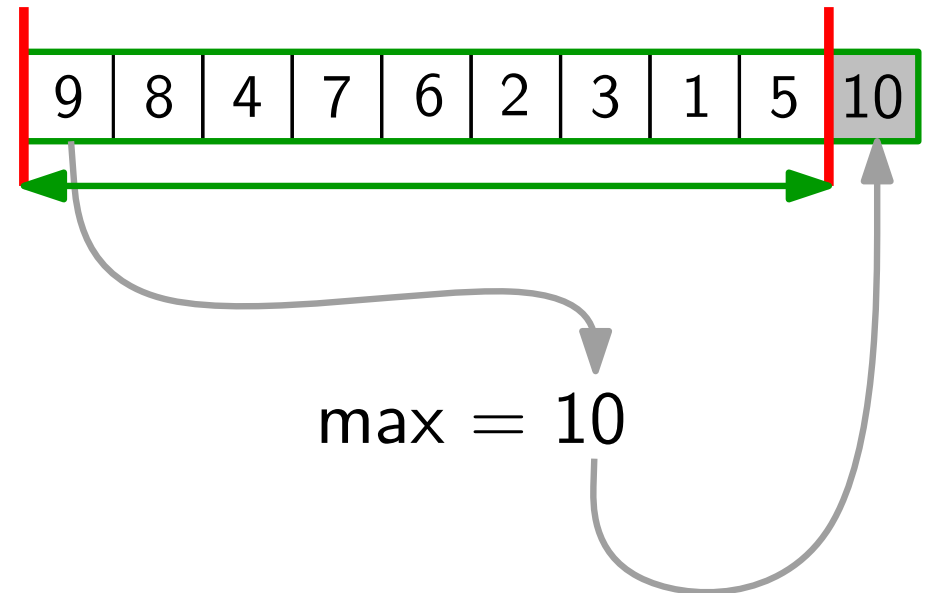
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
- Speichere dort das extrahierte Maximum.



Vom Heap zur Sortierung

Idee:

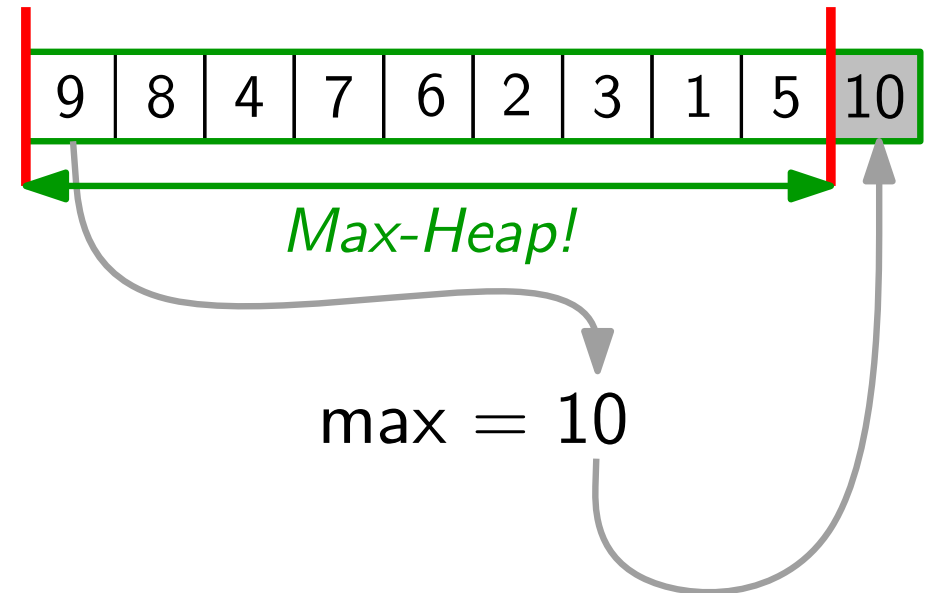
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
- Speichere dort das extrahierte Maximum.



Vom Heap zur Sortierung

Idee:

- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
- Speichere dort das extrahierte Maximum.



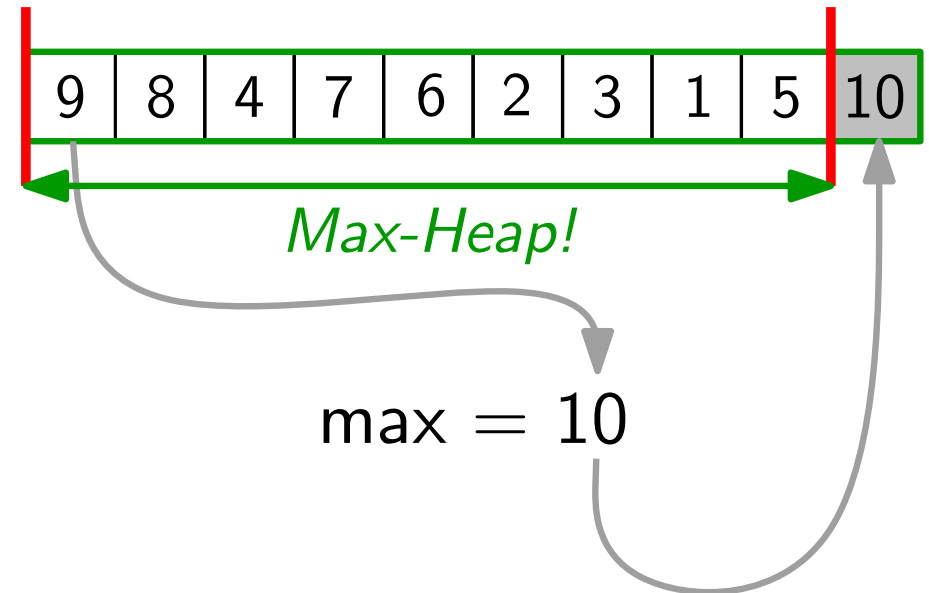
Vom Heap zur Sortierung

Idee:

- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
- Speichere dort das extrahierte Maximum.

HeapSort(int[] A)

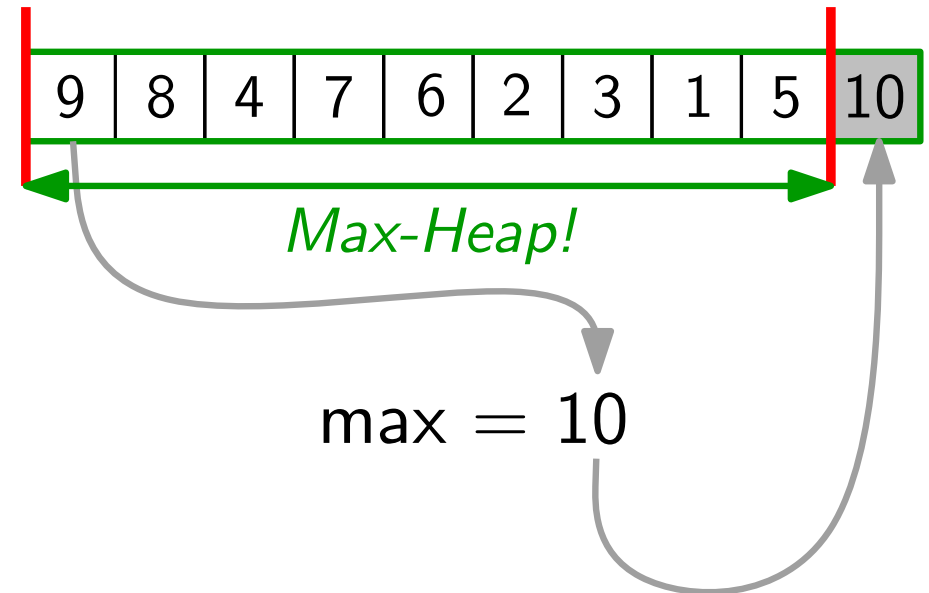
Schreiben Sie den Pseudocode.
Verwenden Sie BuildMaxHeap
und ExtractMax.



Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

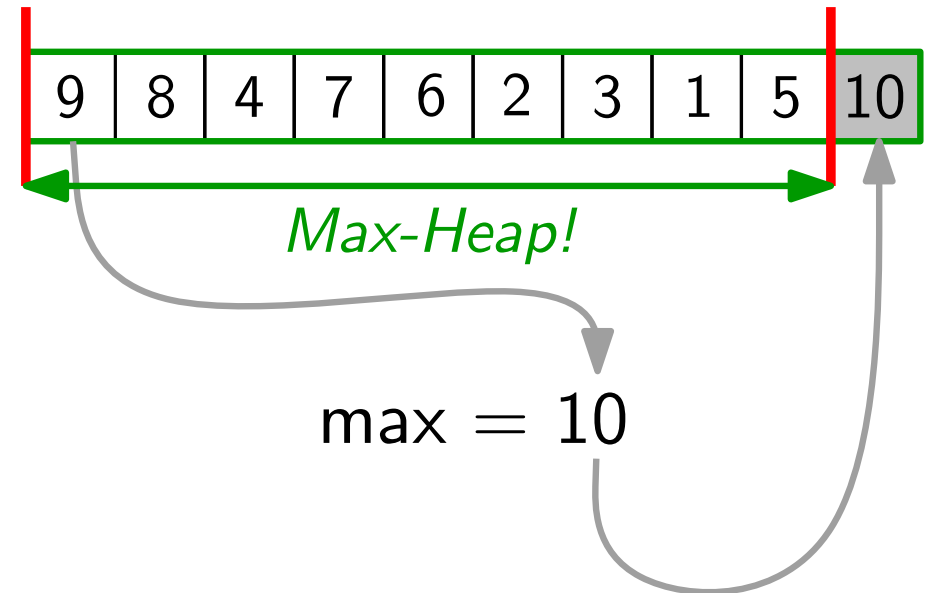
```
HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for  $i = A.length$  downto 2 do
     $A[i] = \text{ExtractMax}()$ 
```



Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```
HeapSort(int[] A)  
  BuildMaxHeap(A)  
  for  $i = A.length$  downto 2 do  
     $A[i] = \text{ExtractMax}()$ 
```



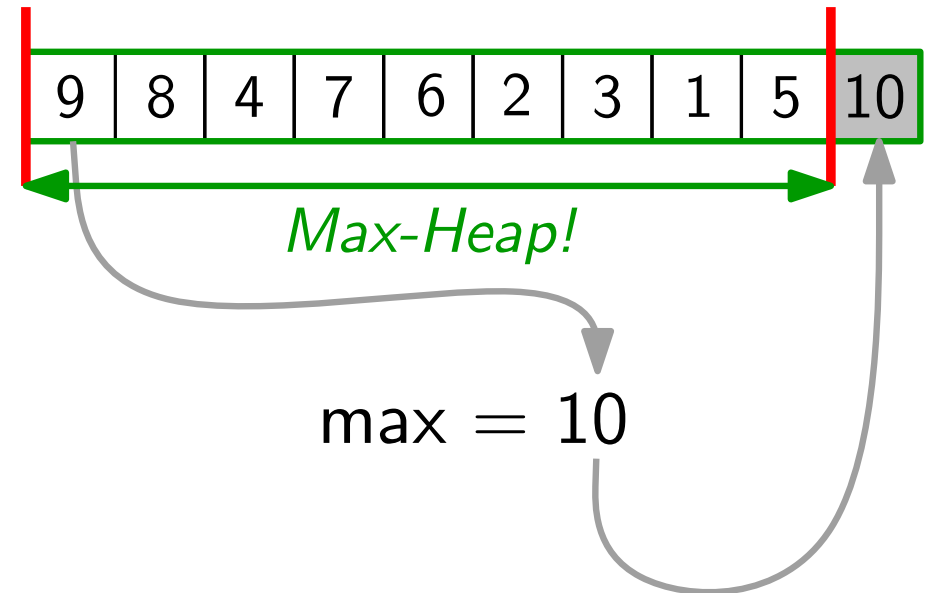
Laufzeit: $T_{HS}(n)$

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for  $i = A.length$  downto 2 do
     $A[i] = \text{ExtractMax}()$ 
  
```

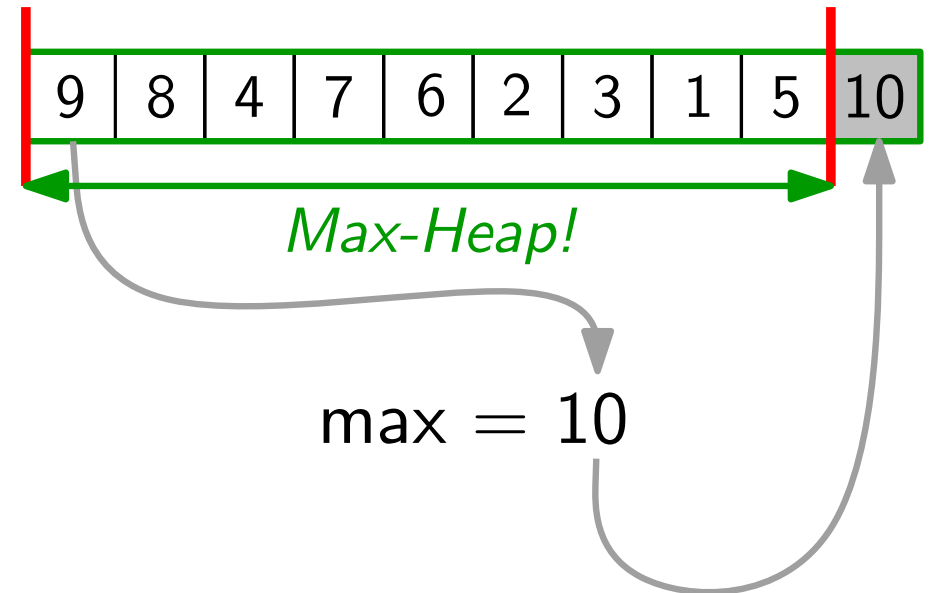


Laufzeit: $T_{HS}(n) \in$

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```
HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for  $i = A.length$  downto 2 do
     $A[i] = \text{ExtractMax}()$ 
```



Laufzeit: $T_{HS}(n) \in$

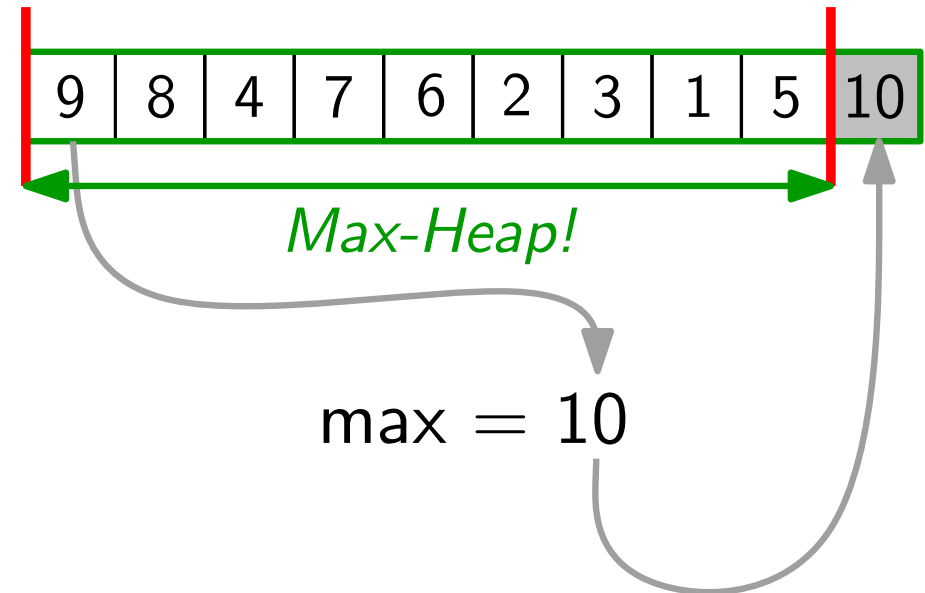
Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for  $i = A.length$  downto 2 do
     $A[i] = \text{ExtractMax}()$ 
  
```

Laufzeit: $T_{\text{HS}}(n) \in O(n)$



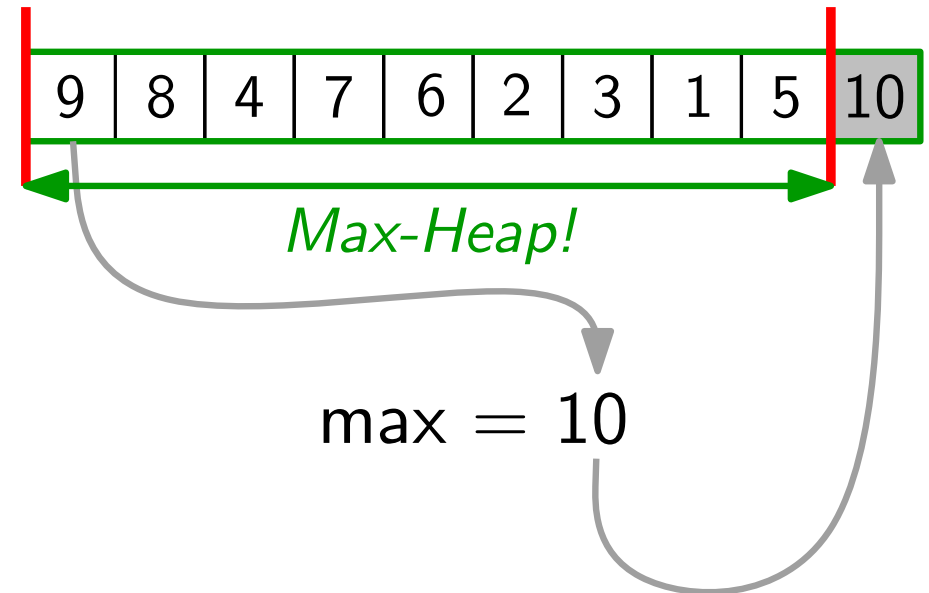
Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for  $i = A.length$  downto 2 do
     $A[i] = \text{ExtractMax}()$ 
  
```

Laufzeit: $T_{\text{HS}}(n) \in O(n) +$

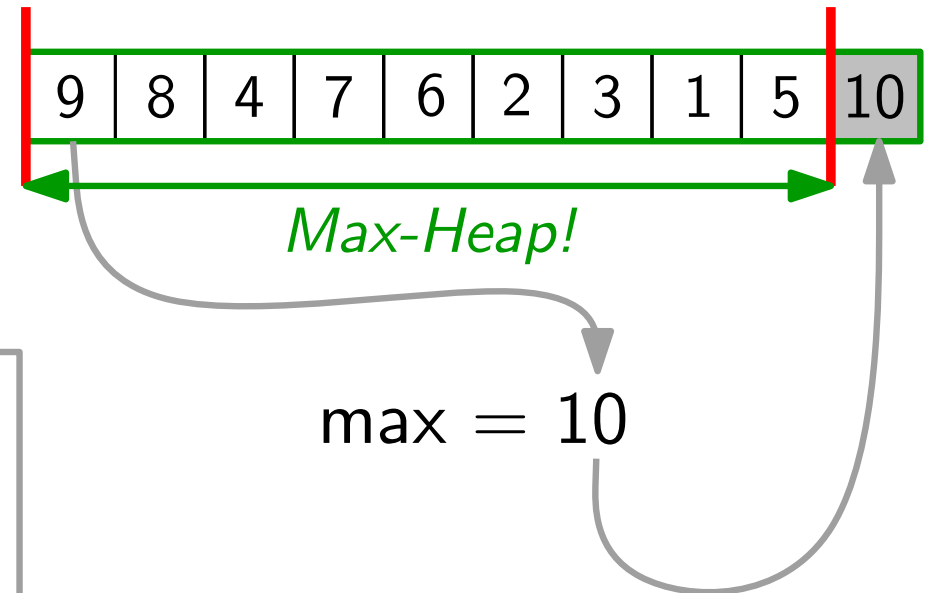


Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for  $i = A.length$  downto 2 do
     $A[i] = \text{ExtractMax}()$ 
  
```



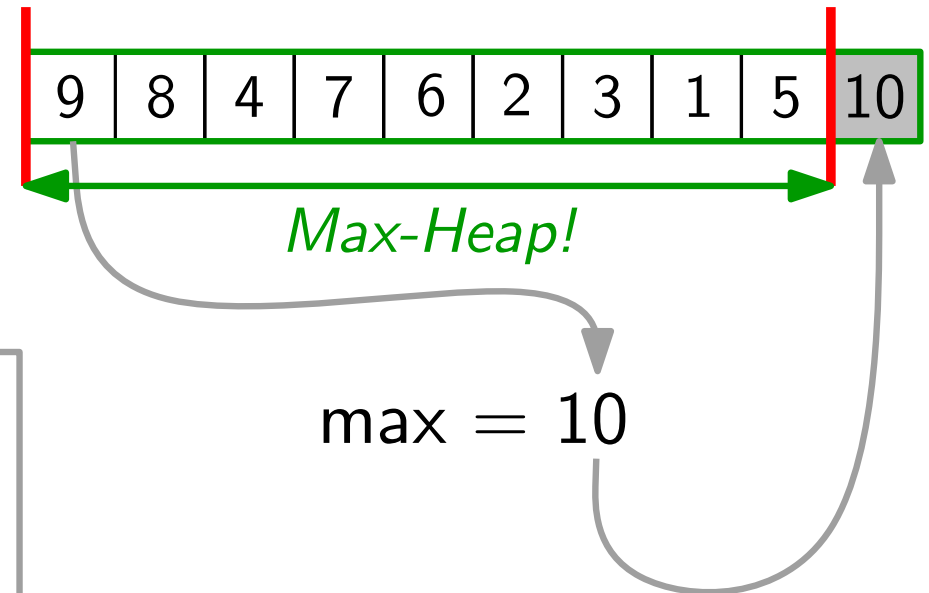
Laufzeit: $T_{HS}(n) \in O(n) +$

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for i = A.length downto 2 do
    A[i] = ExtractMax()
  
```



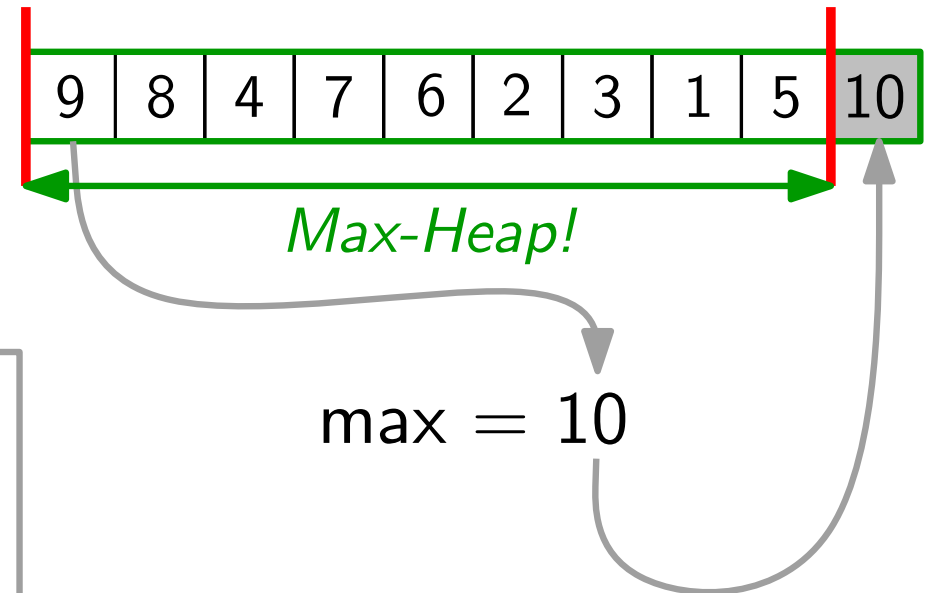
Laufzeit: $T_{HS}(n) \in O(n) + (n - 1)$

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for  $i = A.length$  downto 2 do
     $A[i] = \text{ExtractMax}()$ 
  
```



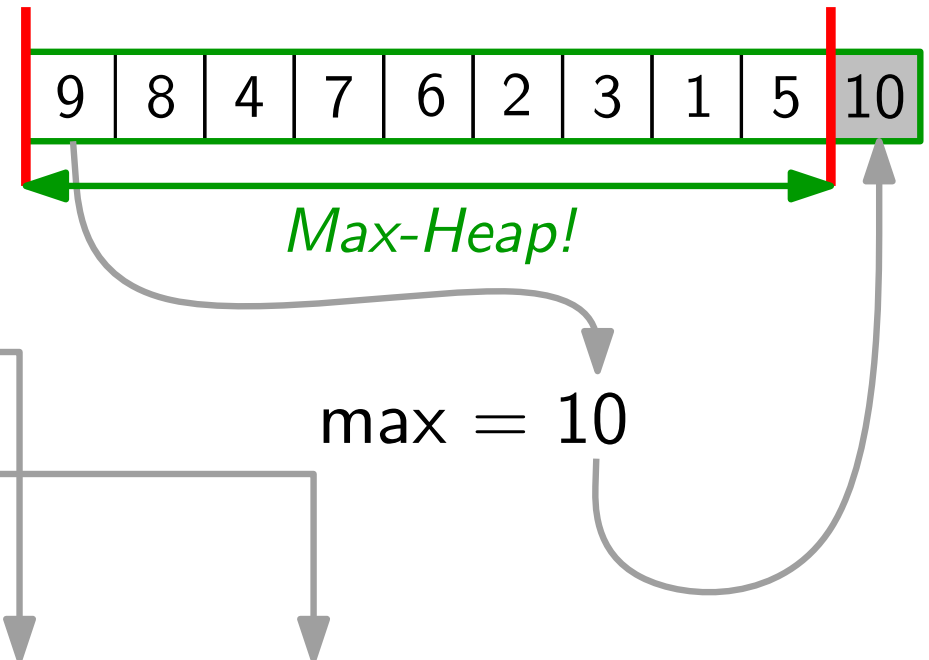
Laufzeit: $T_{\text{HS}}(n) \in O(n) + (n - 1) \cdot$

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for  $i = A.length$  downto 2 do
     $A[i] = \text{ExtractMax}()$ 
  
```



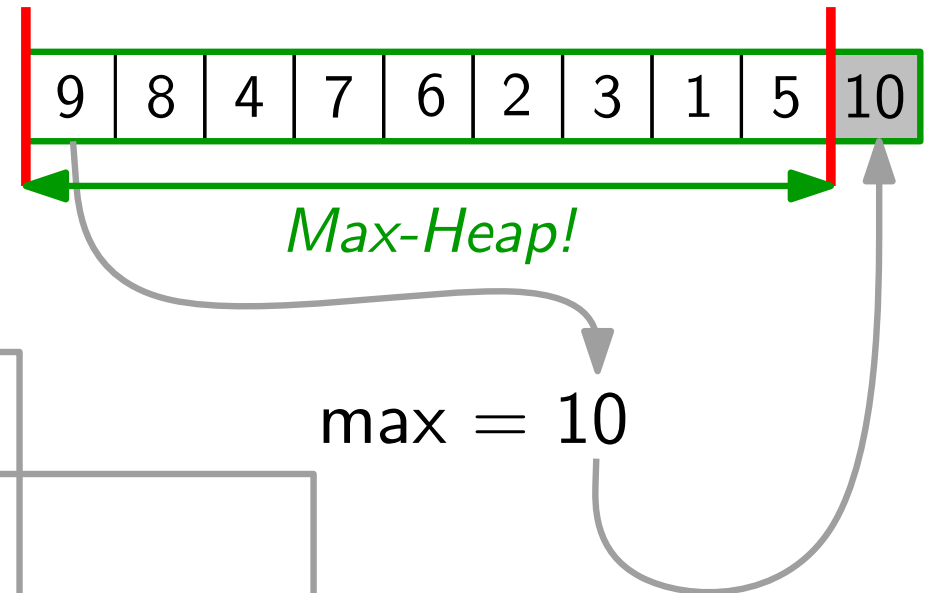
Laufzeit: $T_{HS}(n) \in O(n) + (n - 1) \cdot$

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for i = A.length downto 2 do
    A[i] = ExtractMax()
  
```



max = 10

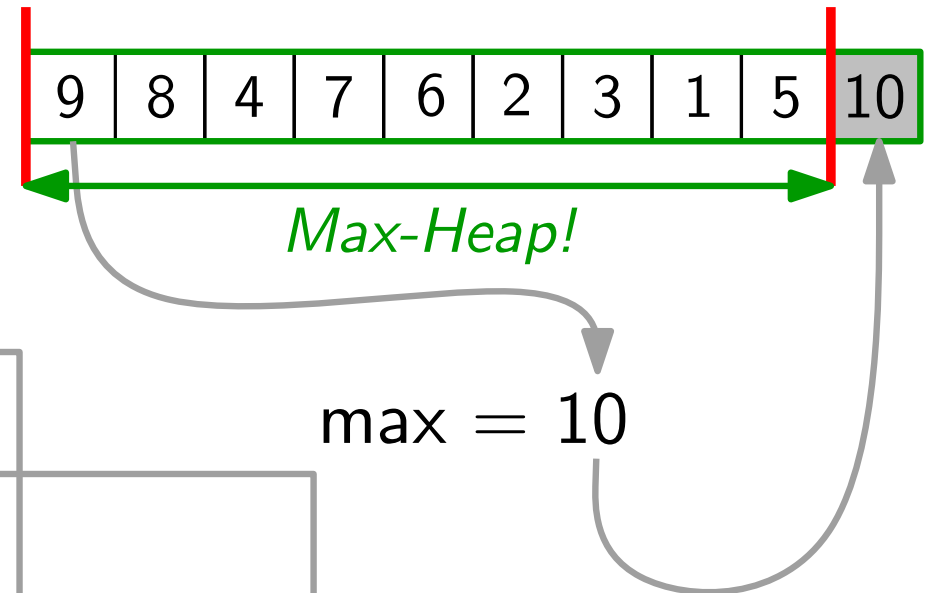
Laufzeit: $T_{HS}(n) \in O(n) + (n - 1) \cdot O(\log n)$

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for i = A.length downto 2 do
    A[i] = ExtractMax()
  
```



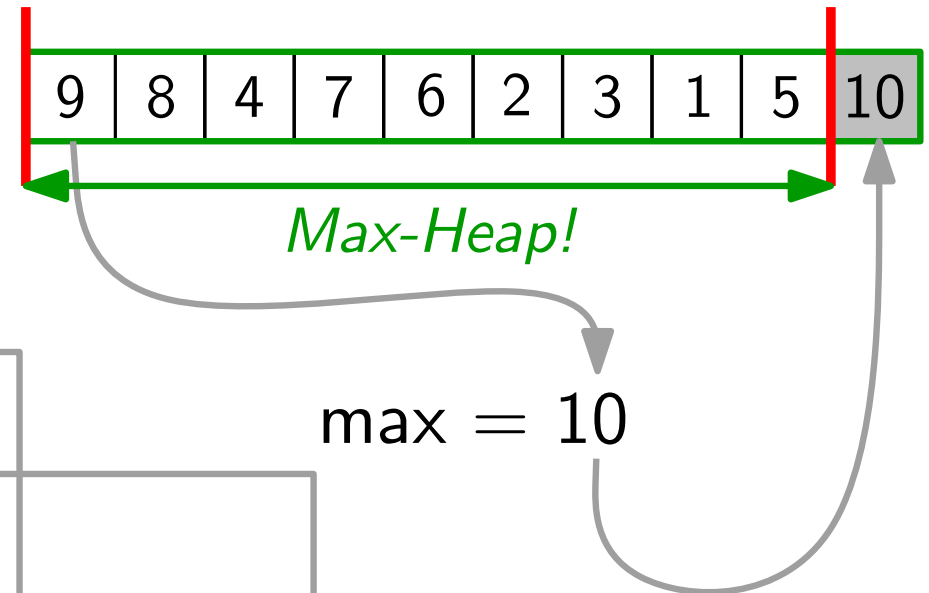
Laufzeit: $T_{HS}(n) \in O(n) + (n - 1) \cdot O(\log n) =$

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for i = A.length downto 2 do
    A[i] = ExtractMax()
  
```



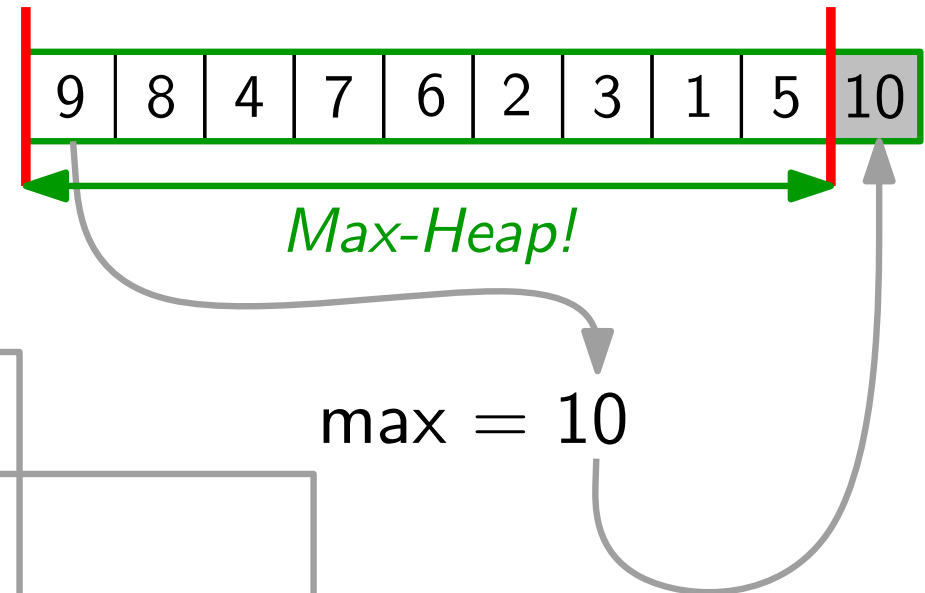
Laufzeit: $T_{HS}(n) \in O(n) + (n - 1) \cdot O(\log n) = O(n \log n)$

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for  $i = A.length$  downto 2 do
     $A[i] = \text{ExtractMax}()$ 
  
```



Laufzeit: $T_{\text{HS}}(n) \in O(n) + (n - 1) \cdot O(\log n) = O(n \log n)$

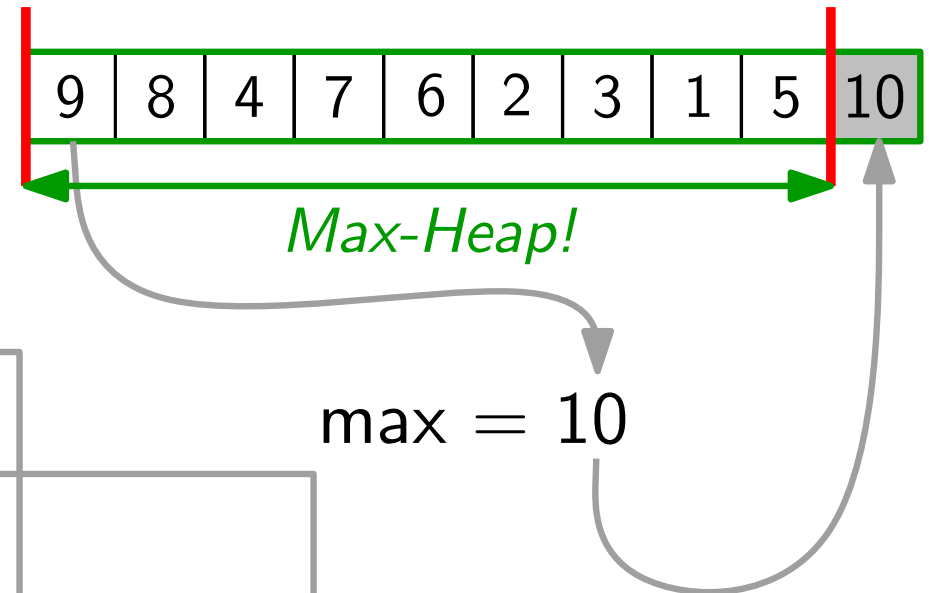
Satz. HeapSort sortiert n Schlüssel in $O(n \log n)$ Zeit.

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for i = A.length downto 2 do
    A[i] = ExtractMax()
  
```



max = 10

Laufzeit: $T_{HS}(n) \in O(n) + (n - 1) \cdot O(\log n) = O(n \log n)$

Genauer: $c \cdot n +$

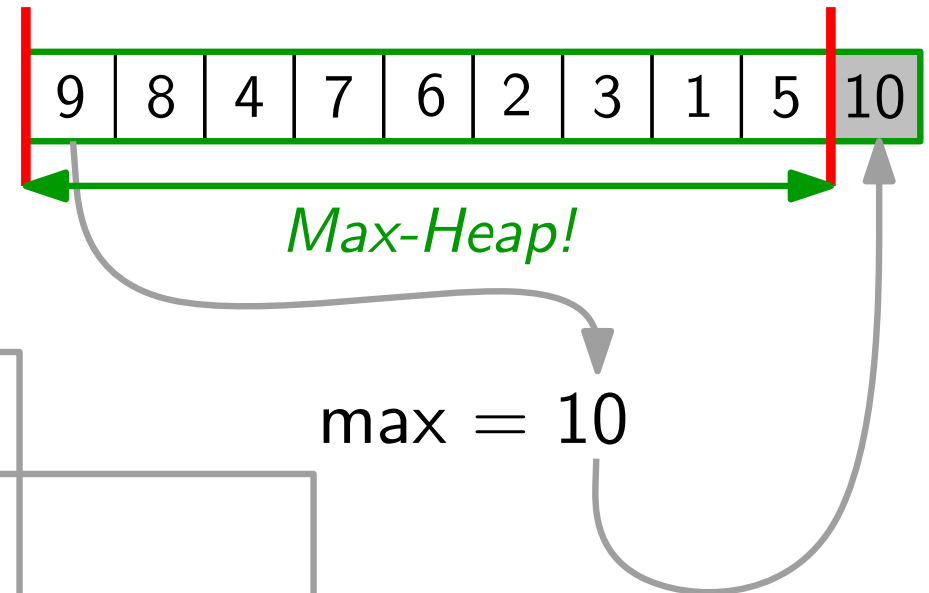
Satz. HeapSort sortiert n Schlüssel in $O(n \log n)$ Zeit.

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for i = A.length downto 2 do
    A[i] = ExtractMax()
  
```



Laufzeit: $T_{HS}(n) \in O(n) + (n - 1) \cdot O(\log n) = O(n \log n)$

Genauer: $c \cdot n + \sum_{i=2}^n$

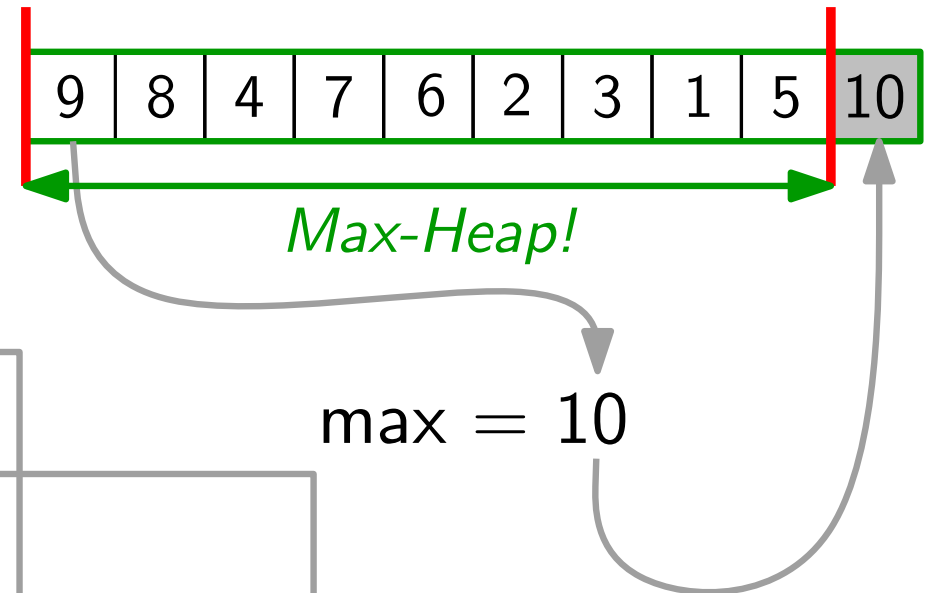
Satz. HeapSort sortiert n Schlüssel in $O(n \log n)$ Zeit.

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for i = A.length downto 2 do
    A[i] = ExtractMax()
  
```



max = 10

Laufzeit: $T_{HS}(n) \in O(n) + (n - 1) \cdot O(\log n) = O(n \log n)$

Genauer: $c \cdot n + \sum_{i=2}^n c' \cdot \log_2 i \geq$

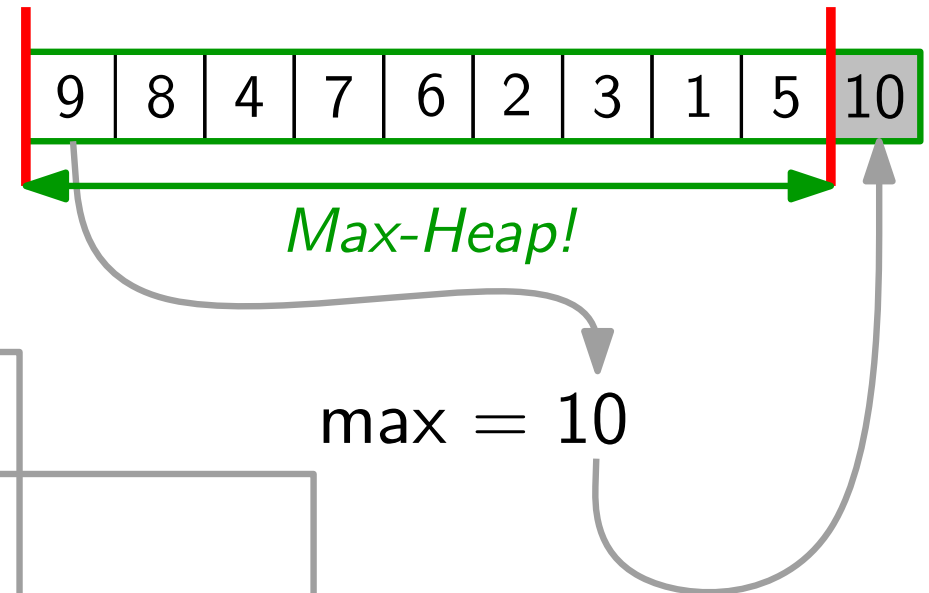
Satz. HeapSort sortiert n Schlüssel in $O(n \log n)$ Zeit.

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for i = A.length downto 2 do
    A[i] = ExtractMax()
  
```



Laufzeit: $T_{HS}(n) \in O(n) + (n - 1) \cdot O(\log n) = O(n \log n)$

Genauer: $c \cdot n + \sum_{i=2}^n c' \cdot \log_2 i \geq c' \sum_{i=\frac{n}{2}}^n$

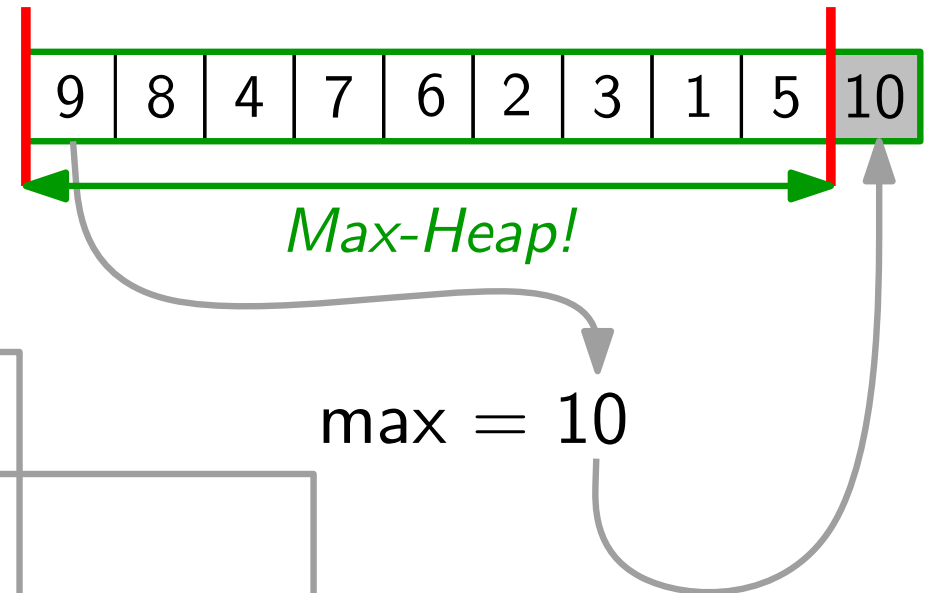
Satz. HeapSort sortiert n Schlüssel in $O(n \log n)$ Zeit.

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for i = A.length downto 2 do
    A[i] = ExtractMax()
  
```



Laufzeit: $T_{HS}(n) \in O(n) + (n - 1) \cdot O(\log n) = O(n \log n)$

Genauer: $c \cdot n + \sum_{i=2}^n c' \cdot \log_2 i \geq c' \sum_{i=\frac{n}{2}}^n \log_2 \frac{n}{2}$

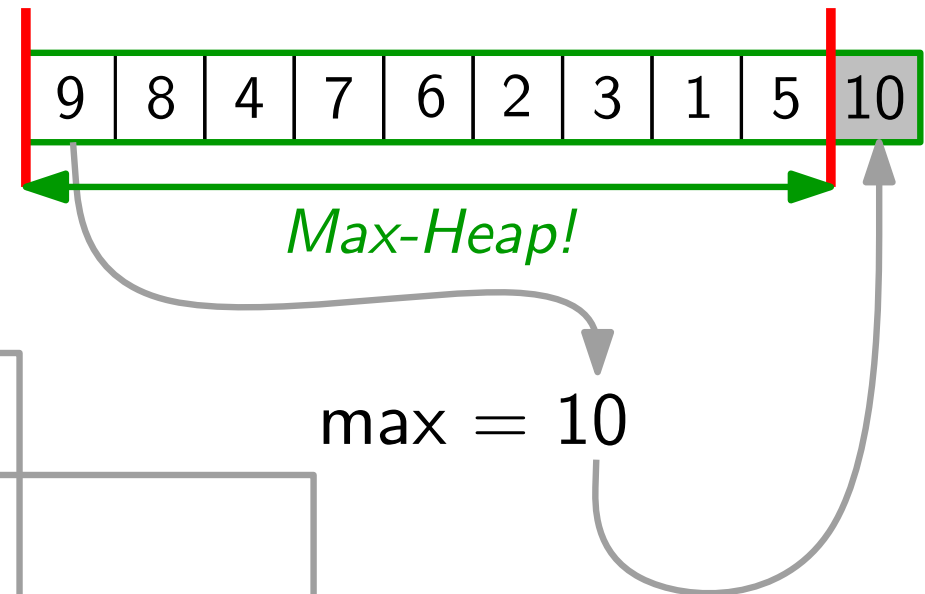
Satz. HeapSort sortiert n Schlüssel in $O(n \log n)$ Zeit.

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for i = A.length downto 2 do
    A[i] = ExtractMax()
  
```



Laufzeit: $T_{HS}(n) \in O(n) + (n - 1) \cdot O(\log n) = O(n \log n)$

Genauer: $c \cdot n + \sum_{i=2}^n c' \cdot \log_2 i \geq c' \sum_{i=\frac{n}{2}}^n \log_2 \frac{n}{2}$
 $\in \Omega(\quad)$

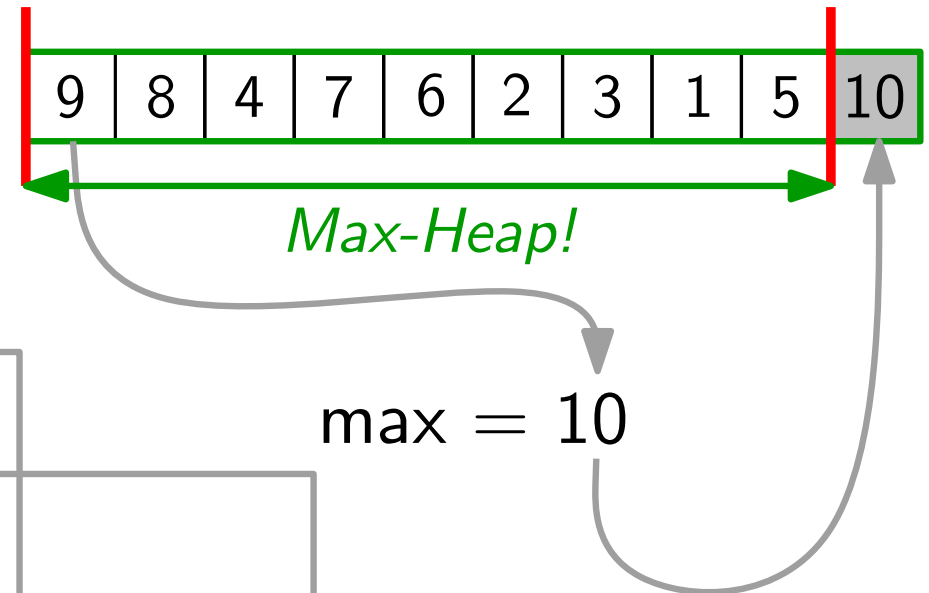
Satz. HeapSort sortiert n Schlüssel in $O(n \log n)$ Zeit.

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for i = A.length downto 2 do
    A[i] = ExtractMax()
  
```



Laufzeit: $T_{HS}(n) \in O(n) + (n - 1) \cdot O(\log n) = O(n \log n)$

Genauer: $c \cdot n + \sum_{i=2}^n c' \cdot \log_2 i \geq c' \sum_{i=\frac{n}{2}}^n \log_2 \frac{n}{2} \in \Omega(n \log n)$

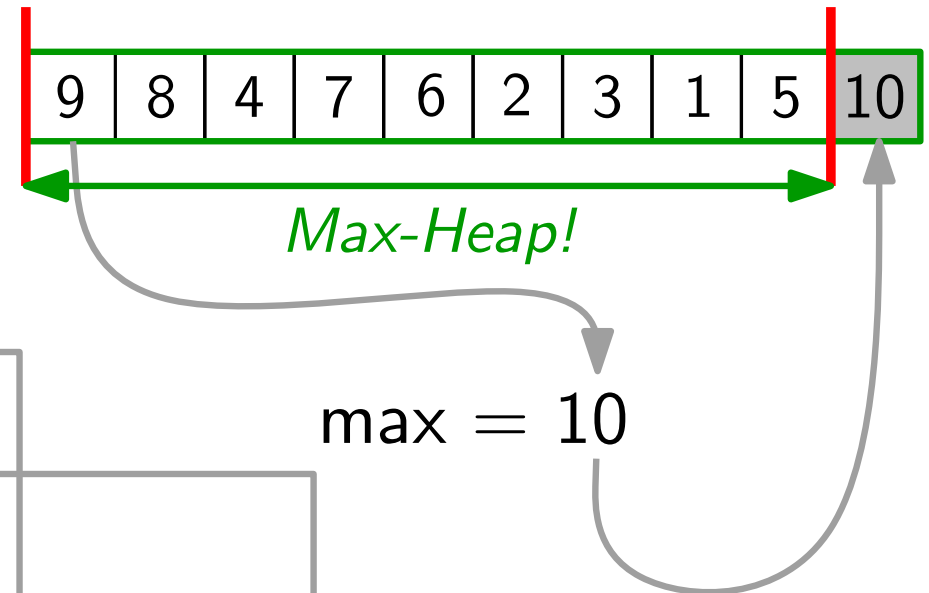
Satz. HeapSort sortiert n Schlüssel in $O(n \log n)$ Zeit.

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for i = A.length downto 2 do
    A[i] = ExtractMax()
  
```



Laufzeit: $T_{HS}(n) \in O(n) + (n - 1) \cdot O(\log n) = O(n \log n)$

Genauer: $c \cdot n + \sum_{i=2}^n c' \cdot \log_2 i \geq c' \sum_{i=\frac{n}{2}}^n \log_2 \frac{n}{2} \in \Omega(n \log n)$

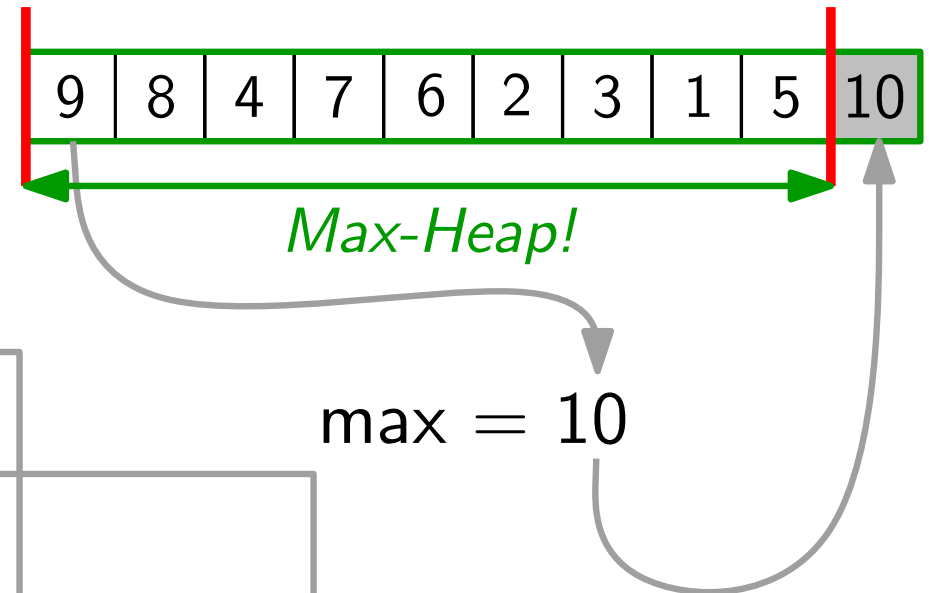
Satz. HeapSort sortiert n Schlüssel in $\Theta(n \log n)$ Zeit.

Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
 - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for i = A.length downto 2 do
    A[i] = ExtractMax()
  
```



Laufzeit: $T_{HS}(n) \in O(n) + (n - 1) \cdot O(\log n) = O(n \log n)$

Genauer: $c \cdot n + \sum_{i=2}^n c' \cdot \log_2 i \geq c' \sum_{i=\frac{n}{2}}^n \log_2 \frac{n}{2} \in \Omega(n \log n)$

Satz. HeapSort sortiert n Schlüssel in $\Theta(n \log n)$ Zeit.

Zusammenfassung Sortierverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit				
Avg.-Case-Laufzeit				
Best-Case-Laufzeit				
in situ (<i>in place</i>)				
stabil				

Zusammenfassung Sortierverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$			
Avg.-Case-Laufzeit				
Best-Case-Laufzeit				
in situ (<i>in place</i>)				
stabil				

Zusammenfassung Sortierverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$			
Avg.-Case-Laufzeit				
Best-Case-Laufzeit				
in situ (<i>in place</i>)				
stabil				

Zusammenfassung Sortierverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$			
Avg.-Case-Laufzeit				
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$			
in situ (<i>in place</i>)				
stabil				

Zusammenfassung Sortiervverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$			
Avg.-Case-Laufzeit	?			
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$			
in situ (<i>in place</i>)				
stabil				

Zusammenfassung Sortiervverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$			
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$			
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$			
in situ (<i>in place</i>)				
stabil				

Zusammenfassung Sortiervverfahren


	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$			
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ <i>Warum?</i>			
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$			
in situ (<i>in place</i>)				
stabil				

Zusammenfassung Sortierverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$			
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ <i>Warum?</i>			
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$			
in situ ¹ (<i>in place</i>)				
stabil				


¹) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

Zusammenfassung Sortiervverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$			
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ <i>Warum?</i>			
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$			
in situ ¹ (<i>in place</i>)				
stabil				

¹) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.



Zusammenfassung Sortierverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$			
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ <i>Warum?</i>			
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$			
in situ ¹ (<i>in place</i>)				
stabil ²				

¹) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

²) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenfolge belässt.



Zusammenfassung Sortierverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$			
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ <i>Warum?</i>			
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$			
in situ ¹ (<i>in place</i>)				
stabil ²				

¹) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

²) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenfolge belässt.



Zusammenfassung Sortiervverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$		
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ <i>Warum?</i>			
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$			
in situ ¹ (<i>in place</i>)				
stabil ²				

¹) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

²) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenfolge belässt.



Zusammenfassung Sortierverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$		
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ <i>Warum?</i>	$\Theta(n \log n)$		
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$			
in situ ¹ (<i>in place</i>)				
stabil ²				

¹) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

²) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenfolge belässt.




Zusammenfassung Sortierverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$		
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ <i>Warum?</i>	$\Theta(n \log n)$		
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$		
in situ ¹ (<i>in place</i>)				
stabil ²				

¹) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

²) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenfolge belässt.





Zusammenfassung Sortiervverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$		
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ <i>Warum?</i>	$\Theta(n \log n)$		
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$		
in situ ¹ (<i>in place</i>)				
stabil ²				

¹) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

²) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenfolge belässt.





Zusammenfassung Sortiervverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$		
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ <i>Warum?</i>	$\Theta(n \log n)$		
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$		
in situ ¹ (<i>in place</i>)				
stabil ²				

¹) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

²) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenfolge belässt.





Zusammenfassung Sortiervverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ <i>Warum?</i>	$\Theta(n \log n)$		
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$		
in situ ¹ (<i>in place</i>)				
stabil ²				

¹) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

²) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenfolge belässt.





Zusammenfassung Sortiervverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ <i>Warum?</i>	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$		
in situ ¹ (<i>in place</i>)				
stabil ²				

¹) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

²) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenfolge belässt.






Zusammenfassung Sortiervverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ <i>Warum?</i>	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
in situ ¹ (<i>in place</i>)				
stabil ²				

¹) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

²) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenfolge belässt.







Zusammenfassung Sortiervverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ <i>Warum?</i>	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
in situ ¹ (<i>in place</i>)				
stabil ²				

¹) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

²) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenfolge belässt.

Zusammenfassung Sortierverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ <i>Warum?</i>	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
in situ ¹ (<i>in place</i>)				
stabil ²				

¹) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

²) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenfolge belässt.

Zusammenfassung Sortierverfahren

	InsertionSort	MergeSort	HeapSort	
Worst-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
Avg.-Case-Laufzeit	$\Theta(n^2)$ <i>Warum?</i>	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
Best-Case-Laufzeit	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	
in situ ¹ (<i>in place</i>)	✓	✗	✓	
stabil ²	✓	✓	✗	

¹) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur $O(1)$ extra Speicher.

²) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenfolge belässt.