

# Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2021/22

5. Vorlesung

## Rekursionsgleichungen

# Lösen von Rekursions(un)gleichungen

**Frage:** Gilt für  $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$  (mit  $T(1) = 0$ )  
auch  $T(n) \in O(n \log n)$  ?

**Behauptung:** Es gibt ein  $c > 0$ , so dass  $T(n) \leq cn \log_2 n$ .

**Beweis.** Durch Induktion über  $n$ . Ind.-Anfang:  $T(1) \leq 0$  ✓  
Induktionsannahme:  $T(k) \leq ck \log_2 k$  gilt für alle  $k < n$ .

Wir wissen:  $T(n) = 2T(n/2) + 4n$

$$\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \quad (\text{wegen IA})$$

$$= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + 4n$$

$$= cn \log_2 n - cn + 4n$$

$$= cn \log_2 n + (4 - c)n$$

$$\leq cn \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.$$

## Substitutionsmethode:

1. Lösung von Rekursion raten
2. Mit Induktion beweisen

$\Rightarrow$  Behauptung wahr (es gibt ein  $c > 0 \dots$ )  $\Rightarrow T(n) \in O(n \log n)$ !

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für  $n = \text{Zweierpotenz}$  bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

# I) Substitutionsmethode

**Noch'n Beispiel:**  $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

**Behauptung:**  $T(n) \in O(n)$  (mit  $T(1) = 0$ )

Also zeigen wir:  $T(n) \leq cn$  für eine Konstante  $c > 0$ .

~~Beweis~~ Induktion über  $n$ .

~~IA:  $T(k) \leq ck$  für alle  $k < n$~~

~~Wissen:  $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$~~

~~$\leq c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1$  wg. IA~~

~~$\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 1$~~

~~$\leq c \cdot n + 1$~~



# Noch'n Versuch

**Noch'n Beispiel:**  $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

**Behauptung:**  $T(n) \in O(n)$  (mit  $T(1) = 0$ )

Also zeigen wir:  $T(n) \leq cn + 1$  für eine Konstante  $c > 0$ .

~~Beweis~~ Induktion über  $n$ .

~~IA:  $T(k) \leq ck + 1$  für alle  $k < n$ .~~

~~Wissen:  $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$~~

~~$$\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1) + 1$$~~

~~$$\leq c \cdot n + 3$$~~



# Nicht verzagen!

**Selbes Beispiel:**  $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

**Behauptung:**  $T(n) \in O(n)$  ✓ (mit  $T(1) = 0$ )

Nun probieren wir:  $T(n) \leq cn - d$  für Konstanten  $c, d > 0$ . ✓  
 D.h. wir machen unsere Aussage *schärfer!!*

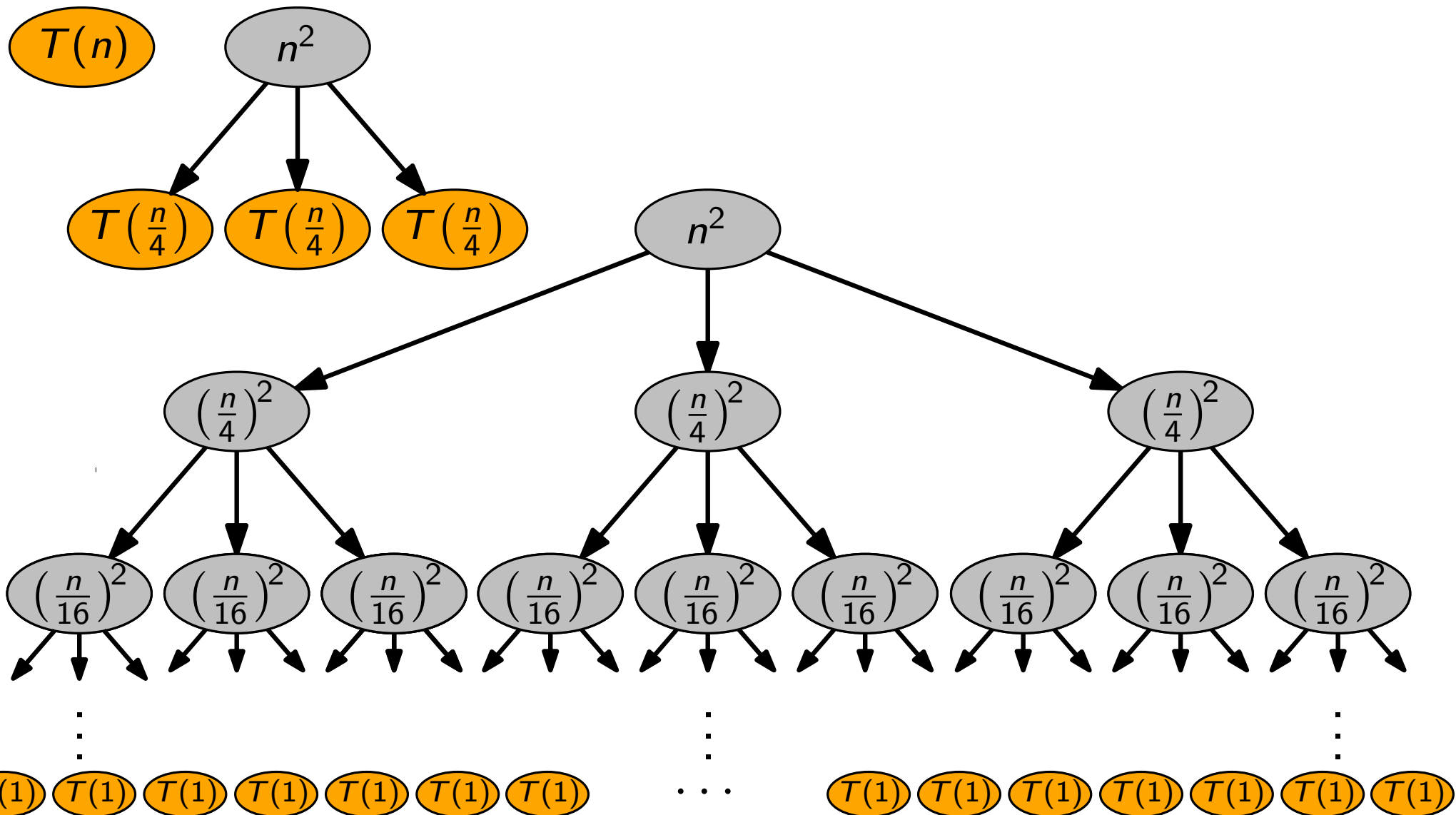
*Beweis.* Induktion über  $n$ .

IA:  $T(k) \leq ck - d$  für alle  $k < n$ .

Wissen:  $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$   
 $\leq (c\lfloor n/2 \rfloor - d) + (c\lceil n/2 \rceil - d) + 1$   
 $\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) - d - d + 1$   
 $\leq cn - d + (1 - d)$   
 $\leq cn - d$  falls  $d \geq 1$ . ✓

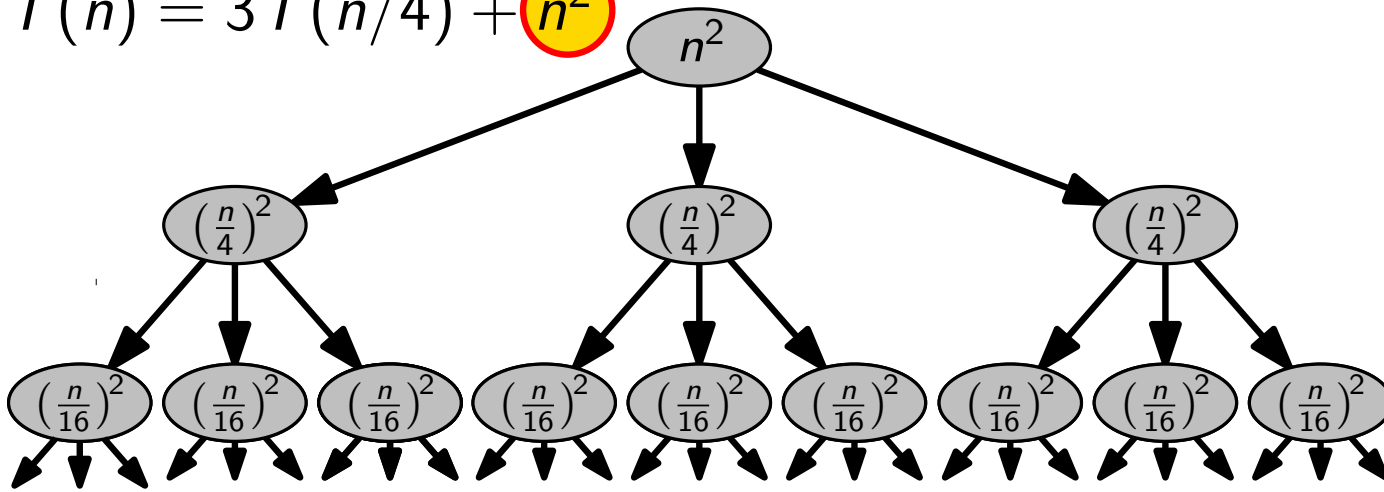
## II) Rekursionsbaummethode

**Beispiel:**  $T(n) = 3T(n/4) + n^2$  (\*) (mit  $T(1) = 1$ )

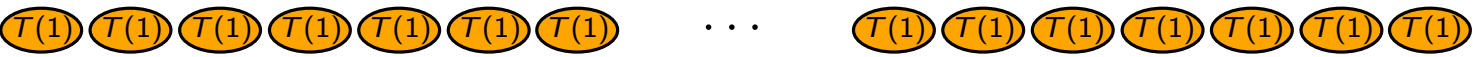


# II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	$n^2$
1	$3^1$	$\frac{3}{16} n^2$
2	$3^2$	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
⋮	⋮	⋮
$i$	$3^i$	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
⋮	⋮	⋮
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $= n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt <math>T(1) = 1</math></small>



0. Summand schon  $1n^2!$

unterste Ebene      andere Ebenen

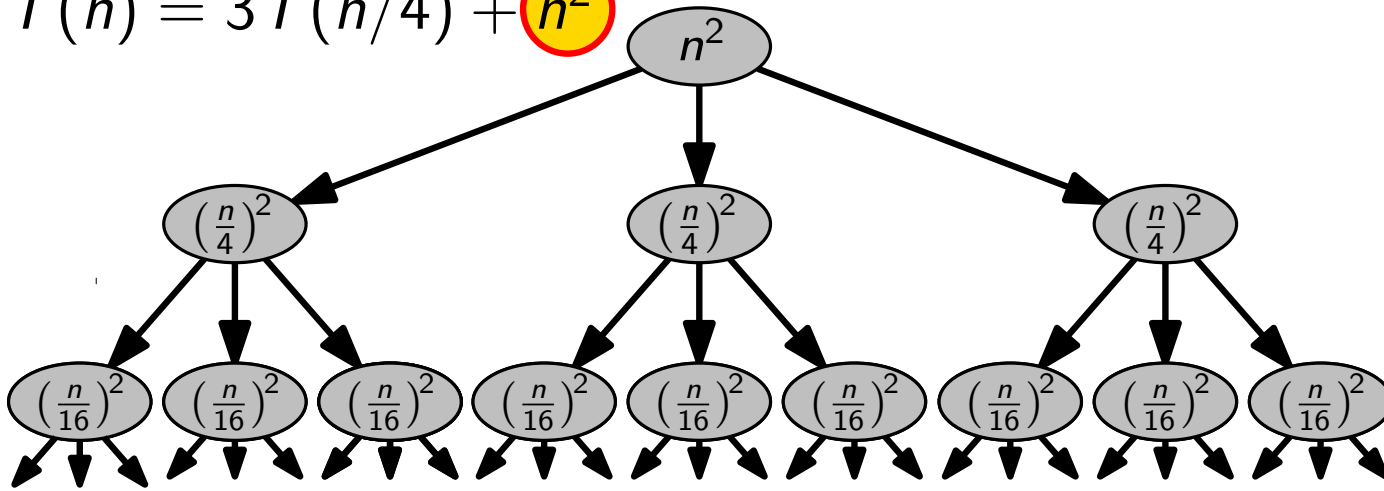
$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n) - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$

geometr. Reihe!!!

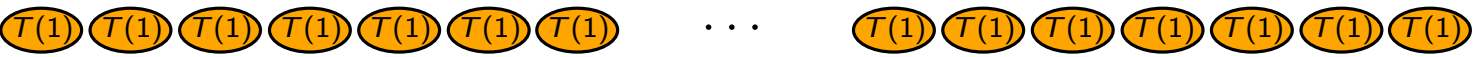
# II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



Berechnen Sie mit der Rekursionsbaummethode  
 $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$ ,  
 wobei  $T(1) = 0$ .

lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	$n^2$
1	$3^1$	$\frac{3}{16} n^2$
2	$3^2$	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
⋮	⋮	⋮
$i$	$3^i$	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
⋮	⋮	⋮
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt <math>T(1) = 1</math></small>



0. Summand schon  $1n^2!$

unterste Ebene      andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n) - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2 \Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

geometr. Reihe!!!



# III) Meistermethode

*Nichts ist praktischer als eine gute Theorie...*

*Achtung!*

Die Methode kann man nur anwenden bei Rekursionen der Art

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

wobei  $a \geq 1$ ,  $b > 1$  Konst. und  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  *asymptotisch positiv*...

*...und auch da nicht in allen Fällen!*

### III) Meistermethode

**Satz:** Seien  $a \geq 1$ ,  $b > 1$  Konstanten und  $f, T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

wobei  $n/b$  sowohl für  $\lfloor n/b \rfloor$  als auch  $\lceil n/b \rceil$  stehen kann.

Dann gilt

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in O(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

**Definition:** Die *Regularitätsbedingung* ist erfüllt, falls

$$af(n/b) \leq cf(n)$$

für ein  $c < 1$  und für alle großen  $n$ .

### III) Meistermethode

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in O(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

**Beispiel:**  $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$$\Rightarrow a = 3 (\geq 1), b = 4 (> 1) \text{ und } f: n \mapsto n^2.$$

$$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3) \pm \varepsilon}), \text{ z.B. für } \varepsilon = 1, \text{ da } \log_4 3 < 1.$$

$$\text{Das ist Fall 3!} \Rightarrow T \in \Theta(f) = \Theta(n^2) \quad \square$$

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

$$3f(n/4) = \frac{3}{16}n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2, \text{ z.B. für } c = \frac{3}{16}.$$

**Wichtig:** Unser  $c$  muss *echt*  $< 1$  sein! ✓

*Üben! Hausaufgaben!*

# Übersicht

- *Substitutionsmethode*

Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

- *Rekursionsbaummethode*

Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

- *Meistermethode*

Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) \quad (\text{und auch da nicht immer}).$$

**Achtung:** Viele verstehen die Bedeutung von  $\varepsilon$  in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

**Beispiel:**  $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

$$\Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$$

$$\text{aber } f(n) = n \log_2 n \notin \Omega(n^{1+\varepsilon}) !!$$

Also können wir die Meistermethode hier **nicht** verwenden!

**Grund:**  $\log n$  wächst langsamer als  $n^\varepsilon$ , für jedes  $\varepsilon > 0$ .

**PS:** Wie könnte man das beweisen?