Algorithmen für geographische Informationssysteme

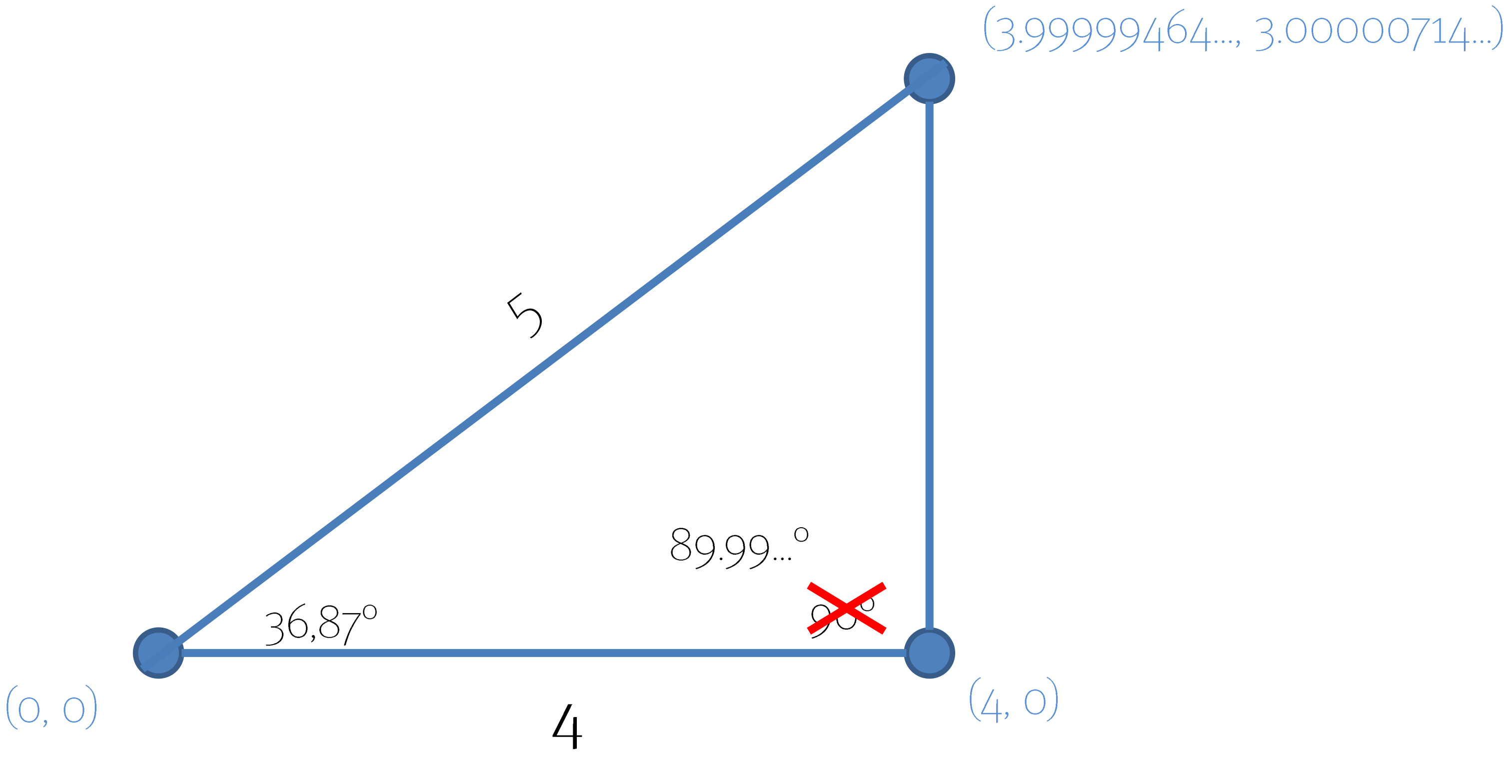
Least Squares Adjustment

Carl Friedrich Gauß

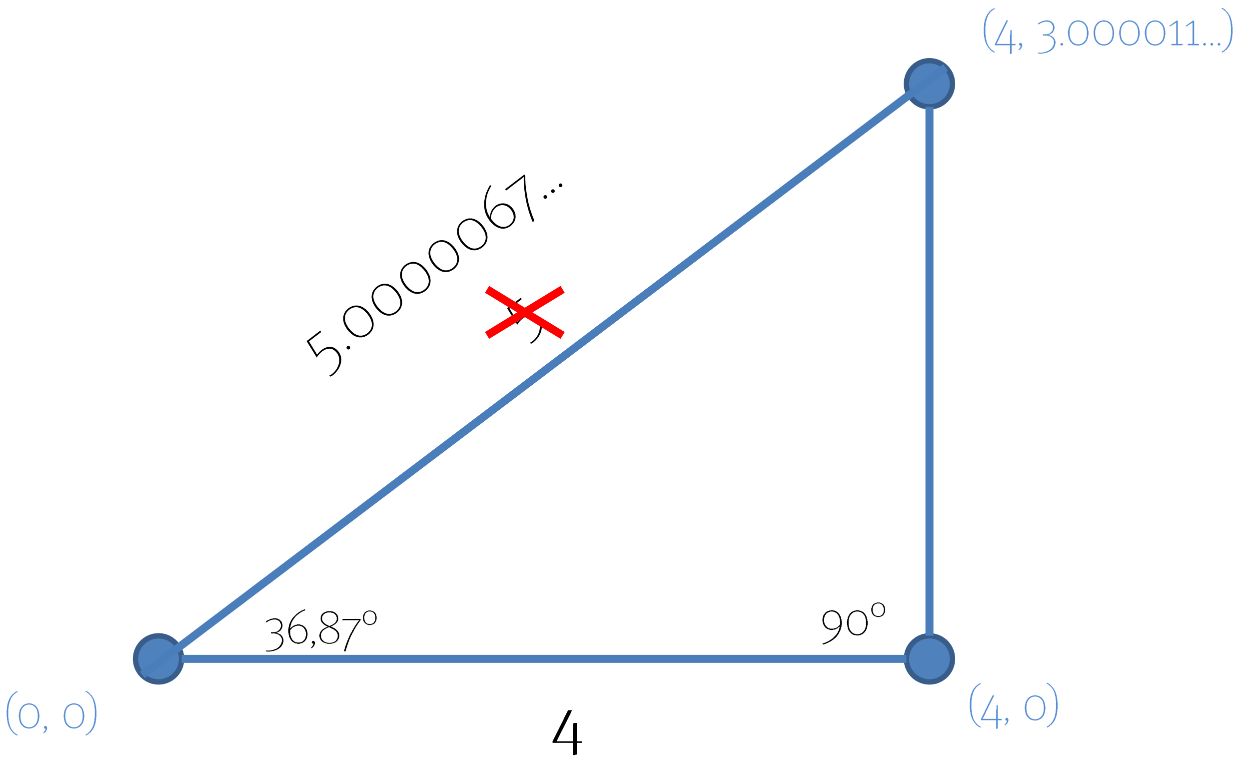
(1777 Braunschweig – 1855 Göttingen)

Ausgleichungsrechnung

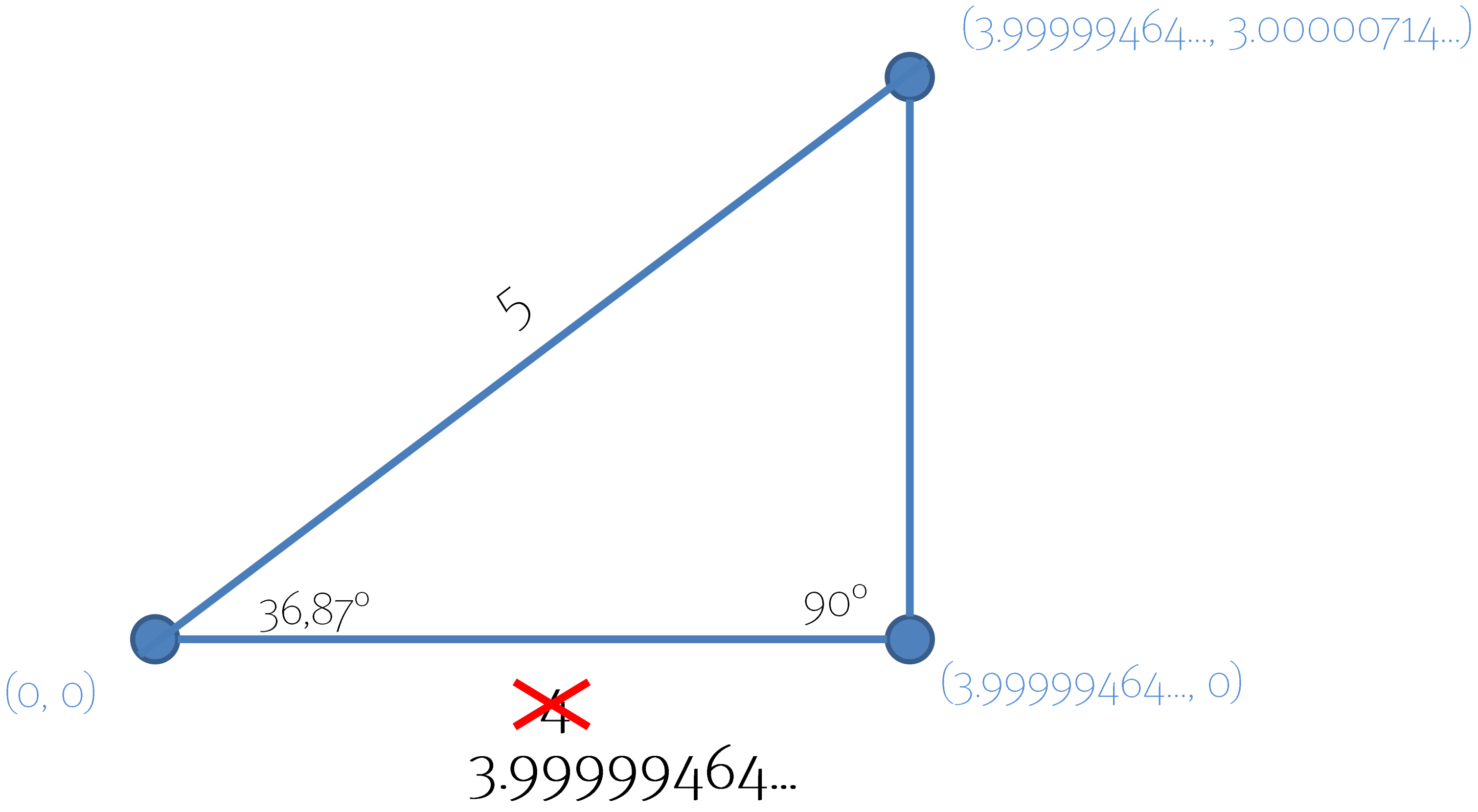
Ausgleichungsrechnung



Ausgleichungsrechnung

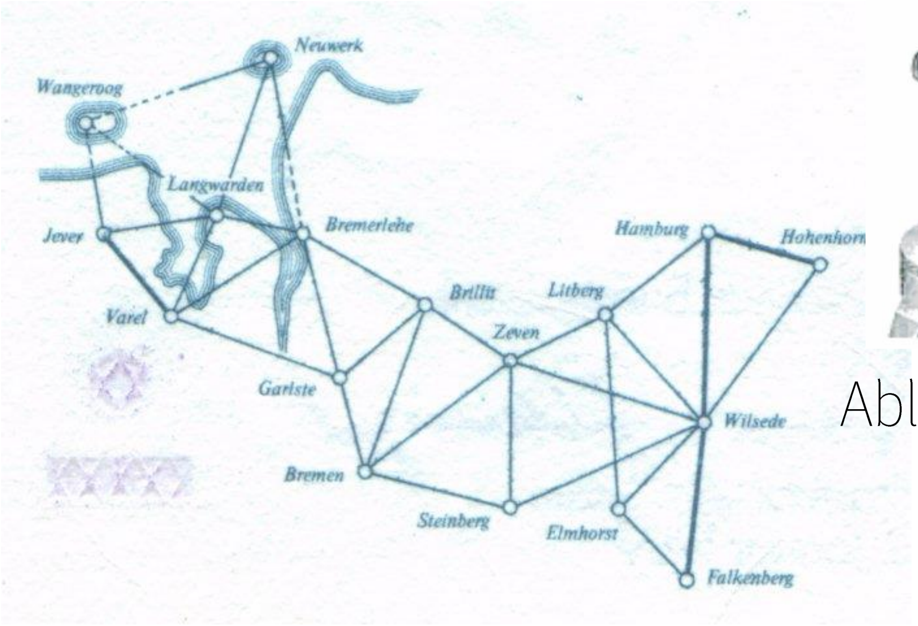


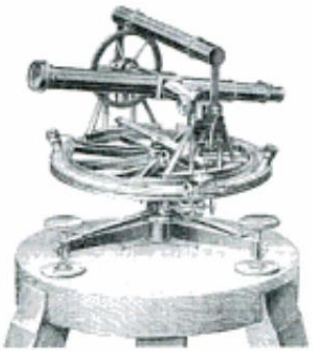
Ausgleichungsrechnung



Ausgleichungsrechnung

Gaußsche Gradmessung, 1821-1823

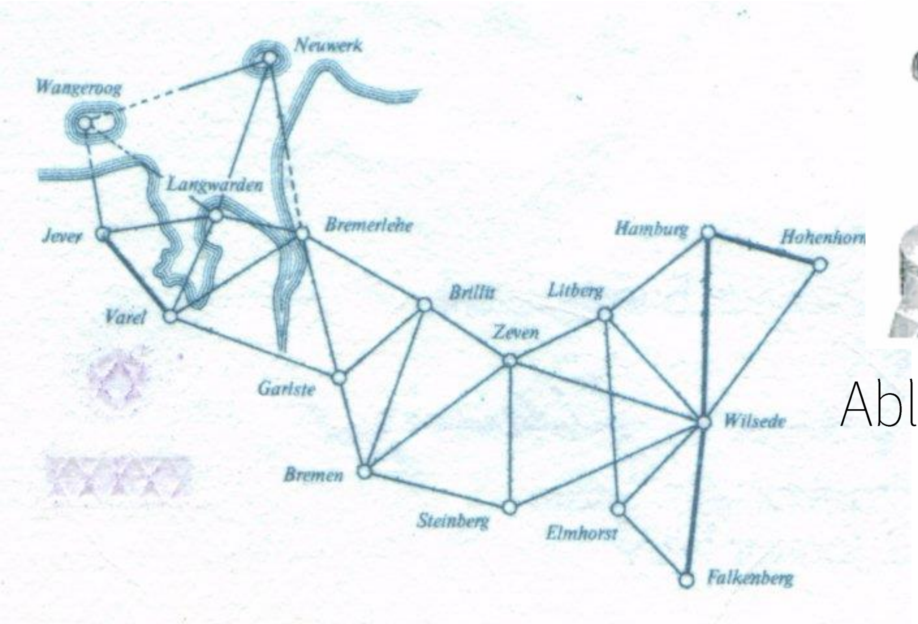


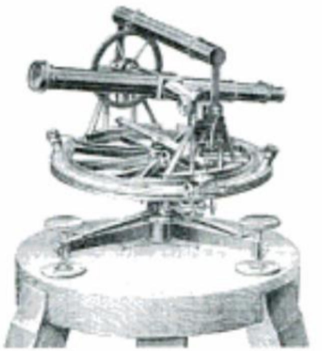


Ablesegenauigkeit: 4 Bogensekunden

Ausgleichungsrechnung

Gaußsche Gradmessung, 1821-1823



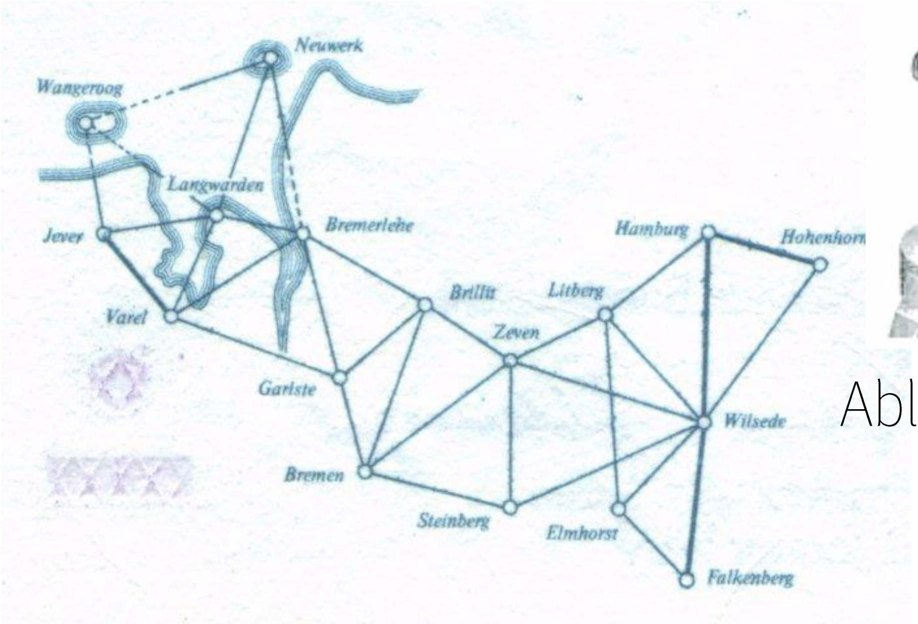


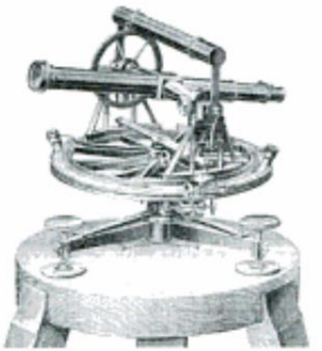
Ablesegenauigkeit: 4 Bogensekunden

Grundidee: Redundante Messung zur Steigerung der Genauigkeit

Ausgleichungsrechnung

Gaußsche Gradmessung, 1821-1823





Ablesegenauigkeit: 4 Bogensekunden

Grundidee: Redundante Messung zur Steigerung der Genauigkeit

Genauigkeit nach Ausgleichung: 0.5 Bogensekunden

Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von $\boldsymbol{n}$ Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)

- finde Vektor $\widehat{\boldsymbol{X}}$ von $\boldsymbol{u}$ Unbekannten (Koordinaten)

Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von $\boldsymbol{n}$ Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)

normalerweise: $\boldsymbol{n} >$ *nötig*

- finde Vektor $\hat{\boldsymbol{X}}$ von $\boldsymbol{u}$ Unbekannten (Koordinaten)

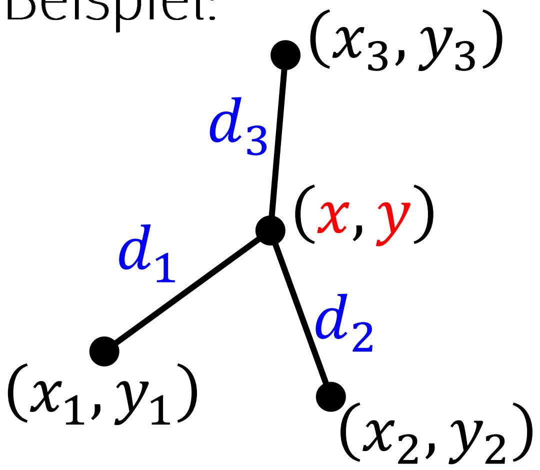
Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von $\boldsymbol{n}$ Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)
  - eine Funktion $\boldsymbol{\Phi}: \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^n$, die für wahre Unbekannte $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ die wahren Beobachtungen durch $\widetilde{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\Phi}(\widetilde{\boldsymbol{X}})$ liefert
- finde Vektor $\widehat{\boldsymbol{X}}$ von $\boldsymbol{u}$ Unbekannten (Koordinaten)

Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von $\boldsymbol{n}$ Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)
  - eine Funktion $\boldsymbol{\Phi}: \mathbb{R}^{u} \rightarrow \mathbb{R}^{n}$, die für wahre Unbekannte $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ die wahren Beobachtungen durch $\widetilde{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\Phi}(\widetilde{\boldsymbol{X}})$ liefert.

Beispiel:

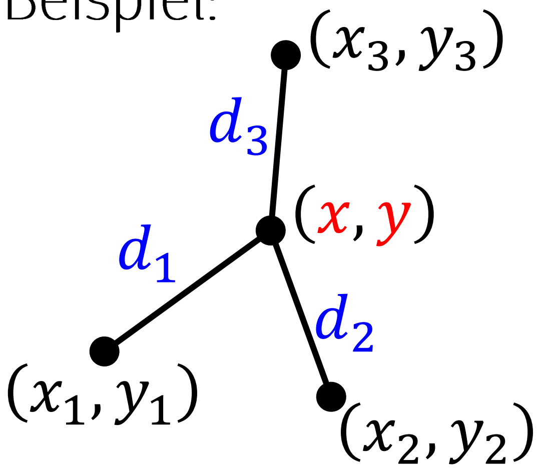


$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \Phi(x, y)$$

Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von $\boldsymbol{n}$ Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)
  - eine Funktion $\boldsymbol{\Phi}: \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^n$, die für wahre Unbekannte $\tilde{\boldsymbol{X}}$ die wahren Beobachtungen durch $\tilde{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\Phi}(\tilde{\boldsymbol{X}})$ liefert.

Beispiel:



$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \\ \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \\ \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} \end{pmatrix}$$

Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von $\boldsymbol{n}$ Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)
  - eine Funktion $\boldsymbol{\Phi}: \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^n$, die für wahre Unbekannte $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ die wahren Beobachtungen durch $\tilde{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\Phi}(\widetilde{\boldsymbol{X}})$ liefert
- finde Vektor $\widehat{\boldsymbol{X}}$ von $\boldsymbol{u}$ Unbekannten (Koordinaten)

Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von $\boldsymbol{n}$ Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)
  - eine Funktion $\boldsymbol{\Phi}: \mathbb{R}^u \to \mathbb{R}^n$, die für wahre Unbekannte $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ die wahren Beobachtungen durch $\widetilde{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\Phi}(\widetilde{\boldsymbol{X}})$ liefert
- finde Vektor $\widehat{\boldsymbol{X}}$ von $\boldsymbol{u}$ Unbekannten (Koordinaten) und
- Vektor $\widehat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{v}$ von ausgeglichenen Beobachtungen

Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von $\boldsymbol{n}$ Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)
  - eine Funktion $\boldsymbol{\Phi}: \mathbb{R}^u \to \mathbb{R}^n$, die für wahre Unbekannte $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ die wahren Beobachtungen durch $\tilde{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\Phi}(\widetilde{\boldsymbol{X}})$ liefert
- finde Vektor $\widehat{\boldsymbol{X}}$ von $\boldsymbol{u}$ Unbekannten (Koordinaten) und
- Vektor $\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{v}$ von ausgeglichenen Beobachtungen
- so dass
  - $\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\Phi}(\widehat{\boldsymbol{X}})$ gilt und
  - $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$ minimal ist.

Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von $\boldsymbol{n}$ Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)
  - eine Funktion $\boldsymbol{\Phi}: \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^n$, die für wahre Unbekannte $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ die wahren Beobachtungen durch $\widetilde{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\Phi}(\widetilde{\boldsymbol{X}})$ liefert
- finde Vektor $\widehat{\boldsymbol{X}}$ von $\boldsymbol{u}$ Unbekannten (Koordinaten) und
- Vektor $\widehat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{v}$ von ausgeglichenen Beobachtungen
- so dass
  - $\widehat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\Phi}(\widehat{\boldsymbol{X}})$ gilt und
  - $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$ minimal ist.

Methode der kleinsten Quadrate

Problemdefinition

- Gegeben
  - ein Vektor $\boldsymbol{L}$ von $\boldsymbol{n}$ Beobachtungen (Strecken, Winkel,...)
  - eine Funktion $\boldsymbol{\Phi}: \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^n$, die für wahre Unbekannte $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ die wahren Beobachtungen durch $\widetilde{\boldsymbol{L}} = \Phi(\widetilde{\boldsymbol{X}})$ liefert
- finde Vektor $\widehat{\boldsymbol{X}}$ von $\boldsymbol{u}$ Unbekannten (Koordinaten) und
- Vektor $\widehat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{v}$ von ausgeglichenen Beobachtungen
- so dass
  - $\widehat{\boldsymbol{L}} = \Phi(\widehat{\boldsymbol{X}})$ gilt und
  - $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}$ minimal ist.

Methode der kleinsten Quadrate

Spezialfall: Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

(= linearer Zusammenhang zwischen Beobachtungen & Unbekannten)

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \Phi\left(\tilde{\boldsymbol{X}}\right) = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{X}}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

$\widetilde{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\Phi}(\widetilde{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}}$

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } \; L_i = i\text{-te Messung der Strecke}$$

Gesucht: Ausgeglichene Strecke $\hat{\boldsymbol{X}}$, Verbesserungen $\boldsymbol{v}$

Bedingung:

$$\hat{\boldsymbol{L}} =$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Lösung...

$$\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \widehat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{L}$$

Minimiere $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}$...

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{L}\right)^T\left(\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{L}\right)$$
$$= \widehat{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} - 2\widehat{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}$$

notwendige Bedingung für Optimum:

Gradient der Zielfunktion = Nullvektor

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Lösung...

$$F(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \widehat{\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{X}} - 2\widehat{\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{L}$$

$$\operatorname{grad} F(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial \hat{X}_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial \hat{X}_u} \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{X}} - 2\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L}$$

notwendige Bedingung für Optimum:

Gradient der Zielfunktion = Nullvektor

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Lösung...

$$F(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \widehat{\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{X}} - 2\widehat{\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{L}$$

$$\operatorname{grad} F(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial \hat{X}_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial \hat{X}_u} \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{X}} - 2\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L} \stackrel{!}{=} \boldsymbol{0}$$

notwendige Bedingung für Optimum:

Gradient der Zielfunktion = Nullvektor

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Lösung…

$$F(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \widehat{\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{X}} - 2\widehat{\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{L}$$

$$\operatorname{grad} F(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial \hat{X}_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial \hat{X}_u} \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{X}} - 2\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L} \stackrel{!}{=} \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} x = \boldsymbol{A}^T b$

Gauß-Normalgleichung

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L}}$$

Lösung durch Gaußsches Eliminationsverfahren

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad L_i = \boldsymbol{i}\text{-te Messung der Strecke}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L}}$$

Gesucht: Ausgeglichene Strecke $\hat{X}$, Verbesserungen $\boldsymbol{v}$

Bedingung:

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\hat{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \hat{X} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v} \rightarrow \text{Min}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (1, \ldots, 1)\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} =$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (1, \ldots, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (1, \ldots, 1)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = n$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} = (1, \ldots, 1)\begin{pmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_n\end{pmatrix} =$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = n$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix}L_1\\ \vdots \\ L_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\hat{X} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} \quad \Longrightarrow$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\hat{X} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} \quad \Longrightarrow \quad n\hat{X} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\hat{X} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} \quad \Longrightarrow \quad n\hat{X} = \sum_{i=1}^{n} L_i \Leftrightarrow \hat{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{n}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 1: Mehrfache Beobachtung einer Strecke

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = n$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

Ausgleichung entspricht hier Berechnung des Mittelwerts!

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\hat{X} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} \quad \Longrightarrow \quad n\hat{X} = \sum_{i=1}^{n} L_i \iff \boxed{\hat{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{n}}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion $\boldsymbol{F}$ hat immer eine Minimalstelle.

Zielfunktion $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}$

$$= F(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \widehat{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} - 2\widehat{\boldsymbol{X}}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion $\boldsymbol{F}$ hat immer eine Minimalstelle.

Jede quadratische Funktion in den Variablen $X_1, \dots, X_u$
lässt sich durch Drehung und Verschiebung des Koordinatensystems
in die Normalform

$$f(\xi_1, \dots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_r \xi_r^2 + \alpha_{r+1} \xi_{r+1} + \cdots + \alpha_u \xi_u + \gamma$$

bringen (d.h. keine gemischten Terme, jede Variable nur einmal).

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion $\boldsymbol{F}$ hat immer eine Minimalstelle.

Jede quadratische Funktion in den Variablen $X_1, \dots, X_u$
lässt sich durch Drehung und Verschiebung des Koordinatensystems
in die Normalform

$$f(\xi_1, \dots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_r \xi_r^2 + \alpha_{r+1} \xi_{r+1} + \cdots + \alpha_u \xi_u + \gamma$$

bringen (d.h. keine gemischten Terme, jede Variable nur einmal).

Beispiel: $f(x) \quad = x^2 + 6x - 7$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion $\boldsymbol{F}$ hat immer eine Minimalstelle.

Jede quadratische Funktion in den Variablen $X_1, \dots, X_u$
lässt sich durch Drehung und Verschiebung des Koordinatensystems
in die Normalform

$$f(\xi_1, \dots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_r \xi_r^2 + \alpha_{r+1} \xi_{r+1} + \cdots + \alpha_u \xi_u + \gamma$$

bringen (d.h. keine gemischten Terme, jede Variable nur einmal).

Beispiel:
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x - 7 \\ &= x^2 + 6x + 9 - 16 \end{aligned}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion $\boldsymbol{F}$ hat immer eine Minimalstelle.

Jede quadratische Funktion in den Variablen $X_1, \dots, X_u$ lässt sich durch Drehung und Verschiebung des Koordinatensystems in die Normalform

$$f(\xi_1, \dots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_r \xi_r^2 + \alpha_{r+1} \xi_{r+1} + \cdots + \alpha_u \xi_u + \gamma$$

bringen (d.h. keine gemischten Terme, jede Variable nur einmal).

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x - 7 \\ &= x^2 + 6x + 9 - 16 \\ &= (x+3)^2 \qquad - 16 \end{aligned}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion $\boldsymbol{F}$ hat immer eine Minimalstelle.

Jede quadratische Funktion in den Variablen $X_1, \dots, X_u$
lässt sich durch Drehung und Verschiebung des Koordinatensystems
in die Normalform

$$f(\xi_1, \dots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_r \xi_r^2 + \alpha_{r+1} \xi_{r+1} + \cdots + \alpha_u \xi_u + \gamma$$

bringen (d.h. keine gemischten Terme, jede Variable nur einmal).

Beispiel:
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x - 7 \\ &= x^2 + 6x + 9 - 16 \\ &= (x+3)^2 \qquad - 16 \\ &= \xi^2 - 16 \quad \text{mit} \quad \xi = x + 3 \end{aligned}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion $\boldsymbol{F}$ hat immer eine Minimalstelle.

Jede quadratische Funktion in den Variablen $X_1, \dots, X_u$
lässt sich durch Drehung und Verschiebung des Koordinatensystems
in die Normalform

$$f(\xi_1, \dots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_r \xi_r^2 + \alpha_{r+1} \xi_{r+1} + \cdots + \alpha_u \xi_u + \gamma$$

bringen (d.h. keine gemischten Terme, jede Variable nur einmal).

Beispiel: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion $\boldsymbol{F}$ hat immer eine Minimalstelle.

Jede quadratische Funktion in den Variablen $X_1, \dots, X_u$
lässt sich durch Drehung und Verschiebung des Koordinatensystems
in die Normalform

$$f(\xi_1, \dots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_r \xi_r^2 + \alpha_{r+1} \xi_{r+1} + \cdots + \alpha_u \xi_u + \gamma$$

bringen (d.h. keine gemischten Terme, jede Variable nur einmal).

Da $F(\hat{X}) = v^T v$ gilt $F(\hat{X}) \geq 0$. Also hat F die Normalform

$$f(\xi_1, \dots, \xi_u) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_u \xi_u^2 + \gamma \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_u, \gamma \geq 0.$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Funktion $\boldsymbol{F}$ hat immer eine Minimalstelle.

Jede quadratische Funktion in den Variablen $X_1, \dots, X_u$ lässt sich durch Drehung und Verschiebung des Koordinatensystems in die Normalform

$$f(\xi_1, \dots, \xi_u) = \alpha_1\xi_1^2 + \dots + \alpha_r\xi_r^2 + \alpha_{r+1}\xi_{r+1} + \dots + \alpha_u\xi_u + \gamma$$

bringen (d.h. keine gemischten Terme, jede Variable nur einmal).

Da $F(\hat{X}) = v^T v$ gilt $F(\hat{X}) \geq 0$. Also hat F die Normalform

$$f(\xi_1, \dots, \xi_u) = \alpha_1\xi_1^2 + \dots + \alpha_u\xi_u^2 + \gamma \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_u, \gamma \geq 0.$$

Damit ist der Punkt $\xi_1 = \dots = \xi_u = 0$ eine Minimalstelle.
Der Funktionswert an dieser Stelle ist γ. $\square$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

D.h. für jede Lösung $\hat{\boldsymbol{X}}$ der Gauß-Normalgleichung ist $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}$ global minimal.

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{L})$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})$$
$$= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})$$
$$= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$
\begin{aligned}
&F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L}) \\
&= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L}) \\
&= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0) \\
&\quad +2(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L}) \\
&\quad +(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})
\end{aligned}
$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$
\begin{aligned}
&F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L}) \\
&= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L}) \\
&= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0) \\
&\quad +2(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L}) \\
&\quad +(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})
\end{aligned}
$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$\begin{aligned}
F(\boldsymbol{X}) &= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L}) \\
&= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L}) \\
&= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0) \\
&\quad \boxed{+2(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L}) = 0} \\
&\quad +(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})
\end{aligned}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})$$
$$= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})$$
$$= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)$$

$$+(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})$$
$$= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})$$
$$= \boxed{(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)}$$

$$+ \boxed{(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})}$$
$$= \boxed{(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)} + \boxed{F(\boldsymbol{X}_0)}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist hinreichend.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{L})$$
$$= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})$$
$$= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)$$

$$+(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})^T(\boldsymbol{AX}_0 - \boldsymbol{L})$$
$$= (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0) + F(\boldsymbol{X}_0) \geq F(\boldsymbol{X}_0)$$

$\square$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist eindeutig lösbar, wenn $\mathbf{rang}(A) = u$.

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist eindeutig lösbar, wenn $\mathbf{rang}(A) = u$.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt:

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0) + F(\boldsymbol{X}_0) \geq F(\boldsymbol{X}_0)$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist eindeutig lösbar, wenn $\mathbf{rang}(A) = u$.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt:

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0) + F(\boldsymbol{X}_0) \geq F(\boldsymbol{X}_0)$$

Wenn $F(\boldsymbol{X}) = F(\boldsymbol{X}_0)$, dann:

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0) = \mathbf{0}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Satz: Die Gauß-Normalgleichung ist eindeutig lösbar,
wenn $\mathbf{rang}(A) = u$.

Sei $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{R}^u$ eine Lösung der Gauß-Normalgleichung.
Für jedes $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^u$ gilt:

$$F(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0) + F(\boldsymbol{X}_0) \geq F(\boldsymbol{X}_0)$$

Wenn $F(\boldsymbol{X}) = F(\boldsymbol{X}_0)$, dann:

$$(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0)^T(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0) = 0$$

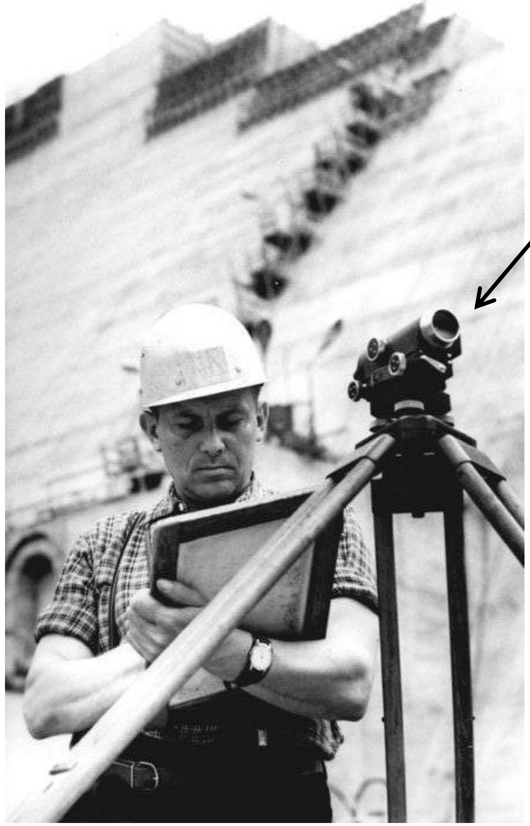
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{AX}_0 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0) = \boldsymbol{0}$$

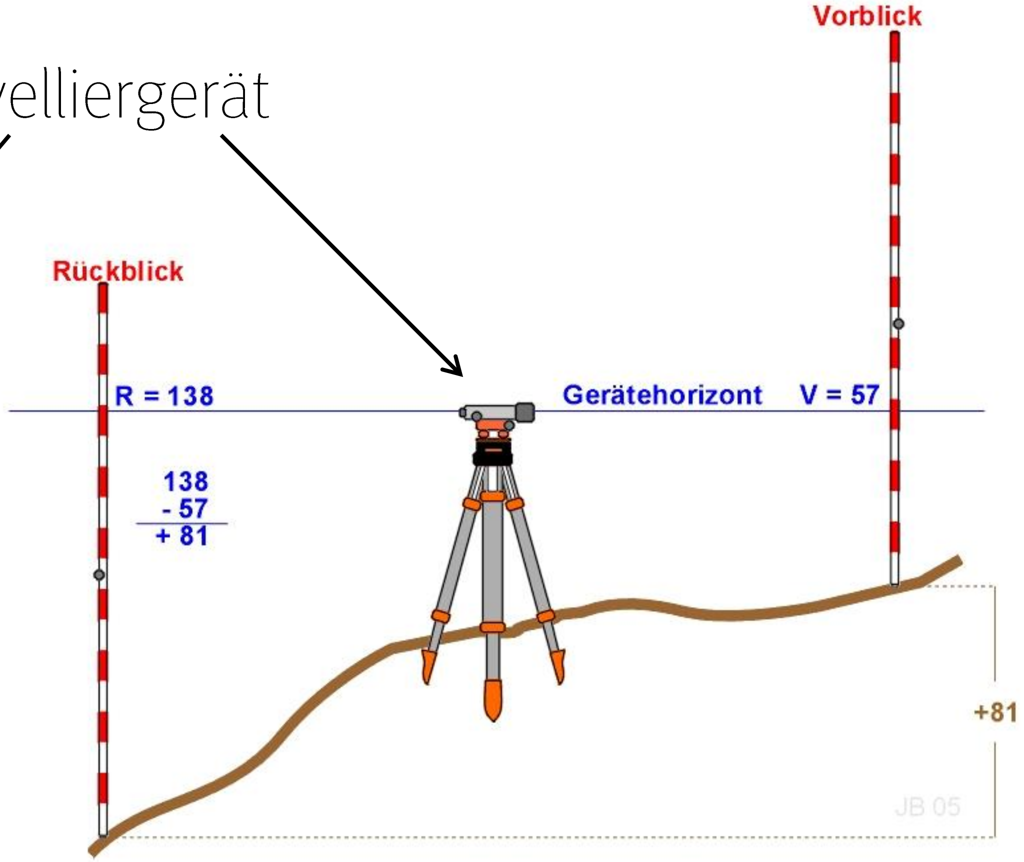
mit $\mathbf{rang}(A) = u \;\Rightarrow\; \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0$ $\square$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Nivelliergerät

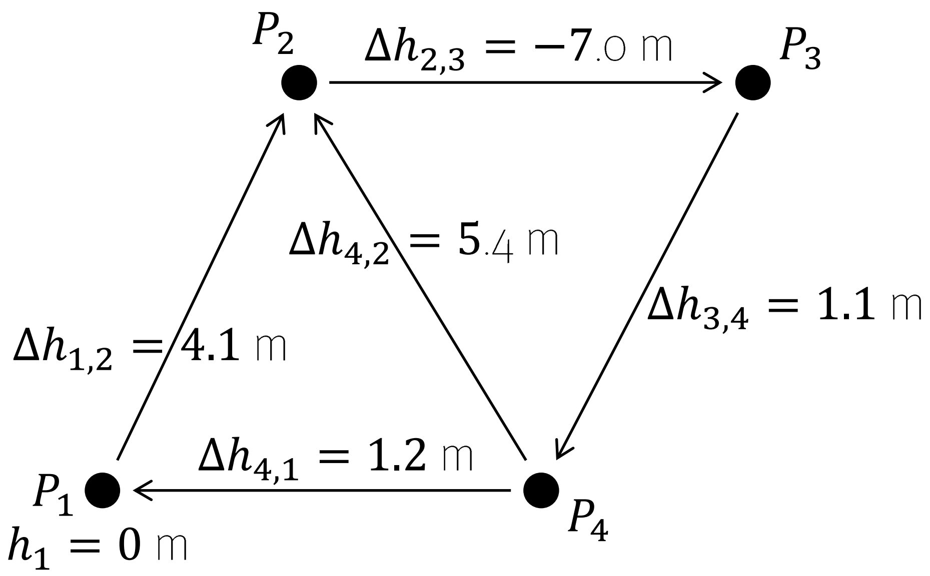




Quelle: wikipedia

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

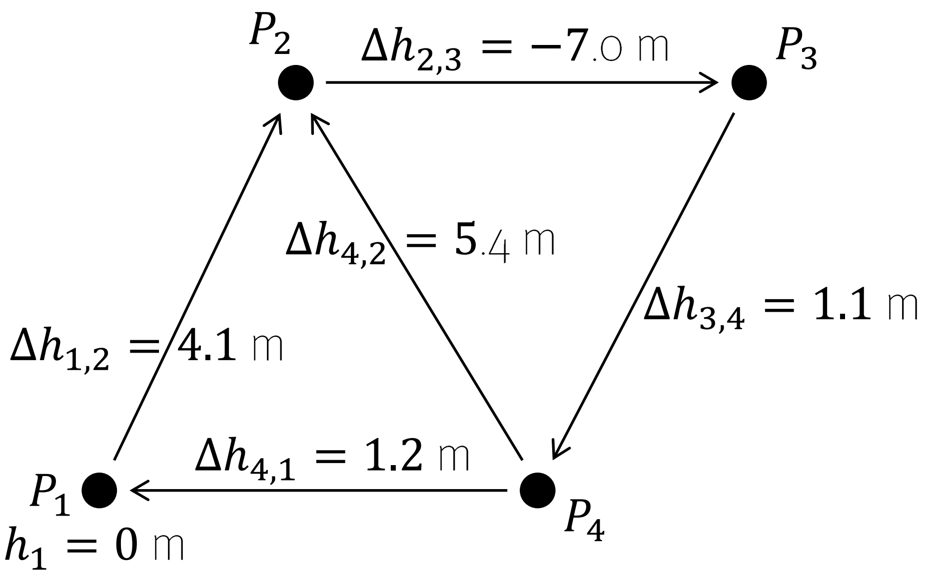


Gesucht: h_2, h_3, h_4

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \Delta h_{1,2} \\ \Delta h_{2,3} \\ \Delta h_{3,4} \\ \Delta h_{4,1} \\ \Delta h_{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1 \\ -7.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 5.4 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$



Gesucht: h_2, h_3, h_4

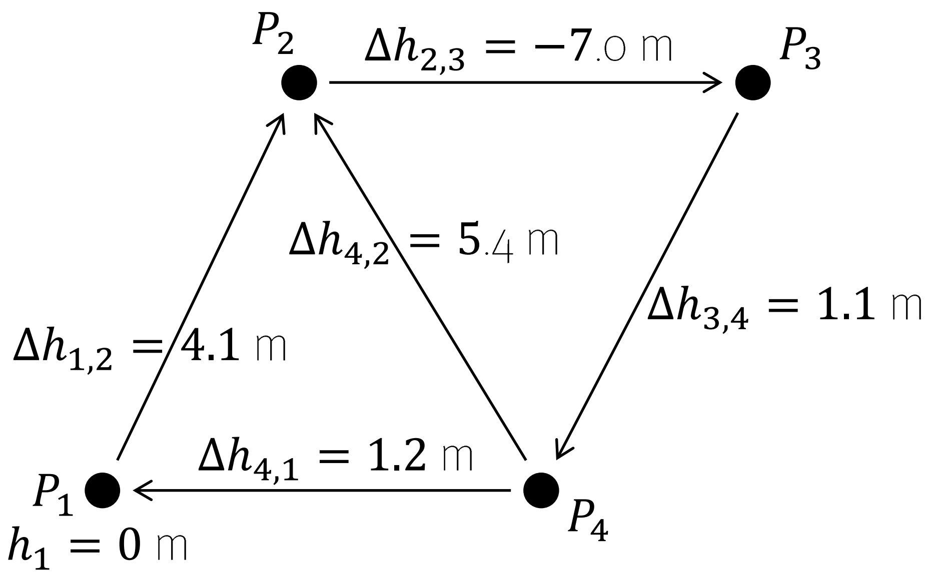
Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \Delta h_{1,2} \\ \Delta h_{2,3} \\ \Delta h_{3,4} \\ \Delta h_{4,1} \\ \Delta h_{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1 \\ -7.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 5.4 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \widehat{\boldsymbol{L}}$$



Gesucht: h_2, h_3, h_4

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \Delta h_{1,2} \\ \Delta h_{2,3} \\ \Delta h_{3,4} \\ \Delta h_{4,1} \\ \Delta h_{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1 \\ -7.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 5.4 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \widehat{\boldsymbol{L}} = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 - h_2 \\ h_4 - h_3 \\ -h_4 \\ h_2 - h_4 \end{pmatrix}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \Delta h_{1,2} \\ \Delta h_{2,3} \\ \Delta h_{3,4} \\ \Delta h_{4,1} \\ \Delta h_{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1 \\ -7.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 5.4 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \widehat{\boldsymbol{L}} = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 - h_2 \\ h_4 - h_3 \\ -h_4 \\ h_2 - h_4 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{\boldsymbol{A}} \cdot \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \Delta h_{1,2} \\ \Delta h_{2,3} \\ \Delta h_{3,4} \\ \Delta h_{4,1} \\ \Delta h_{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1 \\ -7.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 5.4 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

Gauß-Normalgleichung:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}$$

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\widehat{\boldsymbol{X}}) = \widehat{\boldsymbol{L}} = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 - h_2 \\ h_4 - h_3 \\ -h_4 \\ h_2 - h_4 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{\boldsymbol{A}} \cdot \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Gauß-Normalgleichung:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}$$

$$\boldsymbol{A}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}^T} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Gauß-Normalgleichung:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}$$

$$\boldsymbol{A}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}^T} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Gauß-Normalgleichung:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}$$

$$\boldsymbol{L}\begin{pmatrix} 4.1 \\ -7.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 5.4 \end{pmatrix}_{\mathrm{m}}$$

$$\underset{\boldsymbol{A}^T}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}} \quad \underset{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}}{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}} \quad \underset{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}}{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}_{\mathrm{m}}}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Gauß-Normalgleichung:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}$$

$$\boldsymbol{L}\begin{pmatrix} 4.1 \\ -7.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 5.4 \end{pmatrix}\mathrm{m}$$

$$\underset{\boldsymbol{A}^T}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}} \quad \underset{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}}{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}} \quad \underset{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}}{\begin{pmatrix} 16.5 \\ -8.1 \\ -5.5 \end{pmatrix}\mathrm{m}}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

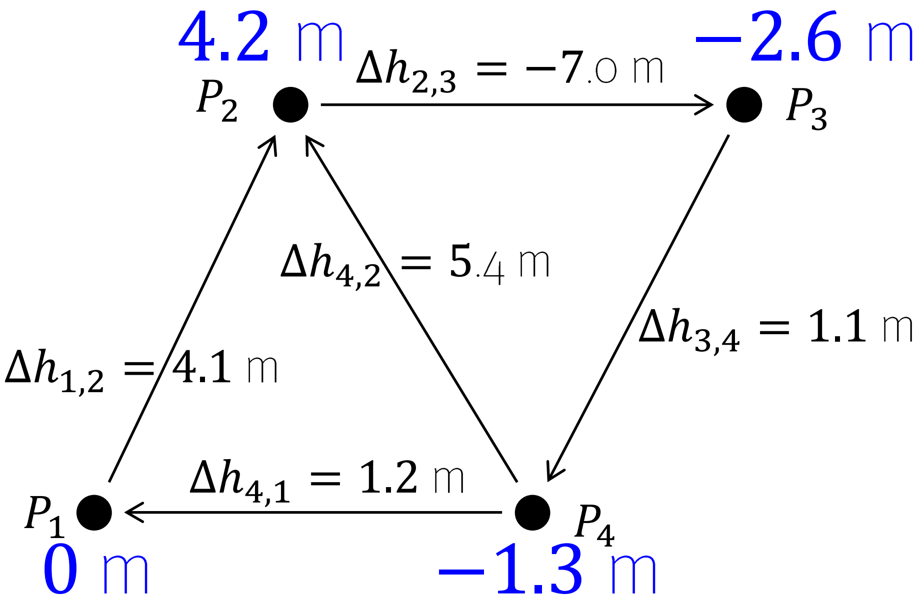
Gauß-Normalgleichung:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 16.5 \\ -8.1 \\ -5.5 \end{pmatrix}_{\mathrm{m}}}_{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L}}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen



Gauß-Normalgleichung:

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}} \cdot \widehat{\boldsymbol{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 16.5 \\ -8.1 \\ -5.5 \end{pmatrix}_{\mathrm{m}}}_{\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L}} \quad \Rightarrow \underline{\underline{\widehat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} 4.2 \\ -2.6 \\ -1.3 \end{pmatrix}_{\mathrm{m}}}}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Ausgeglichene Beobachtungen:

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}}$$

$$\begin{array}{cc} & \widehat{\boldsymbol{X}} \\ & \begin{pmatrix} 4.2 \\ -2.6 \\ -1.3 \end{pmatrix}_{\mathrm{m}} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \\ \\ \quad \end{pmatrix}_{\mathrm{m}} \\ \boldsymbol{A} & \hat{\boldsymbol{L}} \end{array}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Ausgeglichene Beobachtungen:

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} 4.2 \\ -2.6 \\ -1.3 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 4.2 \\ -6.8 \\ 1.3 \\ 1.3 \\ 5.5 \end{pmatrix} \mathrm{m}}_{\hat{\boldsymbol{L}}}$$

Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

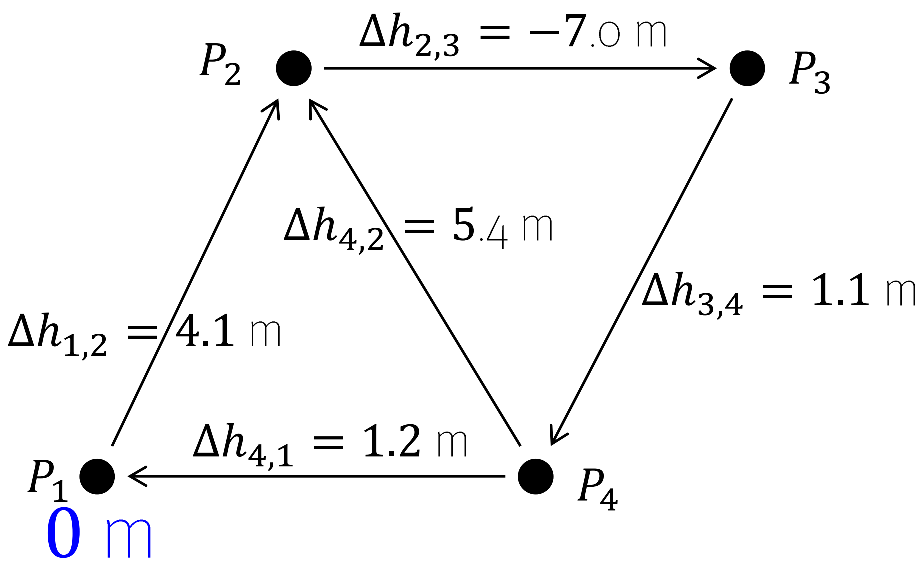
Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Ausgeglichene Beobachtungen:

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} 4.2 \\ -2.6 \\ -1.3 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 4.2 \\ -6.8 \\ 1.3 \\ 1.3 \\ 5.5 \end{pmatrix} \mathrm{m}}_{\hat{\boldsymbol{L}}}$$



Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

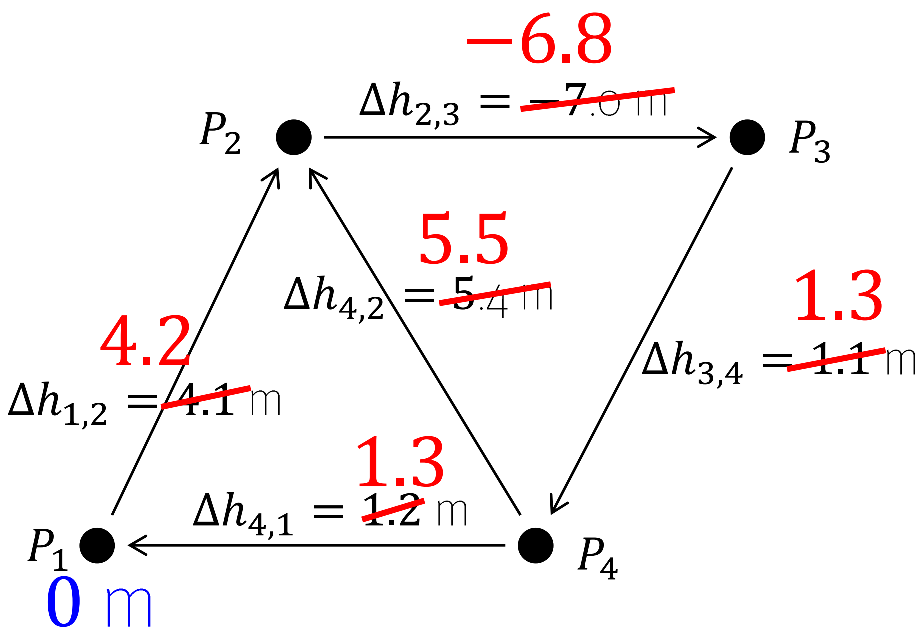
Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Ausgeglichene Beobachtungen:

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} 4.2 \\ -2.6 \\ -1.3 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 4.2 \\ -6.8 \\ 1.3 \\ 1.3 \\ 5.5 \end{pmatrix} \mathrm{m}}_{\hat{\boldsymbol{L}}}$$



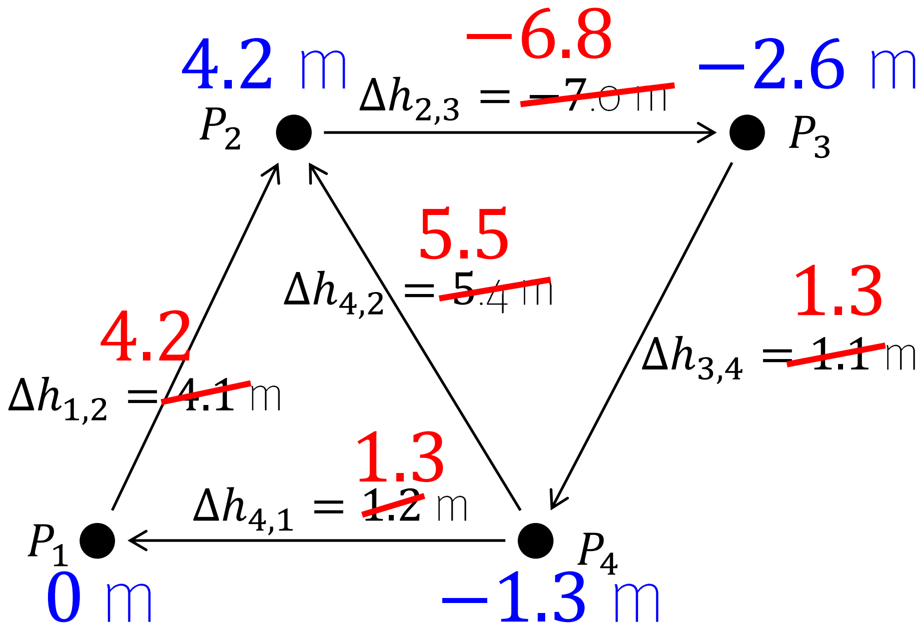
Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

Ausgeglichene Beobachtungen:

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \overbrace{\begin{pmatrix} 4.2 \\ -2.6 \\ -1.3 \end{pmatrix} \mathrm{m}}^{\hat{\boldsymbol{X}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4.2 \\ -6.8 \\ 1.3 \\ 1.3 \\ 5.5 \end{pmatrix} \mathrm{m}}_{\hat{\boldsymbol{L}}}$$



Ausgleichung bei linearem funktionalen Modell (1)

Wenn

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \Phi(\tilde{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{X}}$$

dann erfüllt Optimum $$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{L}}$$

Genauigkeit

Quelle: wikipedia

Genauigkeit

Jede Beobachtung ist die Realisierung einer Zufallsvariablen $\mathbf{X}$.

Quelle: wikipedia

Gelegentlich ist eine a-priori-Genauigkeit der Beobachtung bekannt,

gegeben als Varianz $\sigma^2 := \mathrm{E}\left(\left(\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2\right).$

Erwartungswert

Genauigkeit

Jede Beobachtung ist die Realisierung einer Zufallsvariablen $\mathbf{X}$.

Quelle: wikipedia

Gelegentlich ist eine a-priori-Genauigkeit der Beobachtung bekannt,

gegeben als Varianz $\sigma^2 := \mathrm{E}\left((\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X}))^2\right)$.

Bei mehreren Beobachtungen (Vektor $\mathbf{L}$):

Kovarianzmatrix $\Sigma_{\mathrm{LL}} := \mathrm{E}\left((\mathrm{L} - \mathrm{E}(\mathrm{L})) \cdot (\mathrm{L} - \mathrm{E}(\mathrm{L}))^{\mathrm{T}}\right)$.

Genauigkeit

Bei *mehreren Beobachtungen* (Vektor $\boldsymbol{L}$):

Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma_{LL}} := \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right)$.

Bei *zwei Beobachtungen*:

Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma_{LL}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \\ \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$.

Genauigkeit

Bei *mehreren Beobachtungen* (Vektor $\boldsymbol{L}$):

Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma_{LL}} := \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right)$.

Bei *zwei Beobachtungen*:

Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma_{LL}} = \begin{pmatrix} \boxed{\sigma_1^2} & \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \\ \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 & \boxed{\sigma_2^2} \end{pmatrix}$.

Varianzen

Genauigkeit

Bei *mehreren Beobachtungen* (Vektor $\boldsymbol{L}$):

Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma_{LL}} := \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right).$

Bei *zwei Beobachtungen*:

Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma_{LL}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \boxed{\rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2} \\ \boxed{\rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$

Kovarianzen

Genauigkeit

Bei *mehreren Beobachtungen* (Vektor $\boldsymbol{L}$):

Kovarianzmatrix $\Sigma_{\boldsymbol{LL}} := \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right)$.

Bei *zwei Beobachtungen*:

Kovarianzmatrix $\Sigma_{\boldsymbol{LL}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \boxed{\rho_{12}} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \\ \boxed{\rho_{12}} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$.

Korrelationskoeffizienten

$$-1 \leq \rho_{12} \leq 1$$

Maß für stochastische Abhängigkeit

Genauigkeit

Bei *mehreren Beobachtungen* (Vektor $\boldsymbol{L}$):

Kovarianzmatrix $\Sigma_{\boldsymbol{LL}} := \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right).$

Bei *zwei Beobachtungen*:

Kovarianzmatrix $\Sigma_{\boldsymbol{LL}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \\ \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$

In der Regel:

$$\Sigma_{\boldsymbol{LL}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Genauigkeit

$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}}$ oft schwer *a priori* abzuschätzen,
aber Genauigkeits*relationen* bekannt:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}} = \sigma_0^2 \cdot \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{LL}}$$

Varianz der Gewichtseinheit (unbekannte Konstante)

Kofaktormatrix (lässt sich gut abschätzen)

Genauigkeit

Ausgleichungsziel:

$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v} \rightarrow \mathrm{Min}$$

Genauigkeit

Ausgleichungsziel:

$$\cancel{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v} \rightarrow \text{Min}}$$

$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \rightarrow \text{Min}$$

mit $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}^{-1}$

Quelle: wikipedia

Verbesserungen *genauer Beobachtungen* werden besonders bestraft.

Genauigkeit

Ausgleichungsziel:

$$\cancel{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v} \rightarrow \text{Min}}$$

$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \rightarrow \text{Min}$$

mit $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}^{-1}$

Gauß-Normalgleichung:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

Genauigkeit

Wie genau sind Größen,
die aus Beobachtungen abgeleitet wurden?

$\longrightarrow$ *Kovarianzfortpflanzungsgesetz*

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Gegeben:

Kovarianzmatrix des Vektors $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}}$

Vektor $\boldsymbol{f}$ als lin. Funktion von $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{FL}$

Gesucht:

Kovarianzmatrix des Vektors $\boldsymbol{f}$ $\quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{ff}}$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Gegeben:

Kovarianzmatrix des Vektors $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}}$

Vektor $\boldsymbol{f}$ als lin. Funktion von $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{L}$

Gesucht:

Kovarianzmatrix des Vektors $\boldsymbol{f}$ $\quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{ff}}$

Beispiel:

$$f = l_1 + l_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} [\mathrm{cm}^2]$$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Gegeben:

Kovarianzmatrix des Vektors $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}} = \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right)$

Vektor $\boldsymbol{f}$ als lin. Funktion von $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{FL}$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Gegeben:

Kovarianzmatrix des Vektors $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}} = \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right)$

Vektor $\boldsymbol{f}$ als lin. Funktion von $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{FL}$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{ff}} =$$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Gegeben:

Kovarianzmatrix des Vektors $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}} = \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right)$

Vektor $\boldsymbol{f}$ als lin. Funktion von $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{FL}$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{ff}} = \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{FL} - \mathrm{E}(\boldsymbol{FL})\right) \cdot \left(\boldsymbol{FL} - \mathrm{E}(\boldsymbol{FL})\right)^T\right)$$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Gegeben:

Kovarianzmatrix des Vektors $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}} = \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right)$

Vektor $\boldsymbol{f}$ als lin. Funktion von $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{FL}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{ff}} &= \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{FL} - \mathrm{E}(\boldsymbol{FL})\right) \cdot \left(\boldsymbol{FL} - \mathrm{E}(\boldsymbol{FL})\right)^T\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{FL} - \boldsymbol{F}\mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{FL} - \boldsymbol{F}\mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right)
\end{aligned}
$$

Linearität des Erwartungswerts!

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Gegeben:

Kovarianzmatrix des Vektors $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}} = \mathrm{E}\left((\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})) \cdot (\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L}))^T\right)$

Vektor $\boldsymbol{f}$ als lin. Funktion von $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{FL}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{ff}} &= \mathrm{E}\left((\boldsymbol{FL} - \mathrm{E}(\boldsymbol{FL})) \cdot (\boldsymbol{FL} - \mathrm{E}(\boldsymbol{FL}))^T\right) \\
&= \mathrm{E}\left((\boldsymbol{FL} - \boldsymbol{F}\mathrm{E}(\boldsymbol{L})) \cdot (\boldsymbol{FL} - \boldsymbol{F}\mathrm{E}(\boldsymbol{L}))^T\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})) \cdot (\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L}))^T \cdot \boldsymbol{F}^T\right)
\end{aligned}$$

Linearität des Erwartungswerts!

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Gegeben:

Kovarianzmatrix des Vektors $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{\Sigma}_{LL} = \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right)$

Vektor $\boldsymbol{f}$ als lin. Funktion von $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{L}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{ff} &= \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{F}\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{F}\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{L})\right)^T\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{F}\boldsymbol{L} - \boldsymbol{F}\mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{F}\boldsymbol{L} - \boldsymbol{F}\mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\boldsymbol{F} \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T \cdot \boldsymbol{F}^T\right) \\
&= \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right) \cdot \boldsymbol{F}^T
\end{aligned}$$

Linearität des Erwartungswerts!

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Gegeben:

Kovarianzmatrix des Vektors $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}} = \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right)$

Vektor $\boldsymbol{f}$ als lin. Funktion von $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{FL}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{ff}} &= \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{FL} - \mathrm{E}(\boldsymbol{FL})\right) \cdot \left(\boldsymbol{FL} - \mathrm{E}(\boldsymbol{FL})\right)^T\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{FL} - \boldsymbol{F}\mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{FL} - \boldsymbol{F}\mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\boldsymbol{F} \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T \cdot \boldsymbol{F}^T\right) \\
&= \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right) \cdot \boldsymbol{F}^T \\
&= \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}}\boldsymbol{F}^T
\end{aligned}
$$

Linearität des Erwartungswerts!

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Gegeben:

Kovarianzmatrix des Vektors $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}} = \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right)$

Vektor $\boldsymbol{f}$ als lin. Funktion von $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{L}$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{ff}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}}\boldsymbol{F}^T}}$$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Gegeben:

Kovarianzmatrix des Vektors $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}} = \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right) \cdot \left(\boldsymbol{L} - \mathrm{E}(\boldsymbol{L})\right)^T\right)$

Vektor $\boldsymbol{f}$ als lin. Funktion von $\boldsymbol{L}$ $\quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{L}$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{ff}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}}\boldsymbol{F}^T}}$$

Beispiel:

$$f = L_1 + L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} [\mathrm{cm}^2]$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{ff}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\ \mathrm{cm}^2 & 0 \\ 0 & 4\ \mathrm{cm}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(7\ \mathrm{cm}^2\right)$$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz
für $\hat{\boldsymbol{X}}$*?*

Ausgleichung mit Ziel $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \rightarrow \mathrm{Min}$:

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz
für $\widehat{\boldsymbol{X}}$*?*

Ausgleichung mit Ziel $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \rightarrow \mathrm{Min}$:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Ausgleichung mit Ziel $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \rightarrow$ Min:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Ausgleichung mit Ziel $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \rightarrow$ Min:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

Also: $\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{X}\widehat{X}} =$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Ausgleichung mit Ziel $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \rightarrow$ Min:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

Also: $\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{X}\widehat{X}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma}_{LL}\boldsymbol{F}^T$ mit $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Ausgleichung mit Ziel $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \rightarrow$ Min:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

Also: $\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{X}\widehat{X}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{LL}}\boldsymbol{F}^T$ mit $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}$

$$= \sigma_0^2\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{LL}}\boldsymbol{F}^T$$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Ausgleichung mit Ziel $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \rightarrow \mathrm{Min}$:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

Also: $\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{X}\widehat{X}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma}_{LL}\boldsymbol{F}^T$ mit $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}$

$$= \sigma_0^2\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_{LL}\boldsymbol{F}^T = \sigma_0^2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_{LL}\boldsymbol{F}^T$$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Ausgleichung mit Ziel $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \rightarrow \mathrm{Min}$:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

Also: $\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{X}\widehat{X}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma}_{LL}\boldsymbol{F}^T$ mit $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}$

$$= \sigma_0^2\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_{LL}\boldsymbol{F}^T = \sigma_0^2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_{LL}\boldsymbol{F}^T$$

$$= \sigma_0^2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{F}^T$$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Ausgleichung mit Ziel $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \rightarrow \mathrm{Min}$:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

Also: $\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{X}\widehat{X}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma}_{LL}\boldsymbol{F}^T$ mit $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}$

$$= \sigma_0^2\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_{LL}\boldsymbol{F}^T = \sigma_0^2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_{LL}\boldsymbol{F}^T$$

$$= \sigma_0^2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{F}^T$$

$$= \sigma_0^2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}$$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Ausgleichung mit Ziel $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \rightarrow$ Min:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

Also: $\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{X}\widehat{X}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma}_{LL}\boldsymbol{F}^T$ mit $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}$

$$= \sigma_0^2\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_{LL}\boldsymbol{F}^T = \sigma_0^2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_{LL}\boldsymbol{F}^T$$

$$= \sigma_0^2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{F}^T$$

$$= \sigma_0^2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}$$

$$= \underline{\underline{\sigma_0^2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}}}$$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Ausgleichung mit Ziel $\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v} \rightarrow \mathrm{Min}$:

Genauigkeit der ausgeglichenen Unbekannten:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{X}}\hat{\boldsymbol{X}}} = \sigma_0^2 (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A})^{-1}$$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Ausgleichung mit Ziel $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \rightarrow \mathrm{Min}$:

Genauigkeit der ausgeglichenen Unbekannten:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{X}}\hat{\boldsymbol{X}}} = \sigma_0^2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}$$

Genauigkeit der ausgeglichenen Beobachtungen:

$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{L}}\hat{\boldsymbol{L}}} =$ wegen $\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}$

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Ausgleichung mit Ziel $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \rightarrow \mathrm{Min}$:

Genauigkeit der ausgeglichenen Unbekannten:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{X}}} = \sigma_0^2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}$$

Genauigkeit der ausgeglichenen Beobachtungen:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\boldsymbol{L}}\widehat{\boldsymbol{L}}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\boldsymbol{X}}\widehat{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}^T \qquad \text{wegen } \widehat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}}$$

Genauigkeit

Problem:

Berechnung von $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{X}}\hat{\boldsymbol{X}}} = \sigma_0^2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}$

erfordert Kenntnis von $\boldsymbol{\sigma_0^2}$.

Lösung:

Schätze $\boldsymbol{\sigma_0^2}$ durch Ausgleichung (Kenntnis von Genauigkeits*relationen* $\boldsymbol{Q_{LL}}$ vorausgesetzt)

Genauigkeit

$\boldsymbol{\sigma_0^2}$ lässt sich mittels $\boldsymbol{v}$ abschätzen.

$$\boxed{\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}}{n - u}}$$

ist ein *erwartungstreuer Schätzer* für $\boldsymbol{\sigma_0^2}$.

(ohne Beweis)

Genauigkeit

$\boldsymbol{\sigma_0^2}$ lässt sich mittels $\boldsymbol{v}$ abschätzen.

$$\boxed{\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}}{n-u}}$$

ist ein *erwartungstreuer Schätzer* für $\boldsymbol{\sigma_0^2}$.

(ohne Beweis)

Beispiel 1:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \hat{X} - \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X} - L_1 \\ \vdots \\ \hat{X} - L_n \end{pmatrix}$$

Genauigkeit

$\boldsymbol{\sigma_0^2}$ lässt sich mittels $\boldsymbol{v}$ abschätzen.

$$\boxed{\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}}{n-u}}$$

ist ein *erwartungstreuer Schätzer* für $\boldsymbol{\sigma_0^2}$.

(ohne Beweis)

Beispiel 1:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \hat{X} - \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X} - L_1 \\ \vdots \\ \hat{X} - L_n \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}}{n-u}$$

Genauigkeit

σ_0^2 lässt sich mittels $\boldsymbol{v}$ abschätzen.

$$\boxed{\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}}{n-u}}$$

ist ein *erwartungstreuer Schätzer* für $\boldsymbol{\sigma_0^2}$.

(ohne Beweis)

Beispiel 1:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \hat{X} - \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X} - L_1 \\ \vdots \\ \hat{X} - L_n \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}}{n-u} = \frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v}}{n-1}$$

Genauigkeit

$\boldsymbol{\sigma_0^2}$ lässt sich mittels $\boldsymbol{v}$ abschätzen.

$$\boxed{\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}}{n-u}}$$

ist ein *erwartungstreuer Schätzer* für $\boldsymbol{\sigma_0^2}$.

(ohne Beweis)

Beispiel 1:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \hat{X} - \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X} - L_1 \\ \vdots \\ \hat{X} - L_n \end{pmatrix}$$

Stichprobenvarianz

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}}{n-u} = \frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v}}{n-1} = \boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{X} - L_i\right)^2}{n-1}}$$

Genauigkeit

Beweis für Spezialfall Mittelwert

$$E\left(\hat{\sigma}_0^2\right) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{X} - L_i\right)^2}{n-1}\right)$$

Genauigkeit

Beweis für Spezialfall Mittelwert

$$E(\hat{\sigma}_0^2) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{X} - L_i\right)^2}{n-1}\right) \qquad \mu = E(\hat{X})$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{X} - \mu + \mu - L_i\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\hat{X} - \mu\right)^2 - 2\left(\hat{X} - \mu\right)(L_i - \mu) + (L_i - \mu)^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{X} - \mu\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{X} - \mu\right)(L_i - \mu) + \sum_{i=1}^{n}(L_i - \mu)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left(n\left(\hat{X} - \mu\right)^2 - 2n\left(\hat{X} - \mu\right)\left(\hat{X} - \mu\right) + \sum_{i=1}^{n}(L_i - \mu)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^{n}(L_i - \mu)^2 - n\left(\hat{X} - \mu\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} E(L_i - \mu)^2 - nE\left(\left(\hat{X} - \mu\right)^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma_0^2 - n\sigma_{\hat{X}}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma_0^2 - n\frac{\sigma_0^2}{n}\right) = \underline{\sigma_0^2}$$

Genauigkeit

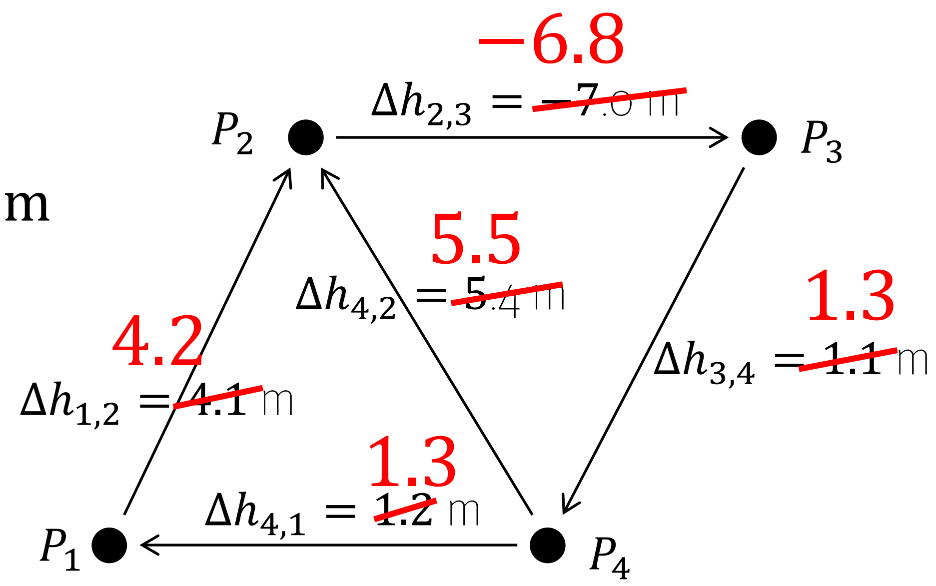
Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

$$\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{L}$$

$$= \begin{pmatrix} 4.2 \\ -6.8 \\ 1.3 \\ 1.3 \\ 5.5 \end{pmatrix} \mathrm{m} - \begin{pmatrix} 4.1 \\ -7.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 5.4 \end{pmatrix} \mathrm{m} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}}{n-u} = \frac{0.11\ \mathrm{m}^2}{5-3} = 0.055\ \mathrm{m}^2$$

$$\underline{\underline{\hat{\sigma}_0 = 0.23\ \mathrm{m}}}$$



Genauigkeit

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{X}}\hat{\boldsymbol{X}}} = \sigma_0^2 \cdot (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A})^{-1}$$

Genauigkeit

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{X}\hat{X}} = \sigma_0^2 \cdot (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}$$

$$= 0.055\ \mathrm{m}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0.625 & 0.500 & 0.375 \\ 0.500 & 1.000 & 0.500 \\ 0.375 & 0.500 & 0.625 \end{pmatrix}$$

Genauigkeit

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{X}}\hat{\boldsymbol{X}}} = \sigma_0^2 \cdot (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}$$

$$= 0.055\ \mathrm{m}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0.625 & 0.500 & 0.375 \\ 0.500 & 1.000 & 0.500 \\ 0.375 & 0.500 & 0.625 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0344 & 0.0275 & 0.0206 \\ 0.0275 & 0.0550 & 0.0275 \\ 0.0206 & 0.0275 & 0.0344 \end{pmatrix} \mathrm{m}^2$$

Genauigkeit

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{X}\hat{X}} = \sigma_0^2 \cdot (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A})^{-1}$$

$$= 0.055\ \mathrm{m}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0.625 & 0.500 & 0.375 \\ 0.500 & 1.000 & 0.500 \\ 0.375 & 0.500 & 0.625 \end{pmatrix}$$

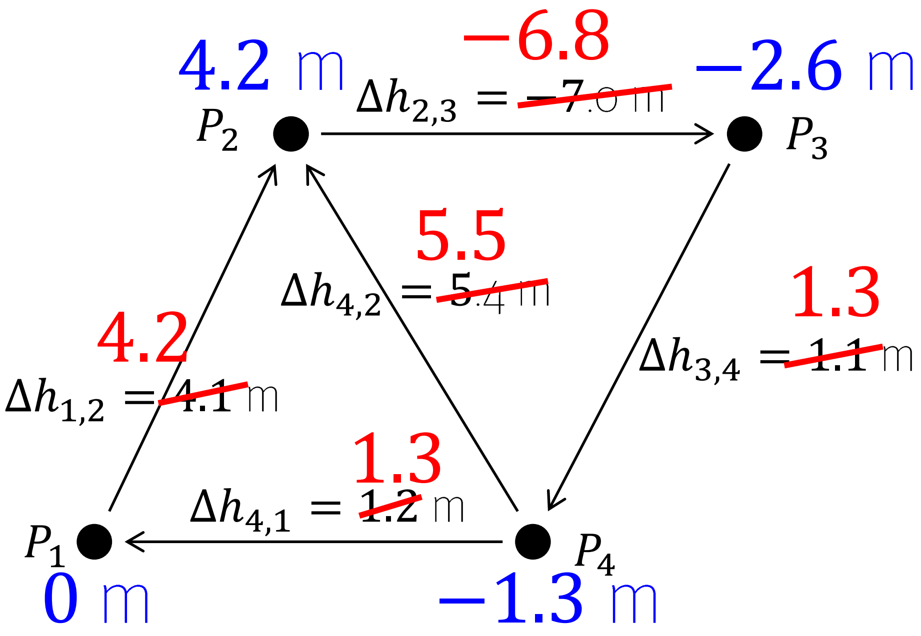
$$= \begin{pmatrix} 0.0344 & 0.0275 & 0.0206 \\ 0.0275 & 0.0550 & 0.0275 \\ 0.0206 & 0.0275 & 0.0344 \end{pmatrix} \mathrm{m}^2$$

$$\sigma_{h_2} = \sigma_{h_4} = \sqrt{0.0344\ \mathrm{m}^2} = \underline{\underline{0.185\ \mathrm{m}}}$$

$$\sigma_{h_3} = \sqrt{0.0550\ \mathrm{m}^2} = \underline{\underline{0.235\ \mathrm{m}}}$$

Genauigkeit

Beispiel 2: Ausgleichung von Höhendifferenzen



$$\sigma_{h_2} = \sigma_{h_4} = \sqrt{0.0344\ \mathrm{m}^2} = \underline{\underline{0.185\ \mathrm{m}}}$$

$$\sigma_{h_3} = \sqrt{0.0550\ \mathrm{m}^2} = \underline{\underline{0.235\ \mathrm{m}}}$$

Genauigkeit

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{L}\widehat{L}} =$$

Genauigkeit

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{L}\hat{L}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{X}\hat{X}}\boldsymbol{A}^T$$

Genauigkeit

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{L}\widehat{L}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{X}\widehat{X}}\boldsymbol{A}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0344 & -0.0069 & -0.0069 & -0.0206 & 0.0138 \\ -0.0069 & 0.0344 & -0.0206 & -0.0069 & -0.0138 \\ -0.0069 & -0.0206 & 0.0344 & -0.0069 & -0.0138 \\ -0.0206 & -0.0069 & -0.0069 & 0.0344 & 0.0138 \\ 0.0138 & -0.0138 & -0.0138 & 0.0138 & 0.0275 \end{pmatrix} \mathrm{m}^2$$

Genauigkeit

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{L}\widehat{L}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{X}\widehat{X}}\boldsymbol{A}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0344 & -0.0069 & -0.0069 & -0.0206 & 0.0138 \\ -0.0069 & 0.0344 & -0.0206 & -0.0069 & -0.0138 \\ -0.0069 & -0.0206 & 0.0344 & -0.0069 & -0.0138 \\ -0.0206 & -0.0069 & -0.0069 & 0.0344 & 0.0138 \\ 0.0138 & -0.0138 & -0.0138 & 0.0138 & 0.0275 \end{pmatrix} \mathrm{m}^2$$

$$\sigma_{\Delta h_{1,2}} = \sigma_{\Delta h_{2,3}} = \sigma_{\Delta h_{3,4}} = \sigma_{\Delta h_{4,1}} = \sqrt{0.0344\ \mathrm{m}^2} = \underline{\underline{0.185\ \mathrm{m}}}$$

$$\sigma_{\Delta h_{4,2}} = \sqrt{0.0275\ \mathrm{m}^2} = \underline{\underline{0.166\ \mathrm{m}}}$$

Vergleich: $\hat{\sigma}_0 = 0.23\ \mathrm{m}$ $\longrightarrow$ Genauigkeitsgewinn durch Ausgleichung

Genauigkeit

Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Ausgleichung mit Ziel $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \rightarrow \mathrm{Min}$:

Genauigkeit der ausgeglichenen Unbekannten:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{X}}\hat{\boldsymbol{X}}} = \sigma_0^2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}$$

Genauigkeit der ausgeglichenen Beobachtungen:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{L}}\hat{\boldsymbol{L}}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{X}}\hat{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}^T \qquad \text{wegen } \hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}$$