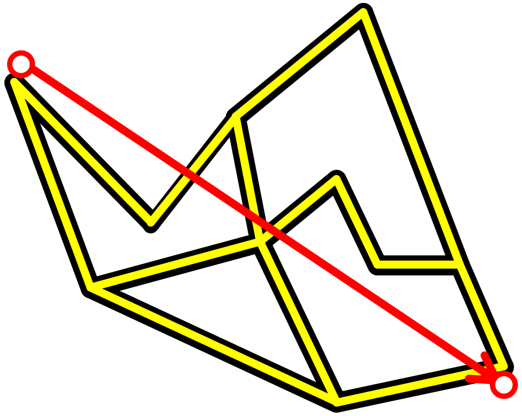
Map Matching

Problem:

GPS-Punkte der Trajektorie weisen einen relativ großen Abstand zueinander auf.

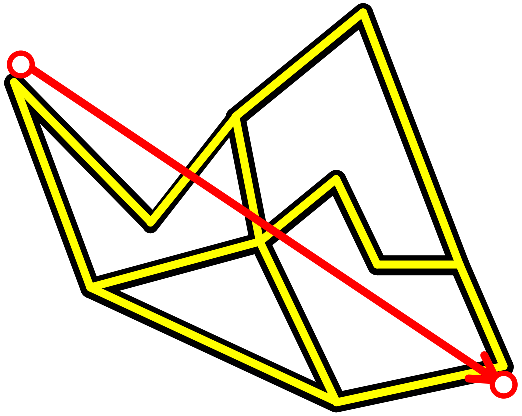


Map Matching

Problem:

GPS-Punkte der Trajektorie weisen einen relativ großen Abstand zueinander auf.

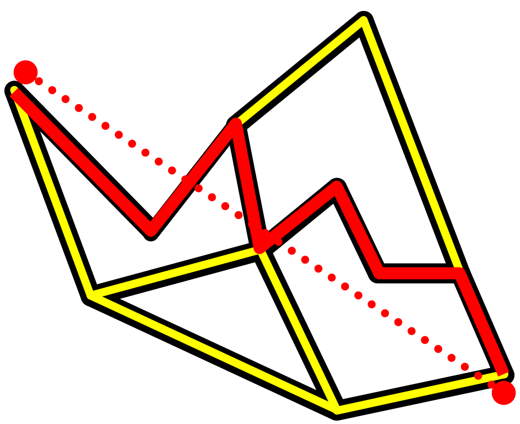
→ Direkte Verbindung zwischen Punkten ist schlechte Näherung



Map Matching

Problem:

GPS-Punkte der Trajektorie weisen einen relativ großen Abstand zueinander auf.



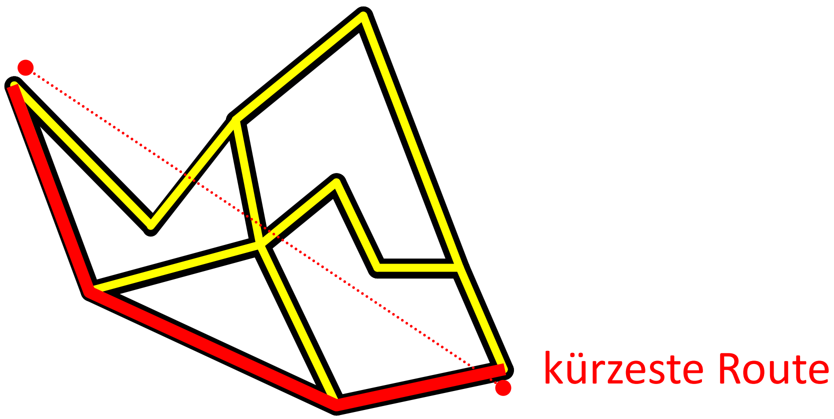
Idee:

Fahrer wählen bevorzugt **kürzeste Wege** im Straßennetz.

Map Matching

Problem:

GPS-Punkte der Trajektorie weisen einen relativ großen Abstand zueinander auf.



Idee:

Fahrer wählen bevorzugt **kürzeste Wege** im Straßennetz.

Map Matching

Ansatz über kürzeste Wege

Lou et al.:
Map-Matching for Low-Sampling-Rate GPS Trajectories,
Proc. ACM GIS 2009.

Ein Punkt etwa alle zwei Minuten (z.B. zur Aufzeichnung & Analyse von Taxirouten)

P. Newson und J. Krum:
Hidden Markov Map Matc
Proc. ACM GIS 2009

Eisner et al.:
Algorithms for Matching and Predicting Trajectories,
Proc. ALENEX 2011

Map Matching

Ansatz über kürzeste Wege

Lou et al.:
Map-Matching for Low-Sampling-Rate GPS Trajectories,
Proc. ACM GIS 2009.

P. Newson und J. Krum:
Hidden Markov Map Matching Through Noise and Sparseness,
Proc. ACM GIS 2009

= Maximum-likelihood estimation + Markov Chains + Hidden Markov Models

Elsner et al.:
Algorithms for Matching and Predicting Trajectories,
Proc. ALENEX 2011

Maximum-likelihood estimation

Probability versus Likelihood

- Flipping a coin:
  - $P[heads] = p$
  - $P[tails] = 1 - p$

Model

- Do three independent flips.

Parameter value

- The coin is fair (**p = ½**).

Outcome?

- What is the **probability** of getting outcome **x=(H,H,T)**?

p **is not a random variable!**

$$P[\,x = (H,H,T)\ ;\ p = {}^{1}/_{2}\,]\ \cancel{P[\,x = (H,H,T)\mid p = {}^{1}/_{2}\,]} = {}^{1}/_{2} \cdot {}^{1}/_{2} \cdot (1 - {}^{1}/_{2}) = 0.125$$

Maximum-likelihood estimation

Probability versus **Likelihood**

- Flipping a coin:
  - $P[heads] = p$
  - $P[tails] = 1 - p$
- Did three independent flips.
- The result was **x=(H,H,T)**.
- What is the **likelihood** that the coin is fair (**p = ½**)?

Model

Parameter value?

Outcome

Maximum-likelihood estimation

Likelihood functions

- Given the outcome x,
  how "likely" is a certain parameter value θ?
- Assuming parameter value θ,
  what is the probability of outcome x?
- Define *likelihood function* $\mathcal{L}(\theta|x) = P[x;\theta]$

Not a probability!

- The result was **(H,H,T)**.
- What is the **likelihood** that the coin is fair (**p = ½**)?
- $\mathcal{L}[\,\boldsymbol{p} = {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}}\ |\ x = (H,H,T)\,] = {}^1/_2 \cdot {}^1/_2 \cdot {}^1/_2 = 0.125$
- $\mathcal{L}[\,\boldsymbol{p} = \mathbf{0.1}\ |\ x = (H,H,T)\,] = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 0.009$
- $\mathcal{L}[\,\boldsymbol{p} = {}^{\mathbf{2}}/_{\mathbf{3}}\ |\ x = (H,H,T)] = {}^2/_3 \cdot {}^2/_3 \cdot {}^1/_3 = 0.\overline{148}$

Maximum-likelihood estimation

Predictions versus Estimates

- *Most probable outcome*
  - Given parameter $p = {}^{2}/_{3}$...
  - ... the most probable outcome is (H, H, H).

- *Maximum-Likelihood Estimate* ("MLE")
  - Given outcome (T, H, T)...
  - ...maximum-likelihood estimate is $p = {}^{1}/_{3}$.
  - This value of p "best explains the observed outcome."
  - This value of p makes the outcome "least surprising."

Maximum-likelihood estimation

Maximum-likelihood map matching?

- **Model? Parameter? Outcome?**

- *Most probable outcome*
  - Given a path in a road network …
  - … what is the most probable GPS trajectory to observe? (Noisy.)

- *Maximum-Likelihood Estimate* (MLE)
  - Given the observed GPS trajectory (noisy) …
  - … what is the most likely path through the road network?
  - “Which path through the network best explains the observed GPS trajectory?“

Пафну́тий Чебышёв

1821 - 1894

Ма́рков Chains

Андре́й Ма́рков

1856 - 1922

Георгій Вороний

1868 - 1908

Бори́с Делоне́

1890 - 1980

Wacław Sierpiński

1882 - 1969

Máрков Chains

Chebyshev
1821 - 1894

Markov
1856 - 1922

Voronoi
1856 - 1922

Delaunay
1890 - 1980

Sierpinski
1882 - 1969

Markov Chains

- Sequence of random variables $X_1, X_2, X_3, \ldots$
- **Markov Property**:

$$\Pr[\, X_{\mathrm{n+1}} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1 \,] = \Pr[\, X_{n+1} \mid X_n = x_n \,]$$

- "Given the present,
  the future is independent of the past."
- Represent as $\Pr[X_1], \Pr[X_2|X_1], \Pr[X_3|X_2], \ldots$

Markov Chains

Example

- Possible states $Z = \{Sonne, Regen\}$

- $\Pr[\, X_1 = Regen \,] = 0.3$
- $\Pr[\, X_1 = Sonne \,] = 0.7$

- $\Pr[\, X_{n+1} = Regen \mid X_n = Regen \,] = 0.7$
- $\Pr[\, X_{n+1} = Sonne \mid X_n = Regen \,] = 0.3$
- $\Pr[\, X_{n+1} = Regen \mid X_n = Sonne \,] = 0.2$
- $\Pr[\, X_{n+1} = Sonne \mid X_n = Sonne \,] = 0.8$

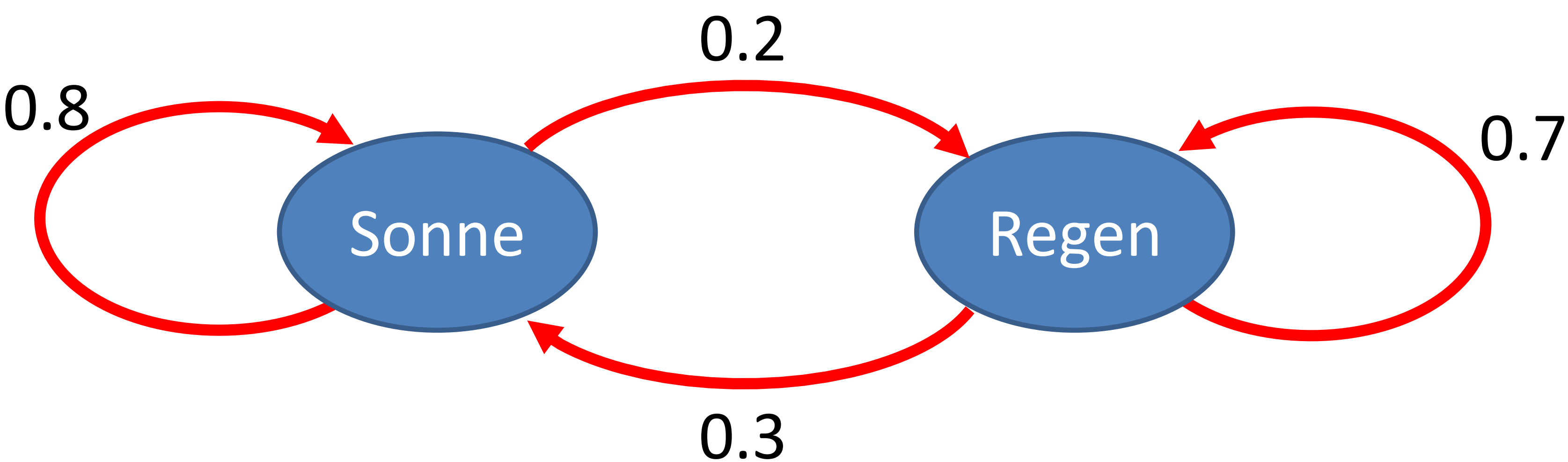
Markov Chains

Example

- Possible states $Z = \{Sonne, Regen\}$

- $\Pr[\, X_1 = Regen\,] = 0.3$
- $\Pr[\, X_1 = Sonne\,] = 0.7$

$\Pr[\, X_2 = Sonne\,]\,?$



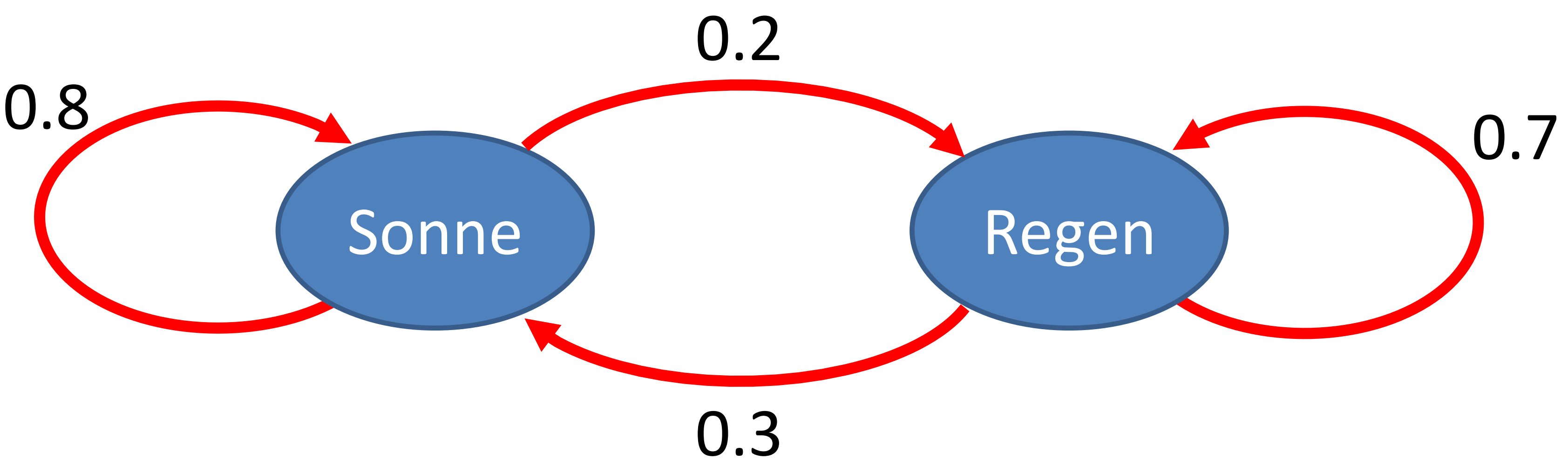
Markov Chains

Example

- Possible states $Z = \{Sonne, Regen\}$

- $\Pr[\, X_2 = Regen \,] = 0.35$
- $\Pr[\, X_2 = Sonne \,] = 0.65$

$\Pr[\, X_3 = Regen \,]?$



Hidden Markov Models

- Markov Chain
  - At every time step, it has a certain ***state***
- But the states are ***hidden***
  - We cannot "see" its state
- Emission ("output")
  - At every time step, get an ***observation***
  - Probability distribution depends on state
  - Emission at each step is independent

Hidden Markov Model

Hidden Markov Model

Gegeben:

- Beobachtungen $O = \langle o_1, \ldots, o_n \rangle$, je eine pro Zeitpunkt

Hidden Markov Model

Gegeben:

- Beobachtungen $O = \langle o_1, \ldots, o_n \rangle$, je eine pro Zeitpunkt
- mögliche Systemzustände Z

Hidden Markov Model

Gegeben:

- Beobachtungen $O = \langle o_1, \ldots, o_n \rangle$, je eine pro Zeitpunkt
- mögliche Systemzustände Z
- für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung o
  - die Wahrscheinlichkeit $\Pr(o \mid z)$ oder
  - die Wahrscheinlichkeits*dichte* $f(o \mid z)$,

  dass o bei Zustand z beobachtet wird

Hidden Markov Model

Gegeben:

- Beobachtungen $O = \langle o_1, \ldots, o_n \rangle$, je eine pro Zeitpunkt
- mögliche Systemzustände Z
- für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung o
  - die Wahrscheinlichkeit $\Pr(o \mid z)$ oder
  - die Wahrscheinlichkeits*dichte* $f(o \mid z)$,

  dass o bei Zustand z beobachtet wird
- für jedes Paar von Zuständen $z_1, z_2 \in Z$ die Wahrscheinlichkeit

  $\Pr(z_2 \mid \text{was } z_1 \text{ before})$,

  also die Wahrscheinlichkeit für z_2 bei Kenntnis, dass zuvor z_1 vorherrschte (*Übergangswahrscheinlichkeit*)

Hidden Markov Model

Gegeben:

- Beobachtungen $O = \langle o_1, \ldots, o_n \rangle$, je eine pro Zeitpunkt
- mögliche Systemzustände Z
- für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung o
  - die Wahrscheinlichkeit $\Pr(o \mid z)$ oder
  - die Wahrscheinlichkeits*dichte* $f(o \mid z)$,

  dass o bei Zustand z beobachtet wird
- für jedes Paar von Zuständen $z_1, z_2 \in Z$ die Wahrscheinlichkeit

  $\Pr(z_2 \mid \text{was } z_1 \text{ before})$,

  also die Wahrscheinlichkeit für z_2 bei Kenntnis, dass zuvor z_1 vorherrschte (*Übergangswahrscheinlichkeit*)
- für jeden Zustand $z \in Z$ die (a-priori-)Wahrscheinlichkeit $\Pr(z)$

Hidden Markov Model

Gesucht:
Folge $S = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ von Zuständen, die sich am besten mit gegebenen Beobachtungen erklären lässt, also $\Pr(S \mid O)$ maximimiert.

$$\Pr(S \mid O) =$$

Hidden Markov Model

Gesucht:
Folge $S = \langle z_1, \dots, z_n \rangle$ von Zuständen, die sich am besten mit gegebenen Beobachtungen erklären lässt, also $\Pr(S \mid O)$ maximimiert.

$$\Pr(S \mid O) = f(O \mid S) \cdot \Pr(S) / f(O)$$

Hidden Markov Model

Gesucht:
Folge $S = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ von Zuständen, die sich am besten mit gegebenen Beobachtungen erklären lässt, also $\Pr(S \mid O)$ maximimiert.

$$\Pr(S \mid O) = f(O \mid S) \cdot \Pr(S) / f(O)$$

$$f(O \mid S) = f(o_1 \mid z_1) \cdot \ldots \cdot f(o_n \mid z_n)$$

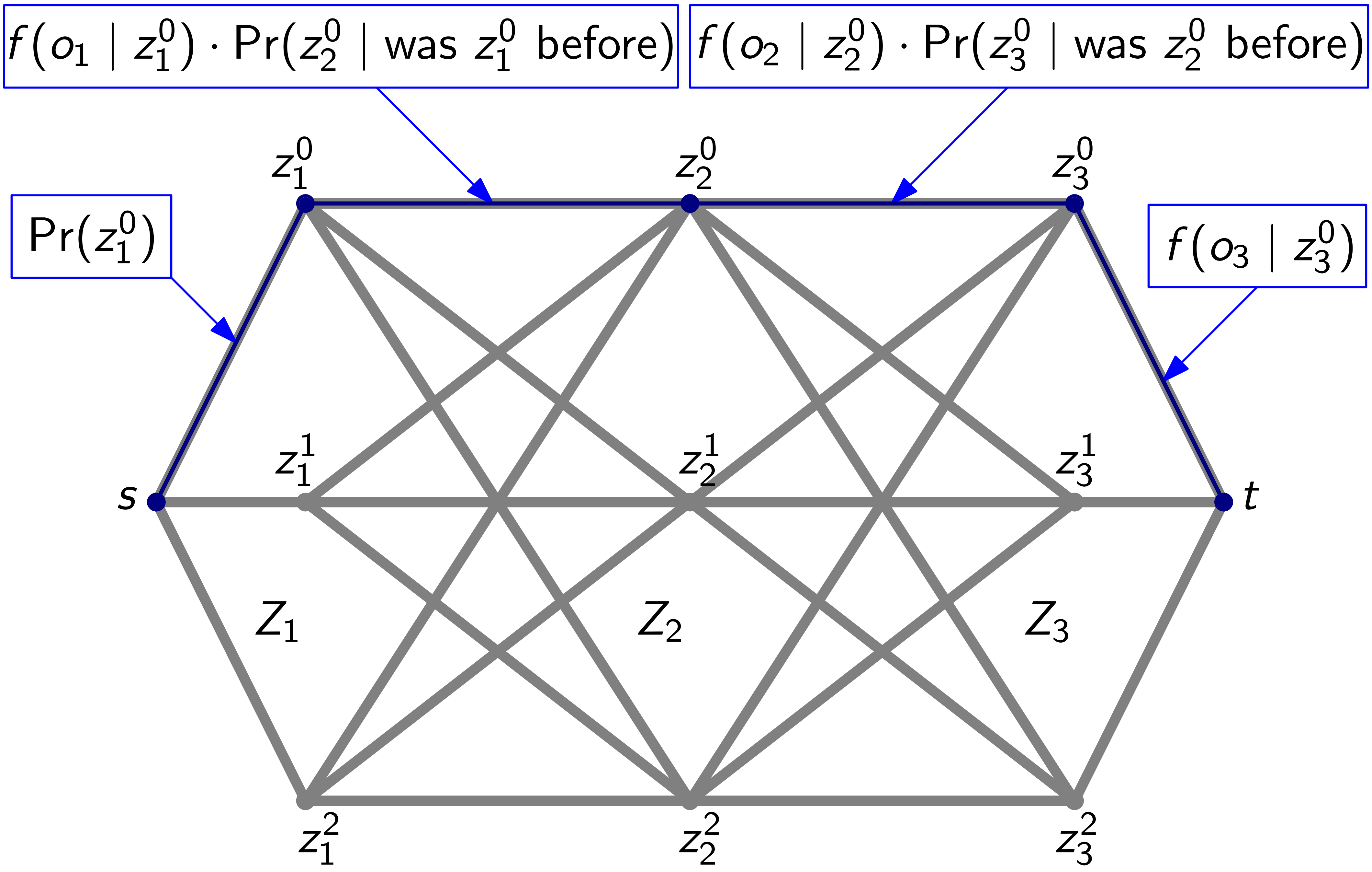
Hidden Markov Model

Gesucht:
Folge $S = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ von Zuständen, die sich am besten mit gegebenen Beobachtungen erklären lässt, also $\Pr(S \mid O)$ maximimiert.

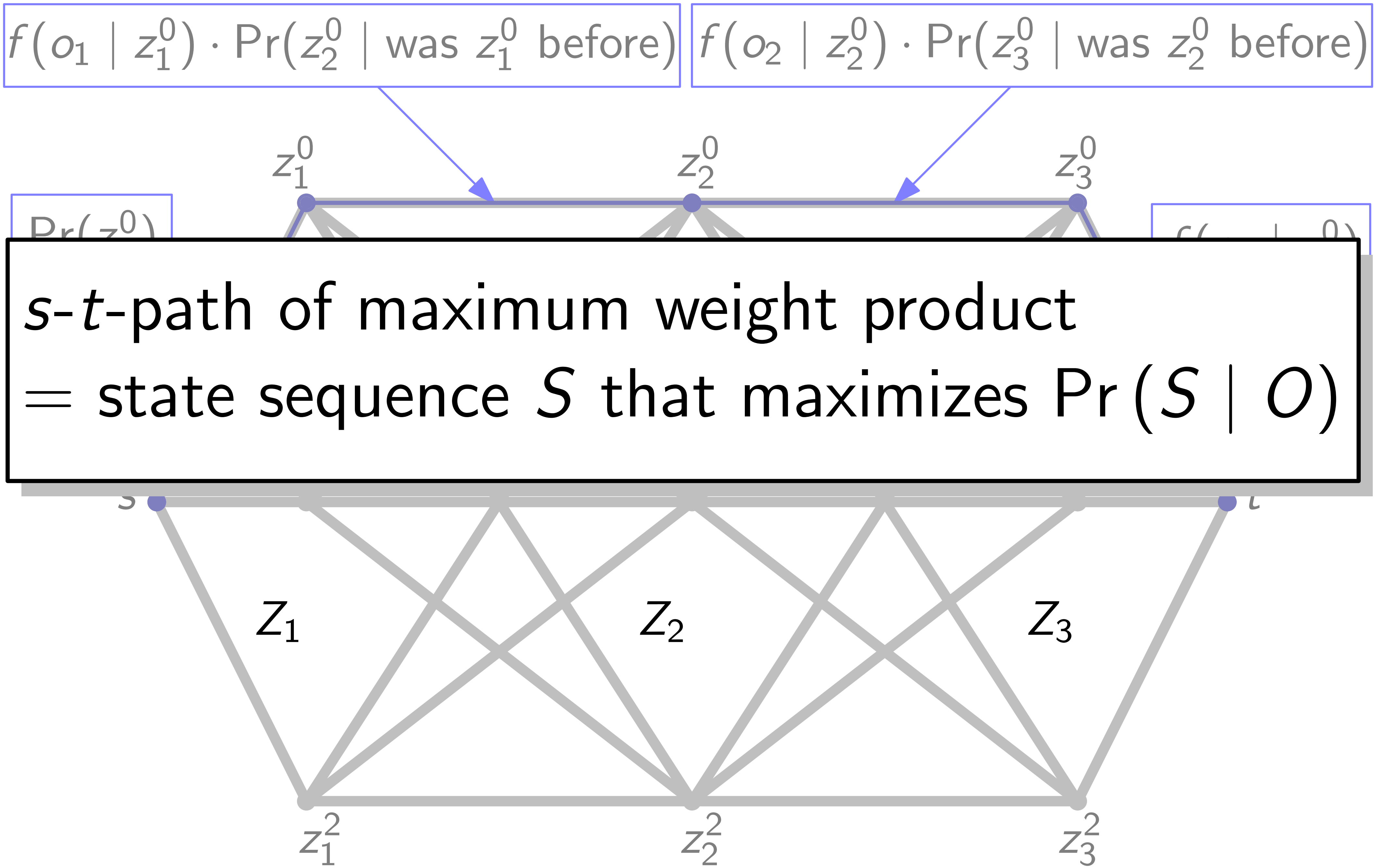
$$\Pr(S \mid O) = f(O \mid S) \cdot \Pr(S) / f(O)$$

$$\Pr(S) = \Pr(z_1) \cdot \Pr(z_2 \mid \text{was } z_1 \text{ before}) \cdot \ldots \cdot \Pr(z_n \mid \text{was } z_{n-1} \text{ before})$$

Hidden Markov Model



Hidden Markov Model



s-t-path of maximum weight product
$=$ state sequence S that maximizes $\Pr(S \mid O)$

Hidden Markov Model – ein Beispiel

Gegeben:

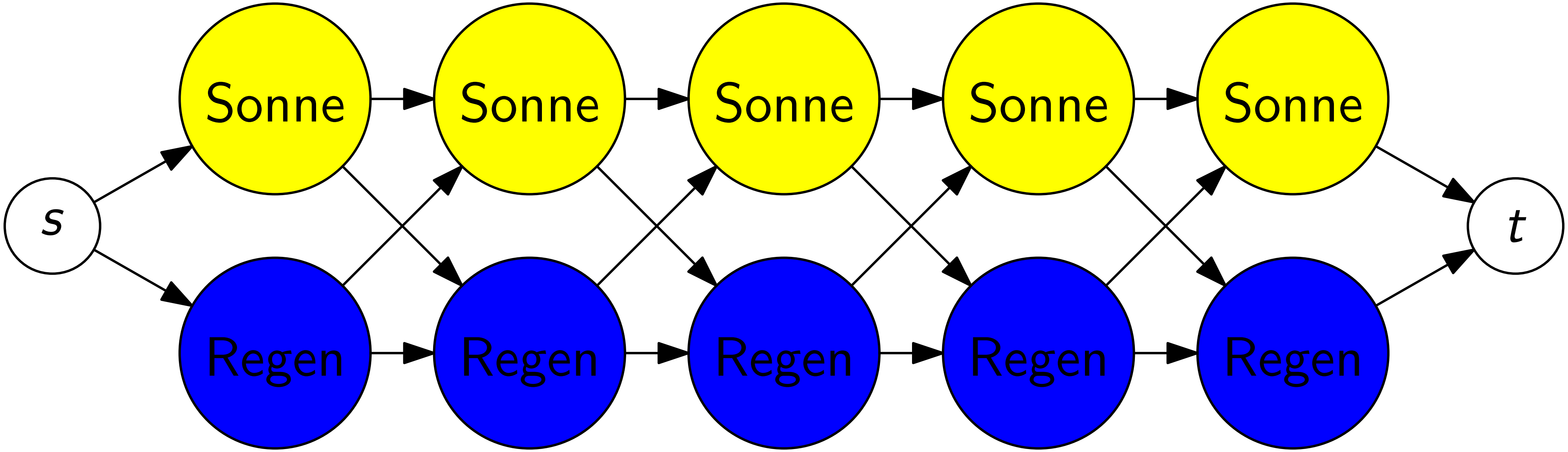
- Folge von Beobachtungen
  $O = \langle o_1, \dots, o_n \rangle = \langle \text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken} \rangle$
- Menge möglicher Systemzustände: $Z = \{\text{Sonne}, \text{Regen}\}$
- Beobachtungswahrscheinlichkeiten:

  $\Pr(\text{nass} \mid \text{Sonne}) = 0.1$
  $\Pr(\text{trocken} \mid \text{Sonne}) = 0.9$
  $\Pr(\text{nass} \mid \text{Regen}) = 0.95$
  $\Pr(\text{trocken} \mid \text{Regen}) = 0.05$
- Übergangswahrscheinlichkeiten:

  $\Pr(\text{Regen} \mid \text{zuvor Regen}) = 0.7$
  $\Pr(\text{Sonne} \mid \text{zuvor Regen}) = 0.3$
  $\Pr(\text{Regen} \mid \text{zuvor Sonne}) = 0.2$
  $\Pr(\text{Sonne} \mid \text{zuvor Sonne}) = 0.8$
- A-Priori-Wahrscheinlichkeiten: $\Pr(\text{Regen}) = 0.3$, $\Pr(\text{Sonne}) = 0.7$

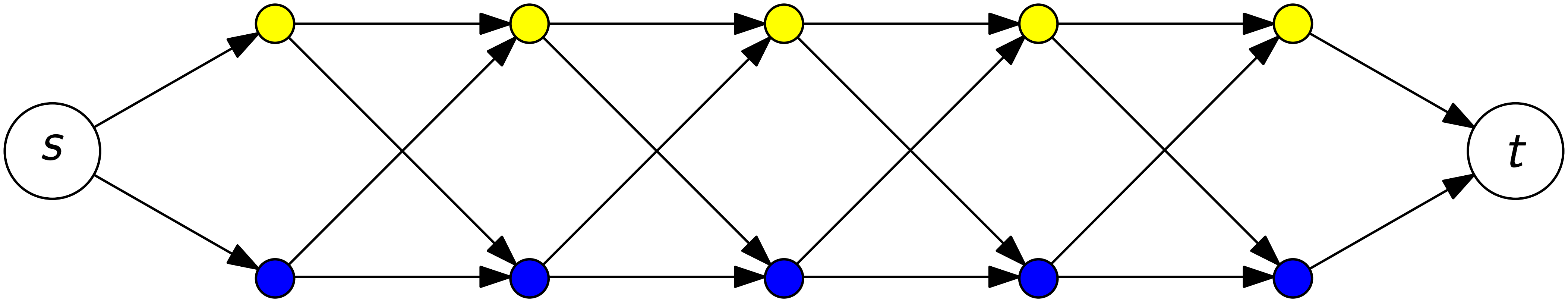
Gesucht: Folge $S = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ von Zuständen, so dass $\Pr(S \mid O)$ maximal ist.

Hidden Markov Model – ein Beispiel



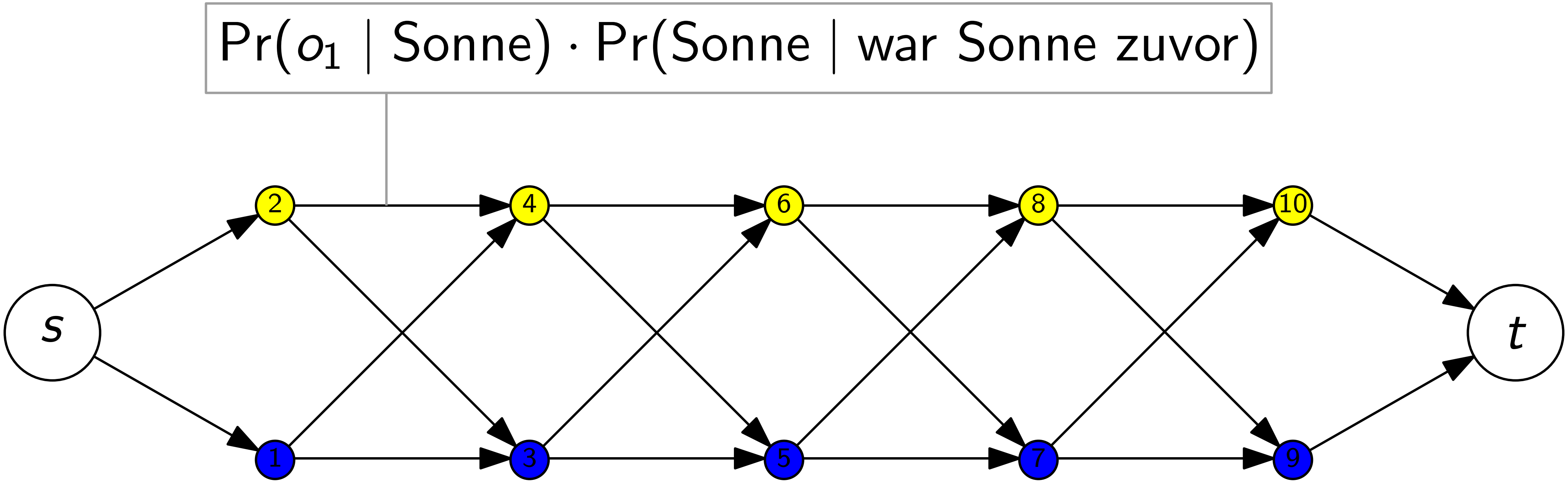
$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$

Hidden Markov Model – ein Beispiel



$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken} \rangle$$

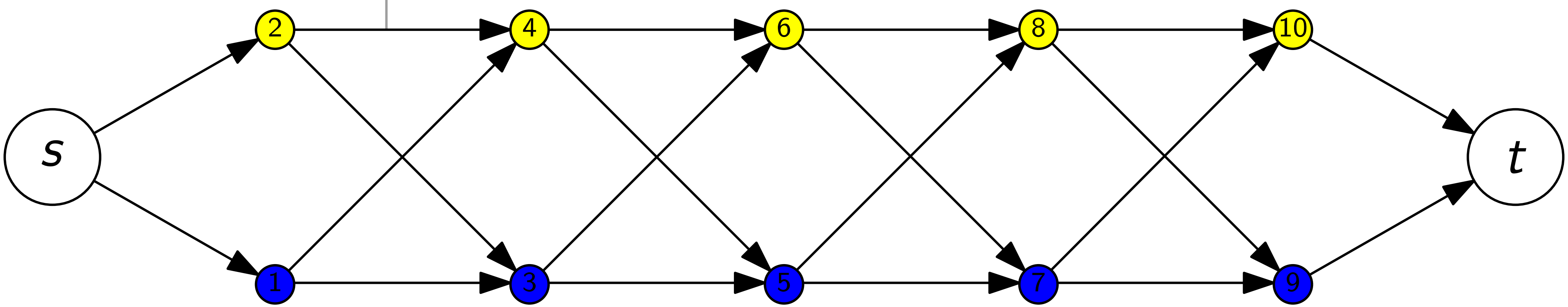
Hidden Markov Model – ein Beispiel



$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

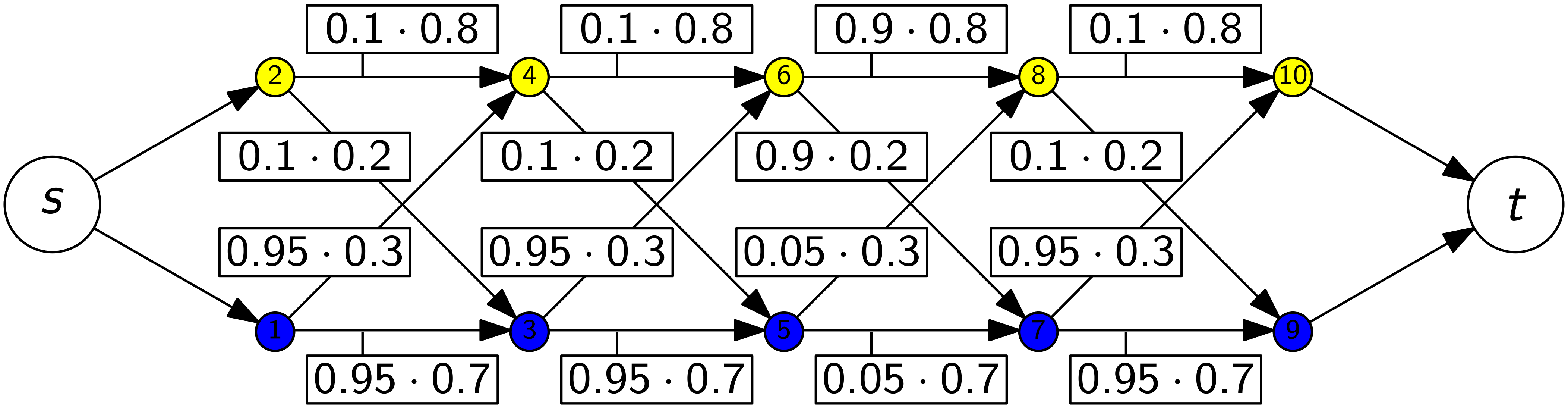
Hidden Markov Model – ein Beispiel

$\Pr(\text{nass} \mid \text{Sonne}) \cdot \Pr(\text{Sonne} \mid \text{war Sonne zuvor})$



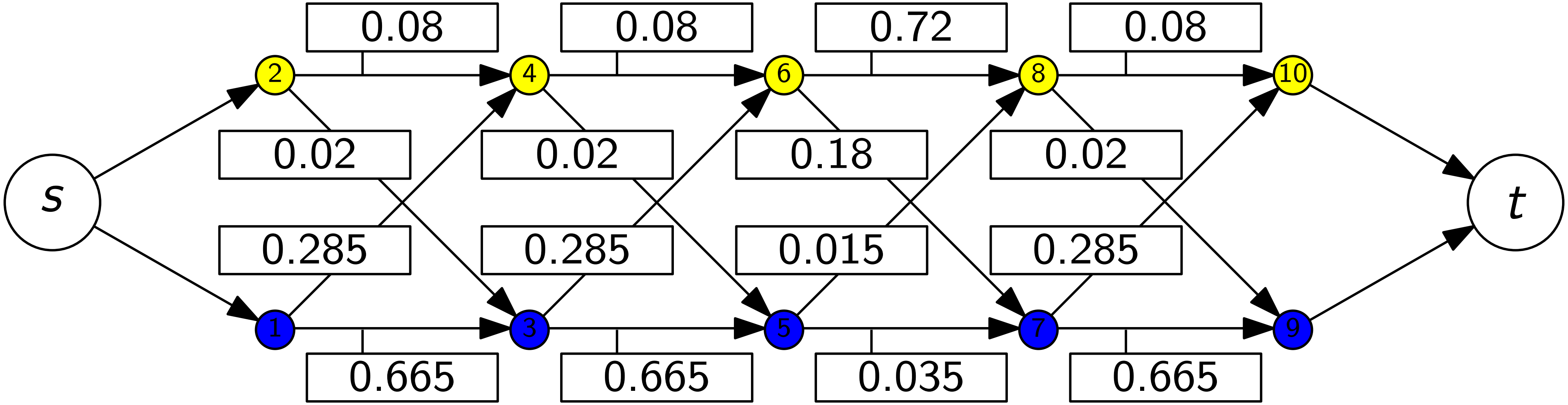
$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken} \rangle$$

Hidden Markov Model – ein Beispiel



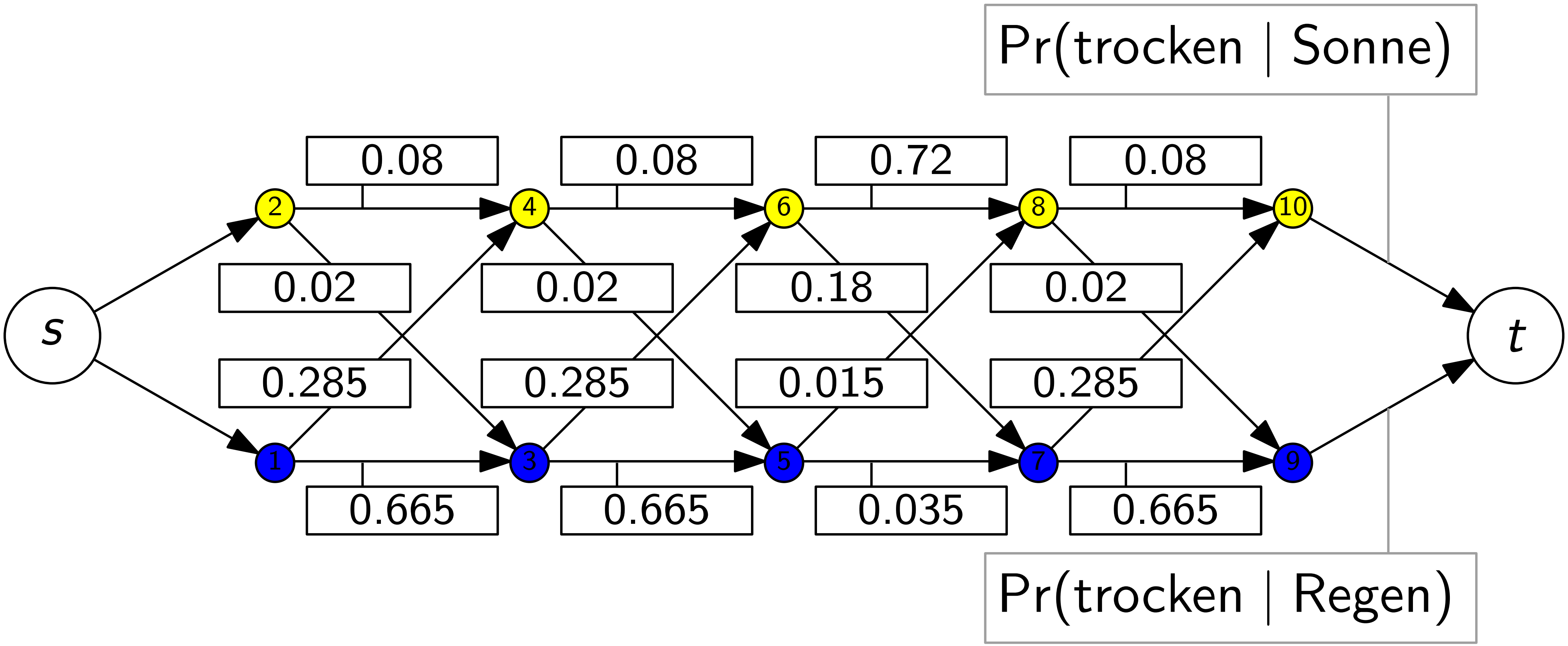
$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

Hidden Markov Model – ein Beispiel



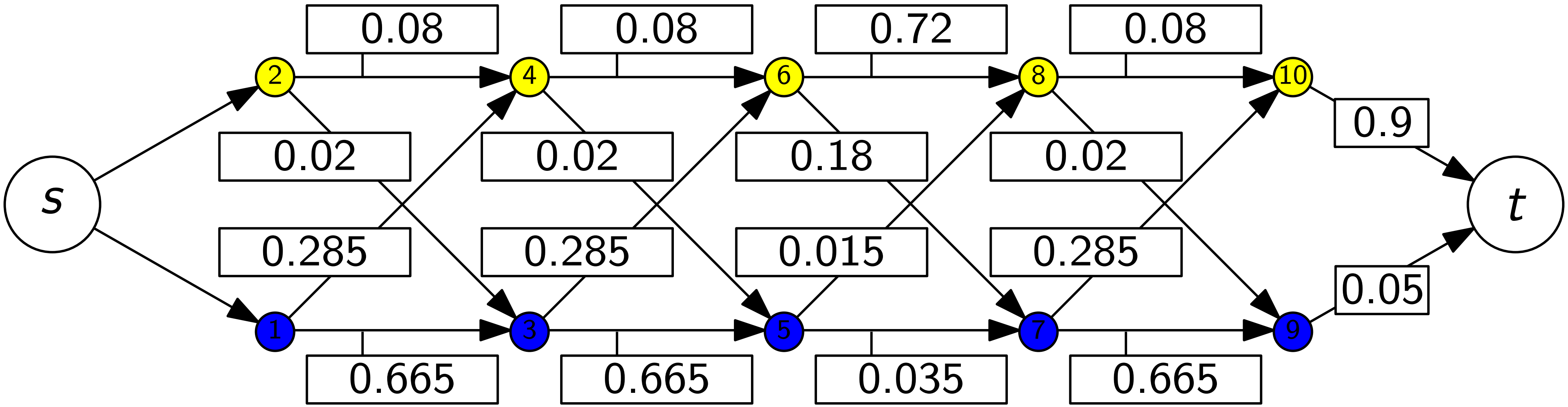
$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

Hidden Markov Model – ein Beispiel



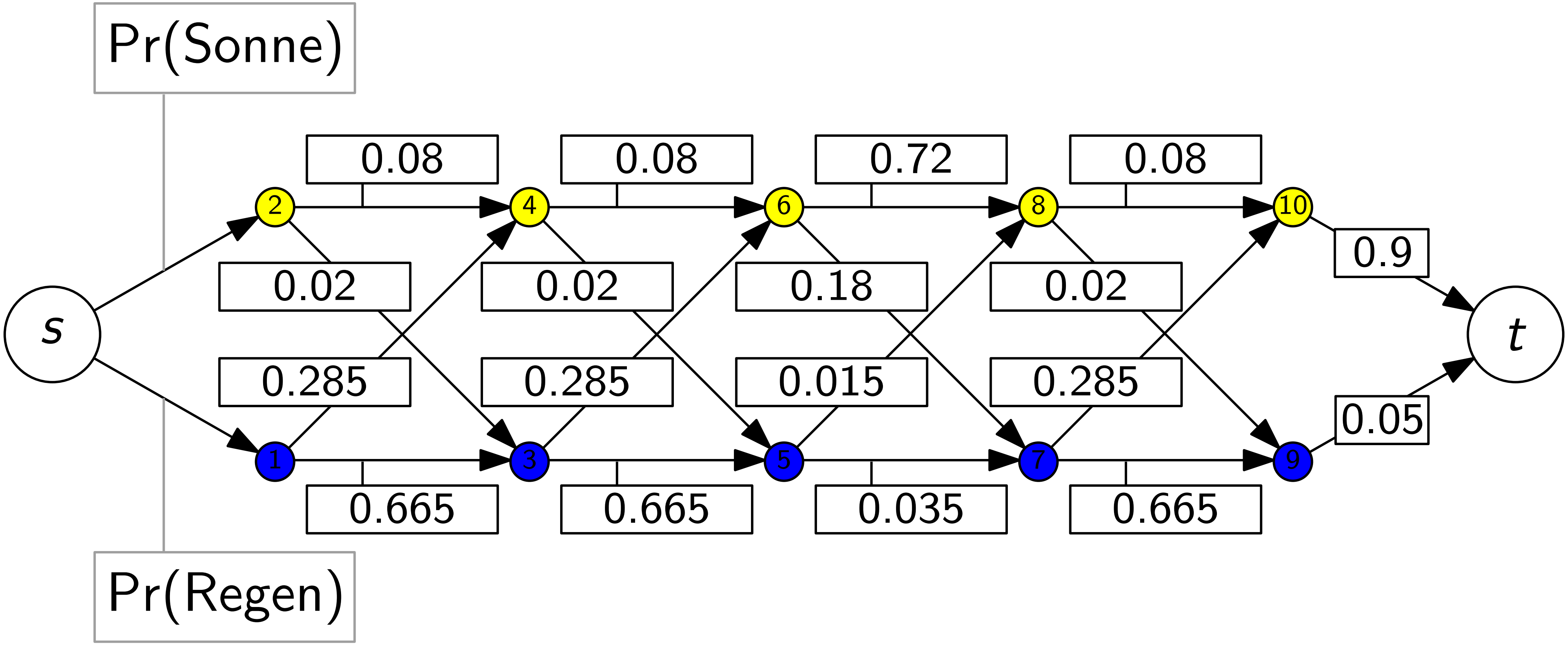
$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

Hidden Markov Model – ein Beispiel



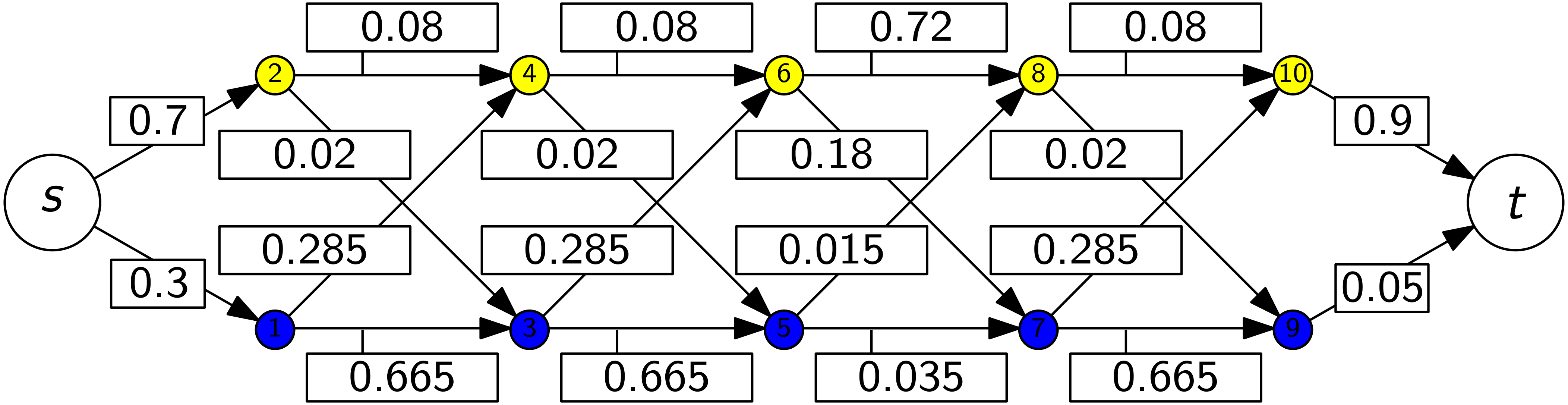
$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken} \rangle$$

Hidden Markov Model – ein Beispiel



$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

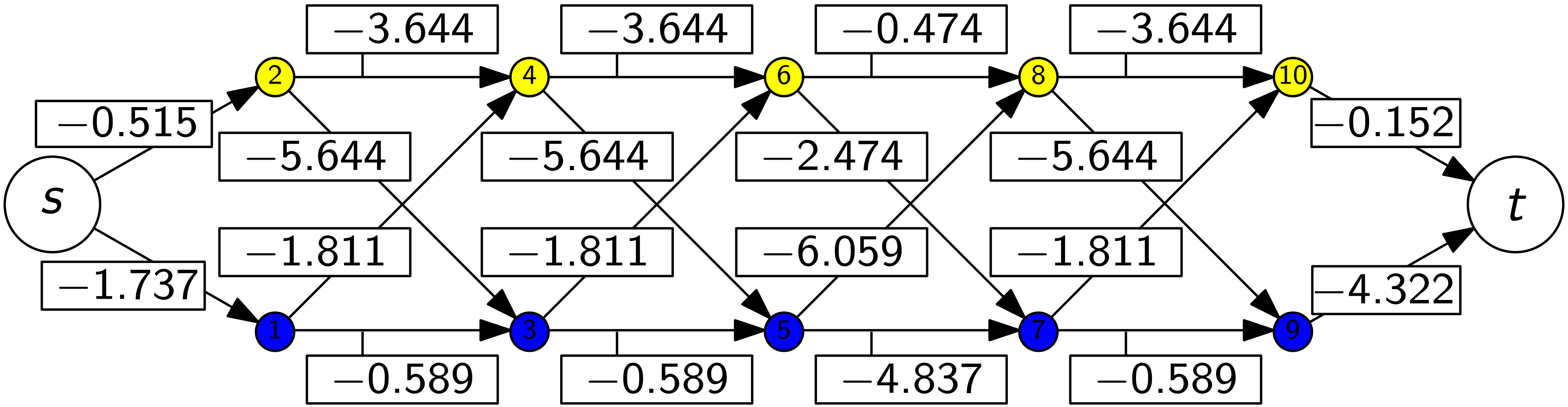
Hidden Markov Model – ein Beispiel



$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

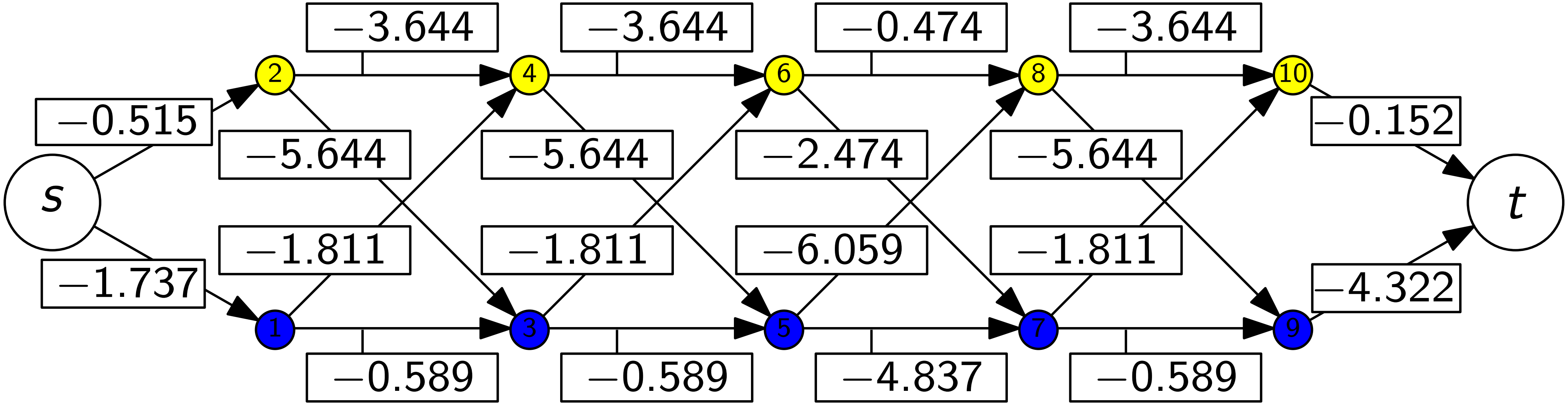
Hidden Markov Model – ein Beispiel

$\log_2$

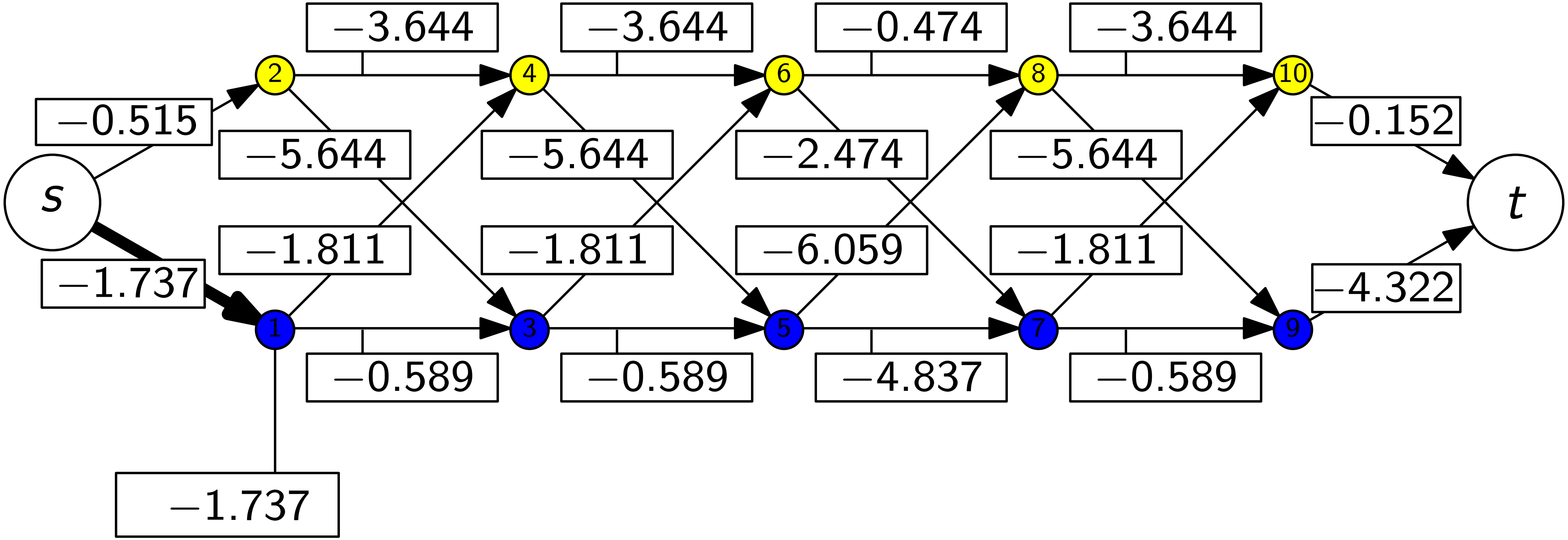


$$\langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$$

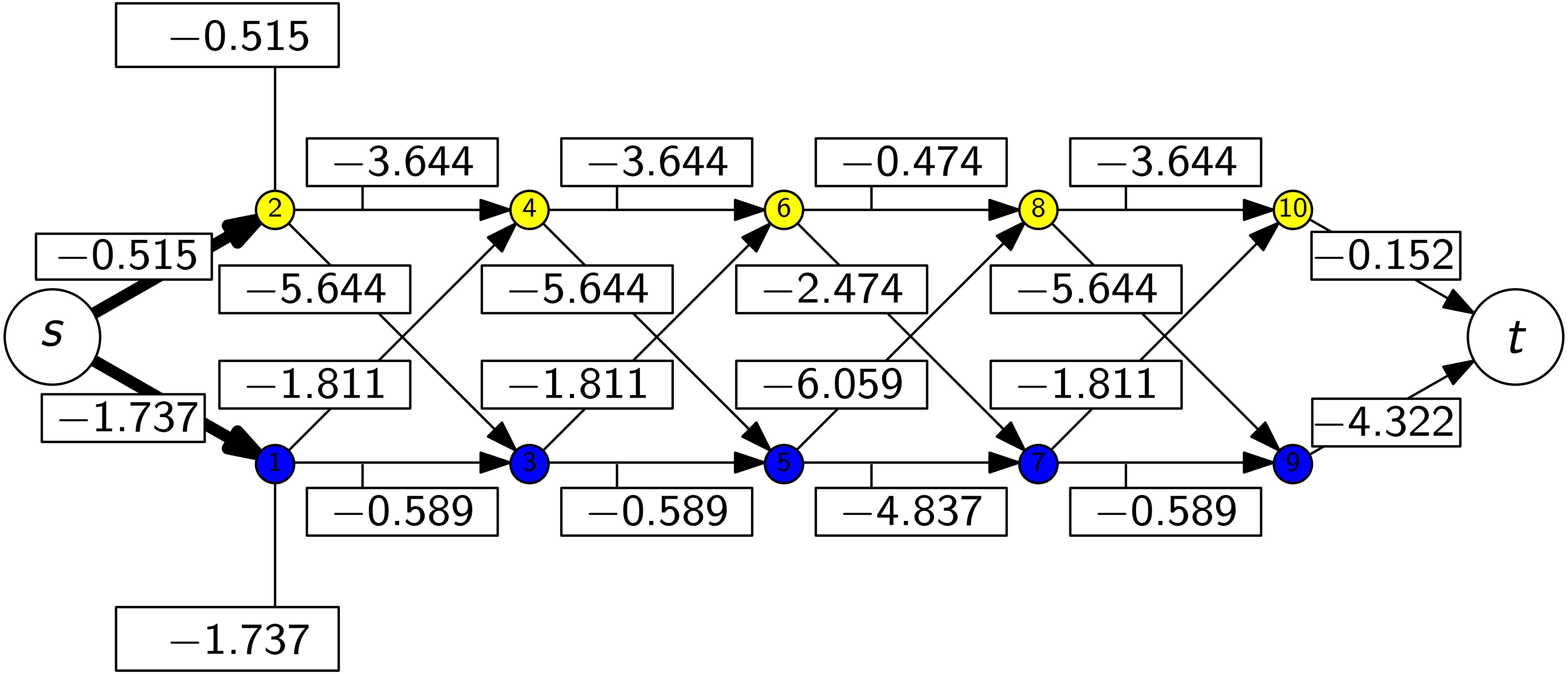
Hidden Markov Model – ein Beispiel



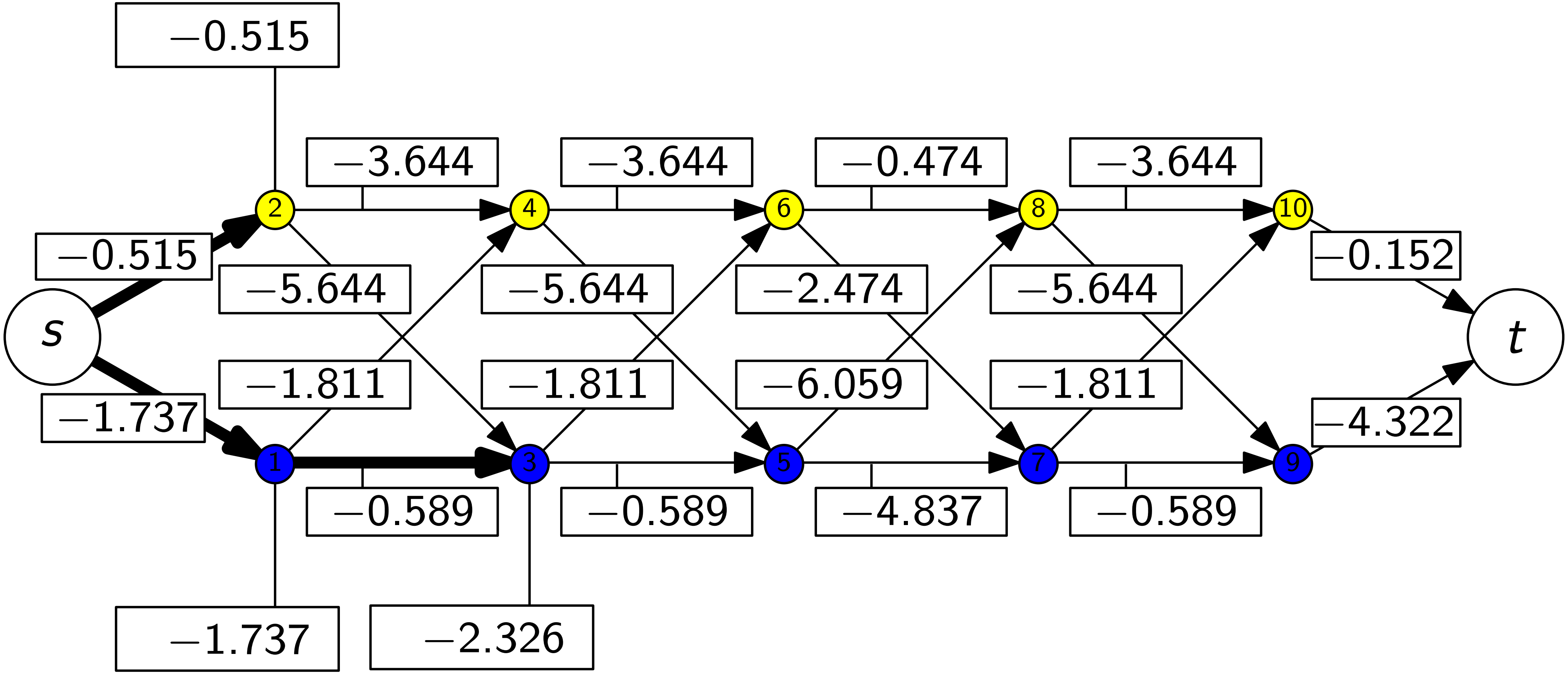
Hidden Markov Model – ein Beispiel



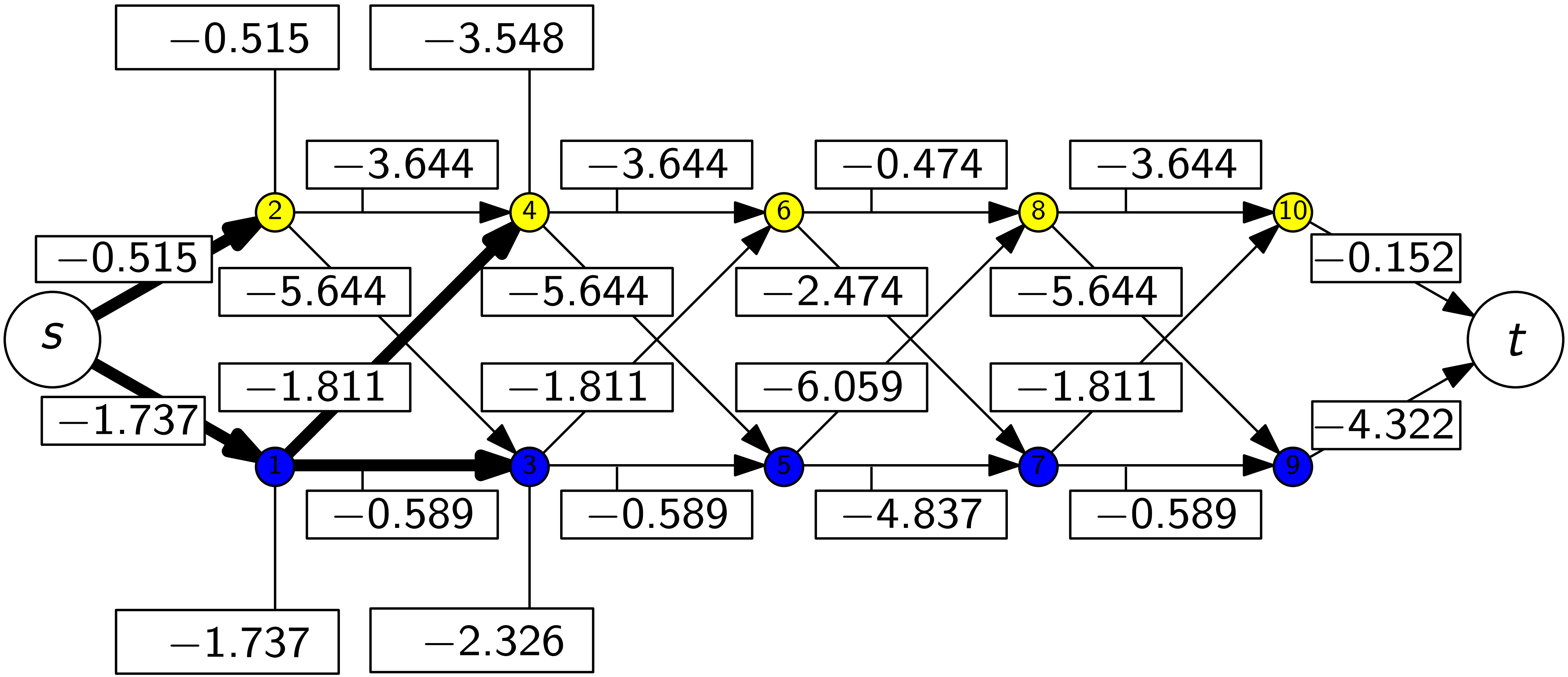
Hidden Markov Model – ein Beispiel



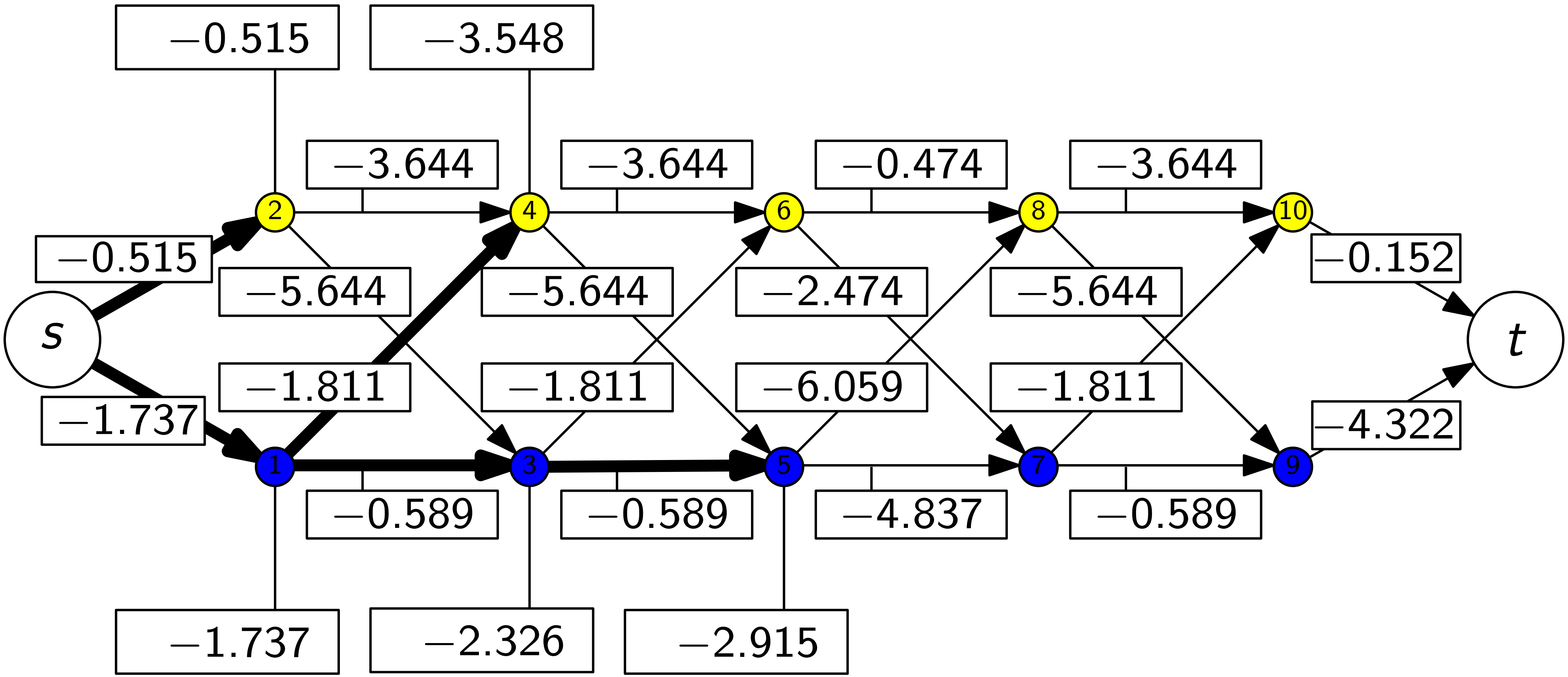
Hidden Markov Model – ein Beispiel



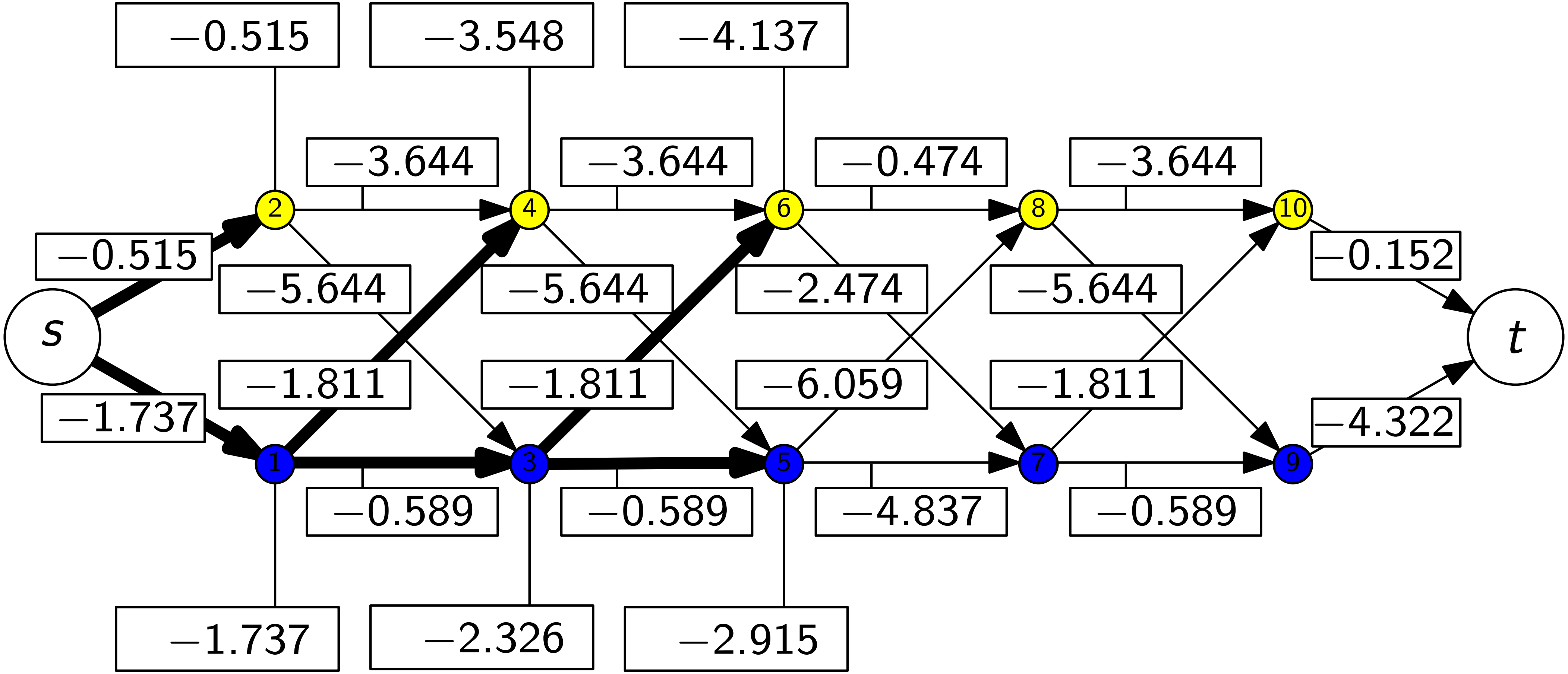
Hidden Markov Model – ein Beispiel



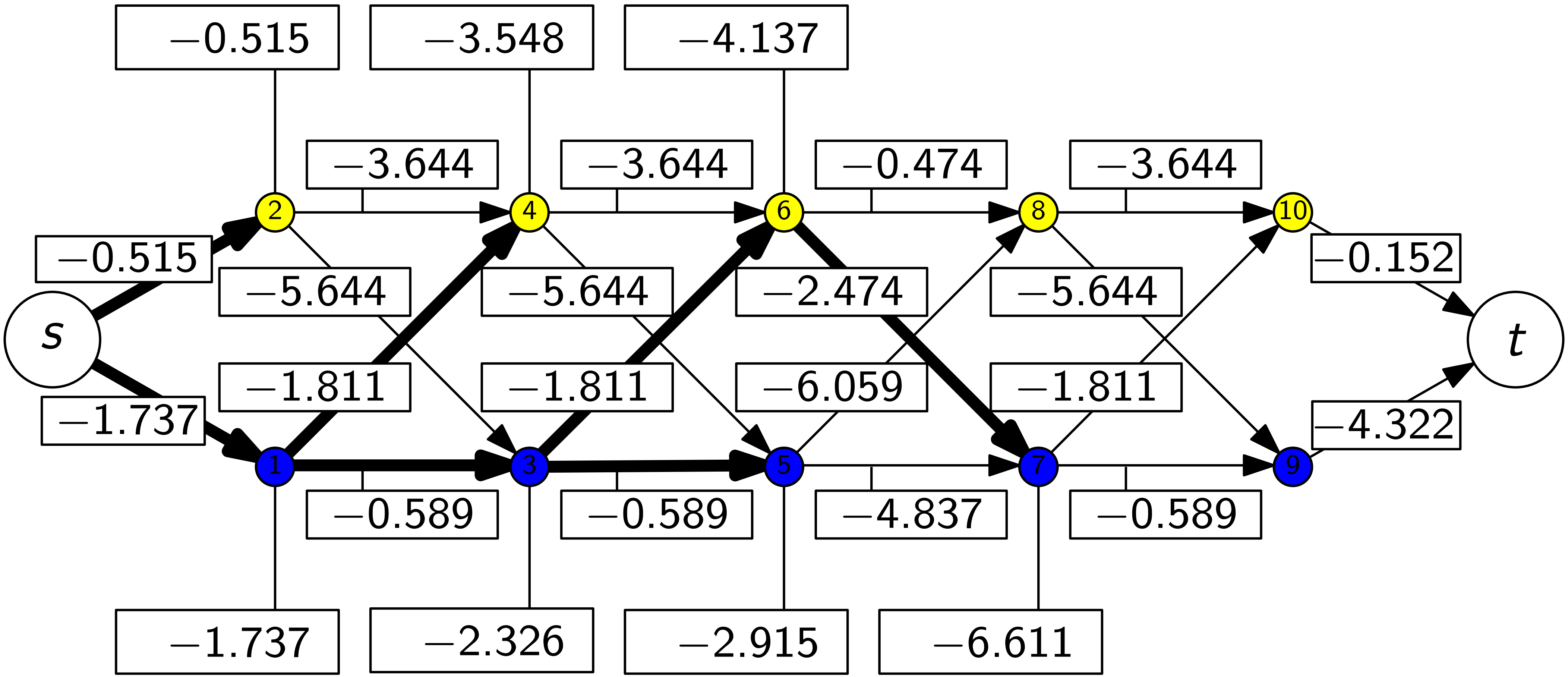
Hidden Markov Model – ein Beispiel



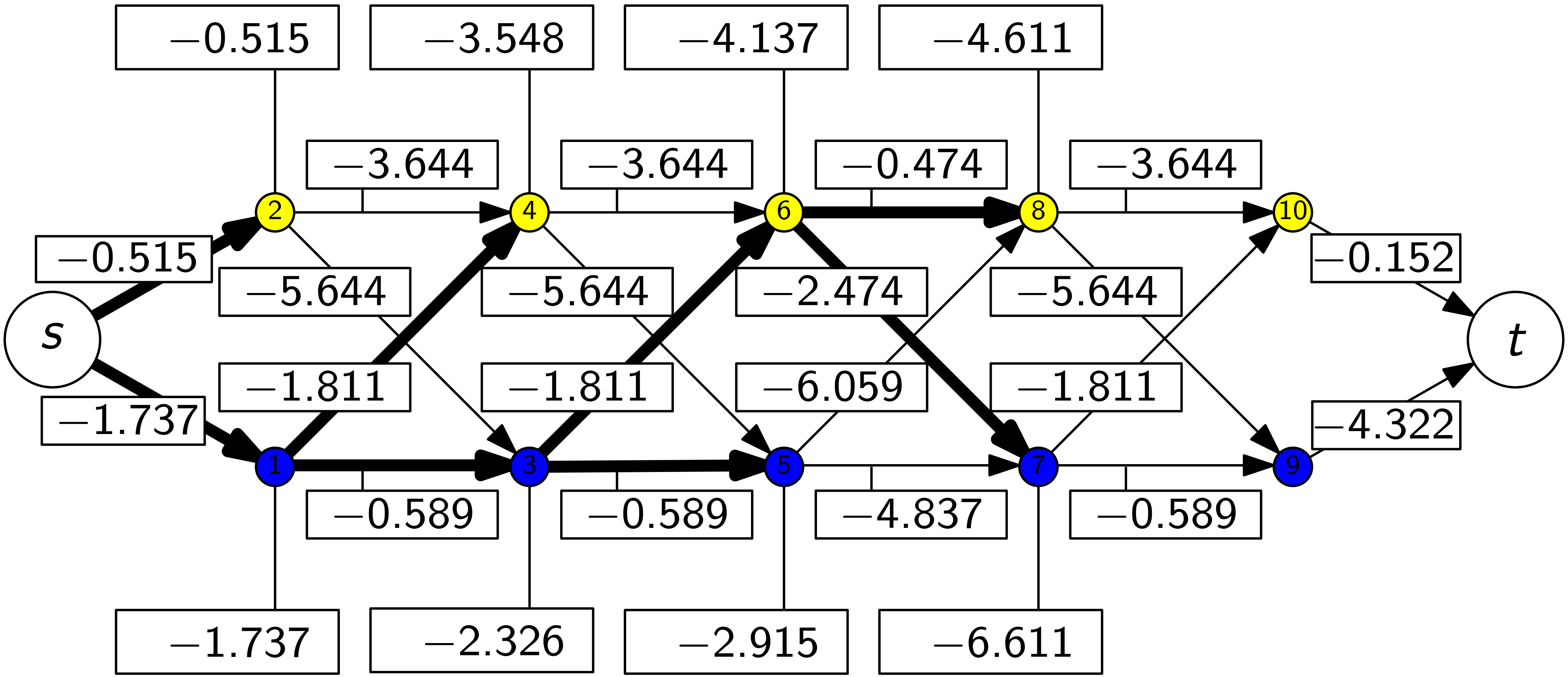
Hidden Markov Model – ein Beispiel



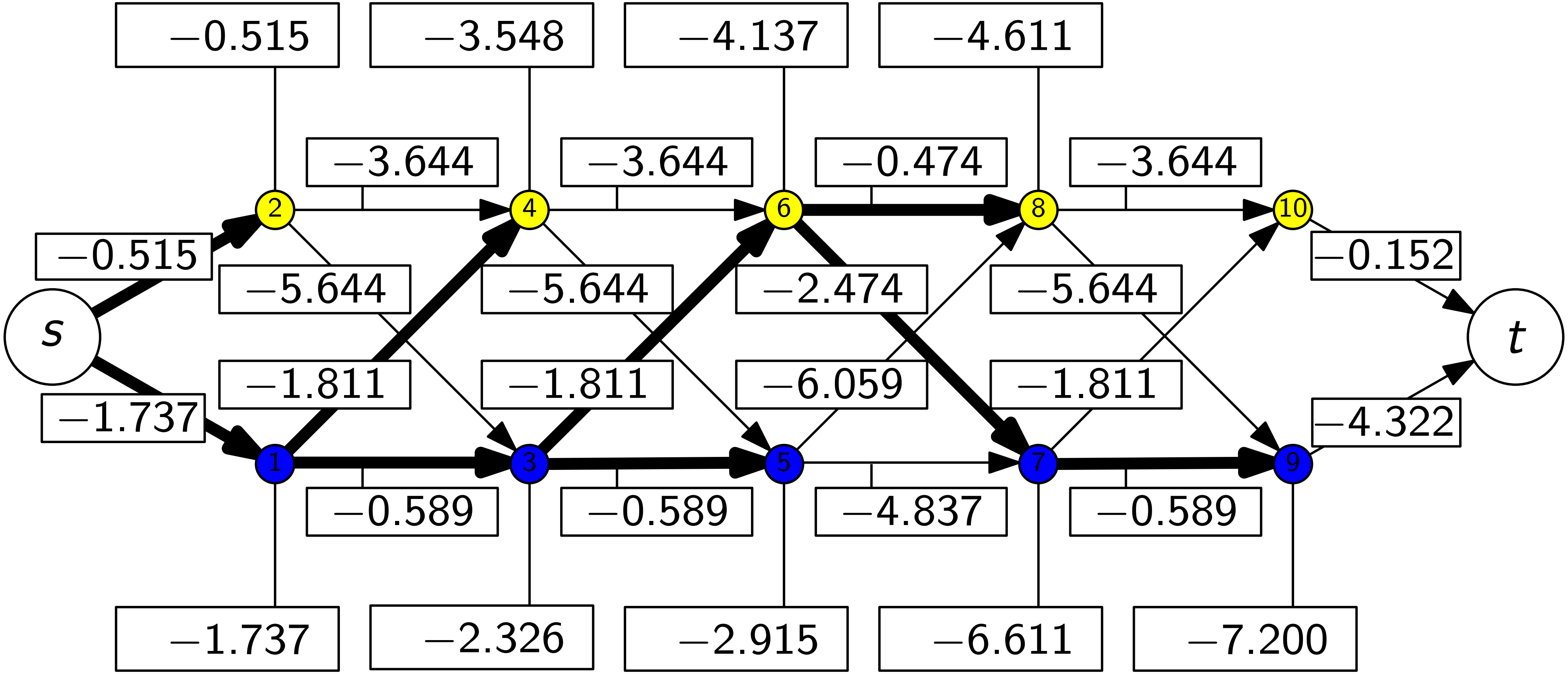
Hidden Markov Model – ein Beispiel



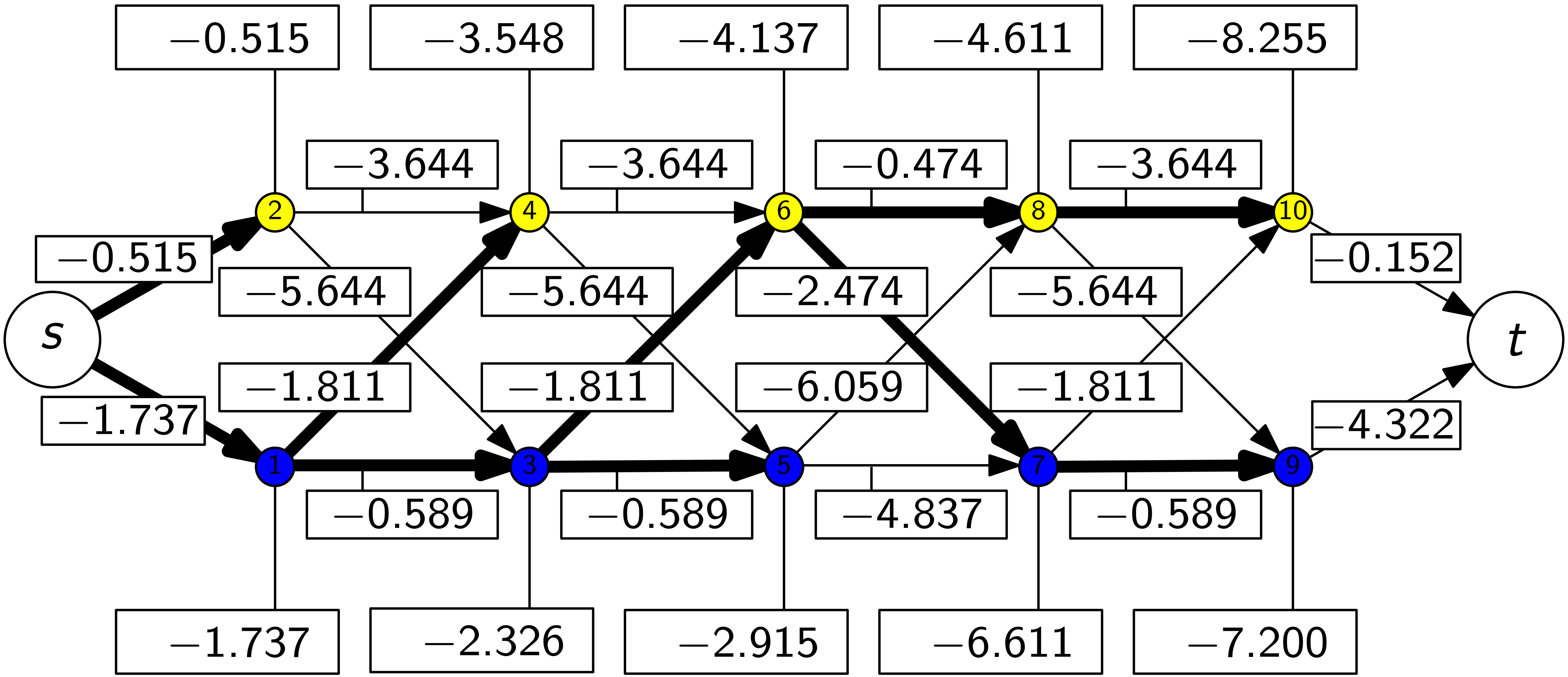
Hidden Markov Model – ein Beispiel



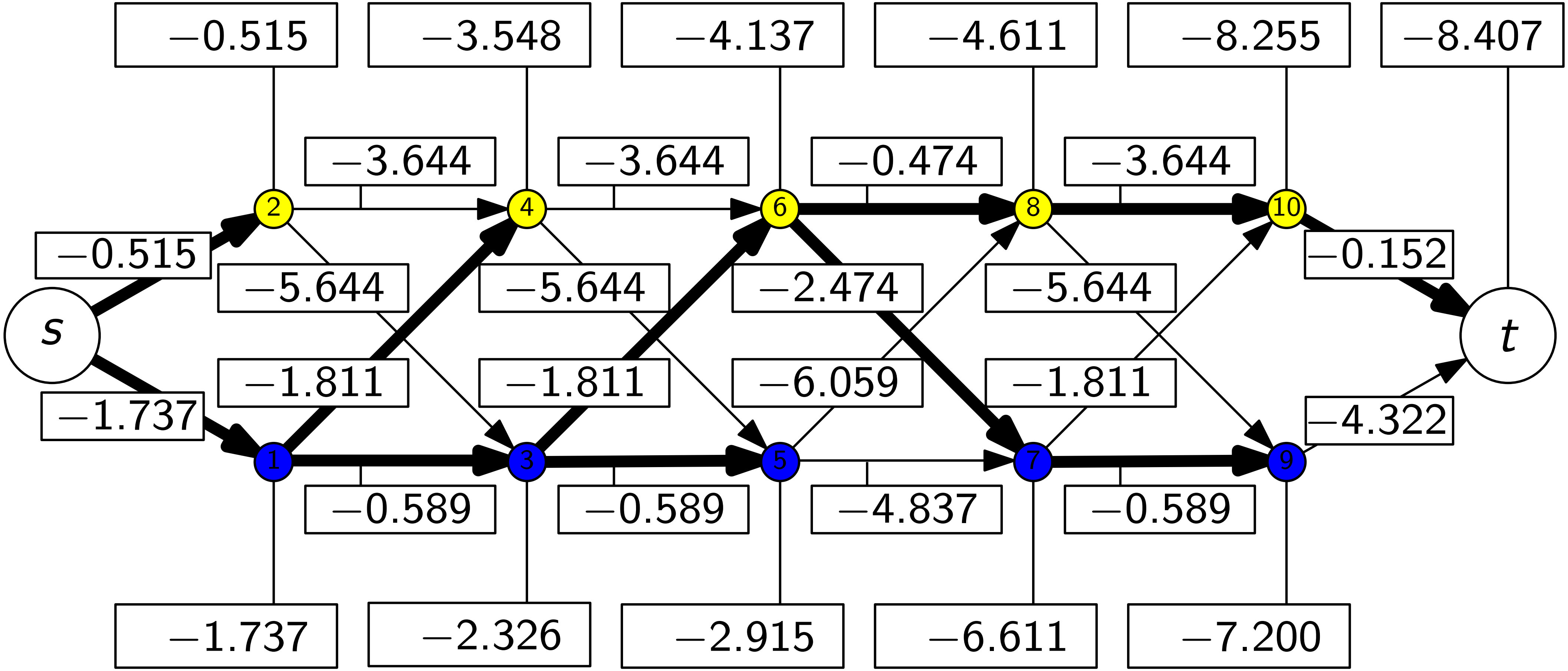
Hidden Markov Model – ein Beispiel



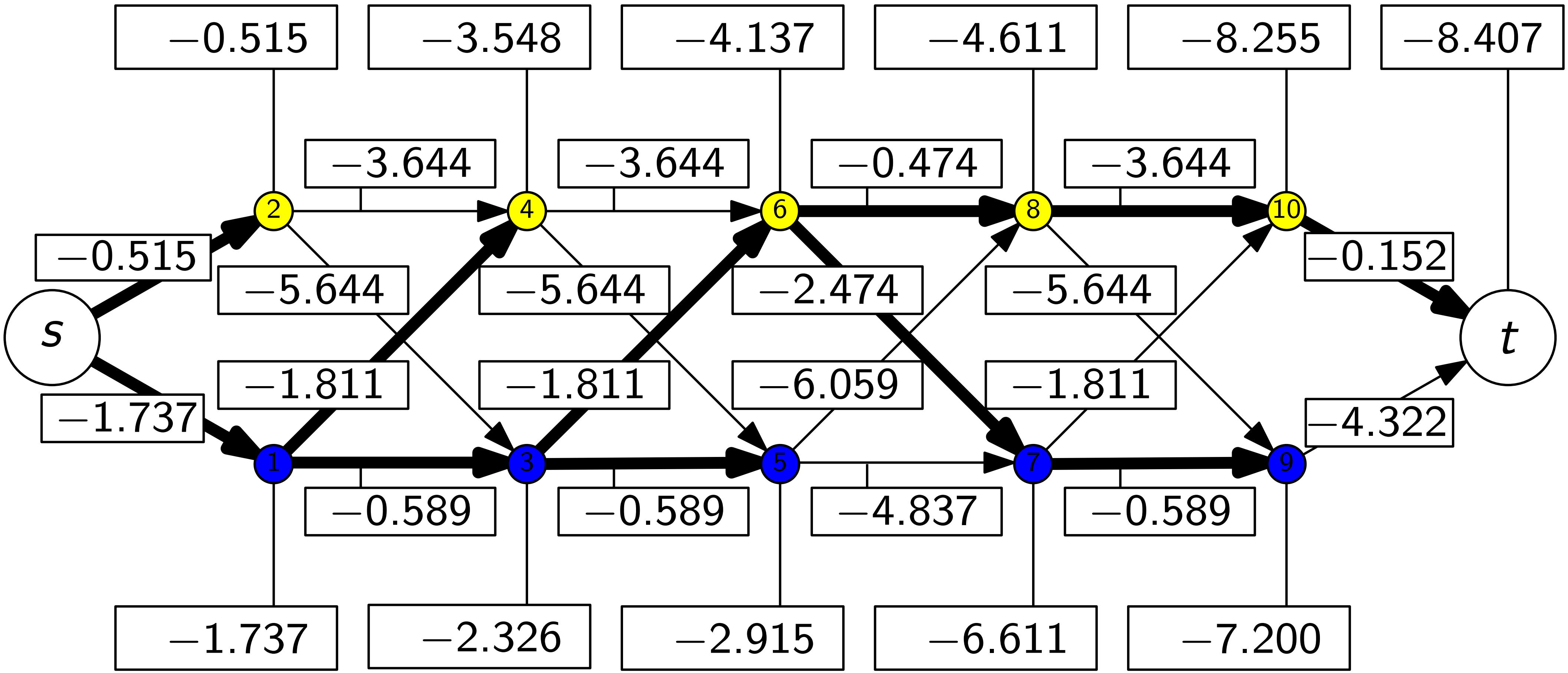
Hidden Markov Model – ein Beispiel



Hidden Markov Model – ein Beispiel



Hidden Markov Model – ein Beispiel



$O = \langle o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 \rangle = \langle \text{nass, nass, trocken, nass, trocken} \rangle$

$\boxed{S = \langle \text{Regen, Regen, Sonne, Sonne, Sonne} \rangle}$

Algorithmus

LongestPath(directed acyclic graph $G = (V, A)$)

  Bring V in topologische Ordnung $\to v_1, \ldots, v_n$
  $v_1.d = 0$
  $v_1.\pi = nil$
  for $j = 2$ **to** n **do**
    $v_j.d = -\infty$
    $v_j.\pi = nil$
    for $v_i v_j \in A$ **do**
      if $v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d$ **then**
        $v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)$
        $v_j.\pi = v_i$

$u.d$: Länge des längsten Wegs von v_1 nach u
$u.\pi$: Vorgänger von u im längsten Weg von v_1 nach u
$w(uv)$: Gewicht von Kante uv

Algorithmus

LongestPath(directed acyclic graph $G = (V, A)$)

Bring V in topologische Ordnung $\rightarrow v_1, \ldots, v_n$

$v_1.d = 0$

$v_1.\pi = nil$

for $j = 2$ **to** n **do**

  $v_j.d = -\infty$

  $v_j.\pi = nil$

  for $v_i v_j \in A$ **do**

    if $v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d$ **then**

      $v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)$

      $v_j.\pi = v_i$

$u.d$: Länge des längsten Wegs von v_1 nach u

$u.\pi$: Vorgänger von u im längsten Weg von v_1 nach u

$w(uv)$: Gewicht von Kante uv

Laufzeit: $O(|V| + |A|)$

Algorithmus

LongestPath(directed acyclic graph $G = (V, A)$)

```
Bring V in topologische Ordnung → v_1, ..., v_n
v_1.d = 0
v_1.π = nil
for j = 2 to n do
    v_j.d = −∞
    v_j.π = nil
    for v_i v_j ∈ A do
        if v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d then
            v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)
            v_j.π = v_i
```

$u.d$: Länge des längsten Wegs von v_1 nach u

$u.\pi$: Vorgänger von u im längsten Weg von v_1 nach u

$w(uv)$: Gewicht von Kante uv

Laufzeit: $O(|V| + |A|)$ Laufzeit Dijkstra: $O(|V| \log |V| + |A|)$