

Wie bilde ich die Erde auf die Ebene ab?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(\varphi, \lambda)$$



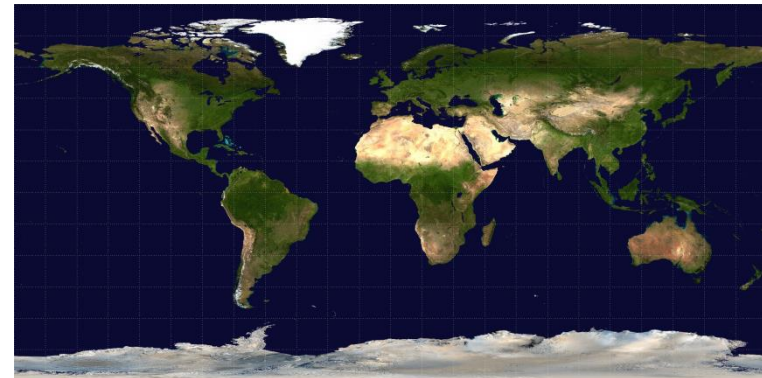
Gesucht!



Einfachste Abbildung: **Plattkarte**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} R\lambda \\ R\varphi \end{pmatrix}$$

Quelle: wikipedia



Nachteil:

- Breitenkreise werden extrem gestreckt
- Proportionen (auch lokal!) gehen verloren

Wie bilde ich die Erde auf die Ebene ab?



Quelle: autobild.de

**Es gibt keine Abbildung,
die alle Distanzen unverzerrt abbildet!**

Wie bilde ich die Erde auf die Ebene ab?

Mögliche Eigenschaften:

- Flächentreue
- Winkeltreue (Konformität)
- Längentreue für bestimmte Linien
- ...

Aufgabe: Finde eine Abbildung f ,
die bestimmte Vorgaben erfüllt.

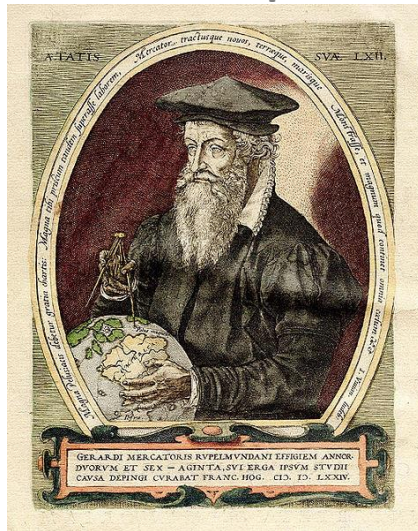
Wie bilde ich die Erde auf die Ebene ab?

Beispiel: Mercatorprojektion (für Kugel)

Vorteil: Konformität (Winkeltreue)

Nachteil: Flächenverzerrungen

Quelle: wikipedia



Gerhard Krämer (1512-1594)

Quelle: wikipedia



Wie bilde ich die Erde auf die Ebene ab?

Beispiel: Mercatorprojektion

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\frac{N}{1 + e'^2} + h \right) \sin \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

für Kugel

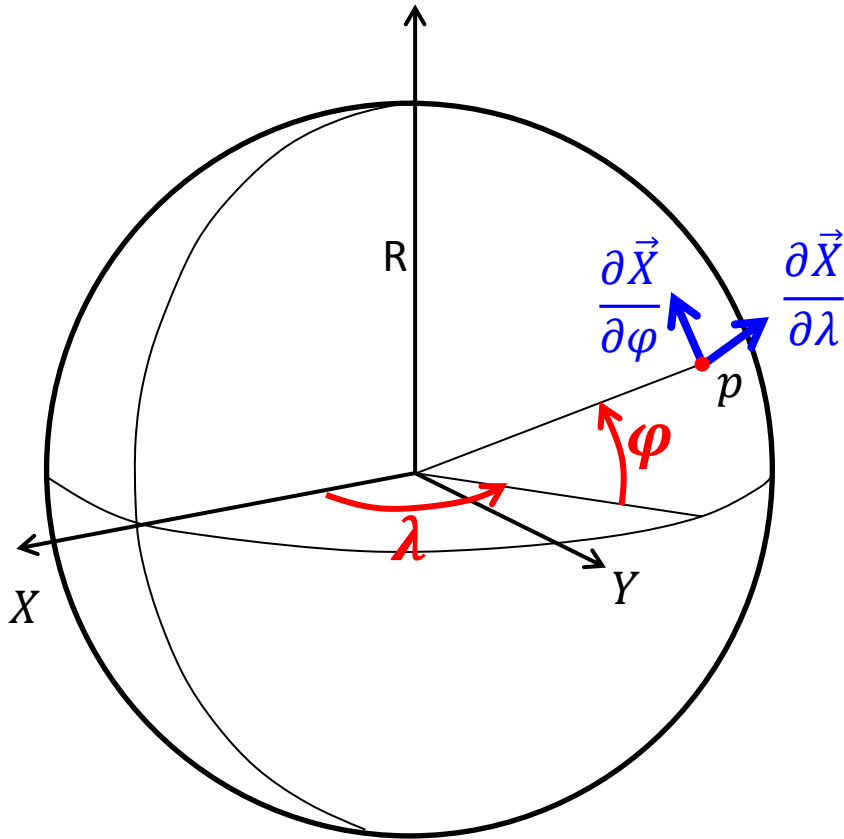
$$(a = b = R \text{ und } h = 0)$$

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

Wie bilde ich die Erde auf die Ebene ab?

Beispiel: Mercatorprojektion



$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

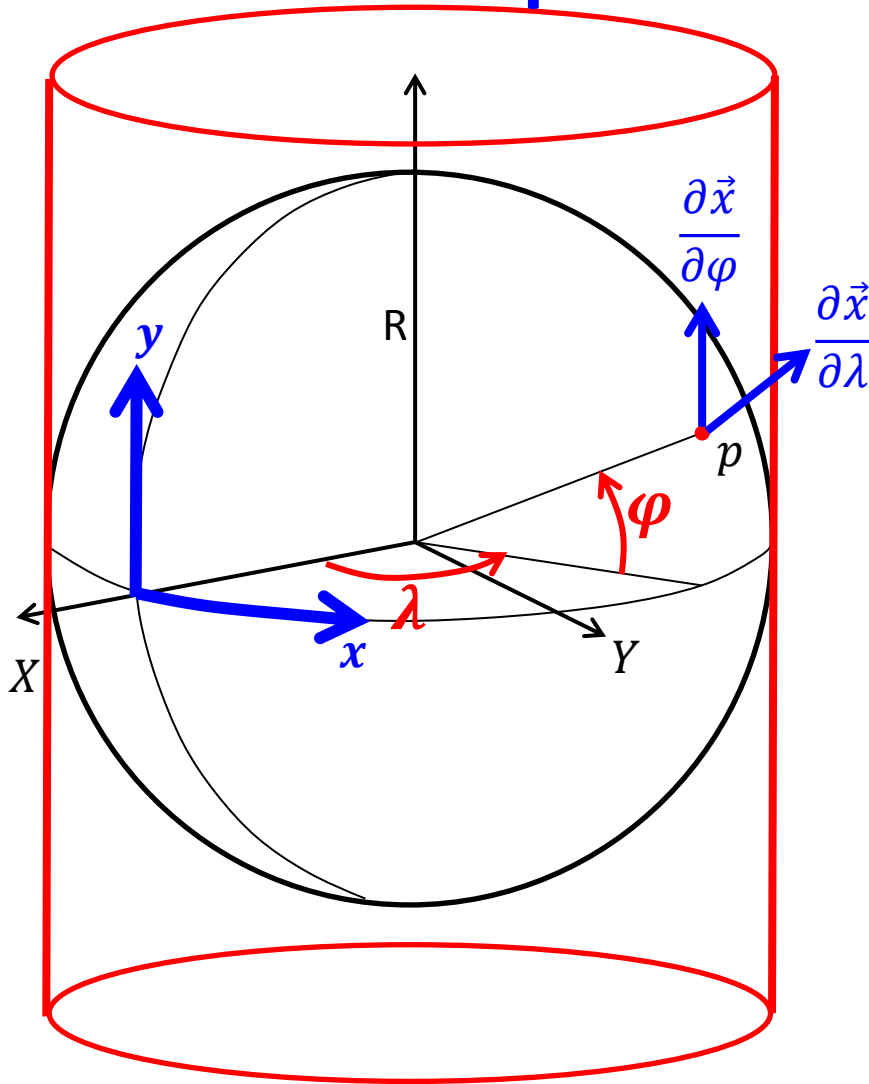
Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wie bilde ich die Erde auf die Ebene ab?

Beispiel: Mercatorprojektion



Zylinderabbildung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\lambda \\ f(\varphi) \end{pmatrix}$$

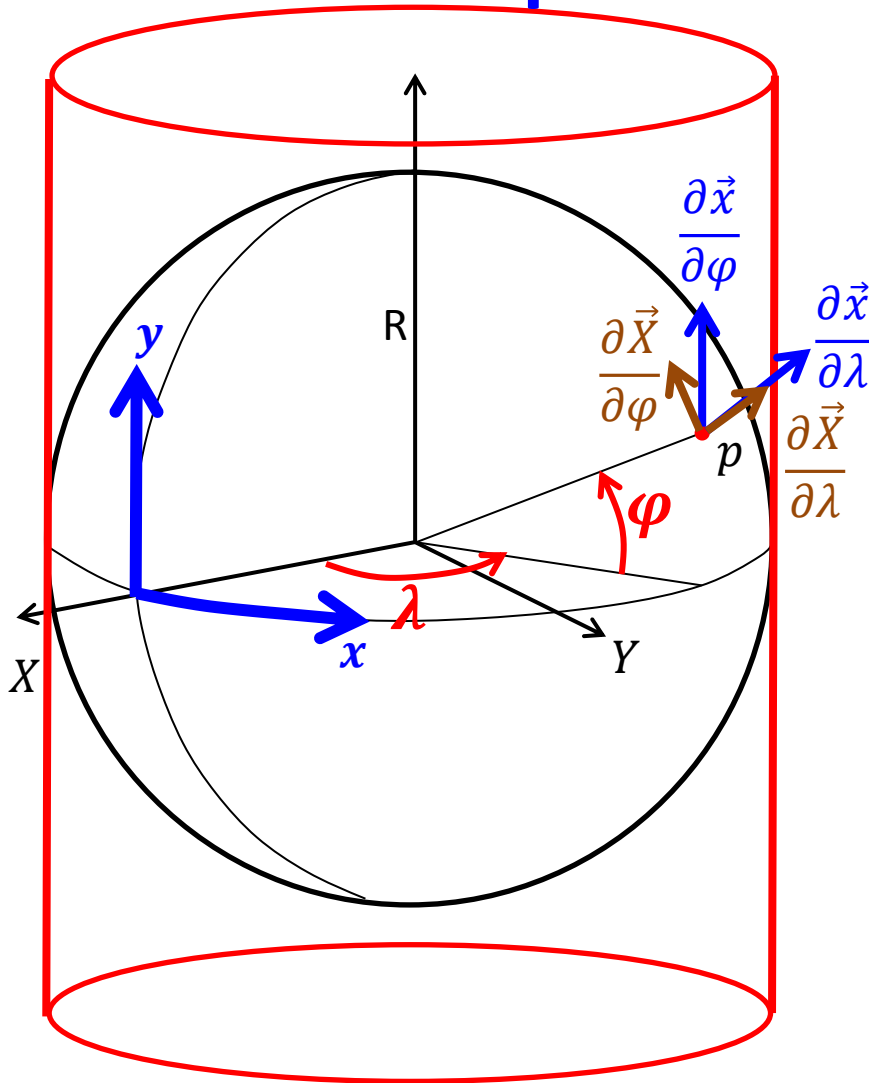
Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wie bilde ich die Erde auf die Ebene ab?

Beispiel: Mercatorprojektion



Konformität:

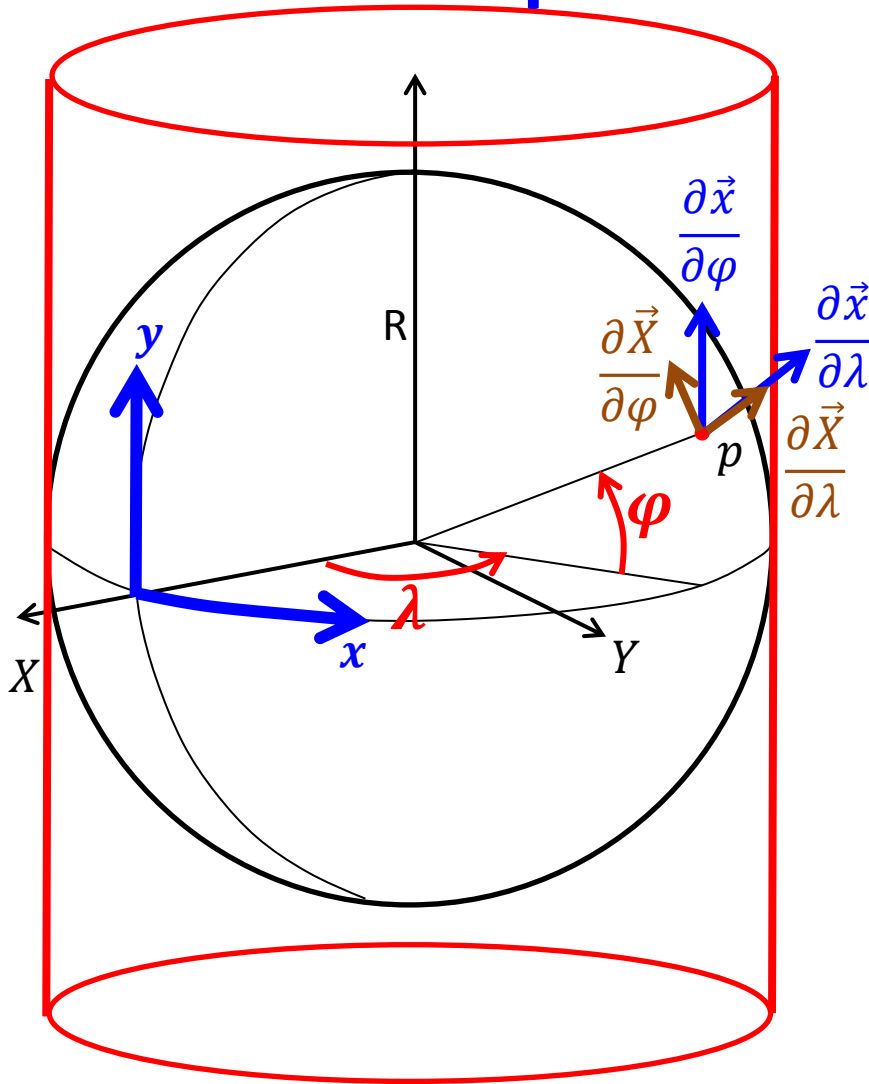
**Gleiches Seitenverhältnis
der aufgespannten
Rechtecke**

$$\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} \right|$$

**Proportionen
(lokal gesehen)
bleiben erhalten!**

Wie bilde ich die Erde auf die Ebene ab?

Beispiel: Mercatorprojektion



Konformität:

**Gleiches Seitenverhältnis
der aufgespannten
Rechtecke**

$$\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} \right|$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right)^2 / \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right)^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} \right)^2 / \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} \right)^2$$

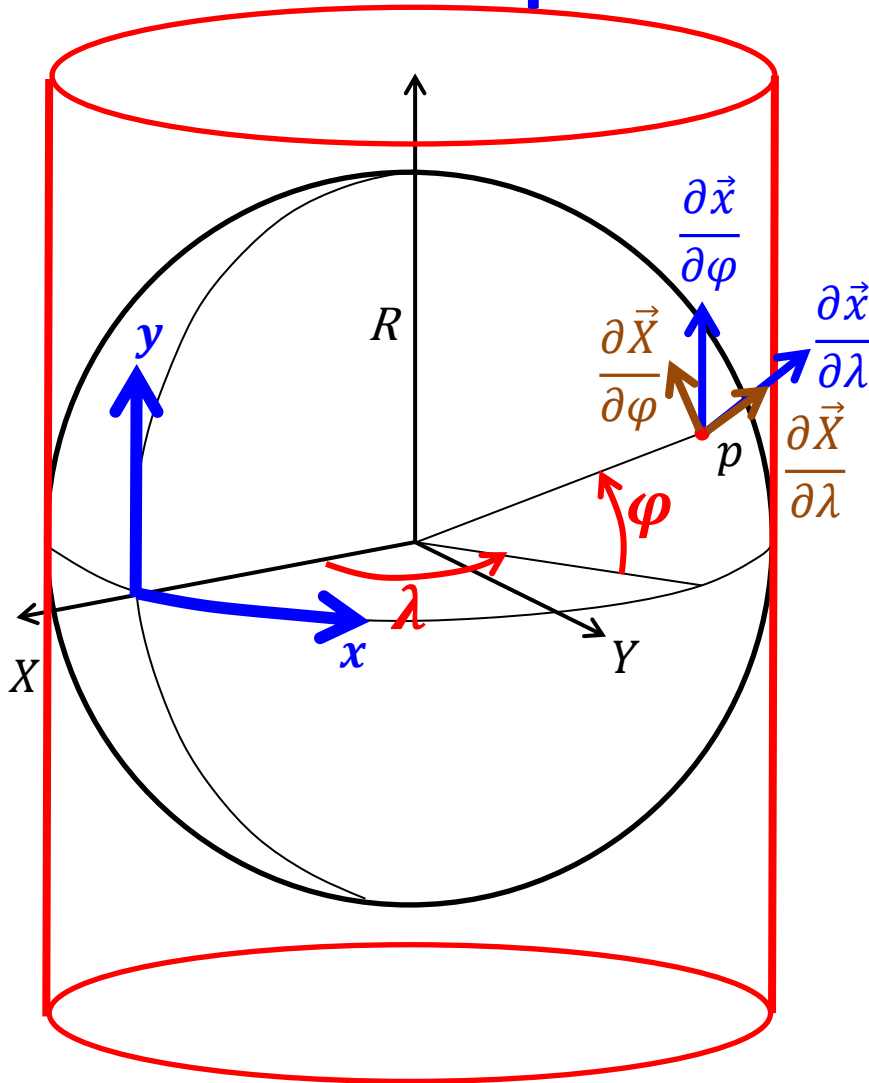
$$\begin{pmatrix} \partial \vec{x} \\ \partial \varphi \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2 = f'(\varphi)^2 \quad \begin{pmatrix} \partial \vec{x} \\ \partial \lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2 = R^2$$

$$\begin{pmatrix} \partial \vec{X} \\ \partial \varphi \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2 = R^2$$

$$\begin{pmatrix} \partial \vec{X} \\ \partial \lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}^2 = R^2 \cos^2 \varphi (\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda) = R^2 \cos^2 \varphi$$

Wie bilde ich die Erde auf die Ebene ab?

Beispiel: Mercatorprojektion



Konformität:

**Gleiches Seitenverhältnis
der aufgespannten
Rechtecke**

$$\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} \right|$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right)^2 / \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right)^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} \right)^2 / \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} \right)^2$$

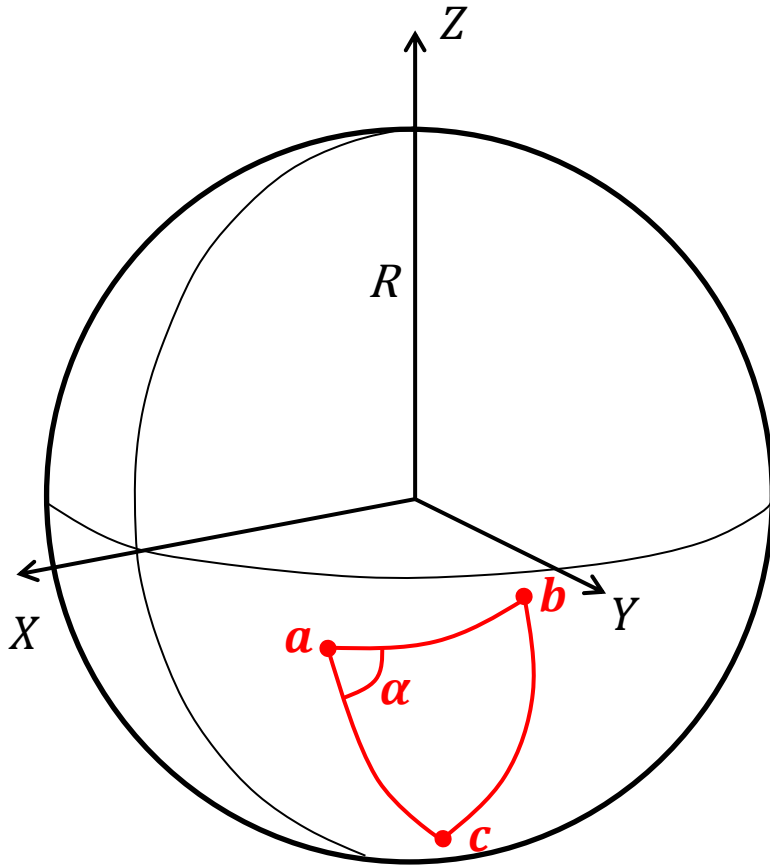
$$\Rightarrow (f'(\varphi))^2 / R^2 = R^2 / (R^2 \cos^2 \varphi)$$

$$\Rightarrow f'(\varphi) = R / \cos \varphi$$

$$\Rightarrow f(\varphi) = \underline{\underline{R \ln \tan (\varphi / 2 + \pi / 4)}}$$

Wie bilde ich die Erde auf die Ebene ab?

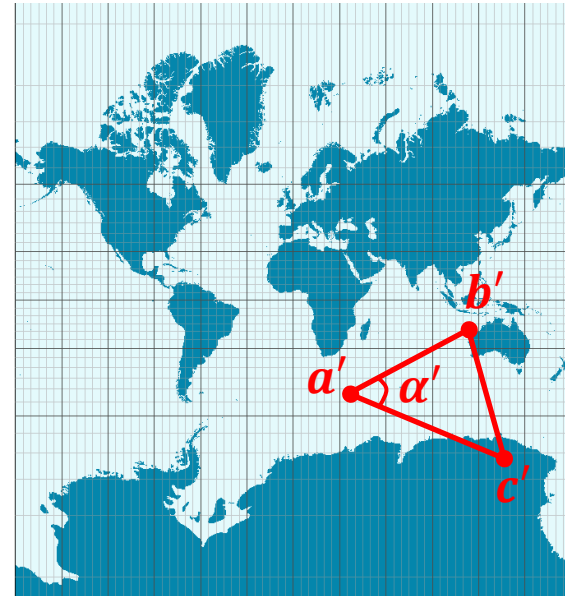
Beispiel: Mercatorprojektion



Achtung:

Trotz Winkeltreue gilt $\alpha \neq \alpha'$!

Quelle: wikipedia



Winkeltreue gilt nur für
differentiell kleine Dreiecke!