Aufgabensammlung ADS-Repetitorium 2021

Bäume und Graphen

Aufgabe 1: Rot-Schwarz-Bäume
Zeichnen Sie die folgenden Beispiele. Im Folgenden werden die *nil*-Blätter mitgezählt. Ein Baum, der nur aus einer Wurzel besteht, hat demnach zwei Knoten und die Höhe (wie in der VL definiert) eins.

(a) Gesucht ist ein gültiger Rot-Schwarz-Baum der Höhe drei, bei dem die Anzahl der Knoten minimal ist.

(b) Gesucht ist ein binärer Suchbaum der Höhe drei mit maximaler Knotenzahl, für den es keine gültige Rot-Schwarz-Färbung gibt.

(c) Gesucht ist eine Permutation von sieben paarweise verschiedenen Zahlen, sodass diese beim Einfügen in einen Binärbaum alle Ebenen komplett ausfüllen (der Binärbaum ist also balanciert).

Aufgabe 2: Modellierung als Graphen
Viele algorithmische Fragestellungen können als Graphen modelliert werden. Bearbeiten Sie folgende Punkte für jede Fragestellung:

i. Geben Sie einen Algorithmus in Worten an, der die Fragestellung als Graph modelliert. Achten Sie auf eine präzise Definition der Knoten- und Kantenmenge.

ii. Mit welchem Graph-Algorithmus kann die Fragestellung auf dem Graph gelöst werden? Wie müssen die Algorithmen gegebenfalls modifiziert werden?

iii. Von welchen Parametern hängt die Laufzeit ab? Können Sie die Laufzeit genau angeben?

Einige der Probleme lassen sich eventuell auch einfacher ohne Graph lösen. In dieser Aufgabe sollen sie aber explizit den Umgang mit Graphen üben.

(a) Sie arbeiten im Marketing einer Firma, die Kameras herstellt. Auf einer Veranstaltung, die von n Menschen besucht wird, bieten Sie folgende Werbekampagne an:
Sie verteilen m Einwegkameras, mit denen man je genau ein Bild schießen kann. Die Kameras sollen dazu benutzt werden, Twofies (= Bilder, auf denen genau zwei Personen abgebildet sind) zu schießen. Die Person, die am Ende der Veranstaltung mit den meisten anderen Menschen auf Twofies abgebildet ist, hat gewonnen.
Wie können Sie die Person ermitteln, die gewinnt?

(b) Das Kommunalunternehmen eines Landkreises mit n Gemeinden möchte jede Gemeinde an ein Radwegnetz anbinden. Um Kosten zu sparen, sollen die Radwege nur an den *breitesten* Straßen im Landkreis angelegt werden und Rundfahrten zwischen den Gemeinden sollen nicht möglich sein.

(c) Ein Software-Projekt besteht aus n Modulen. Jedes Modul kann von anderen Modulen abhängig sein. Ein Modul kann nur gestartet werden, falls alle Module, von denen das Modul abhängt, bereits gestartet wurden. Gesucht ist also die Reihenfolge, in der die Module gestartet werden können.

Aufgabe 3: Definition eines Graphen
Die Definition eines Graphen $G = (V, E, w)$ ist gegeben durch die Knotenmenge V und die Kantenmenge E:

$$V = \big\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge x < n \wedge y < n \big\},\ n \in \mathbb{N}^+$$

$$E = \big\{\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \in V \mid w((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < a\big\},\ a \in \mathbb{R}^+$$

Die Funktion w ist durch die Zuordnungsvorschrift $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \mapsto \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ gegeben. Falls $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in E$, so repräsentiert w die Gewichtsfunktion der Kanten.

(a) Kann der Graph als ungerichteter Graph aufgefasst werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Welches reale Szneario könnte durch diesen Graphen mit einem festen n und a beschrieben werden?

(c) Zeichnen Sie den Graph so, dass sich keine Kanten überkreuzen, für den Fall, dass $n = 5$ und $a = \sqrt{2}$.

(d) Geben Sie für $a = \sqrt{2}$ eine äquivalente Definition der Kantenmenge E an. In Ihrer Definition soll die Funktion w nicht vorkommen.

(e) Geben Sie ein $0 < a < 3\pi$ an, sodass die Berechnung der *Länge* des kürzesten Weges zwischen zwei Knoten bei beliebigem n in konstanter Zeit möglich ist. Wie funktioniert dann die Berechnung der Länge des kürzesten Weges?

Aufgabe 4: Augmentierung von Rot-Schwarz-Bäumen

Ein Rot-Schwarz-Baum zur Verwaltung einer dynamischen Menge verschiedener ganzer Zahlen soll so augmentiert werden, dass man zu jeder Zeit bestimmen kann, für welche zwei Zahlen i, j der Menge mit $i < j$ die Differenz $j - i$ am kleinsten ist. Geben Sie die Methode minGap(RedBlackTree T) in Pseudocode an, die das gesuchte Zahlenpaar in konstanter Zeit liefert. Welche Extrainformationen speichern Sie im Baum und wie lassen sich diese beim Einfügen, Löschen und Suchen aufrechterhalten, ohne die Laufzeiten der entsprechenden Methoden zu verschlechtern? Lässt sich das Problem auch mit konstantem Zusatzspeicher lösen, wenn man auf die Delete-Methode verzichtet?

Aufgabe 5: Matchings in Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Teilmenge $M \subseteq E$ der Kantenmenge heißt *Matching*, wenn keine zwei Kanten in M einen Knoten gemeinsam haben. Ein Matching heißt *nicht erweiterbar*, wenn es keine Kante e in $E \setminus M$ gibt, sodass $e \cup M$ ein Matching ist.

(a) Überlegen Sie sich ein Szenario, das man als Graph modellieren und mit einem Algorithmus, der ein maximales Matching findet, lösen kann.

(b) Schreiben Sie einen Algorithmus in Pseudocode, der für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ und eine Teilmenge $M \subseteq E$ bestimmt, ob M ein Matching ist.

(c) Entwickeln Sie einen Algorithmus in Pseudocode, der für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ ein gültiges, nicht erweiterbares Matching berechnet.

Aufgabe 6: Graphen-Cliquen

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Teilmenge $C \subseteq V$ heißt *Clique*, wenn jedes Knotenpaar $e, d \in E$ durch eine Kante verbunden ist.
Schreiben Sie einen Algorithmus, der für einen Graphen $G = (V, E)$ und eine Teilmenge $C \subseteq E$ prüft, ob C eine Clique in G ist.

Aufgabe 7: Terminale verbinden

Sie sind Betreiber eines Routernetzwerkes, wobei R die Menge Ihrer Router darstellt. Die Router sind untereinander verbunden, sodass Ihr gesamtes Netzwerk zusammenhängend ist. Dabei muss nicht notwendigerweise jeder Router mit jedem anderen Router verbunden sein. Damit die Verbindungen funktionieren, muss jede Verbindung mit Strom versorgt werden.

Im Falle eines Stromausfalls kann jede Verbindung mit je einem teurem Notstromaggregat betrieben werden. Die Kosten für dieses Notstromaggregat sind je Verbindung verschieden.

In Ihrem Netzwerk befinden sich einige besonders wichtige Knotenrouter K. Falls der Strom ausfällt, sollen weiterhin alle Router in K miteinander verbunden sein. Alle anderen Router $R \setminus K$ dürfen, aber müssen nicht unbedingt, ans Netzwerk angeschlossen sein. Sie sind nun an einer Auswahl an Verbindungen interessiert, die möglichst günstig mit Notstromaggregaten betrieben werden können und alle Knotenrouter K verbindet.

(a) Modellieren Sie das Problem als Graph-Problem. *Tipp:* Machen Sie sich mit einer Skizze die Aufgabenstellung klar.

(b) Angenommen $|K| = 2$. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der das Problem löst.

(c) Angenommen $K = R$, mit anderen Worten: Alle Router sind wichtig. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der das Problem löst.

(d) Das Software-Unternehmen PISNP bietet einen Algorithmus an, der das Problem für alle K löst. Dieser Algorithmus berechnet einen Graph T, der angeblich die oben beschrieben Anforderungen erfüllt. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der überprüft, ob T tatsächlich gültig ist. Ihr Algorithmus erhält als Eingabe ihr Routernetzwerk, wie in a) modelliert, sowie K und T.

Aufgabe 8: Graphen-Theorie

Als *bipartit* wird ein Graph $G = (V, E)$ bezeichnet, falls sich seine Knotenmenge V in zwei Mengen S_1 und S_2 aufteilen lässt, sodass alle Kanten einen Knoten in S_1 mit einem Knoten in S_2 verbinden.

(a) Vervollständigen Sie die Definition, sodass sie äquivalent zur obigen textuellen Definition ist. Füllen Sie in jede Lücke genau ein Zeichen.

Graph G ist bipartit $\Leftrightarrow$

$\exists \_\_ \subseteq V \; \forall \; (\_\_, v) \in \_\_ : (\_\_ \in S_1 \; \wedge \; \_\_ \in V \setminus \_\_) \vee (\_\_ \in V \setminus S_1 \_\_ u \in S_1)$

(b) Beweisen Sie folgende Aussage: Graph G ist bipartit $\Leftrightarrow$ Graph G ist zweifärbbar.

(c) Der folgende Algorithmus überprüft, ob ein gegebener Graph bipartit ist. Ergänzen Sie die Lücken. Zu Beginn des Algorithmus hat das marker-Attribut aller Knoten den Wert 0.

Algorithmus 4: boolean checkIfBipartite(Graph G, Vertex u = **nil**)

```
1  if u = nil then
2      u = beliebiger Knoten
3      u.marker = _____
4  foreach v ∈ Adj[u] do
5      if v.marker ≠ 0 then
6          if _____ then return false
7      else
8          if u.marker = ___ then v.marker = ___
9          if u.marker = ___ then v.marker = ___
10         flag = checkIfBipartite(___,___)
11         if flag = false then _____
12 return _____
```

(d) Welcher Algorithmus aus der Vorlesung liegt checkIfBipartite(G,v) zu Grunde?

Aufgabe 9: Anzahl der einfachen Pfade im Graph

Verwenden Sie den Tiefensuche-Algorithmus, um die *Anzahl* der einfachen Pfade zwischen zwei Knoten in einem azyklischen, gerichteten und ungewichteten Graphen in $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ Zeit zu berechnen. Verwendet Ihr Algorithmus das Prinzip dynamischer Programmierung oder ist er ein Greedy-Algorithmus?

Aufgabe 10: DNS-Sequenzen und k-mere

Eine DNS-Sequenz ist ein String aus den vier Zeichen `G`, `T`, `C` und `A`. In der Biologie vergleicht man die DNS-Sequenzen verschiedener Organismen. Dazu muss der DNS-String zunächst aus der Zelle extrahiert werden, wozu Sequenzierautomaten verwendet werden. Technisch bedingt ist die Länge k der Ausgabe der Automaten beschränkt, sodass eine DNS-Sequenz nicht komplett sequenziert wird. Stattdessen werden alle Substrings der Länge k in beliebiger Reihenfolge ausgegeben, wobei auch doppelte Substrings enhalten sind. Diese Substrings der Länge k werden als k-mere bezeichnet. Gesucht ist nun nach einer Möglichkeit, aus den k-meren die ursprüngliche DNS-Sequenz herzustellen. Ein *Präfix* eines k-mers ist der String des k-mers ohne das letzte Zeichen. Äquivalent dazu ist der *Suffix* eines k-mers der String des k-mers ohne das erste Zeichen.

(a) Ein Automat mit $k = 3$ sequenziert ein Genom mit der Sequenz `GTCCAGTCCAC`. Was ist die Ausgabe?

(b) Wie viele k-mere gibt es in einer Sequenz der Länge $n > k$?

(c) Gegeben ist der Graph G_H in Abbildung 1a, der aus den 3-meren `ACG`, `ACT`, `CGT`, `CTA`, `GTA`, `GTT`, `TAC` und `TAC` entstanden ist. Leiten Sie die Vorgehensweise ab, mit der aus beliebigen k-meren ein Graph G_H gebildet wird.

(d) Beschreiben Sie in einem Satz, wie man mit G_H eine Sequenz findet, die die gegebenen k-mere aufweist. In der Bioinformatik ist die Anzahl der k-mere häufig in der Größenordnung einiger Millionen. Warum können Sie die Methode mit dem Graphen G_H nicht empfehlen?

(e) Geben Sie eine Sequenz s an, deren Sammlung der k-mere identisch zu denen aus c) ist.

(f) Glücklicherweise gibt es eine andere Möglichkeit, einen Graphen G_E aufzubauen, um eine Sequenz aus gegebenen k-meren zu berechnen: Die Kantenmenge besteht aus allen k-meren der Eingabemenge, wobei Duplikate erlaubt sind. Diese Kanten schreiben wir untereinander, beschriften sie mit dem jeweiligen k-mer und richten sie nach rechts. An die linke Seite jeder Kante fügen wir nun einen Knoten mit dem Präfix der Kante an und an der rechten Seite einen Knoten mit dem Suffix der Kante. Nun werden die Kanten analog zu einem Dominospiel an passenden Knoten aneinandergefügt.

Zeichnen Sie diesen Graph für die 3-mere aus c).

(g) Beschreiben Sie in einem Satz, wie man mit G_E eine Sequenz findet, die die gegebenen k-mere aufweist.

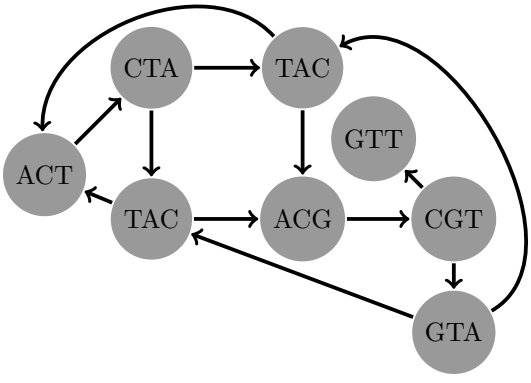
Aufgabe 11: Dijkstra's Alogrithmus

Gegeben sei der Graph in Abbildung 1b. Bearbeiten Sie auf diesem Graph die folgenden Aufgaben.

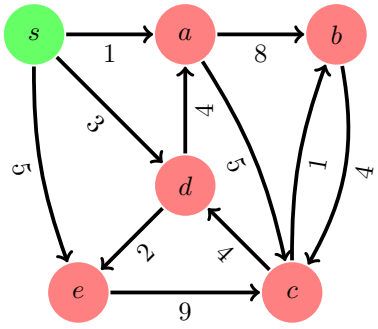
(a) Führen Sie Dijkstra's Algorithmus mit Startknoten s aus. Erstellen Sie dazu eine Tabelle mit drei Spalten: *Iteration*, *Schwarze Knoten*, *Graue Knoten*, zu der sie nach jeder Iteration der While-Schleife eine Zeile hinzufügen. Schreiben Sie hinter jeden Knoten in Klammern die aktuelle Distanz und den Vorgänger-Knoten.

(b) Zeichnen Sie den entstandenen Kürzeste-Wege-Baum.

(c) Seien nun negative Kantengewichte erlaubt. Verändern Sie den gegeben Graphen, sodass Dijkstra nach Beendigung kein richtiges Ergebnis liefert, obwohl der kürzeste Weg definiert ist. Warum kann dies nicht behoben werden, indem wir das minimale Kantengewicht $g < 0$ identifizieren und alle Gewichte um $|g|$ erhöhen? Dann wären alle Kantengewichte wieder positiv und wir könnten Dijkstra verwenden. Begründen Sie allgemein, warum diese Vorgehensweise nicht korrekt ist.
Vorschau: Morgen werden wir uns im Rahmen der Dynamischen Programmierung mit einem Algorithmus beschäftigen, der mit negativen Kanten zurecht kommt.



(a) 3-mere-Graph für die Sequenz-Aufgabe.



(b) Beispiel-Graph für Dijkstras-Algorithmus.

Abbildung 1: Graphen für die Aufgaben 8 und 9.