Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen & Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 16. Juni 2021

Prof. Dr. Alexander Wolff
Johannes Zink, M. Sc.

# 10. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2021)

### Aufgabe 1 – Geradenüberdeckung

Das Problem GERADENÜBERDECKUNG ist wie folgt definiert. Gegeben eine endliche Menge von Punkten in der Ebene, finde eine Menge von Geraden, die die Punkte *überdeckt*, d. h. jeder Punkt muss in mindestens einer Geraden enthalten sein. Im Folgenden wollen wir entscheiden, ob es für eine gegebene endliche Punktmenge $P \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine natürliche Zahl $k$ eine Geradenüberdeckung der Größe $k$ gibt. Dabei sei $n := |P|$.

a) Erläutern Sie, dass es (für $n \geq 2$) genügt, Geraden zu betrachten, auf denen mindestens zwei Punkte liegen. **1 Punkt**

b) Beschreiben Sie, wie mit Geraden umzugehen ist, die mehr als $k$ Punkte enthalten. Begründen Sie Ihre Antwort. **2 Punkte**

c) Angenommen es gibt keine Gerade, die mehr als $k$ Punkte enthält. Für welche Werte des Parameters $k$ können wir sicher sagen, dass es keine Geradenüberdeckung geben kann? **1 Punkt**

d) Geben Sie einen FPT-Algorithmus für GERADENÜBERDECKUNG bezüglich des Parameters $k$ (also der Größe der Geradenüberdeckung) in Worten an. Schätzen Sie seine Laufzeit scharf ab. **5 Punkte**

   *Hinweis:* Nutzen Sie die Beobachtungen aus den Teilaufgaben (a)–(c).

### Aufgabe 2 – Größte Clique

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Bei dem Problem GRÖSSTE CLIQUE geht es darum, eine Teilmenge $V' \subseteq V$ zu finden, so dass $V'$ in $G$ eine Clique ist, und es keine größere Clique in $G$ gibt.

a) Beschreiben Sie einen Brute-Force-Ansatz, der dieses Problem löst, und schätzen Sie seine Laufzeit scharf ab. **2 Punkte**

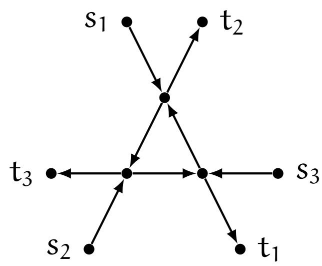
b) Der Maximalgrad von $G$ sei nun $\Delta$ (es gilt also $\Delta = \max_{v \in V} \deg(v)$). Beschreiben Sie einen Algorithmus, der bei Eingabe von $G$ sowie einem Knoten $v \in V$ die größte Clique findet, an der $v$ beteiligt ist. Dieser Algorithmus muss nicht effizient sein. Schätzen Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus scharf in Abhängigkeit von $G$ und $\Delta$ ab. **2 Punkte**

c) Zeigen Sie: GRÖSSTE CLIQUE ist festparameterberechenbar bezüglich des Maximalgrades $\Delta$. **2 Punkte**

**Aufgabe 3 – Mehrgüterfluss**

Wir betrachten die Verallgemeinerung von Flüssen auf so genannte *Mehrgüterflüsse*, bei denen es mehrere Quellen und Senken geben kann. Gegeben ist auch hier ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$. Statt einer Quelle $s$ und einer Senke $t$ gibt es jetzt aber eine Menge $V_s = \{s_1, \dots, s_k\} \subseteq V$ von Quellen und eine Menge $V_t = \{t_1, \dots, t_k\} \subseteq V$ von Senken.

Das k-Tupel $f = (f_1, \dots, f_k)$ mit $f_i\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $1 \leq i \leq k$, ist ein *zulässiger* Mehrgüterfluss, wenn jedes $f_i$ ein zulässiger $s_i$-$t_i$-Fluss ist und $\sum_i f_i(e) \leq c(e)$ für alle Kanten $e \in E$. Der Flusswert eines $s_i$-$t_i$-Flusses sei mit $F(f_i)$ bezeichnet. Der Gesamtflusswert ist definiert als $F(f) := \sum_i F(f_i)$.




a) Betrachten Sie den abgebildeten Graphen. Es sei $c(e) = 1$ für alle $e \in E$. Geben Sie den maximalen Gesamtflusswert an (mit Begründung) unter der Bedingung, dass jede Kante einen ganzzahligen Flusswert besitzt. **2 Punkte**

b) Betrachten Sie den abgebildeten Graphen. Es sei $c(e) = 1$ für alle $e \in E$. Geben Sie den maximalen Gesamtflusswert an (mit Begründung), wenn es keine weiteren Bedingungen gibt. **3 Punkte**

---

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf bis **Dienstag, 22. Juni 2021, 12:00 Uhr** im WueCampus-Kursraum beim entsprechenden Übungsblatt hoch. Geben Sie stets die Namen aller (bis zu 2) an, die das Übungsblatt bearbeitet haben.

Begründen Sie stets Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit $\boxed{\text{CPLEX}}$ gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch. Der Quellcode sollte von derselben Person abgegeben werden, die auch das pdf hochgeladen hat. Wenn dies nicht der Fall sein sollte, vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, wer den Quellcode hochgeladen hat.

Plagiate werden mit 0 Punkten für das ganze Übungsblatt gewertet.