Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen & Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 12. Mai 2021

Prof. Dr. Alexander Wolff
Johannes Zink, M. Sc.

5. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2021)

Aufgabe 1 – Matchings in Bäumen

a) Beweisen oder widerlegen Sie: Besitzt ein Baum ein perfektes Matching, so ist dieses eindeutig. **3 Punkte**

   Hinweis: Betrachten Sie die Blätter des Baumes, d. h. die Knoten $v \in V$ mit $\deg(v) = 1$, und ihre jeweilige (einzige) inzidente Kante.

b) Wie viele andere Probleme ist auch das Problem MAXIMUM MATCHING in Bäumen einfacher als in allgemeinen Graphen.

   Geben Sie einen effizienten Algorithmus in Pseudocode an, der einen Baum $T = (V, E)$ entgegennimmt und für diesen ein größtes (nicht notwendigerweise perfektes) Matching berechnet. Zeigen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus und schätzen Sie die asymptotische Laufzeit möglichst genau ab. **5 Punkte**

   Hinweis: Betrachten Sie wie in Teilaufgabe a) die Blätter des Baumes, d. h. die Knoten $v \in V$ mit $\deg(v) = 1$, und ihre jeweilige (einzige) inzidente Kante.

c) Entwickeln Sie einen effizienten Algorithmus der auf einem Baum mit Kantengewichten ein *gewichtsmaximales Matching* findet. Zeigen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus und schätzen Sie die asymptotische Laufzeit möglichst genau ab. Beachten Sie, dass ein gewichtsmaximales Matching im allgemeinen nicht perfekt ist. **5 Punkte**

Aufgabe 2 – Hamiltonkreise

Ein sogenannter *Turniergraph* $G = (V, E)$ ist ein gerichteter Graph mit der Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $|V| \geq 3$, der für jedes Paar $v_i \neq v_j$ von Knoten entweder die gerichtete Kante (v_i, v_j) oder die umgekehrt gerichtete Kante (v_j, v_i) besitzt. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *stark zusammenhängend*, wenn es für jedes Paar $(v, w) \in V \times V$ einen gerichteten Weg von v nach w in G gibt.

Gegeben sei nun ein stark zusammenhängender Turniergraph $G = (V, E)$. Zeigen Sie, dass G einen Hamiltonkreis besitzt. Gehen Sie dazu nach den folgenden Schritten vor:

a) Zeigen Sie: jeder Knoten $v \in V$ liegt auf einem Kreis der Länge ≥ 3. **1 Punkt**

   Hinweis: Wählen Sie eine Kante und nutzen Sie den starken Zusammenhang von G.

b) Zeigen Sie: jeder Knoten $v \in V$ liegt auf einem Kreis der Länge $= 3$. **2 Punkte**

Hinweis: Wählen Sie einen nach a) existierenden Kreis und machen Sie diesen schrittweise kürzer.

c) Betrachten Sie einen Kreis C in G. Sei $V(C)$ die Menge der Knoten in C. Nehmen Sie an, dass C maximal ist, aber kein Hamiltonkreis, d.h. $V(C) \neq V$. Betrachten Sie einen Knoten $v \notin V(C)$.

Zeigen Sie: Ist $w \in V(C)$ und $(w, v) \in E$, so ist auch $(w', v) \in E$ für den Nachfolger w' von w auf dem Kreis C. **1 Punkt**

d) Folgern Sie aus c): (i) Entweder gilt für alle Knoten $w \in V(C)$, dass $(w, v) \in E$, oder (ii) für alle Knoten $w \in V(C)$ gilt, dass $(v, w) \in E$. **1 Punkt**

e) Sei nun V_1 die Menge aller Knoten $v \in V \setminus V(C)$, für die Bedingung (i) gilt, und V_2 die Menge aller Knoten $v \in V \setminus V(C)$, für die Bedingung (ii) gilt.

Zeigen Sie: Ist $V(C) \neq V$, so sind weder V_1 noch V_2 leer. **1 Punkt**

Hinweis: Verwenden Sie, dass G stark zusammenhängend ist.

f) Führen Sie nun mit Hilfe der Mengen V_1 und V_2 die Maximalität von C im Fall $V(C) \neq V$ zum Widerspruch. Damit haben Sie gezeigt, dass G einen Hamiltonkreis besitzt. **1 Punkt**

Hinweis: Versuchen Sie den Kreis mit Hilfe einer geeignete Kanten zwischen Knoten aus V_1 und V_2 zu verlängern.

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf bis **Dienstag, 18. Mai 2021, 12:00 Uhr** im WueCampus-Kursraum beim entsprechenden Übungsblatt hoch. Geben Sie stets die Namen aller (bis zu 2) an, die das Übungsblatt bearbeitet haben.

Begründen Sie stets Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit $\boxed{\text{CPLEX}}$ gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch. Der Quellcode sollte von derselben Person abgegeben werden, die auch das pdf hochgeladen hat. Wenn dies nicht der Fall sein sollte, vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, wer den Quellcode hochgeladen hat.