

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2021

9. Vorlesung

Färbungen, Cliques
und unabhängige Mengen

Färbungen und chromatische Zahl

Def. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

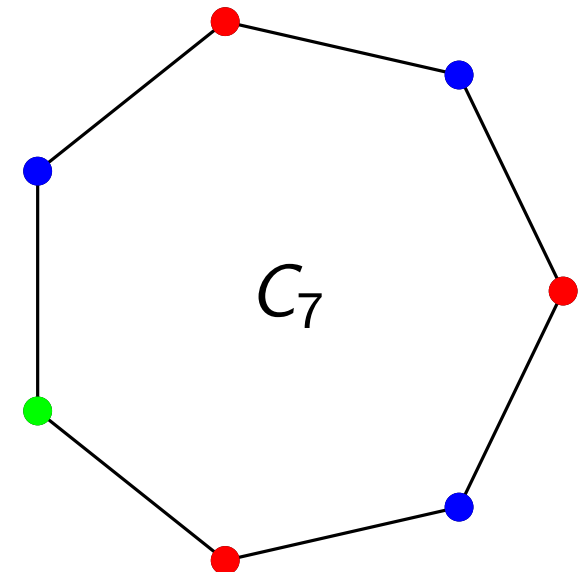
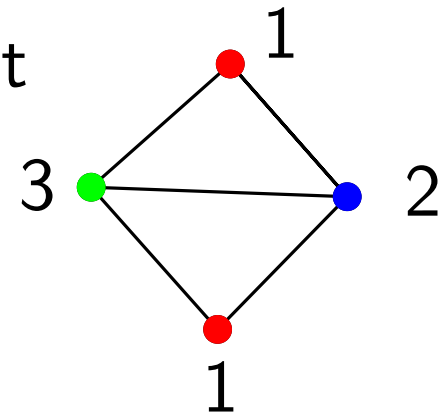
Eine k -Färbung ist eine Abbildung $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$,
so dass für alle $uv \in E$ gilt $f(u) \neq f(v)$.

$\chi(G) = \min\{k \mid G \text{ hat eine } k\text{-Färbung}\}$ heißt
chromatische Zahl von G .

Bsp.

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 2 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

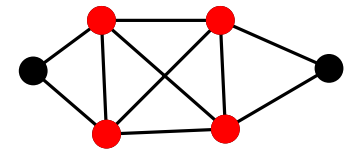
Kreis mit n Knoten



Cliquen und unabhängige Mengen

Def. Eine *Clique* ist eine Menge $C \subseteq V$,
so dass für alle Paare $\{u, v\} \subseteq C$ gilt, dass $uv \in E$.

$\omega(G) = \max\{|C| : C \text{ ist Clique in } G\}$
heißt *Cliquenzahl* von G .



Beob₁. Für jeden Graphen G gilt: (A) $\chi(G) \geq \omega(G)$.
(B) ~~$\chi(G) \leq \omega(G)$~~ .

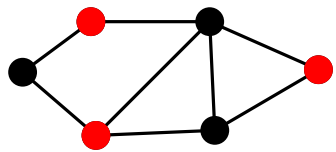
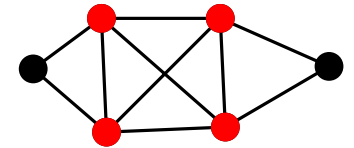
Bsp. Wann gilt $\chi(G) > \omega(G)$?
Wann gilt $\chi(G) = \omega(G)$?

Cliquen und unabhängige Mengen

unabhängige (oder stabile) Menge

Def. Eine ~~Clique~~ ist eine Menge $C \subseteq V$,
so dass für alle Paare $\{u, v\} \subseteq C$ gilt, dass $uv \notin E$.

$\omega(G) = \max\{|C|: C \text{ ist Clique in } G\}$
heißt *Cliquenzahl* von G .



$\alpha(G) = \max\{|U|: U \text{ ist unabhängige Menge in } G\}$
heißt *Unabhängigkeitszahl* (o. *Stabilitätszahl*) von G .

Beob₁. Für jeden Graphen G gilt: (A) $\chi(G) \geq \omega(G)$.

(B) ~~$\chi(G) \leq \omega(G)$.~~

Bsp. Wann gilt $\chi(G) > \omega(G)$?

Wann gilt $\chi(G) = \omega(G)$?

Zusammenspiel

Farbklasse

Beob₂. Sei f eine k -Färbung von G . Dann ist $f^{-1}(i) \subseteq V$ für $i = 1, \dots, k$ eine unabhängige Menge.

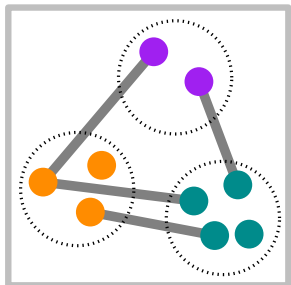
$$\Rightarrow |f^{-1}(i)| \leq \alpha(G) \Rightarrow \frac{n}{\chi(G)} \leq \alpha(G) \Rightarrow \chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}.$$

Kor. $\chi(G) \geq \max \{ \omega(G), n/\alpha(G) \}.$

Beob₃. $\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}} \right\rfloor.$

Beweis. Sei f eine k -Färbung von G mit $k = \chi(G)$
Zwischen je 2 Farbklassen bzgl. f gibt's ≥ 1 Kante.

(Sonst gäb's eine $(k-1)$ -Färbung!)



$$\Rightarrow |E| \geq k(k-1)/2 \Rightarrow \chi(G) = k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}}$$

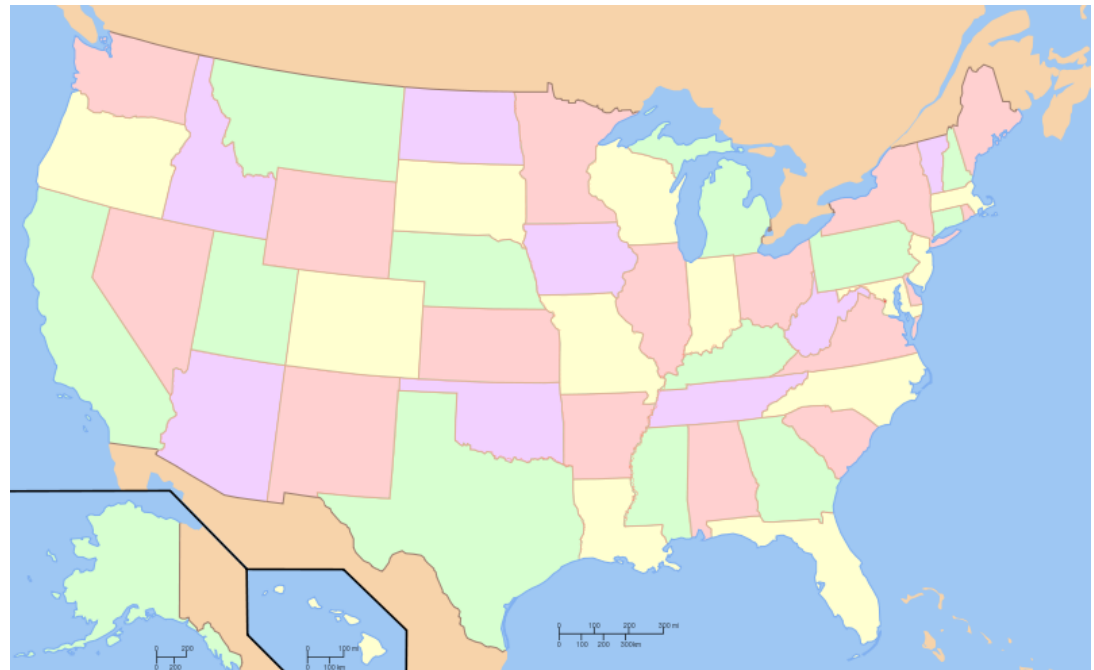
□

Übung. Finde Graphen, für die Gleichheit in Beob₃ gilt!

↪ z.B. vollständiger Graph K_n mit n Knoten

Anwendungen Färbungen

- Frequenzzuweisung bei Mobilfunk (Kante bedeutet Interferenz)
- Färben von politischen Landkarten (*planare* Graphen)
- Ablaufplanung (minimiere Makespan) bei Zugriff auf beschränkte Ressourcen



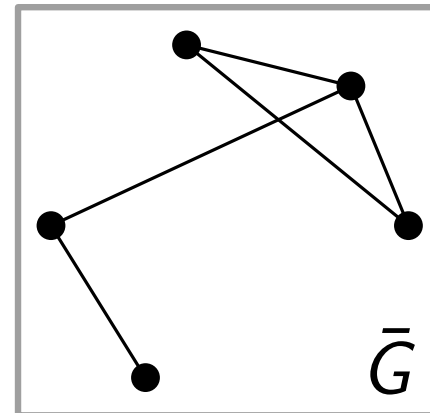
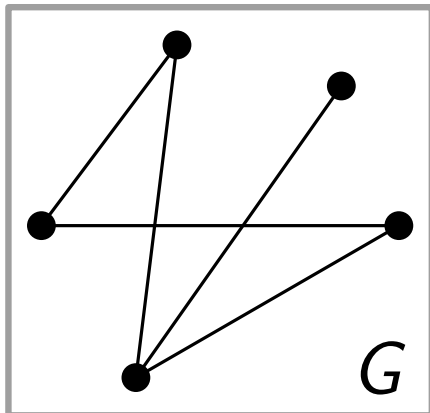
Komplementgraph

Def. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
 Dann ist $\bar{G} = (V, \bar{E})$ mit $\bar{E} := \binom{V}{2} \setminus E$ der
Komplementgraph von G .

Beob₄. Es gilt

- (i) $|E| + |\bar{E}| = \binom{|V|}{2}$
- (ii) $\overline{\bar{G}} = G$
- (iii) S Clique in $G \Leftrightarrow S$ unabhängig in \bar{G}
- (iv) $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$ und $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$

Menge aller 2-elementigen
Teilmengen von V



Perfekte Graphen

Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *perfekt*, wenn für jeden *induzierten* Teilgraphen H von G gilt: $\omega(H) = \chi(H)$.

ex. $U \subseteq V$ mit $H = G[U] = (U, \{uv \in E \mid u, v \in U\})$

Beob₁: stets $\omega(H) \leq \chi(H)$

Warum Anforderung für *alle* induzierten Teilgraphen und nicht nur $\omega(G) = \chi(G)$?

betrachte $G' := G + K_q$ für $q := \chi(G)$

vollständiger Graph mit q „neuen“ Knoten

dann gilt $q \leq \omega(G') \leq \chi(G') = \chi(G) = q$

K_q Clique \curvearrowright Beob₁ \curvearrowright G und K_q disj. und q -färbb.

$\Rightarrow \omega(G') = \chi(G')$ liefert keine strukturelle Info. über G' bzw. G .


Perfect Graph Theorem


Satz. G ist genau dann perfekt, wenn \bar{G} perfekt ist.

Beweis. [Lovász '72] \square

Bsp. $\omega(C_{2k+1}) = 2 < 3 = \chi(C_{2k+1})$ für $k \geq 2$

$\Rightarrow C_{2k+1}$ nicht perfekt $\Rightarrow \overline{C_{2k+1}}$ nicht perfekt

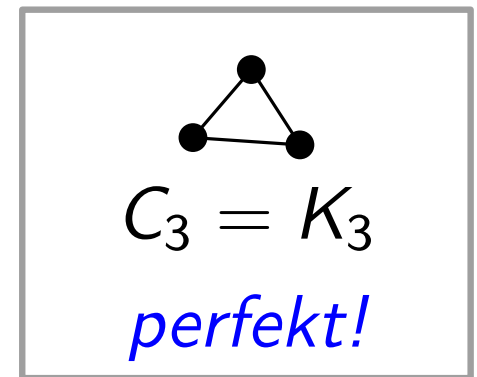
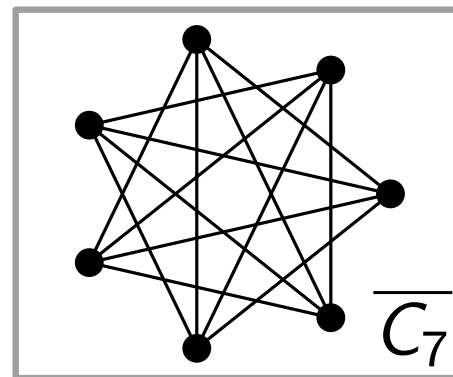
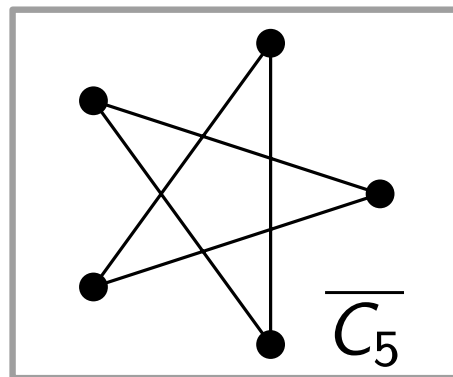
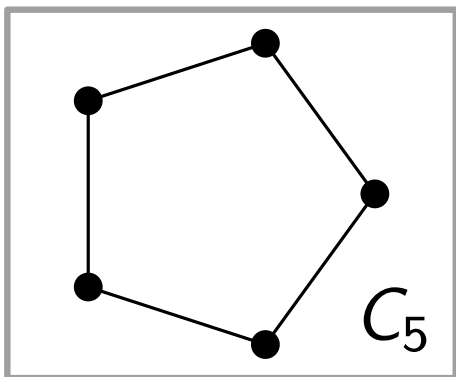
 ungerades Loch

 ungerades Antiloch

G perfekt \Rightarrow kein induzierter Teilgraph von G
ist ungerades Loch oder ungerades Antiloch



László Lovász



Strong Perfect Graph Conjecture

Vermutung. [Berge '60]

Satz. G ist *genau* dann perfekt, wenn kein ind. Teilgraph von G ein ungerades Loch oder Antiloach ist.

Beweis. [Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas '03] \square

Erkennung. Polynomialzeit [Chudnovsky et al. '03]

Warum perfekte Graphen?

Beliebige Graphen:

Berechnung der Zahlen $\alpha(G)$, $\omega(G)$ und $\chi(G)$ ist NP-schwer!

Satz. Die Berechnung von $\alpha(G)$, $\omega(G)$ und $\chi(G)$ ist für *perfekte* Graphen effizient möglich.

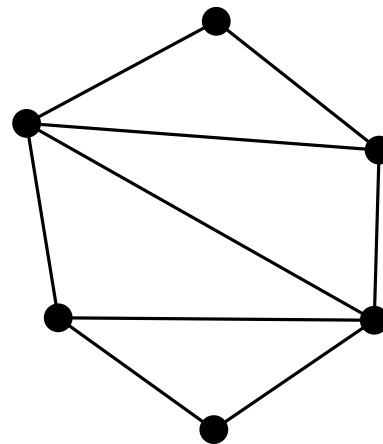
Beweis. [Grötschel, Lovász, Schrijver '88] \square

Wir zeigen dies für eine Teilklasse, die sog. *chordalen* Graphen.

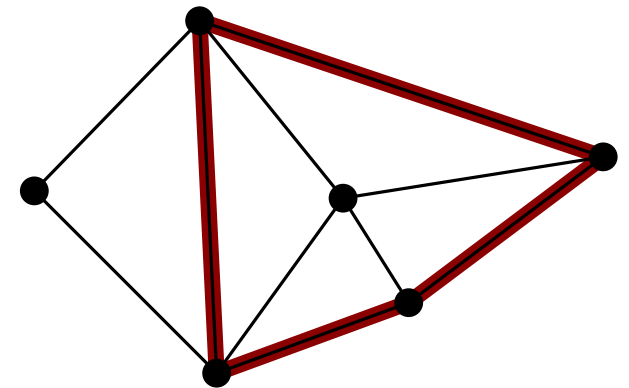
Chordale Graphen

Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *chordal*, wenn jeder einfache Kreis der Länge ≥ 4 mindestens eine *Sehne* besitzt, d.h. eine Kante, die zwei nicht aufeinander folgende Knoten des Kreises verbindet.

Kein Knoten wird mehr als einmal besucht.



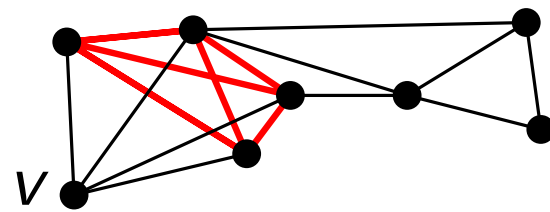
chordal



nicht chordal

Beob₅. G chordal \Rightarrow
jeder induzierte Teilgraph von G ist chordal.

Simpliziale Knoten



Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G .

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

Beweis. [Dirac '61]

Induktion über $n = |V|$

IA: $G = \{v\} \rightsquigarrow$ O.K.

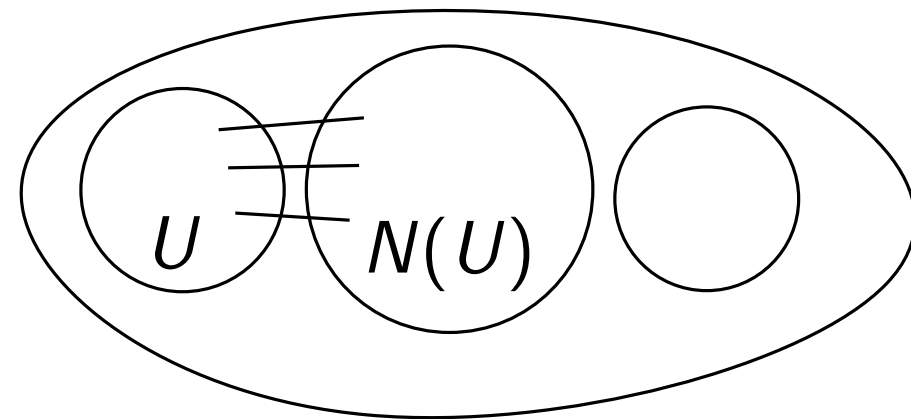
IS: $n \geq 2$, falls $G = K_n \rightsquigarrow$ O.K.

angenommen $G \neq K_n \rightsquigarrow$ existiert $u \neq v$ mit $uv \notin E$

wähle $U \subseteq V$ mit maximaler Kardinalität, so dass

(i) $G[U]$ zusammenhängend

(ii) $U \cup N(U) \neq V$ $N(U) := \{a \in V - U \mid \exists b \in U: ab \in E\}$

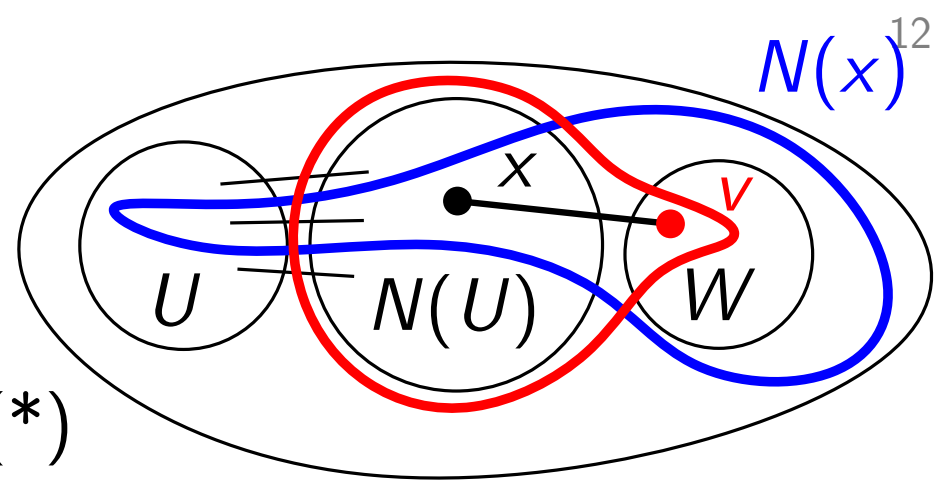


ein solches U existiert: setze $U := \{u\} \rightsquigarrow v \notin N(u) \cup \{u\}$

Beweis (Fortsetzung)

Sei $W = V - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$. (*)



Andernfalls: $U' := U \cup \{x\}$, $G[U']$ zshgd. und $U' \cup N(U') \neq V$
 $|U'| > |U| \Rightarrow \not\Leftarrow$ zur Maximalität von U

Beob₅. $\Rightarrow G[W]$ chordal $\stackrel{\text{I.V.}}{\Rightarrow}$ ex. $v \in W$ simplizial in $G[W]$

Behauptung: v simplizial in G (also $N(v)$ Clique)

Nachbarn $N(v) \cap W$ Clique, da v simplizial in $G[W]$

Wegen (*) ist jedes $w \in N(v) \cap W$ adjazent zu jedem Knoten in $N(U)$ und insb. zu jedem Knoten in $N(v) \cap N(U) = N(U)$.

Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

Beweis (Fortsetzung)

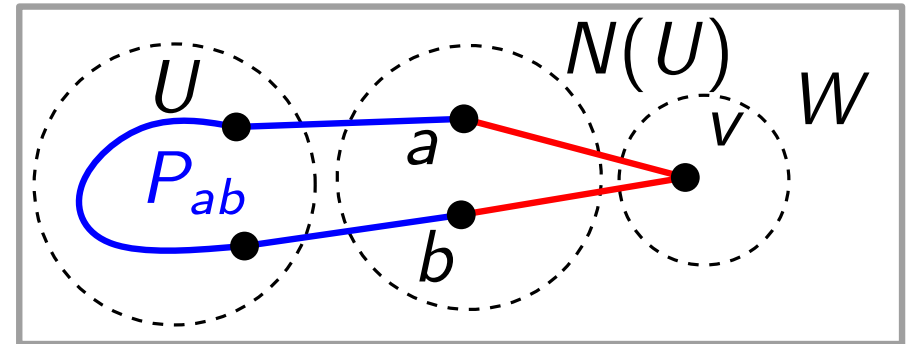
Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

Ang. ex. $a \neq b$ in $N(U)$ mit $ab \notin E$.

ex. a - b -Weg P_{ab} in $G[U \cup \{a, b\}]$ da $G[U]$ zshgd.

o.E. P_{ab} kürzester solcher Weg

P_{ab} hat Länge ≥ 2 da $ab \notin E$



$\rightsquigarrow C := P_{ab} + bv + va$ ist elementarer Kreis der Länge ≥ 4

C hat keine Sehne, da $v \notin N(U)$ und P_{ab} kürzester Weg \nleftrightarrow

$\rightsquigarrow N(U)$ ist eine Clique

$\rightsquigarrow N(v)$ ist eine Clique

$\rightsquigarrow v$ ist simplizialer Knoten in G

□

Perfektes Eliminationsschema

Def. Eine Nummerierung (v_1, \dots, v_n) der Knotenmenge V heißt *perfektes Eliminationsschema*, wenn für $i = 1, \dots, n$ gilt: v_i ist simplizial in $G[\{v_i, \dots, v_n\}]$.

v_1 ist simplizial in $G[V] = G$

v_2 ist simplizial in $G[V - v_1] = G - v_1$

v_3 ist simplizial in $G - \{v_1, v_2\}$ usw.

Chordale Graphen:
Iteriere Dirac!

Chordalität und Eliminationsschemata

Satz. G chordal $\Leftrightarrow G$ hat perfektes Eliminationsschema

Beweis.

„ \Rightarrow “ Iteriere Dirac (vgl. vorherige Folie)

„ \Leftarrow “

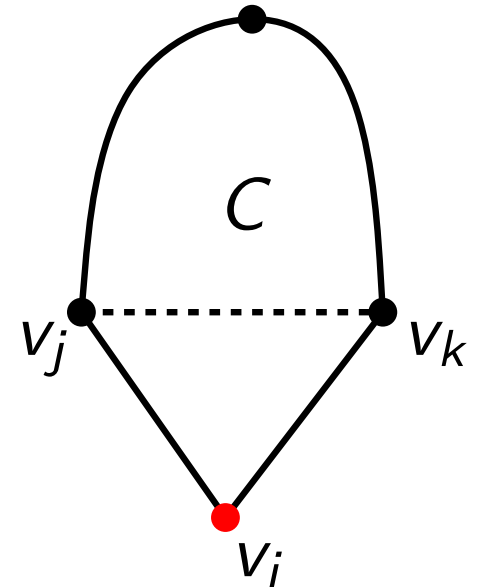
Sei K einfacher Kreis der Länge ≥ 4 .

Sei $v_i \in K$ Knoten mit kleinster Nummer i im Eliminationsschema.

Nachbarn v_j, v_k von v_i auf K sind adjazent in G , da v_i simplizial in $G[v_i, \dots, v_n]$ und $j, k \geq i$. □

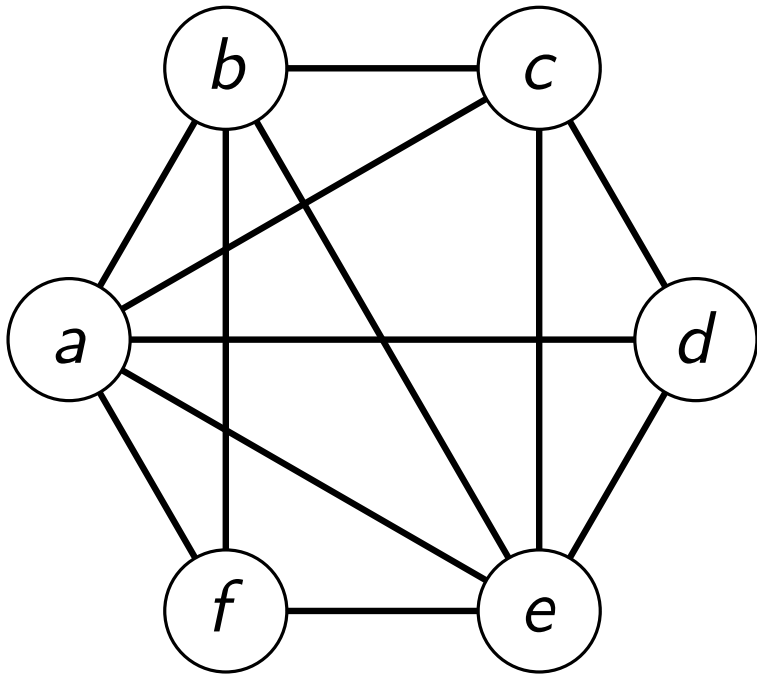
Perfektes Eliminationsschema lässt sich in Polynomialzeit errechnen. (Iteriere Dirac: $O(V^4) = O(V \cdot V \cdot V^2)$).

Mit mehr „Cleverness“ sogar *Linearzeit* möglich!

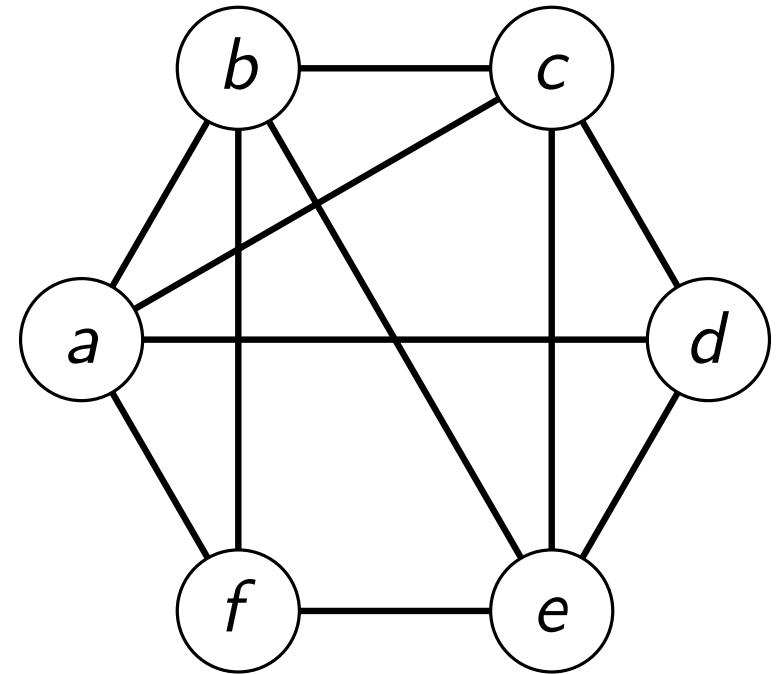


Anwendungen der Charakterisierung

Zeigen Sie, dass dieser Graph chordal ist:



Zeigen Sie, dass dieser Graph *nicht* chordal ist:



Berechnung einer größten Clique

Lemma. Sei v_1, \dots, v_n perfektes Eliminationsschema.
Dann hat jede nicht-erweiterbare Clique C in G
die Form $C = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\})$.

Beweis. Sei $v_i \in C$ mit kleinstem i .

$N'(v_i) := N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}$ Clique,
da v_i simplizial in $G[v_i, \dots, v_n]$.

$N'(v_i)$ enthält alle Knoten aus $C - v_i$, da i min.

Da C nicht erweiterbar ist, gilt $\{v_i\} \cup N'(v_i) = C$. \square

Es gibt $\leq |V|$ Cliques obiger Form in G .

Also können wir eine größte Clique (und somit $\omega(G)$) in
Polynomialzeit berechnen – durch Aufzählen dieser Cliques.

Berechnung einer optimaler Färbung

- Färbe v_n mit 1.
- Für $i = n - 1, \dots, 1$:  v_{i+1}, \dots, v_n bereits gefärbt
Färbe v_i mit kleinstmöglicher natürlicher Zahl.

Da $v_i \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}) =: C_i$ Clique, gilt $|C_i| \leq \omega(G)$.

Also $|N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}| \leq \omega(G) - 1$.

\Rightarrow Können v_i stets mit einer der Farben $\{1, \dots, \omega(G)\}$ färben.

Wegen $\omega(G) \leq \chi(G)$ gilt, dass unsere Färbung optimal ist!

Außerdem $\omega(H) = \chi(H) \dots$ für jeden induz. Teilgraphen H .

Satz. Jeder chordale Graph ist perfekt.

In chordalen Graphen kann man größte Cliques und optimale Färbungen effizient ermitteln.