

# Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2021

9. Vorlesung

Färbungen, Cliques  
und unabhängige Mengen

# Färbungen und chromatische Zahl

**Def.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

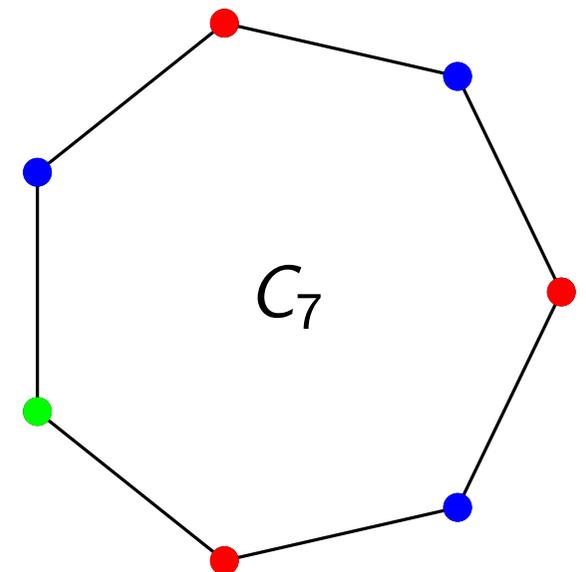
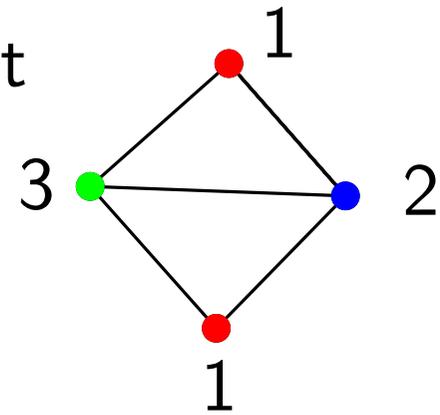
Eine  $k$ -Färbung ist eine Abbildung  $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , so dass für alle  $uv \in E$  gilt  $f(u) \neq f(v)$ .

$\chi(G) = \min\{k \mid G \text{ hat eine } k\text{-Färbung}\}$  heißt *chromatische Zahl* von  $G$ .

**Bsp.**

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 2 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

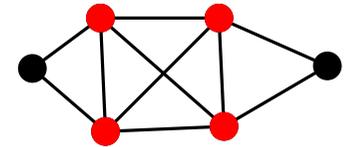
Kreis mit  $n$  Knoten



# Cliquen und unabhängige Mengen

**Def.** Eine *Clique* ist eine Menge  $C \subseteq V$ ,  
so dass für alle Paare  $\{u, v\} \subseteq C$  gilt, dass  $uv \in E$ .

$\omega(G) = \max\{|C| : C \text{ ist Clique in } G\}$   
heißt *Cliquenzahl* von  $G$ .



**Beob<sub>1</sub>.** Für jeden Graphen  $G$  gilt: (A)  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .  
(B)  ~~$\chi(G) \leq \omega(G)$~~ .

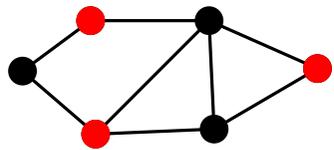
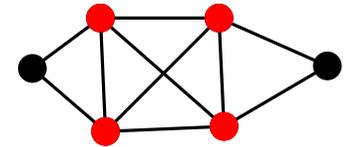
**Bsp.** Wann gilt  $\chi(G) > \omega(G)$ ?  
Wann gilt  $\chi(G) = \omega(G)$ ?

# Cliquen und unabhängige Mengen

*unabhängige (oder stabile) Menge*

**Def.** Eine ~~Clique~~ ist eine Menge  $C \subseteq V$ ,  
so dass für alle Paare  $\{u, v\} \subseteq C$  gilt, dass  $uv \notin E$ .

$\omega(G) = \max\{|C|: C \text{ ist Clique in } G\}$   
heißt *Cliquenzahl* von  $G$ .



$\alpha(G) = \max\{|U|: U \text{ ist unabhängige Menge in } G\}$   
heißt *Unabhängigkeitszahl* (o. *Stabilitätszahl*) von  $G$ .

**Beob<sub>1</sub>.** Für jeden Graphen  $G$  gilt: (A)  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .

(B)  ~~$\chi(G) \leq \omega(G)$ .~~

**Bsp.** Wann gilt  $\chi(G) > \omega(G)$ ?

Wann gilt  $\chi(G) = \omega(G)$ ?

# Zusammenspiel

Farbklasse

**Beob<sub>2</sub>.** Sei  $f$  eine  $k$ -Färbung von  $G$ . Dann ist  $f^{-1}(i) \subseteq V$  für  $i = 1, \dots, k$  eine unabhängige Menge.

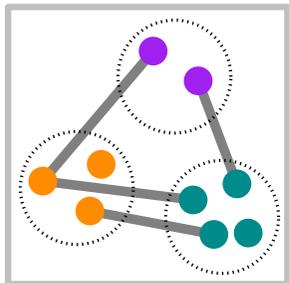
$$\Rightarrow |f^{-1}(i)| \leq \alpha(G) \Rightarrow \frac{n}{\chi(G)} \leq \alpha(G) \Rightarrow \chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}.$$

**Kor.**  $\chi(G) \geq \max \{ \omega(G), n/\alpha(G) \}.$

**Beob<sub>3</sub>.**  $\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}} \right\rfloor.$

**Beweis.** Sei  $f$  eine  $k$ -Färbung von  $G$  mit  $k = \chi(G)$   
Zwischen je 2 Farbklassen bzgl.  $f$  gibt's  $\geq 1$  Kante.

(Sonst gäb's eine  $(k-1)$ -Färbung!)



$$\Rightarrow |E| \geq k(k-1)/2 \Rightarrow \chi(G) = k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}}$$

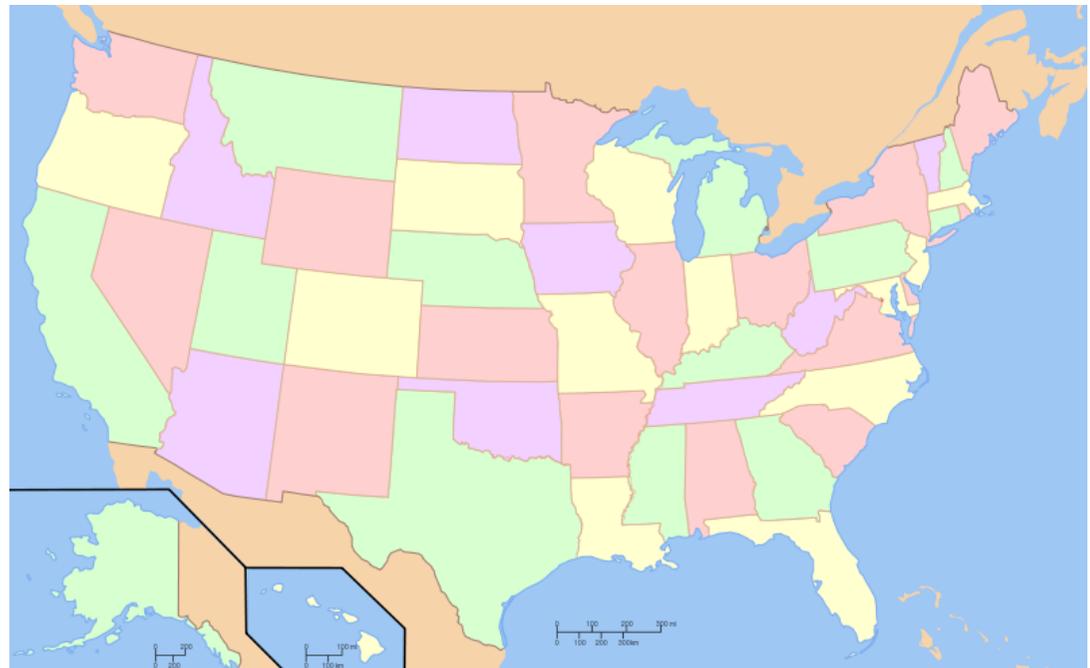
□

**Übung.** Finde Graphen, für die Gleichheit in Beob<sub>3</sub> gilt!

↪ z.B. vollständiger Graph  $K_n$  mit  $n$  Knoten

# Anwendungen Färbungen

- Frequenzzuweisung bei Mobilfunk (Kante bedeutet Interferenz)
- Färben von politischen Landkarten (*planare* Graphen)
- Ablaufplanung (minimiere Makespan) bei Zugriff auf beschränkte Ressourcen



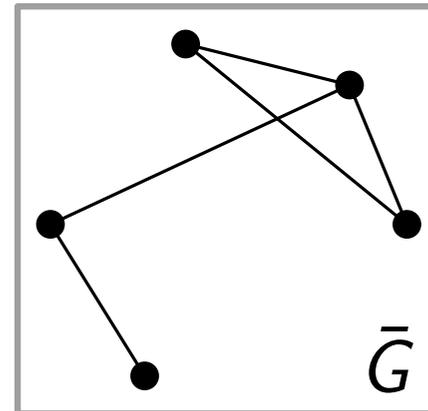
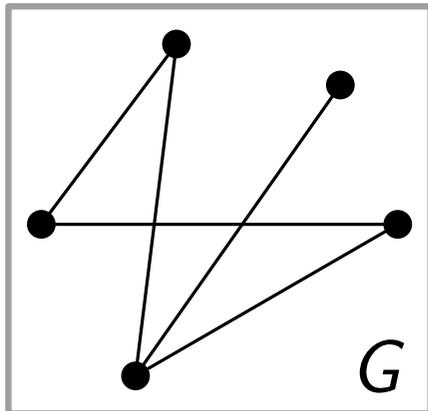
# Komplementgraph

**Def.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.  
 Dann ist  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  mit  $\bar{E} := \binom{V}{2} \setminus E$  der  
*Komplementgraph* von  $G$ .

**Beob<sub>4</sub>.** Es gilt

- (i)  $|E| + |\bar{E}| = \binom{|V|}{2}$
- (ii)  $\overline{\bar{G}} = G$
- (iii)  $S$  Clique in  $G \Leftrightarrow S$  unabhängig in  $\bar{G}$
- (iv)  $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$  und  $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$

Menge aller 2-elementigen  
Teilmengen von  $V$



# Perfekte Graphen

**Def.** Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt *perfekt*, wenn für jeden *induzierten* Teilgraphen  $H$  von  $G$  gilt:  $\omega(H) = \chi(H)$ .

ex.  $U \subseteq V$  mit  $H = G[U] = (U, \{uv \in E \mid u, v \in U\})$

Beob<sub>1</sub>: stets  $\omega(H) \leq \chi(H)$

Warum Anforderung für *alle* induzierten Teilgraphen und nicht nur  $\omega(G) = \chi(G)$ ?

betrachte  $G' := G + K_q$  für  $q := \chi(G)$

vollständiger Graph mit  $q$  „neuen“ Knoten

dann gilt  $q \leq \omega(G') \leq \chi(G') = \chi(G) = q$

$K_q$  Clique  $\curvearrowright$  Beob<sub>1</sub>  $\curvearrowright$   $G$  und  $K_q$  disj. und  $q$ -färbb.

$\Rightarrow \omega(G') = \chi(G')$  liefert keine strukturelle Info. über  $G'$  bzw.  $G$ .

# Perfect Graph Theorem

**Satz.**  $G$  ist genau dann perfekt, wenn  $\bar{G}$  perfekt ist.

**Beweis.** [Lovász '72]  $\square$

**Bsp.**  $\omega(C_{2k+1}) = 2 < 3 = \chi(C_{2k+1})$  für  $k \geq 2$

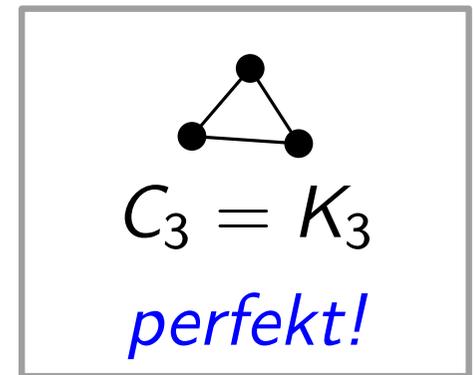
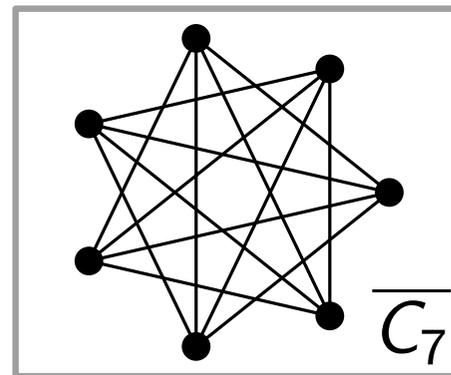
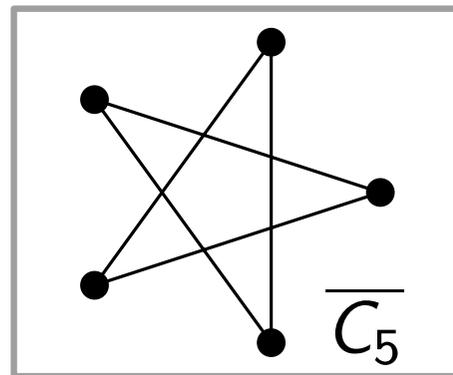
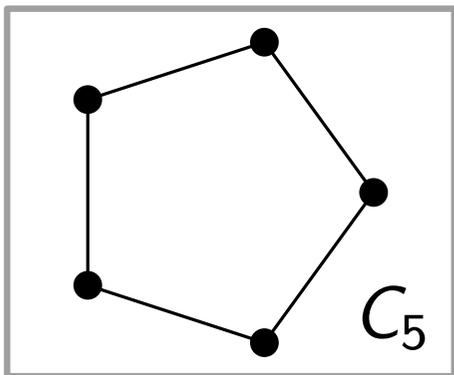
$\Rightarrow C_{2k+1}$  nicht perfekt  $\Rightarrow \overline{C_{2k+1}}$  nicht perfekt

$\uparrow$   $\uparrow$   
 ungerades Loch ungerades Antiloch

$G$  perfekt  $\Rightarrow$  kein induzierter Teilgraph von  $G$   
 ist ungerades Loch oder ungerades Antiloch



László Lovász



# Strong Perfect Graph Conjecture

**Vermutung.** [Berge '60]

**Satz.**  $G$  ist *genau* dann perfekt, wenn kein ind. Teilgraph von  $G$  ein ungerades Loch oder Antiloch ist.

**Beweis.** [Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas '03]  $\square$

**Erkennung.** Polynomialzeit [Chudnovsky et al. '03]

Warum perfekte Graphen?

Beliebige Graphen:

Berechnung der Zahlen  $\alpha(G)$ ,  $\omega(G)$  und  $\chi(G)$  ist NP-schwer!

**Satz.** Die Berechnung von  $\alpha(G)$ ,  $\omega(G)$  und  $\chi(G)$  ist für *perfekte* Graphen effizient möglich.

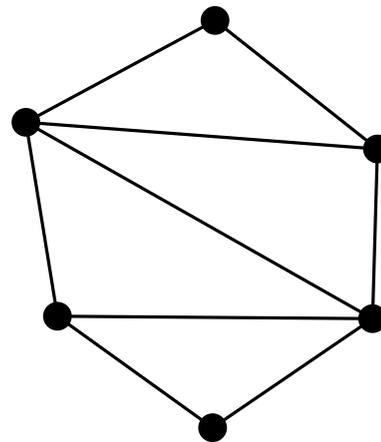
**Beweis.** [Grötschel, Lovász, Schrijver '88]  $\square$

Wir zeigen dies für eine Teilklasse, die sog. *chordalen* Graphen.

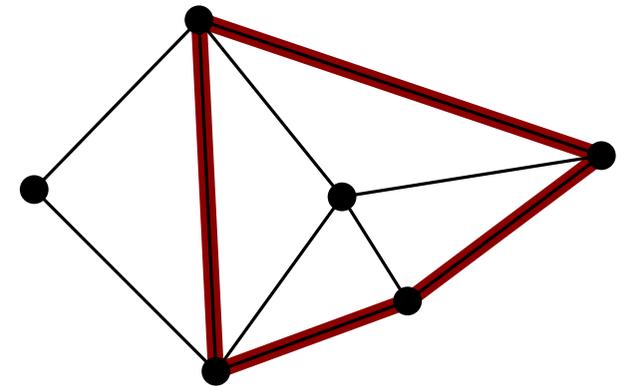
# Chordale Graphen

**Def.** Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt *chordal*, wenn jeder einfache Kreis der Länge  $\geq 4$  mindestens eine *Sehne* besitzt, d.h. eine Kante, die zwei nicht aufeinander folgende Knoten des Kreises verbindet.

Kein Knoten wird mehr als einmal besucht.



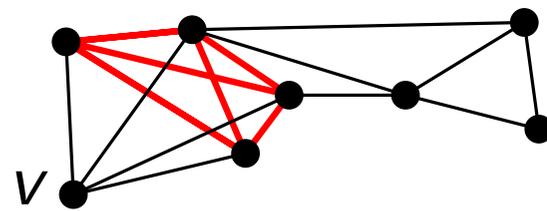
chordal



nicht chordal

**Beob<sub>5</sub>.**  $G$  chordal  $\Rightarrow$   
jeder induzierte Teilgraph von  $G$  ist chordal.

# Simpliziale Knoten



**Def.** Knoten  $v$  heißt *simplizial*, falls  $N(v)$  Clique in  $G$ .

**Satz.** Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

*Beweis.* [Dirac '61]

Induktion über  $n = |V|$

IA:  $G = \{v\} \rightsquigarrow$  O.K.

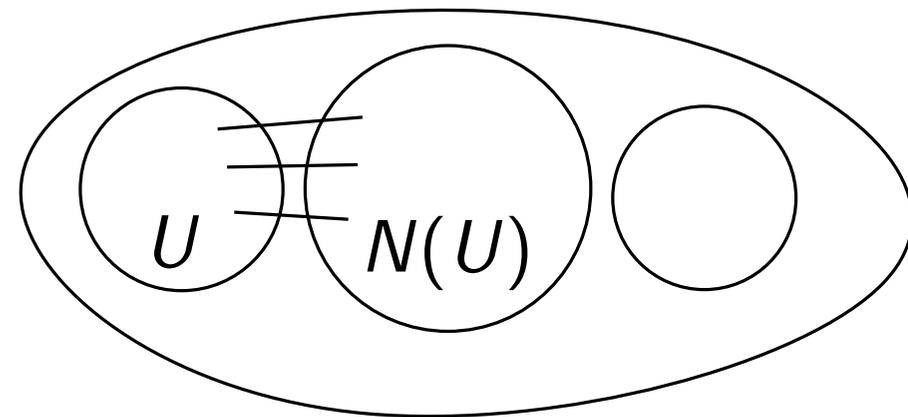
IS:  $n \geq 2$ , falls  $G = K_n \rightsquigarrow$  O.K.

angenommen  $G \neq K_n \rightsquigarrow$  existiert  $u \neq v$  mit  $uv \notin E$

wähle  $U \subseteq V$  mit maximaler Kardinalität, so dass

(i)  $G[U]$  zusammenhängend

(ii)  $U \cup N(U) \neq V$   $N(U) := \{a \in V - U \mid \exists b \in U: ab \in E\}$

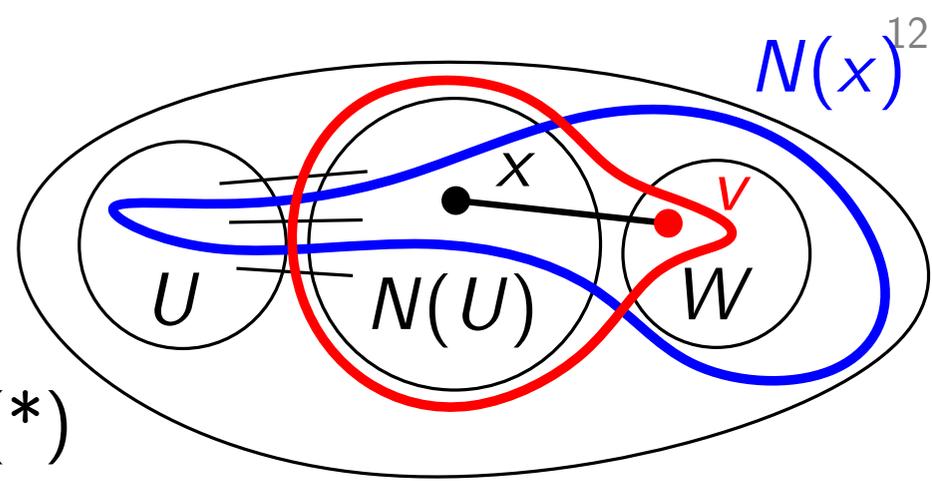


ein solches  $U$  existiert: setze  $U := \{u\} \rightsquigarrow v \notin N(u) \cup \{u\}$

# Beweis (Fortsetzung)

Sei  $W = V - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$ .

Für jedes  $x \in N(U)$ :  $W \subseteq N(x)$ . (\*)



Andernfalls:  $U' := U \cup \{x\}$ ,  $G[U']$  zshgd. und  $U' \cup N(U') \neq V$   
 $|U'| > |U| \Rightarrow \not\Leftarrow$  zur Maximalität von  $U$

Beob<sub>5</sub>.  $\Rightarrow G[W]$  chordal  $\stackrel{\text{I.V.}}{\Rightarrow}$  ex.  $v \in W$  simplizial in  $G[W]$

Behauptung:  $v$  simplizial in  $G$  (also  $N(v)$  Clique)

Nachbarn  $N(v) \cap W$  Clique, da  $v$  simplizial in  $G[W]$

Wegen (\*) ist jedes  $w \in N(v) \cap W$  adjazent zu jedem Knoten in  $N(U)$  und insb. zu jedem Knoten in  $N(v) \cap N(U) = N(U)$ .

Bleibt zu zeigen, dass  $N(U)$  Clique ist.

# Beweis (Fortsetzung)

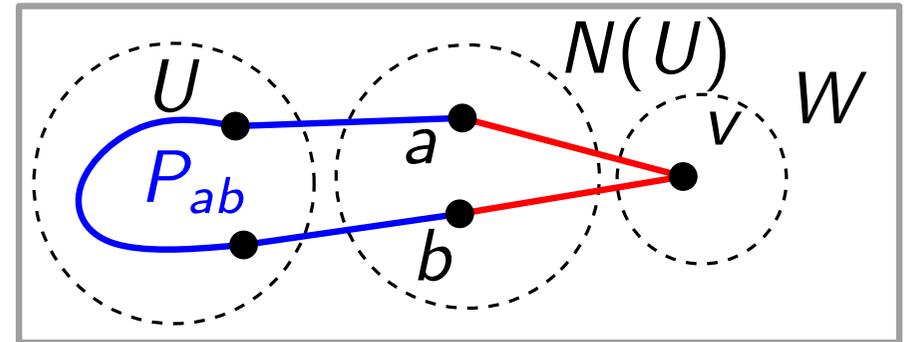
Bleibt zu zeigen, dass  $N(U)$  Clique ist.

Ang. ex.  $a \neq b$  in  $N(U)$  mit  $ab \notin E$ .

ex.  $a$ - $b$ -Weg  $P_{ab}$  in  $G[U \cup \{a, b\}]$  da  $G[U]$  zshgd.

o.E.  $P_{ab}$  kürzester solcher Weg

$P_{ab}$  hat Länge  $\geq 2$  da  $ab \notin E$



$\rightsquigarrow C := P_{ab} + bv + va$  ist elementarer Kreis der Länge  $\geq 4$

$C$  hat keine Sehne, da  $v \notin N(U)$  und  $P_{ab}$  kürzester Weg  $\nexists$

$\rightsquigarrow N(U)$  ist eine Clique

$\rightsquigarrow N(v)$  ist eine Clique

$\rightsquigarrow v$  ist simplizialer Knoten in  $G$

□

# Perfektes Eliminationsschema

**Def.** Eine Nummerierung  $(v_1, \dots, v_n)$  der Knotenmenge  $V$  heißt *perfektes Eliminationsschema*, wenn für  $i = 1, \dots, n$  gilt:  $v_i$  ist simplizial in  $G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ .

$v_1$  ist simplizial in  $G[V] = G$

$v_2$  ist simplizial in  $G[V - v_1] = G - v_1$

$v_3$  ist simplizial in  $G - \{v_1, v_2\}$  usw.

Chordale Graphen:  
Iteriere Dirac!

# Chordalität und Eliminationsschemata

**Satz.**  $G$  chordal  $\Leftrightarrow G$  hat perfektes Eliminationsschema

*Beweis.*

„ $\Rightarrow$ “ Iteriere Dirac (vgl. vorherige Folie)

„ $\Leftarrow$ “

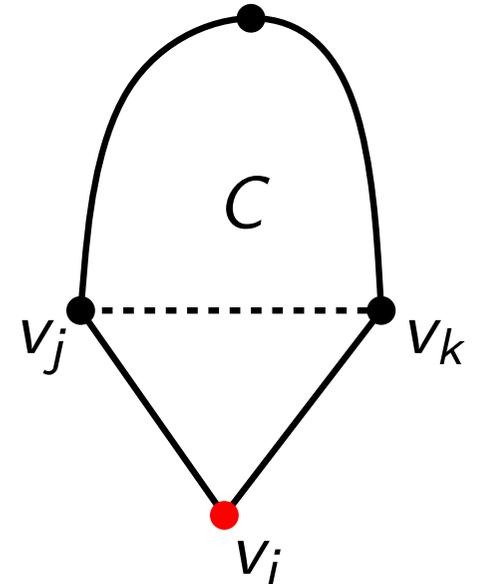
Sei  $K$  einfacher Kreis der Länge  $\geq 4$ .

Sei  $v_i \in K$  Knoten mit kleinster Nummer  $i$  im Eliminationsschema.

Nachbarn  $v_j, v_k$  von  $v_i$  auf  $K$  sind adjazent in  $G$ , da  $v_i$  simplizial in  $G[v_i, \dots, v_n]$  und  $j, k \geq i$ . □

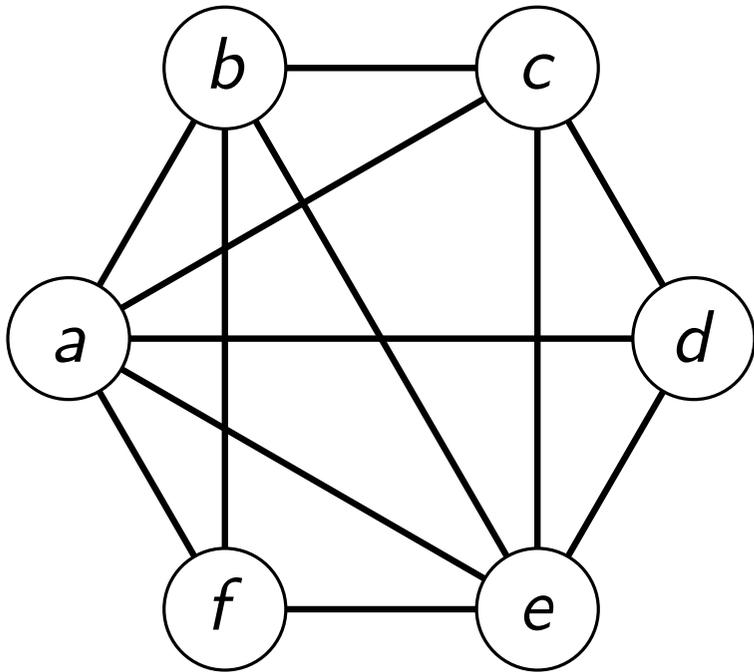
Perfektes Eliminationsschema lässt sich in Polynomialzeit errechnen. (Iteriere Dirac:  $O(V^4) = O(V \cdot V \cdot V^2)$ ).

Mit mehr „Cleverness“ sogar *Linearzeit* möglich!

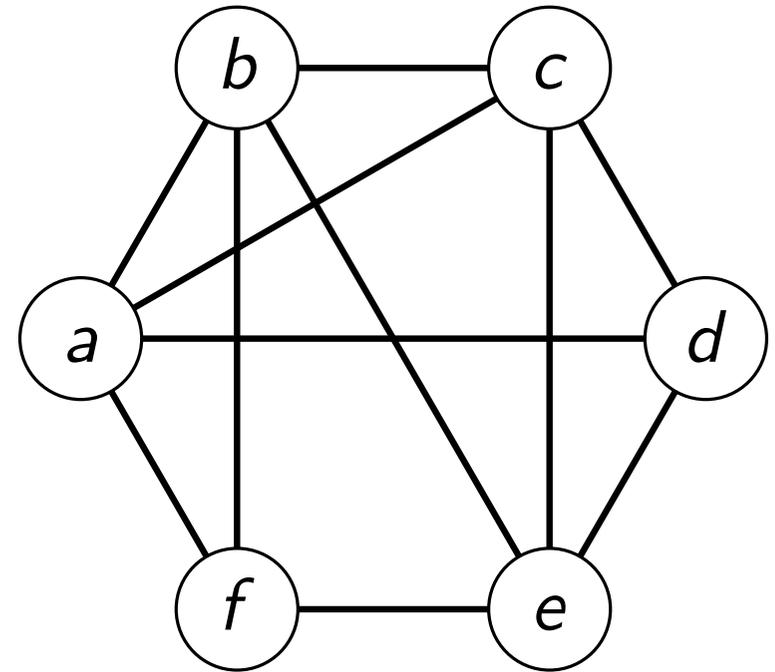


# Anwendungen der Charakterisierung

Zeigen Sie, dass dieser Graph chordal ist:



Zeigen Sie, dass dieser Graph *nicht* chordal ist:



# Berechnung einer größten Clique

**Lemma.** Sei  $v_1, \dots, v_n$  perfektes Eliminationsschema.  
Dann hat jede nicht-erweiterbare Clique  $C$  in  $G$   
die Form  $C = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\})$ .

*Beweis.* Sei  $v_i \in C$  mit kleinstem  $i$ .

$N'(v_i) := N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}$  Clique,  
da  $v_i$  simplizial in  $G[v_i, \dots, v_n]$ .

$N'(v_i)$  enthält alle Knoten aus  $C - v_i$ , da  $i$  min.

Da  $C$  nicht erweiterbar ist, gilt  $\{v_i\} \cup N'(v_i) = C$ .  $\square$

Es gibt  $\leq |V|$  Cliques obiger Form in  $G$ .

Also können wir eine größte Clique (und somit  $\omega(G)$ ) in  
Polynomialzeit berechnen – durch Aufzählen dieser Cliques.

# Berechnung einer optimaler Färbung

- Färbe  $v_n$  mit 1.
- Für  $i = n - 1, \dots, 1$ :   $v_{i+1}, \dots, v_n$  bereits gefärbt  
Färbe  $v_i$  mit kleinstmöglicher natürlicher Zahl.

Da  $v_i \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}) =: C_i$  Clique, gilt  $|C_i| \leq \omega(G)$ .

Also  $|N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}| \leq \omega(G) - 1$ .

$\Rightarrow$  Können  $v_i$  stets mit einer der Farben  $\{1, \dots, \omega(G)\}$  färben.

Wegen  $\omega(G) \leq \chi(G)$  gilt, dass unsere Färbung optimal ist!

Außerdem  $\omega(H) = \chi(H) \dots$  für jeden induz. Teilgraphen  $H$ .

**Satz.** Jeder chordale Graph ist perfekt.

In chordalen Graphen kann man größte Cliques und optimale Färbungen effizient ermitteln.