Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2020/21
23. Vorlesung

Greedy- und Approximationsalgorithmen

Prof. Dr. Alexander Wolff

Lehrstuhl für Informatik I

Operations Research

Optimierung für Wirtschaftsabläufe:

- Standortplanung
- Ablaufplanung
- Flottenmanagement
- Pack- und Zuschnittprobleme
- ...

Operations Research

Optimierung für Wirtschaftsabläufe:

- Standortplanung
- Ablaufplanung
- Flottenmanagement
- Pack- und Zuschnittprobleme
- ...

Werkzeuge:

Statistik, Algorithmen, Wahrscheinlichkeitstheorie, Spieltheorie, Graphentheorie, mathematische Programmierung, Simulation...

Operations Research

Optimierung für Wirtschaftsabläufe:

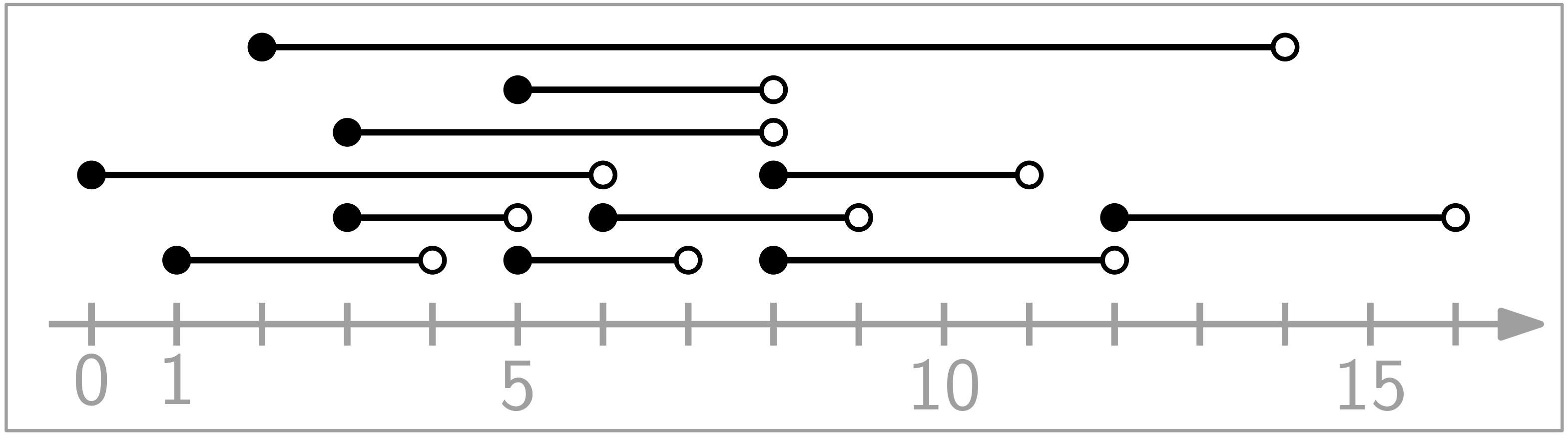
- Standortplanung
- Ablaufplanung
- Flottenmanagement
- Pack- und Zuschnittprobleme
- ...

Werkzeuge:

Statistik, Algorithmen, Wahrscheinlichkeitstheorie, Spieltheorie, Graphentheorie, mathematische Programmierung, Simulation...

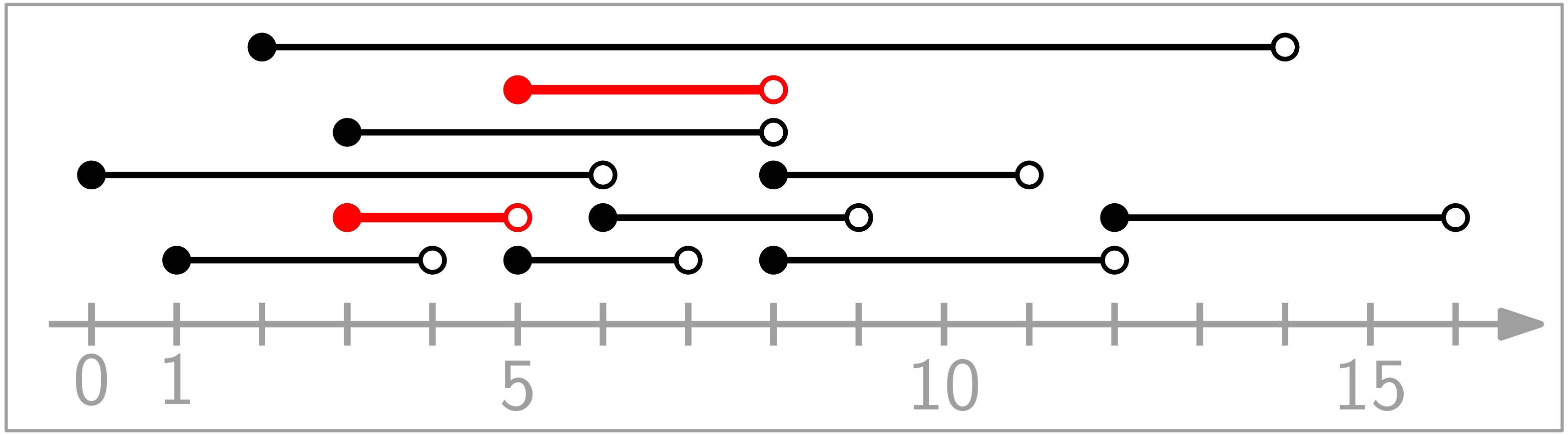
Ein einfaches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von *Aktivitäten*, wobei für $i = 1, \dots, n$ gilt $a_i = [s_i, e_i)$.



Ein einfaches Problem der Ablaufplanung

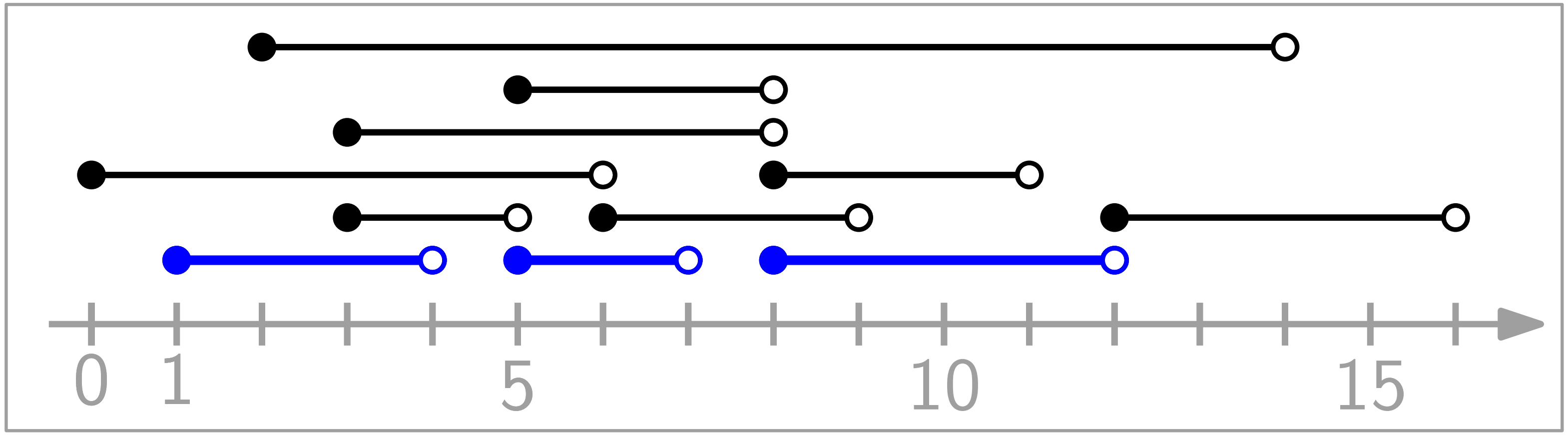
Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von *Aktivitäten*, wobei für $i = 1, \dots, n$ gilt $a_i = [s_i, e_i)$.



a_i und a_j sind *kompatibel*, wenn $a_i \cap a_j = \emptyset$.

Ein einfaches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von *Aktivitäten*, wobei für $i = 1, \dots, n$ gilt $a_i = [s_i, e_i)$.

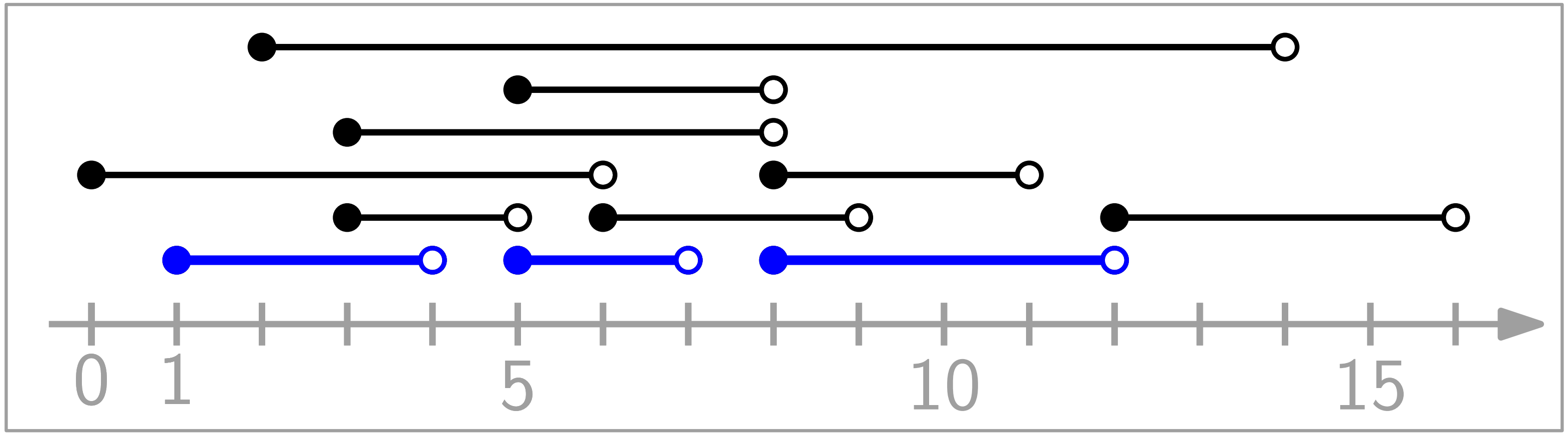


a_i und a_j sind *kompatibel*, wenn $a_i \cap a_j = \emptyset$.

Die Aktivitäten in $A' \subset A$ sind *paarweise kompatibel*, wenn für jedes Paar $a_i, a_j \in A'$ gilt, dass a_i und a_j kompatibel sind.

Ein einfaches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von *Aktivitäten*, wobei für $i = 1, \dots, n$ gilt $a_i = [s_i, e_i)$.



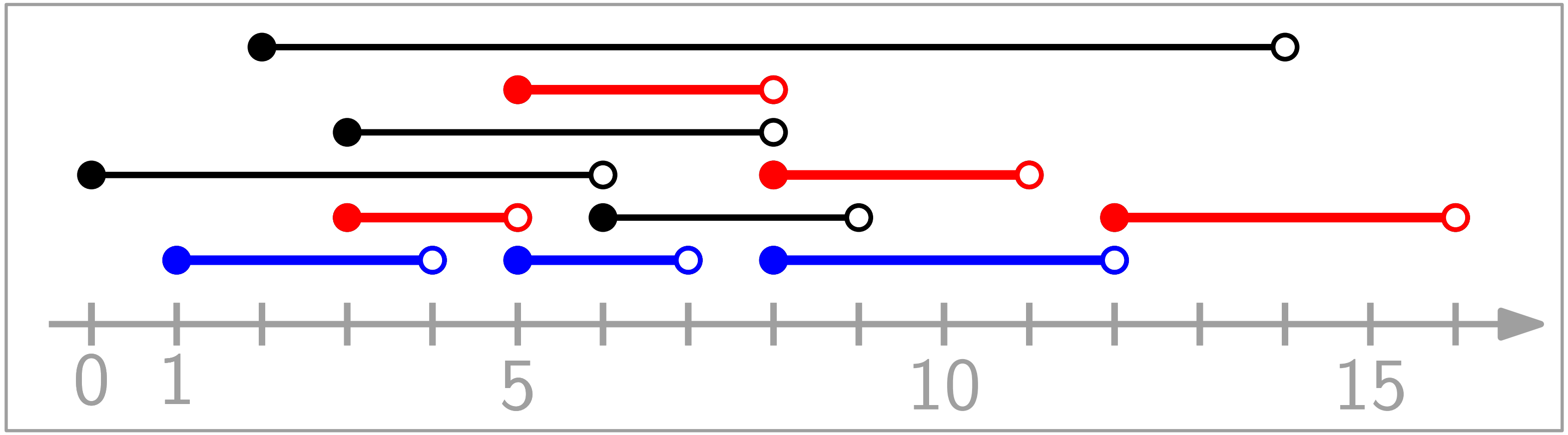
a_i und a_j sind *kompatibel*, wenn $a_i \cap a_j = \emptyset$.

Die Aktivitäten in $A' \subset A$ sind *paarweise kompatibel*, wenn für jedes Paar $a_i, a_j \in A'$ gilt, dass a_i und a_j kompatibel sind.

Gesucht: eine größtmögliche Menge paarweise kompatibler Aktivitäten.

Ein einfaches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ von *Aktivitäten*, wobei für $i = 1, \ldots, n$ gilt $a_i = [s_i, e_i)$.



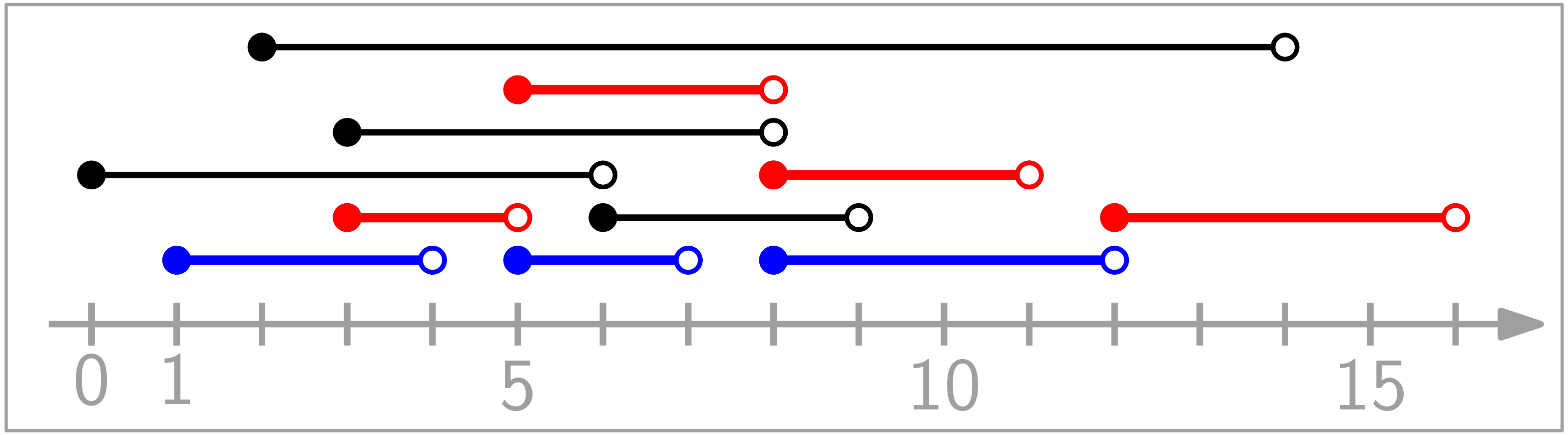
a_i und a_j sind *kompatibel*, wenn $a_i \cap a_j = \emptyset$.

Die Aktivitäten in $A' \subset A$ sind *paarweise kompatibel*, wenn für jedes Paar $a_i, a_j \in A'$ gilt, dass a_i und a_j kompatibel sind.

Gesucht: eine größtmögliche Menge paarweise kompatibler Aktivitäten.

Ein einfaches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von *Aktivitäten*, wobei für $i = 1, \dots, n$ gilt $a_i = [s_i, e_i)$.



a_i und a_j sind *kompatibel*, wenn $a_i \cap a_j = \emptyset$.

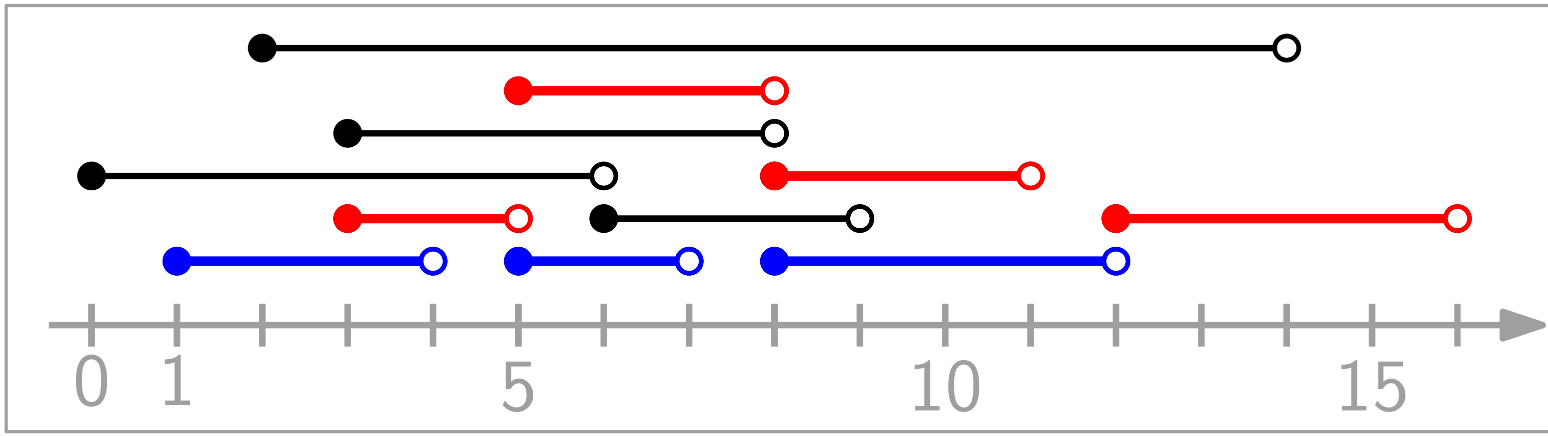
Die Aktivitäten in $A' \subset A$ sind *paarweise kompatibel*, wenn für jedes Paar $a_i, a_j \in A'$ gilt, dass a_i und a_j kompatibel sind.

Gesucht: eine größtmögliche Menge paarweise kompatibler Aktivitäten.

Grund:

Ein einfaches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ von *Aktivitäten*, wobei für $i = 1, \ldots, n$ gilt $a_i = [s_i, e_i)$.



a_i und a_j sind *kompatibel*, wenn $a_i \cap a_j = \emptyset$.

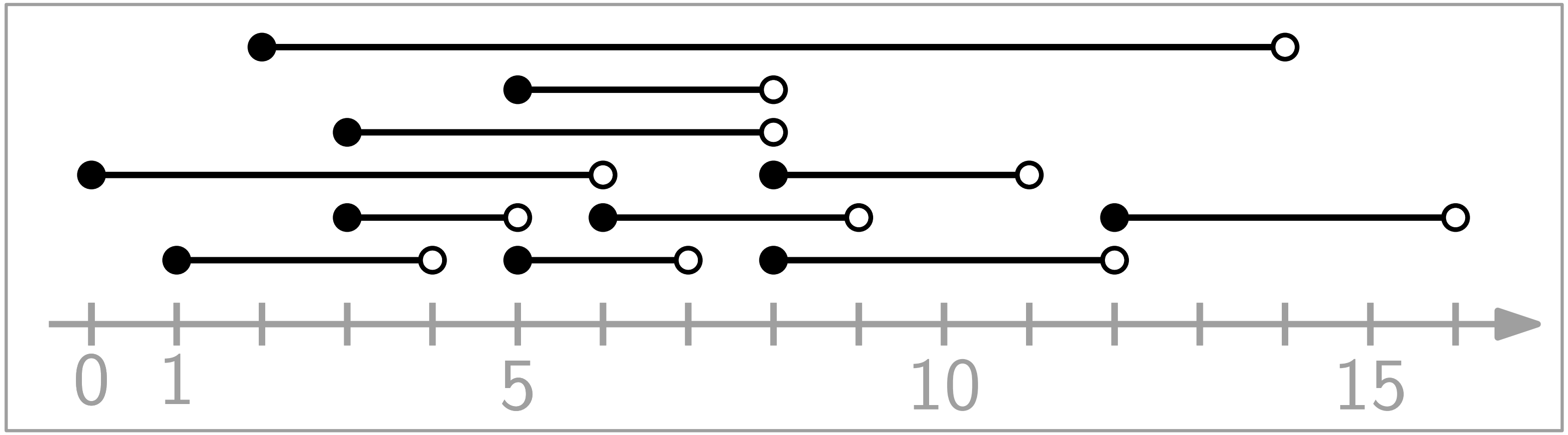
Die Aktivitäten in $A' \subset A$ sind *paarweise kompatibel*, wenn für jedes Paar $a_i, a_j \in A'$ gilt, dass a_i und a_j kompatibel sind.

Gesucht: eine größtmögliche Menge paarweise kompatibler Aktivitäten.

Grund: Aktivitäten (à 1€), die gleiche Ressource benutzen

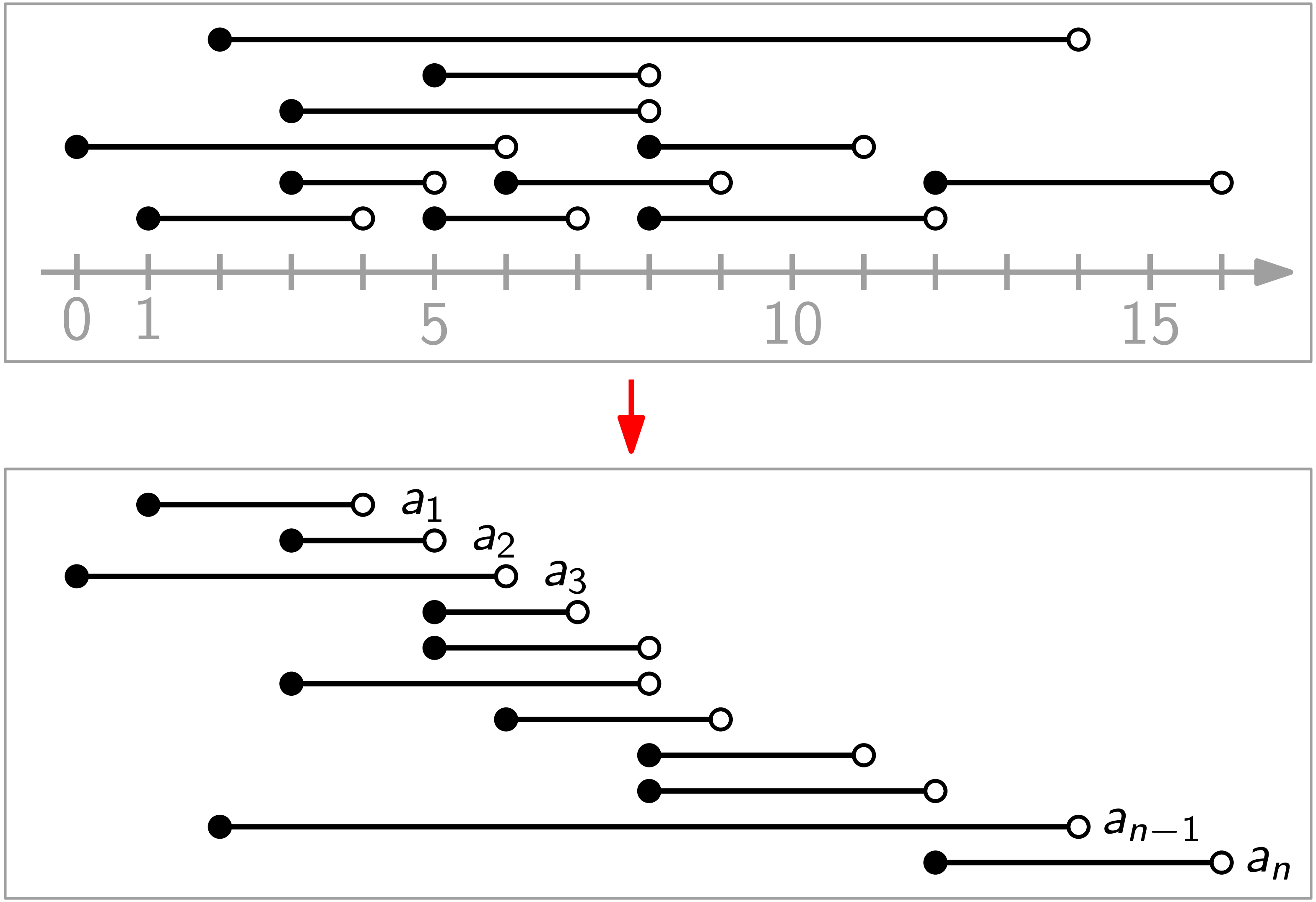
Ein kleiner technischer Trick

Wir nummerieren (für den Rest der Vorlesung) die Aktivitäten so, dass für die Endtermine gilt $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$.



Ein kleiner technischer Trick

Wir nummerieren (für den Rest der Vorlesung) die Aktivitäten so, dass für die Endtermine gilt $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$.



Charakterisierung optimaler Lösungen

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L opt. Lösung für A. – Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L opt. Lösung für A. – Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit

Charakterisierung optimaler Lösungen

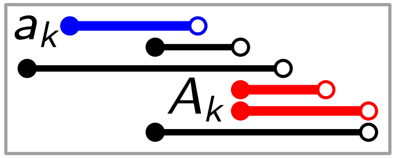
Idee: Sei L opt. Lösung für A. – Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit – weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L opt. Lösung für A. – Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit – weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.

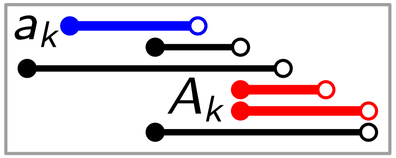


Sei $A_k = \{a_i \in A : s_i \geq e_k\}$ die Menge der Aktivitäten, die nach Ablauf von a_k beginnen.

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L opt. Lösung für A. – Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit – weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.



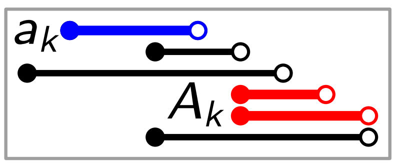
Sei $A_k = \{a_i \in A : s_i \geq e_k\}$ die Menge der Aktivitäten, die nach Ablauf von a_k beginnen.

Sei L_k eine optimale Lösung von A_k.

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L opt. Lösung für A. – Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste") in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit – weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.



Sei $A_k = \{a_i \in A : s_i \geq e_k\}$ die Menge der Aktivitäten, die nach Ablauf von a_k beginnen.

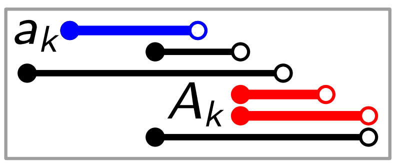
Sei L_k eine optimale Lösung von A_k.

Falls Intuition korrekt, dann ist $\{a_1\} \cup L_1$ optimal.

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L opt. Lösung für A. – Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit – weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.



Sei $A_k = \{a_i \in A : s_i \geq e_k\}$ die Menge der Aktivitäten, die nach Ablauf von a_k beginnen.

Sei L_k eine optimale Lösung von A_k.

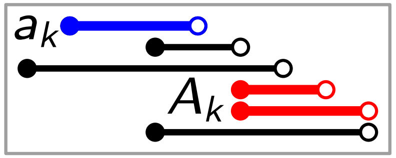
Falls Intuition korrekt, dann ist $\{a_1\} \cup L_1$ optimal.

Satz. Sei $A_k \neq \emptyset$.
Sei a_m Aktivität mit frühester Endzeit in A_k.

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L opt. Lösung für A. – Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste") in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit – weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.



Sei $A_k = \{a_i \in A : s_i \geq e_k\}$ die Menge der Aktivitäten, die nach Ablauf von a_k beginnen.

Sei L_k eine optimale Lösung von A_k.

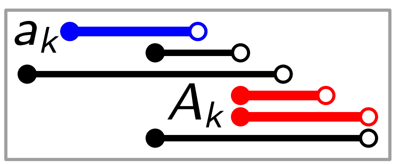
Falls Intuition korrekt, dann ist $\{a_1\} \cup L_1$ optimal.

Satz. Sei $A_k \neq \emptyset$.
Sei a_m Aktivität mit frühester Endzeit in A_k.
$\Rightarrow$ es gibt eine opt. Lösung von A_k, die a_m enthält.

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L opt. Lösung für A. – Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit – weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.



Sei $A_k = \{a_i \in A : s_i \geq e_k\}$ die Menge der Aktivitäten, die nach Ablauf von a_k beginnen.

Sei L_k eine optimale Lösung von A_k.

Falls Intuition korrekt, dann ist $\{a_1\} \cup L_1$ optimal.

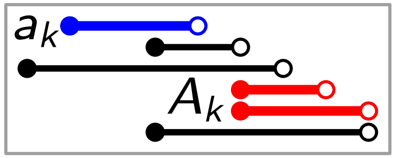
Satz. Sei $A_k \neq \emptyset$.
Sei a_m Aktivität mit frühester Endzeit in A_k.
$\Rightarrow$ es gibt eine opt. Lösung von A_k, die a_m enthält.

Beweis.

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L opt. Lösung für A. – Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste") in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit – weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.



Sei $A_k = \{a_i \in A : s_i \geq e_k\}$ die Menge der Aktivitäten, die nach Ablauf von a_k beginnen.

Sei L_k eine optimale Lösung von A_k.

Falls Intuition korrekt, dann ist $\{a_1\} \cup L_1$ optimal.

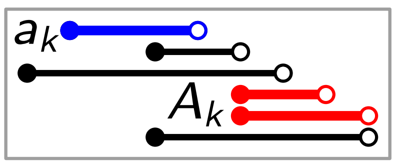
Satz. Sei $A_k \neq \emptyset$.
Sei a_m Aktivität mit frühester Endzeit in A_k.
$\Rightarrow$ es gibt eine opt. Lösung von A_k, die a_m enthält.

Beweis. *Austauschargument!*

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L opt. Lösung für A. – Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit – weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.



Sei $A_k = \{a_i \in A : s_i \geq e_k\}$ die Menge der Aktivitäten, die nach Ablauf von a_k beginnen.

Sei L_k eine optimale Lösung von A_k.

Falls Intuition korrekt, dann ist $\{a_1\} \cup L_1$ optimal.

Satz. Sei $A_k \neq \emptyset$.
Sei a_m Aktivität mit frühester Endzeit in A_k.
$\Rightarrow$ es gibt eine opt. Lösung von A_k, die a_m enthält.

optimale Teilstruktur!

Beweis. *Austauschargument!*

Greedy – rekursiv

Satz. Sei $A_k \neq \emptyset$.
Sei a_m Aktivität mit frühester Endzeit in A_k.
$\Rightarrow$ es gibt eine opt. Lösung von A_k, die a_m enthält.

optimale Teilstruktur!

Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

Satz. Sei $A_k \neq \emptyset$.
Sei a_m Aktivität mit frühester Endzeit in A_k.
$\Rightarrow$ es gibt eine opt. Lösung von A_k, die a_m enthält.

optimale Teilstruktur!

Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k

    return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)

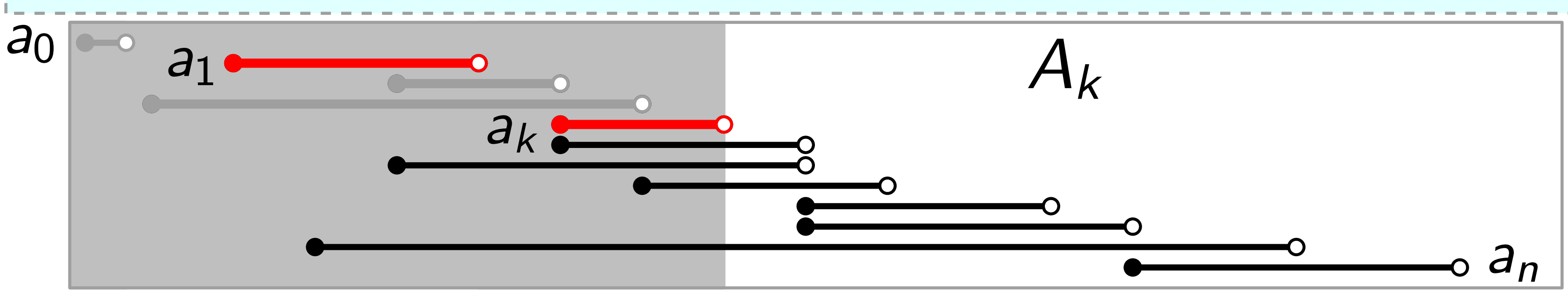
$\Rightarrow$ es gibt eine opt. Lösung von A_k, die a_m enthält.

Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für A_k

    return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)

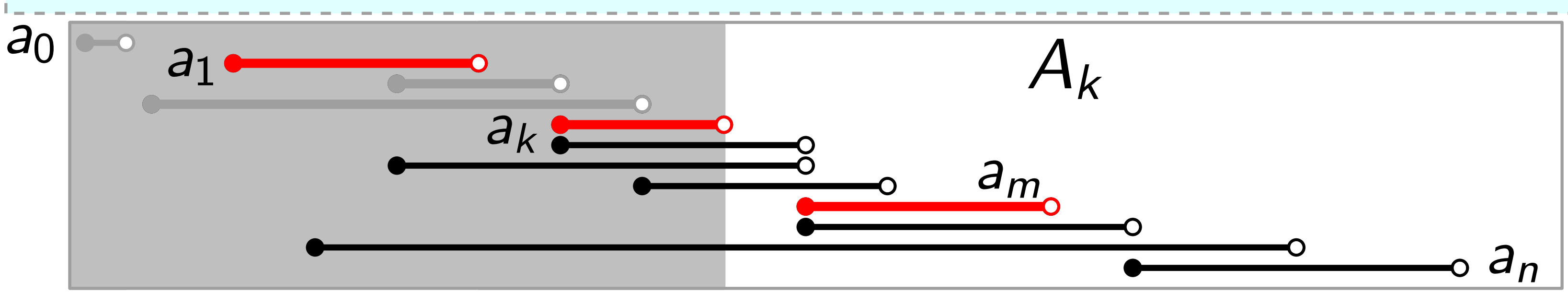


Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k

    return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)

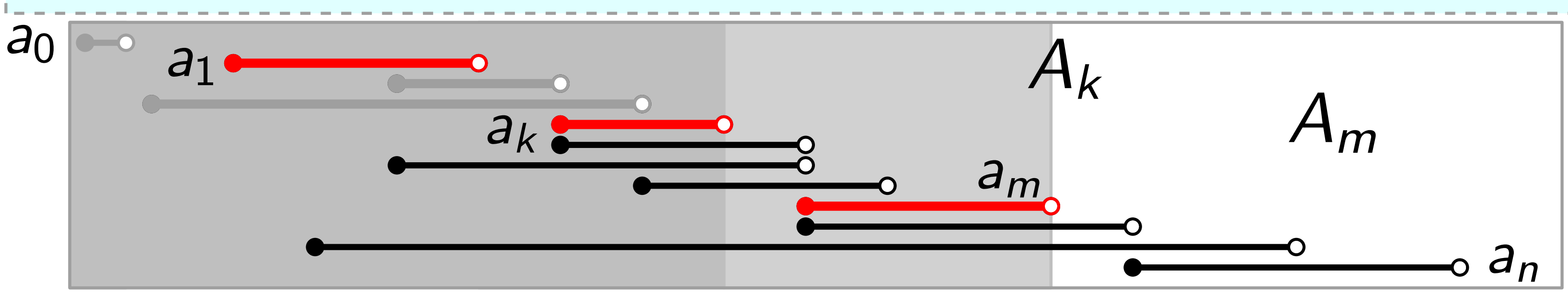


Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k

return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)

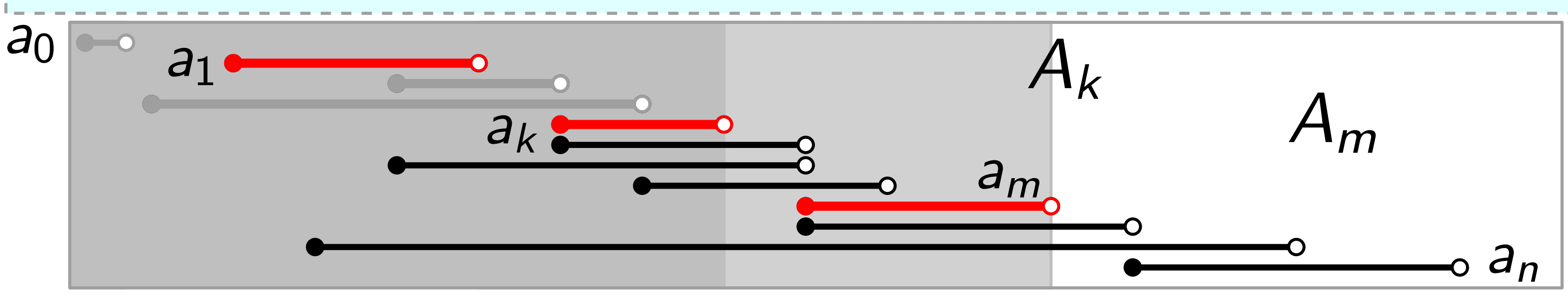


Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k
  $m = k + 1$; $n = s.length$
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while **do**

    return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)

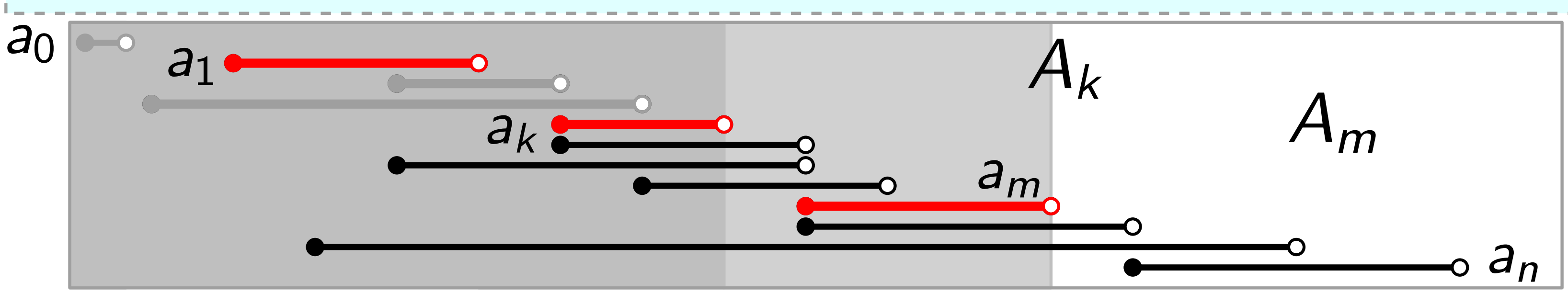


Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für A_k
  $m = k + 1$; $n = s.length$
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while $m \le n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**
    $m = m + 1$

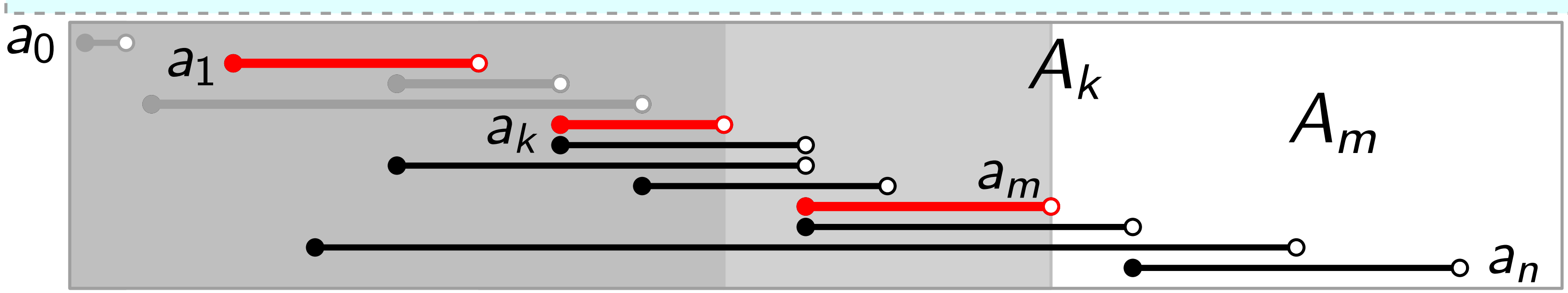
    return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

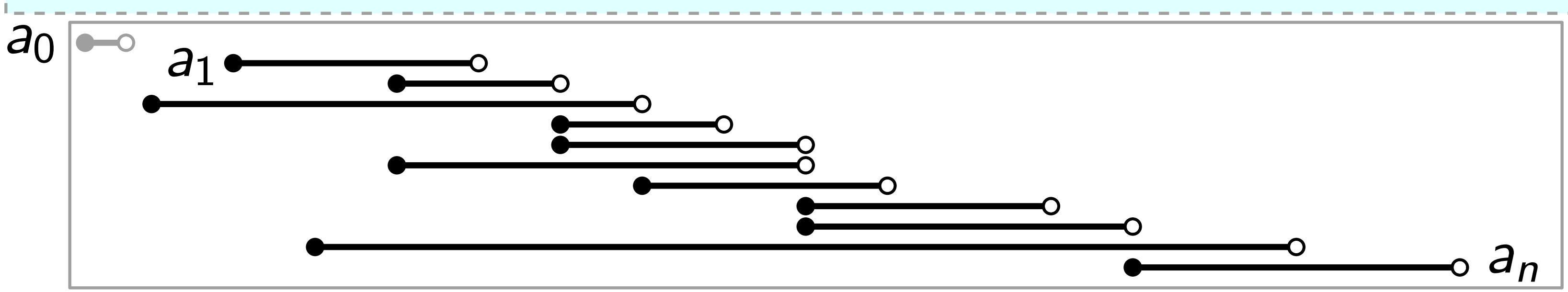
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für A_k
  $m = k + 1$; $n = s.length$
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**
    $m = m + 1$
  if $m > n$ **then return** $\emptyset$
  else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

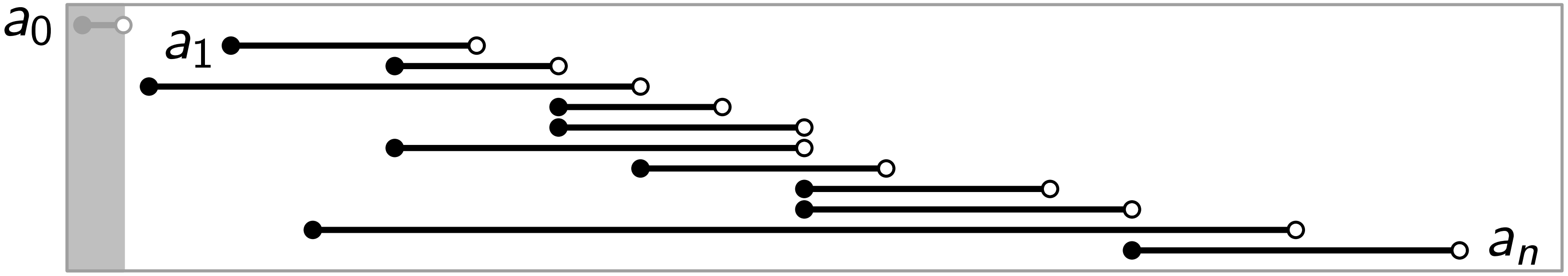
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für A_k
  $m = k + 1$; $n = s.length$
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**
    $m = m + 1$
  if $m > n$ **then return** $\emptyset$
  else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

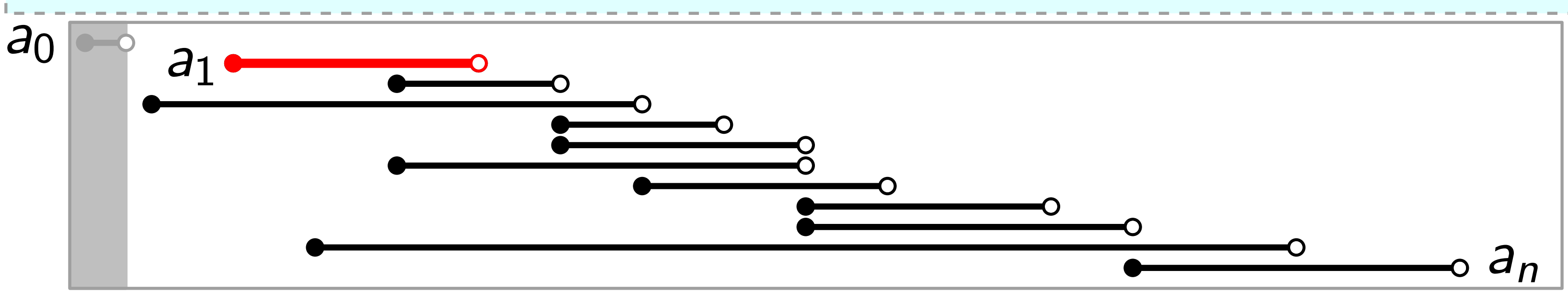
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k
  $m = k + 1$; $n = s.length$
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**
    $m = m + 1$
  if $m > n$ **then return** $\emptyset$
  else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

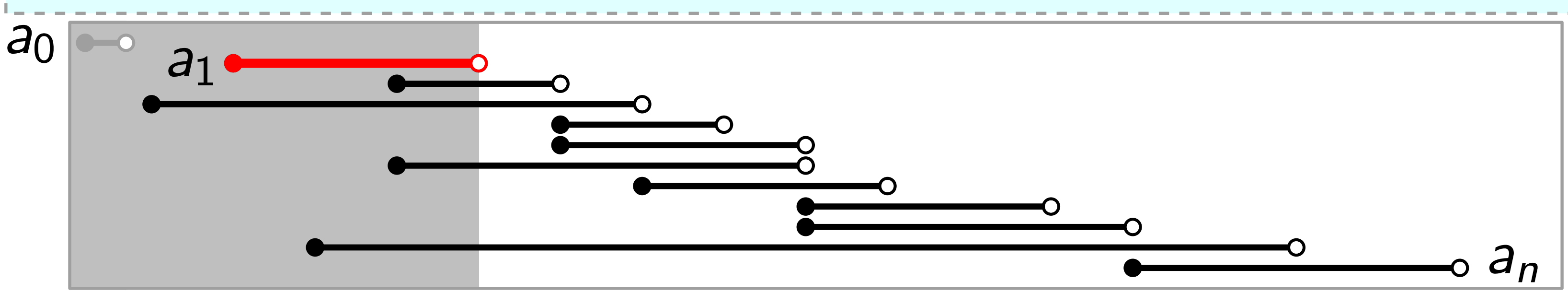
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für A_k
  $m = k + 1$; $n = s.length$
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**
    $m = m + 1$
  if $m > n$ **then return** $\emptyset$
  else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
   e_0 = −∞    // ⇒ A_0 = A
   // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
   return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k
  m = k + 1;  n = s.length
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while m ≤ n and s[m] < e[k] do
    m = m + 1
  if m > n then return ∅
  else return {a_m} ∪ GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)

$e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$

// Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig

return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k

$m = k + 1$; $n = s.length$

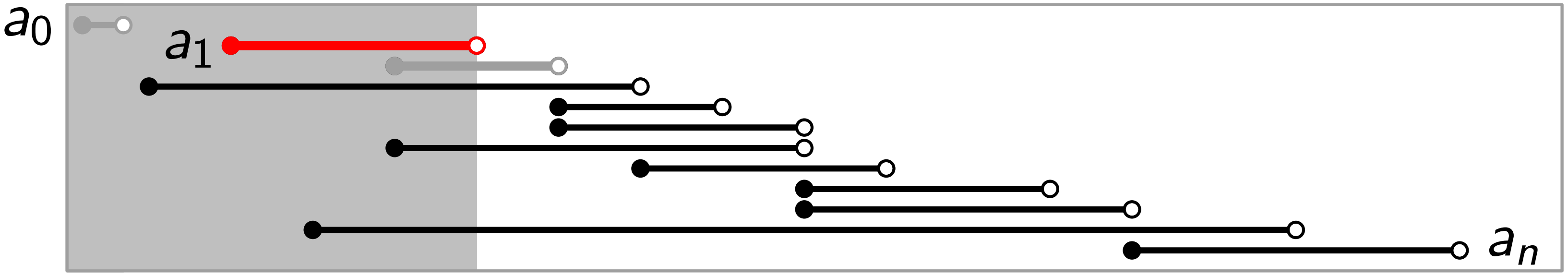
// Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k

while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**

$m = m + 1$

if $m > n$ **then return** $\emptyset$

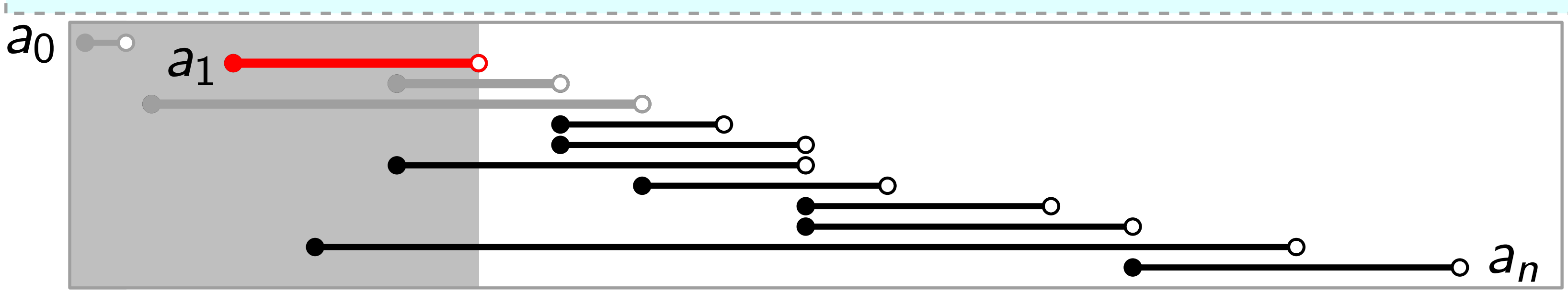
else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k
  $m = k + 1$; $n = s.length$
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**
    $m = m + 1$
  if $m > n$ **then return** $\emptyset$
  else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)

$e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$

// Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig

return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für A_k

$m = k + 1$; $n = s.length$

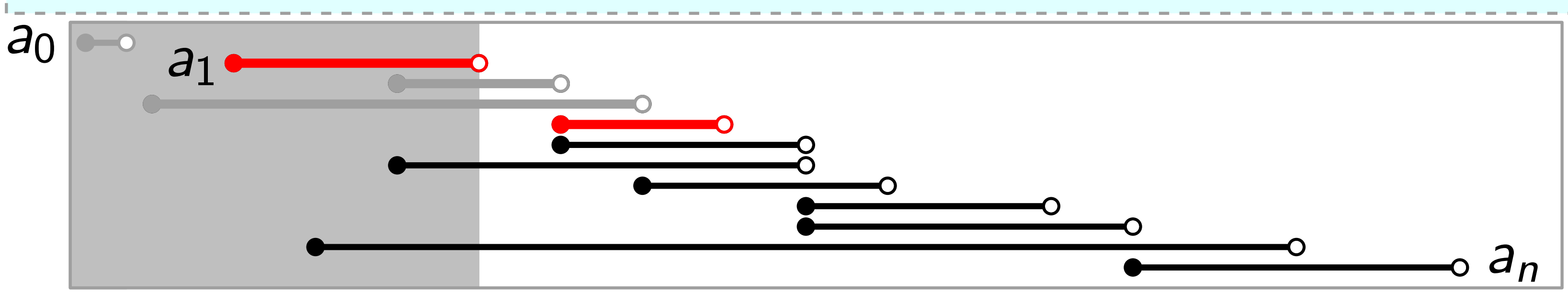
// Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k

while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**

$m = m + 1$

if $m > n$ **then return** $\emptyset$

else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)

  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$

  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig

  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für A_k

  $m = k + 1$; $n = s.\mathit{length}$

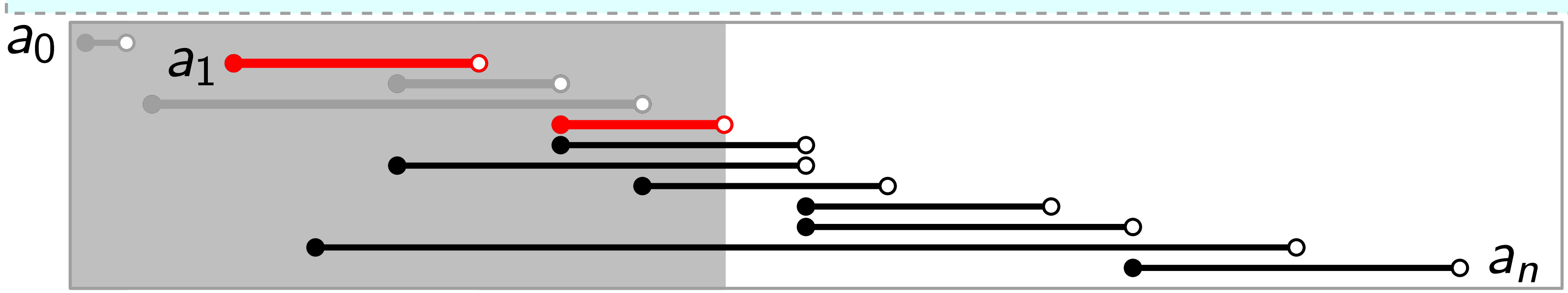
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k

  while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**

    $m = m + 1$

  if $m > n$ **then return** $\emptyset$

  else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)

$e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$

// Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig

return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k

$m = k + 1$; $n = s.length$

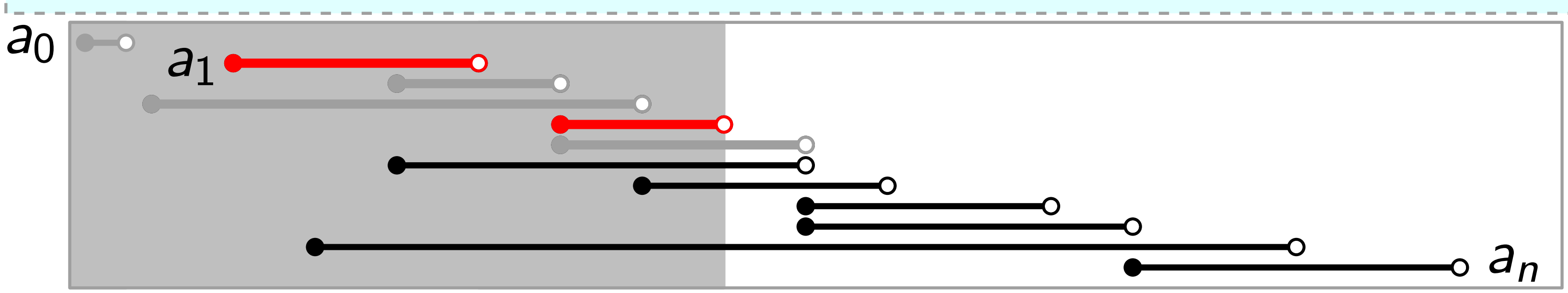
// Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k

while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**

$m = m + 1$

if $m > n$ **then return** $\emptyset$

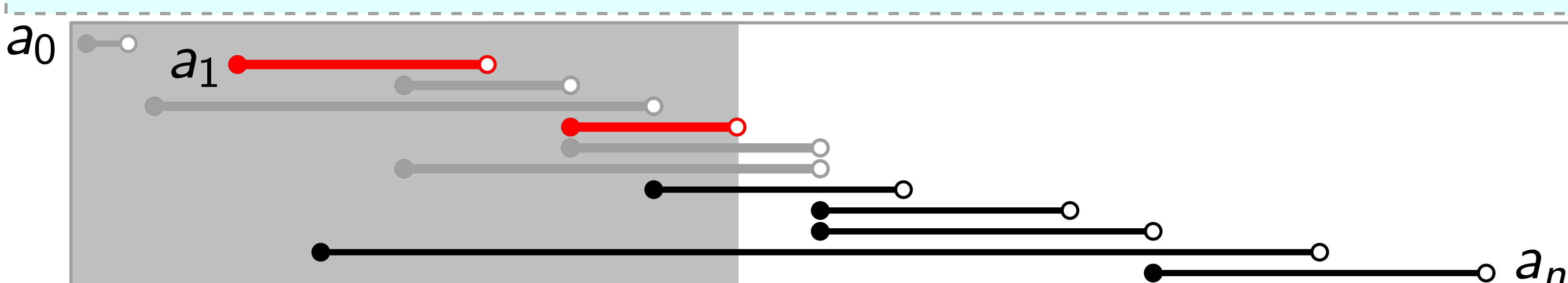
else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

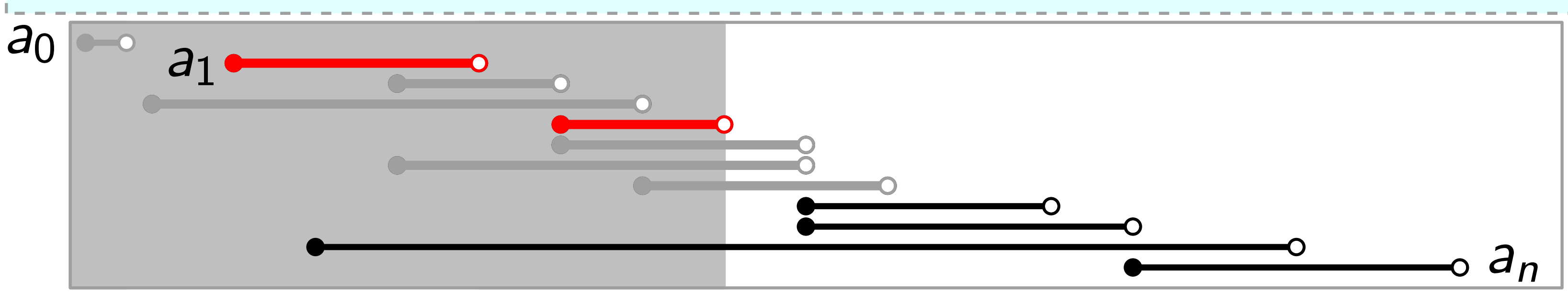
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k
  $m = k + 1$; $n = s.length$
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**
    $m = m + 1$
  if $m > n$ **then return** $\emptyset$
  else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

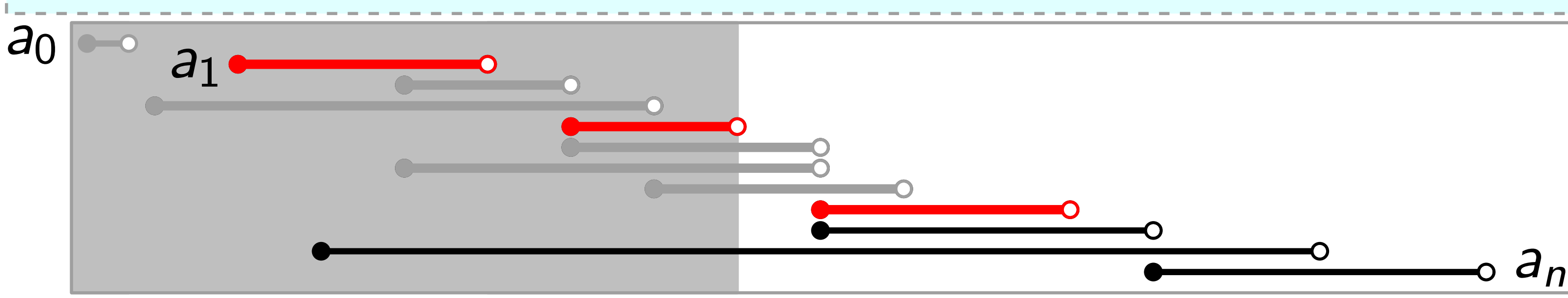
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k
  $m = k + 1$; $n = s.length$
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**
    $m = m + 1$
  if $m > n$ **then return** $\emptyset$
  else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

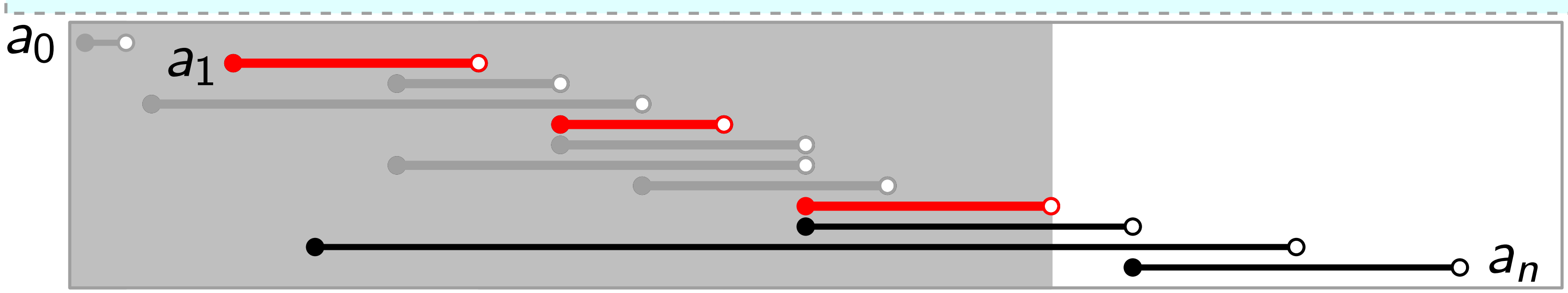
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k
  $m = k + 1$; $n = s.\mathit{length}$
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**
    $m = m + 1$
  if $m > n$ **then return** $\emptyset$
  else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
$e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
// Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

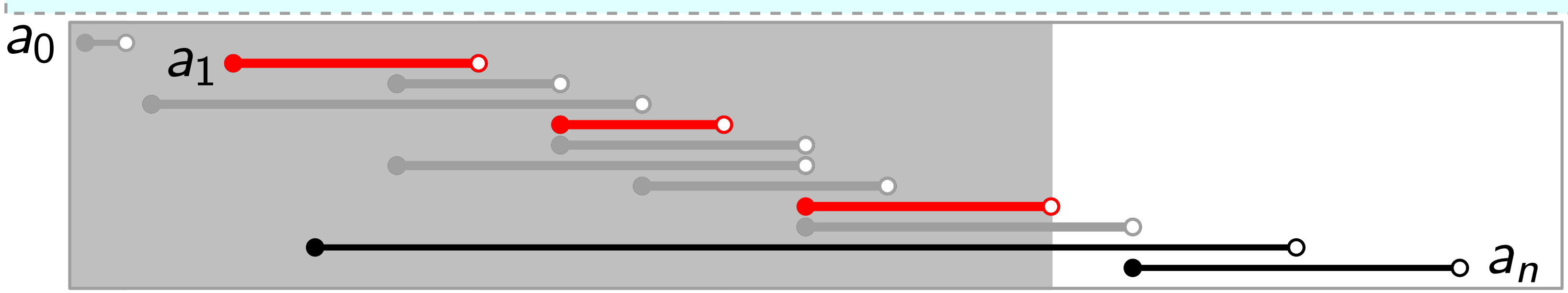
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k
$m = k + 1$; $n = s.length$
// Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**
 $m = m + 1$
if $m > n$ **then return** $\emptyset$
else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k
  $m = k + 1$; $n = s.length$
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**
    $m = m + 1$
  if $m > n$ **then return** $\emptyset$
  else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)

$e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$

// Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig

return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für A_k

$m = k + 1$; $n = s.length$

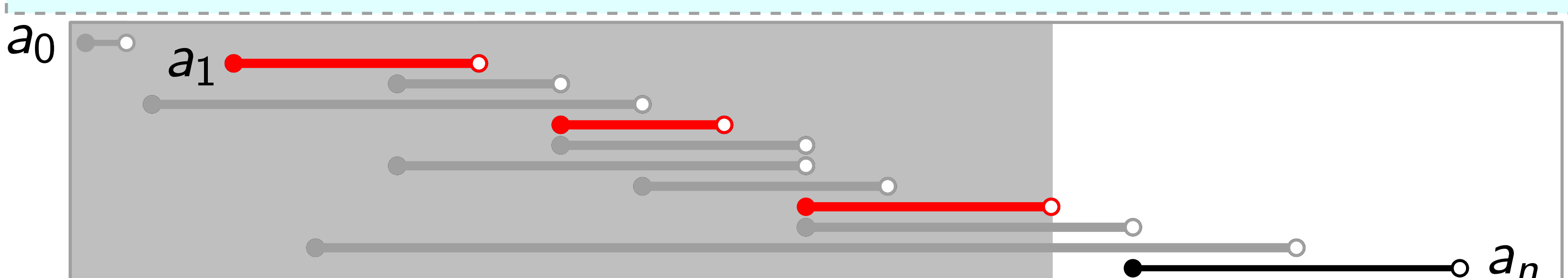
// Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k

while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**

  $m = m + 1$

if $m > n$ **then return** $\emptyset$

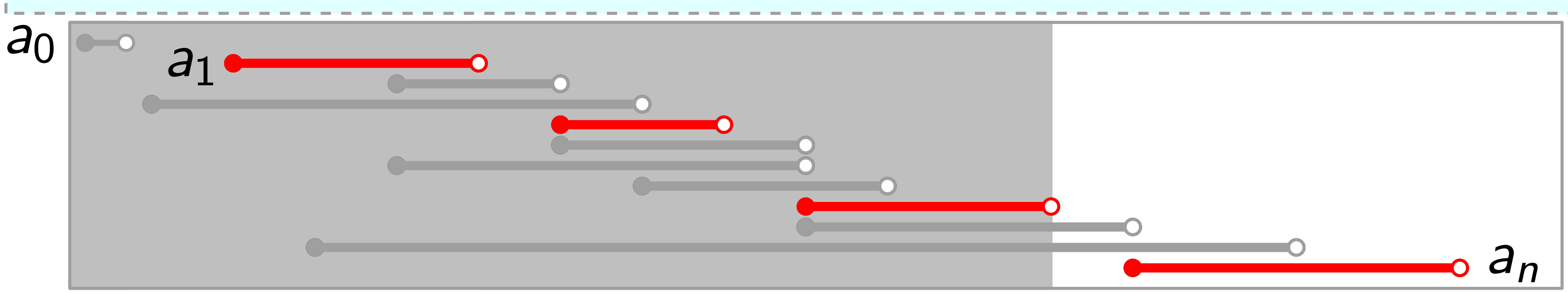
else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

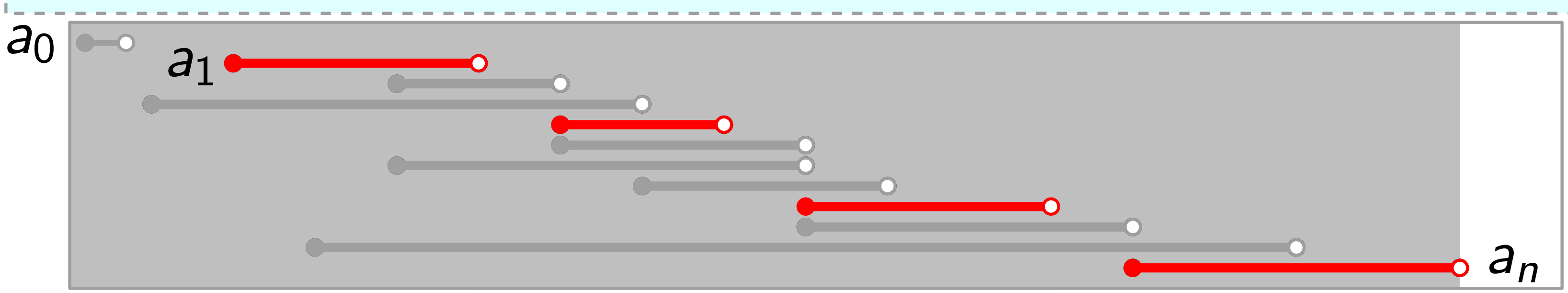
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k
  $m = k + 1$; $n = s.length$
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**
    $m = m + 1$
  if $m > n$ **then return** $\emptyset$
  else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ $\quad // \Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k
  $m = k + 1;\ \ n = s.length$
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**
    $m = m + 1$
  if $m > n$ **then return** $\emptyset$
  else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
   e_0 = −∞    // ⇒ A_0 = A
   // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
   return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k
  m = k + 1;  n = s.length
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while m ≤ n and s[m] < e[k] do
    m = m + 1
  if m > n then return ∅
  else return {a_m} ∪ GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```

Laufzeit?

Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k
  $m = k + 1$; $n = s.length$
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**
    $m = m + 1$
  if $m > n$ **then return** $\emptyset$
  else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)

Laufzeit? Wie oft wird m inkrementiert?

Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für A_k
  $m = k + 1$; $n = s.length$
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**
    $m = m + 1$
  if $m > n$ **then return** $\emptyset$
  else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)

Laufzeit? Wie oft wird m inkrementiert?
Insgesamt, über alle rekursiven Aufrufe, n Mal.

Greedy – rekursiv

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)

$e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$

// Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig

return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für A_k

$m = k + 1$; $n = s.length$

// Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k

while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**

$m = m + 1$

if $m > n$ **then return** $\emptyset$

else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)

Laufzeit? Wie oft wird m inkrementiert?

Insgesamt, über alle rekursiven Aufrufe, n Mal.

D.h. GreedyRecursive läuft (ohne Sortieren) in $\Theta(n)$ Zeit.

Greedy – ~~rekursiv~~

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)

  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$

  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig

  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für A_k

  $m = k + 1$; $n = s.\mathit{length}$

  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k

  while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**

    $m = m + 1$

  if $m > n$ **then return** $\emptyset$

  else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)

Laufzeit? Wie oft wird m inkrementiert?

Insgesamt, über alle rekursiven Aufrufe, n Mal.

D.h. GreedyRecursive läuft (ohne Sortieren) in $\Theta(n)$ Zeit.

Greedy – ~~rekursiv~~ *iterativ!*

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für A_k
  $m = k + 1$; $n = s.length$
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**
    $m = m + 1$
  if $m > n$ **then return** $\emptyset$
  else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)

Laufzeit? Wie oft wird m inkrementiert?
Insgesamt, über alle rekursiven Aufrufe, n Mal.
D.h. GreedyRecursive läuft (ohne Sortieren) in $\Theta(n)$ Zeit.

Greedy – ~~rekursiv~~ *iterativ!*

Schreiben Sie
GreedyIterative(int[]s, int[]e)!

GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  $e_0 = -\infty$ // $\Rightarrow A_0 = A$
  // Aktivitäten nach Endzeiten sortieren, falls nötig
  return GreedyRecursiveMain($s, e, 0$)

GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k)// best. Lsg. für A_k
  $m = k + 1$; $n = s.length$
  // Finde Aktivität a_m mit kleinster Endzeit in A_k
  while $m \leq n$ **and** $s[m] < e[k]$ **do**
    $m = m + 1$
  if $m > n$ **then return** $\emptyset$
  else return $\{a_m\} \cup$ GreedyRecursiveMain(s, e, m)

Laufzeit? Wie oft wird m inkrementiert?
Insgesamt, über alle rekursiven Aufrufe, n Mal.
D.h. GreedyRecursive läuft (ohne Sortieren) in $\Theta(n)$ Zeit.

Greedy – iterativ

```
GreedyIterative(int[] s, int[] e)
  n = s.length
  if n = 0 then return ∅
  L = {a_1}
  k = 1    // höchster Index in L
  for m = 2 to n do

  return L
```

Greedy – iterativ

```
GreedyIterative(int[] s, int[] e)
  n = s.length
  if n = 0 then return ∅
  L = {a_1}
  k = 1    // höchster Index in L
  for m = 2 to n do
      if s[m] ≥ e[k] then
          L = L ∪ {a_m}
          k = m
  return L
```

Greedy – iterativ

```
GreedyIterative(int[] s, int[] e)
  n = s.length
  if n = 0 then return ∅
  L = {a_1}
  k = 1    // höchster Index in L
  for m = 2 to n do
    if s[m] ≥ e[k] then
      L = L ∪ {a_m}
      k = m
  return L
```

Laufzeit?

Greedy – iterativ

```
GreedyIterative(int[] s, int[] e)
  n = s.length
  if n = 0 then return ∅
  L = {a_1}
  k = 1    // höchster Index in L
  for m = 2 to n do
      if s[m] ≥ e[k] then
          L = L ∪ {a_m}
          k = m
  return L
```

Laufzeit? GreedyIterative läuft ebenfalls in $\Theta(n)$ Zeit.

Greedy – iterativ

```
GreedyIterative(int[] s, int[] e)
  n = s.length
  if n = 0 then return ∅
  L = {a_1}
  k = 1      // höchster Index in L
  for m = 2 to n do
      if s[m] ≥ e[k] then
          L = L ∪ {a_m}
          k = m
  return L
```

Laufzeit? GreedyIterative läuft ebenfalls in $\Theta(n)$ Zeit.

Bemerkung: GreedyIterative berechnet dieselbe optimale Lösung wie GreedyRecursive

Greedy – iterativ

```
GreedyIterative(int[] s, int[] e)
  n = s.length
  if n = 0 then return ∅
  L = {a_1}
  k = 1    // höchster Index in L
  for m = 2 to n do
    if s[m] ≥ e[k] then
      L = L ∪ {a_m}
      k = m
  return L
```

Laufzeit? GreedyIterative läuft ebenfalls in $\Theta(n)$ Zeit.

Bemerkung: GreedyIterative berechnet dieselbe optimale Lösung wie GreedyRecursive – die „linkeste“.

Die Greedy-Strategie

Die Greedy-Strategie

1. Teste, ob das Problem optimale Teilstruktur aufweist.

Die Greedy-Strategie

1. Teste, ob das Problem optimale Teilstruktur aufweist.
2. Entwickle eine rekursive Lösung

Die Greedy-Strategie

1. Teste, ob das Problem optimale Teilstruktur aufweist.
2. Entwickle eine rekursive Lösung
3. Zeige, dass bei einer Greedy-Entscheidung nur *ein* Teilproblem bleibt

Die Greedy-Strategie

1. Teste, ob das Problem optimale Teilstruktur aufweist.
2. Entwickle eine rekursive Lösung
3. Zeige, dass bei einer Greedy-Entscheidung nur *ein* Teilproblem bleibt
4. Beweise, dass die Greedy-Wahl „sicher“ ist (vgl. Kruskal!)

Die Greedy-Strategie

1. Teste, ob das Problem optimale Teilstruktur aufweist.
2. Entwickle eine rekursive Lösung
3. Zeige, dass bei einer Greedy-Entscheidung nur *ein* Teilproblem bleibt
4. Beweise, dass die Greedy-Wahl „sicher" ist (vgl. Kruskal!)
5. Entwickle einen rekursiven Greedy-Algorithmus

Die Greedy-Strategie

1. Teste, ob das Problem optimale Teilstruktur aufweist.
2. Entwickle eine rekursive Lösung
3. Zeige, dass bei einer Greedy-Entscheidung nur *ein* Teilproblem bleibt
4. Beweise, dass die Greedy-Wahl „sicher“ ist (vgl. Kruskal!)
5. Entwickle einen rekursiven Greedy-Algorithmus
6. Konvertiere den rekursiven in einen iterativen Algorithmus

Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

   Wenn jede Aktivität $a \in A$ ihren eigenen Ertrag $w(a)$ erbringt:

Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

   Wenn jede Aktivität $a \in A$ ihren eigenen Ertrag $w(a)$ erbringt:

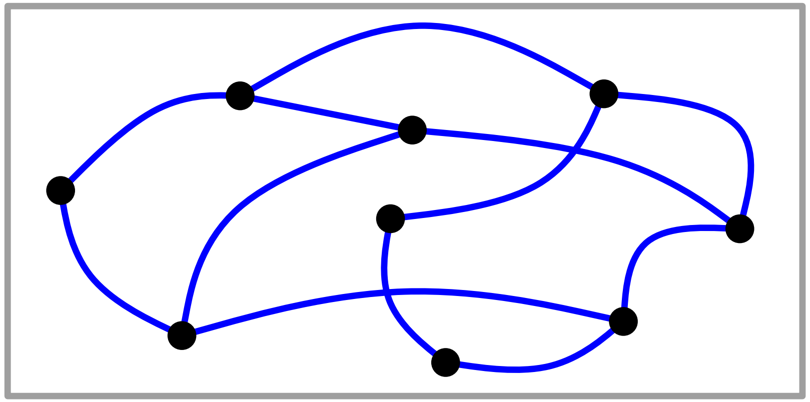
   Finde $L \subseteq A$ mit L kompatibel und $w(L) := \sum_{a \in L} w(a)$ max.

Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

   Wenn jede Aktivität $a \in A$ ihren eigenen Ertrag $w(a)$ erbringt:
   Finde $L \subseteq A$ mit L kompatibel und $w(L) := \sum_{a \in L} w(a)$ max.

2. Problem *größte unabhängige Menge (guM)* in Graphen:

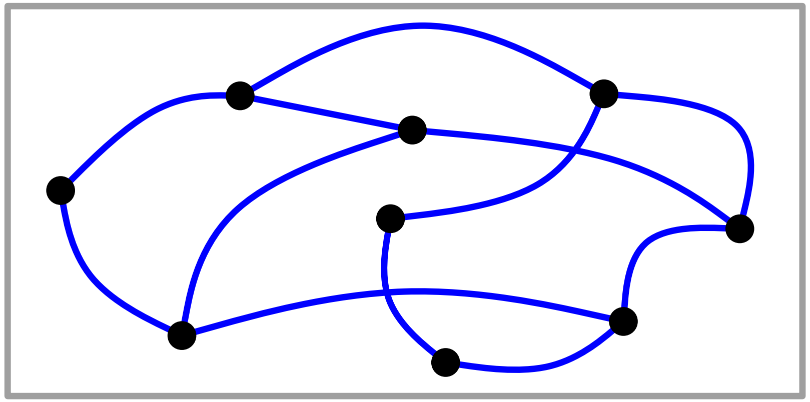


Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

   Wenn jede Aktivität $a \in A$ ihren eigenen Ertrag $w(a)$ erbringt:
   Finde $L \subseteq A$ mit L kompatibel und $w(L) := \sum_{a \in L} w(a)$ max.

2. Problem *größte unabhängige Menge (guM)* in Graphen:



Finde eine größte Teilmenge U der Knoten, so dass keine zwei Knoten in U benachbart sind.

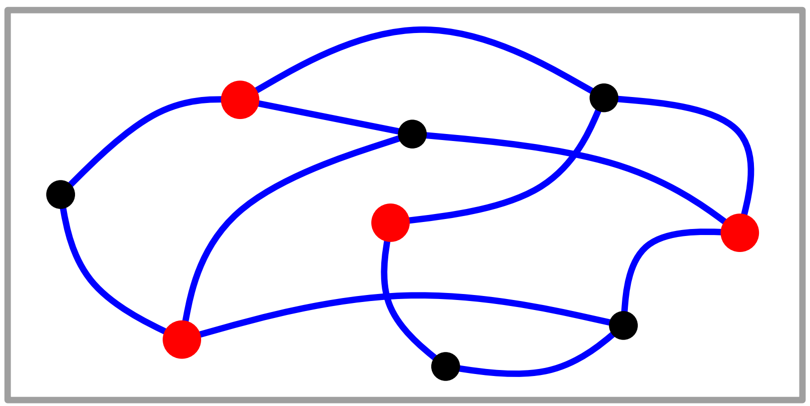
Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

   Wenn jede Aktivität $a \in A$ ihren eigenen Ertrag $w(a)$ erbringt:

   Finde $L \subseteq A$ mit L kompatibel und $w(L) := \sum_{a \in L} w(a)$ max.

2. Problem *größte unabhängige Menge (guM)* in Graphen:



Finde eine größte Teilmenge U der Knoten, so dass keine zwei Knoten in U benachbart sind.

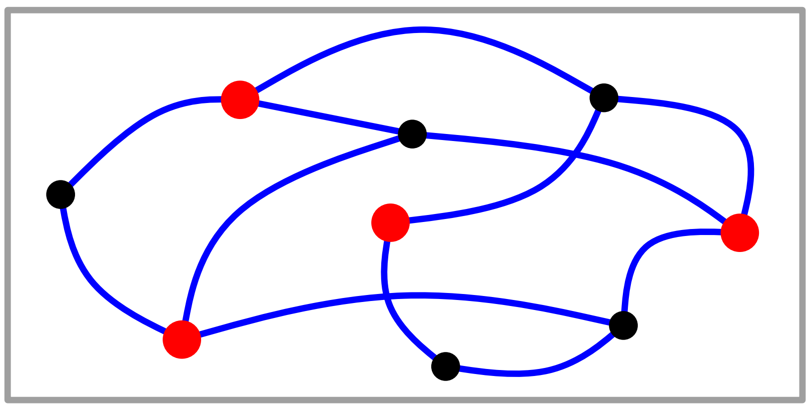
Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

   Wenn jede Aktivität $a \in A$ ihren eigenen Ertrag $w(a)$ erbringt:

   Finde $L \subseteq A$ mit L kompatibel und $w(L) := \sum_{a \in L} w(a)$ max.

2. Problem *größte unabhängige Menge (guM)* in Graphen:



Finde eine größte Teilmenge U der Knoten, so dass keine zwei Knoten in U benachbart sind.

– Was hat guM mit unserem Ablaufplanungsproblem zu tun?

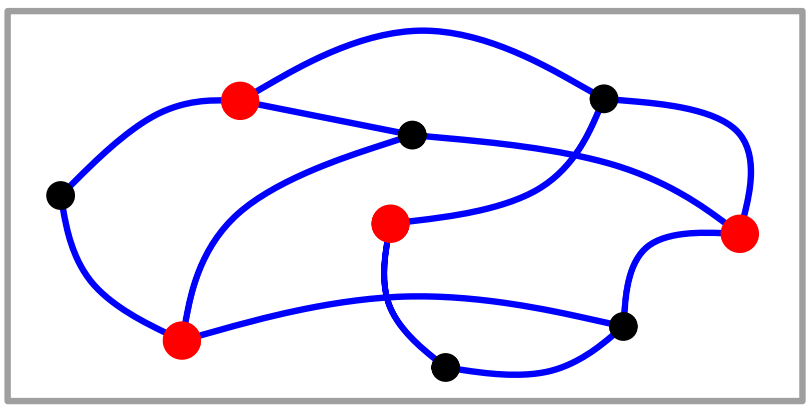
Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

   Wenn jede Aktivität $a \in A$ ihren eigenen Ertrag $w(a)$ erbringt:

   Finde $L \subseteq A$ mit L kompatibel und $w(L) := \sum_{a \in L} w(a)$ max.

2. Problem *größte unabhängige Menge (guM)* in Graphen:



Finde eine größte Teilmenge U der Knoten, so dass keine zwei Knoten in U benachbart sind.

– Was hat guM mit unserem Ablaufplanungsproblem zu tun?

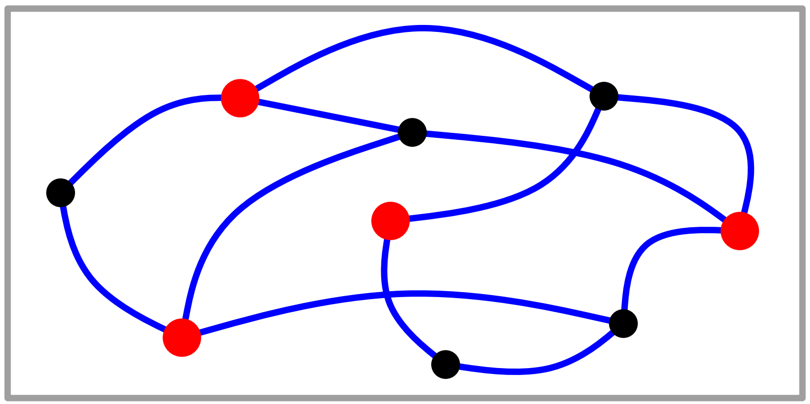
– Welche Graphen kommen bei der Ablaufplanung nicht vor?

Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

   Wenn jede Aktivität $a \in A$ ihren eigenen Ertrag $w(a)$ erbringt:
   Finde $L \subseteq A$ mit L kompatibel und $w(L) := \sum_{a \in L} w(a)$ max.

2. Problem *größte unabhängige Menge (guM)* in Graphen:



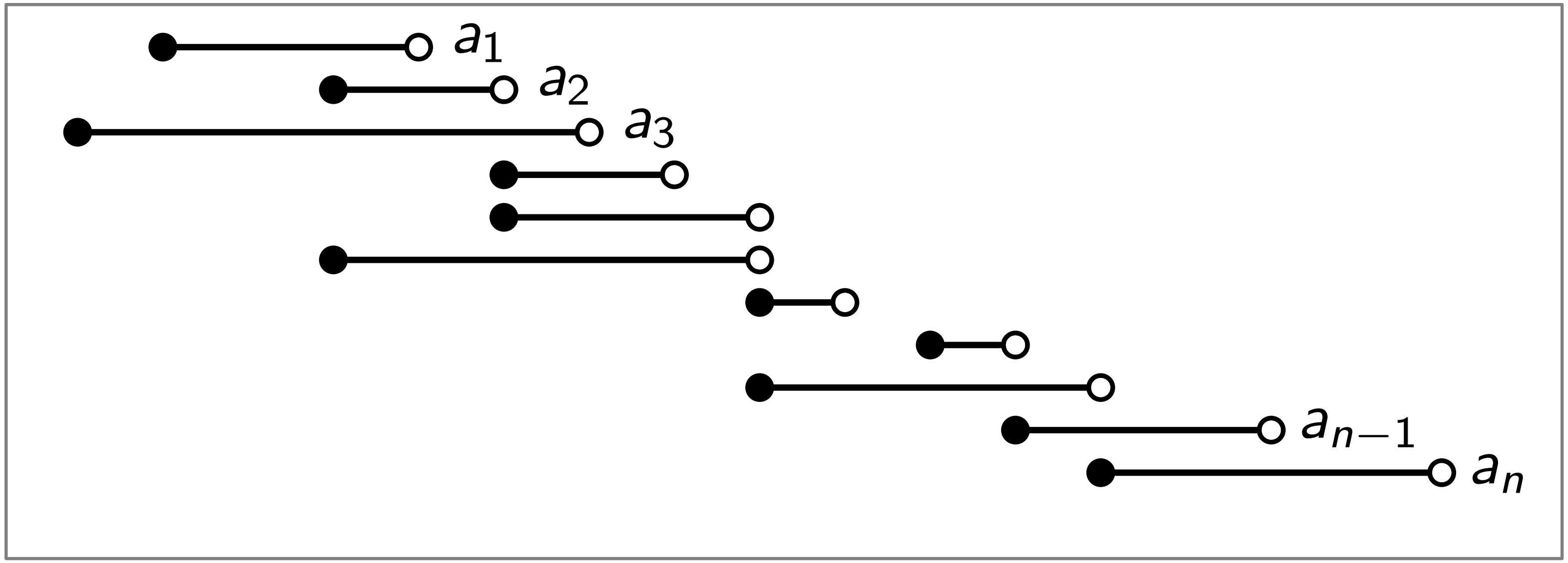
Finde eine größte Teilmenge U der Knoten, so dass keine zwei Knoten in U benachbart sind.

– Was hat guM mit unserem Ablaufplanungsproblem zu tun?
– Welche Graphen kommen bei der Ablaufplanung nicht vor?
– Kann man guM mit Dynam. Progr. (DP) oder GA lösen?

Ein ähnliches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von halboffenen Intervallen, mit $a_i = [s_i, e_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

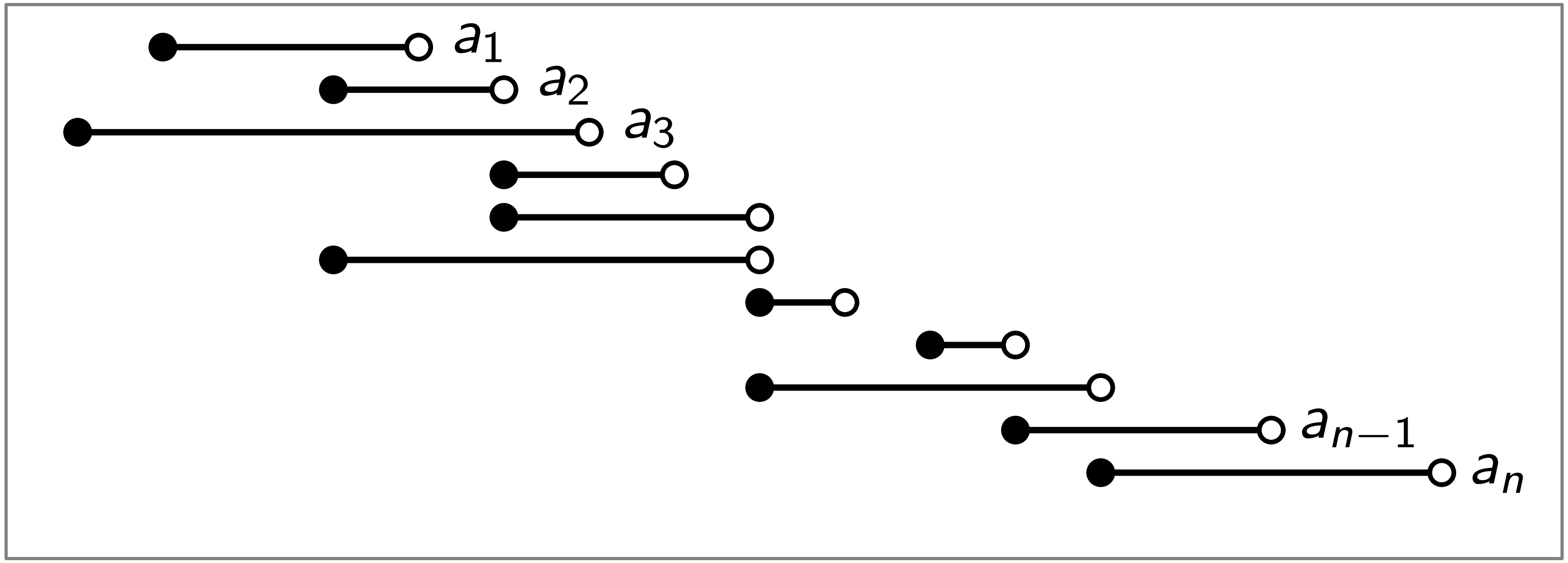
Für die Endpunkte gelte $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$.



Ein ähnliches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ von halboffenen Intervallen, mit $a_i = [s_i, e_i)$ für $i = 1, \ldots, n$.

Für die Endpunkte gelte $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$.

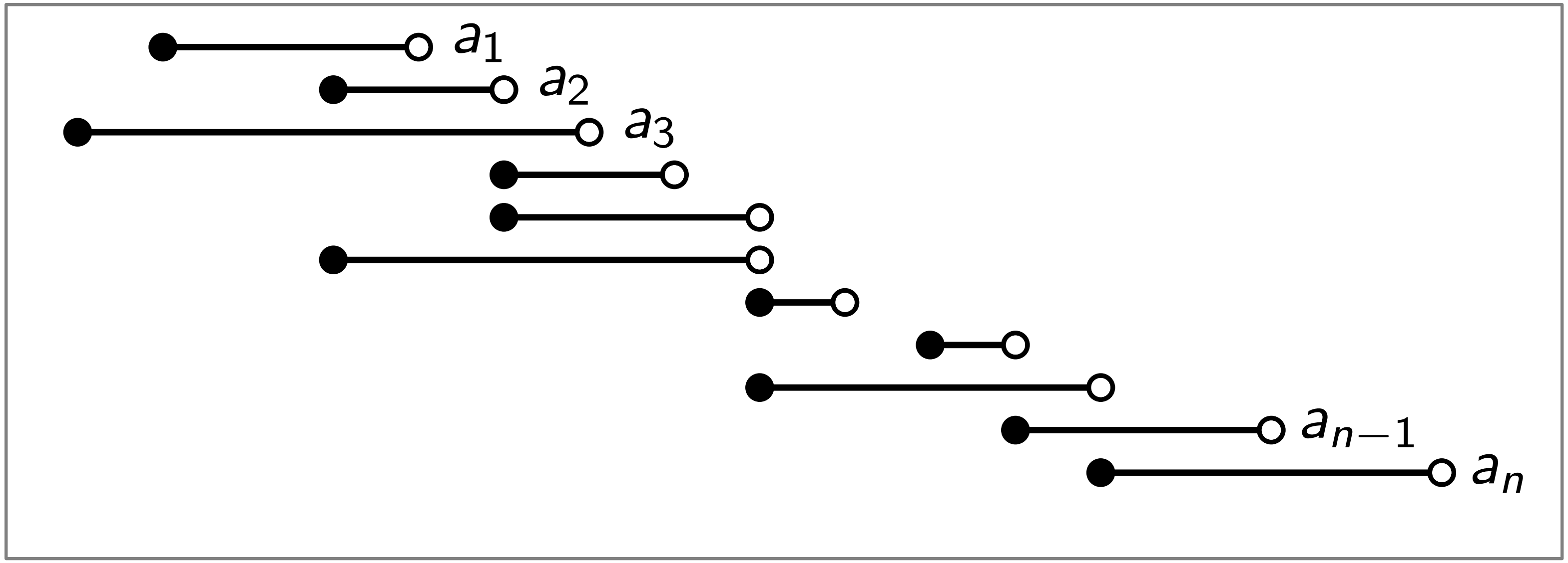


Gesucht: eine Menge $A' \subseteq A$ paarweise disjunkter Intervalle, deren Gesamtlänge $\ell(A')$ maximal ist.

Ein ähnliches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von halboffenen Intervallen, mit $a_i = [s_i, e_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

Für die Endpunkte gelte $e_1 \le e_2 \le \dots \le e_n$.



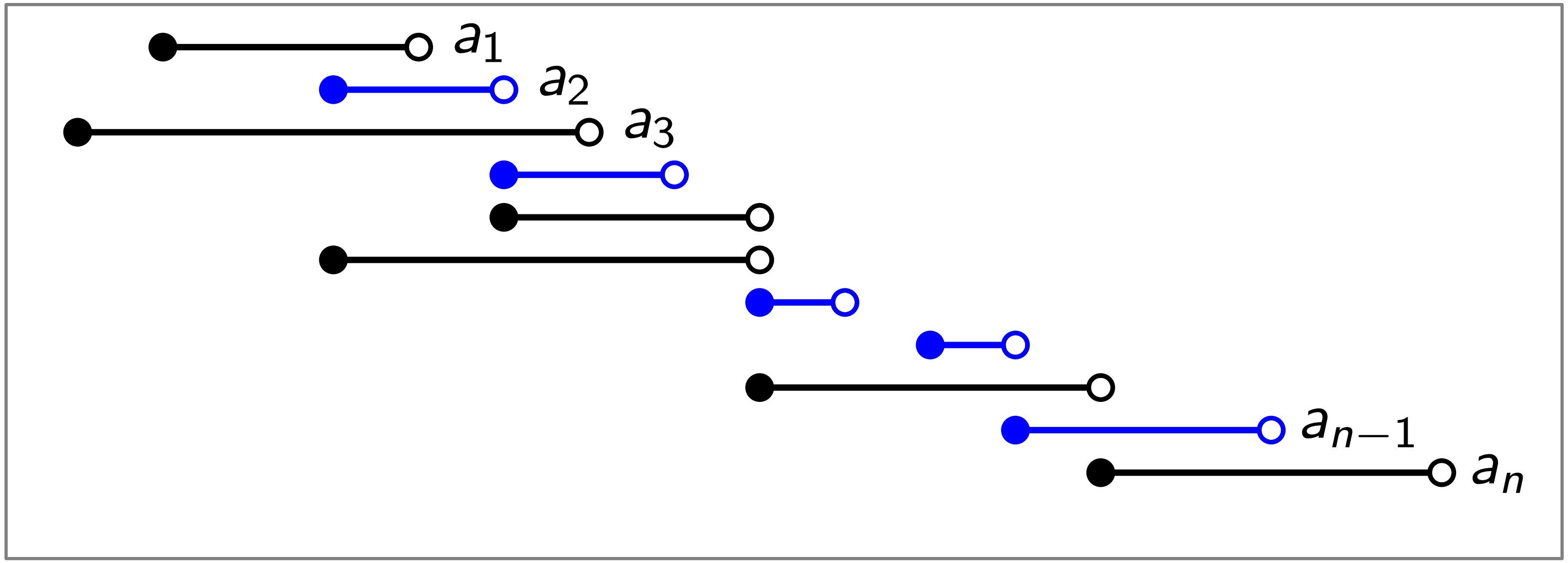
Gesucht: eine Menge $A' \subseteq A$ paarweise disjunkter Intervalle, deren Gesamtlänge $\ell(A')$ maximal ist.

Grund: Intervalle $\hat{=}$ Prozesse, die die gleiche Ressource nutzen; der Gesamtertrag ist proportional zur Auslastung.

Ein ähnliches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von halboffenen Intervallen, mit $a_i = [s_i, e_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

Für die Endpunkte gelte $e_1 \le e_2 \le \dots \le e_n$.



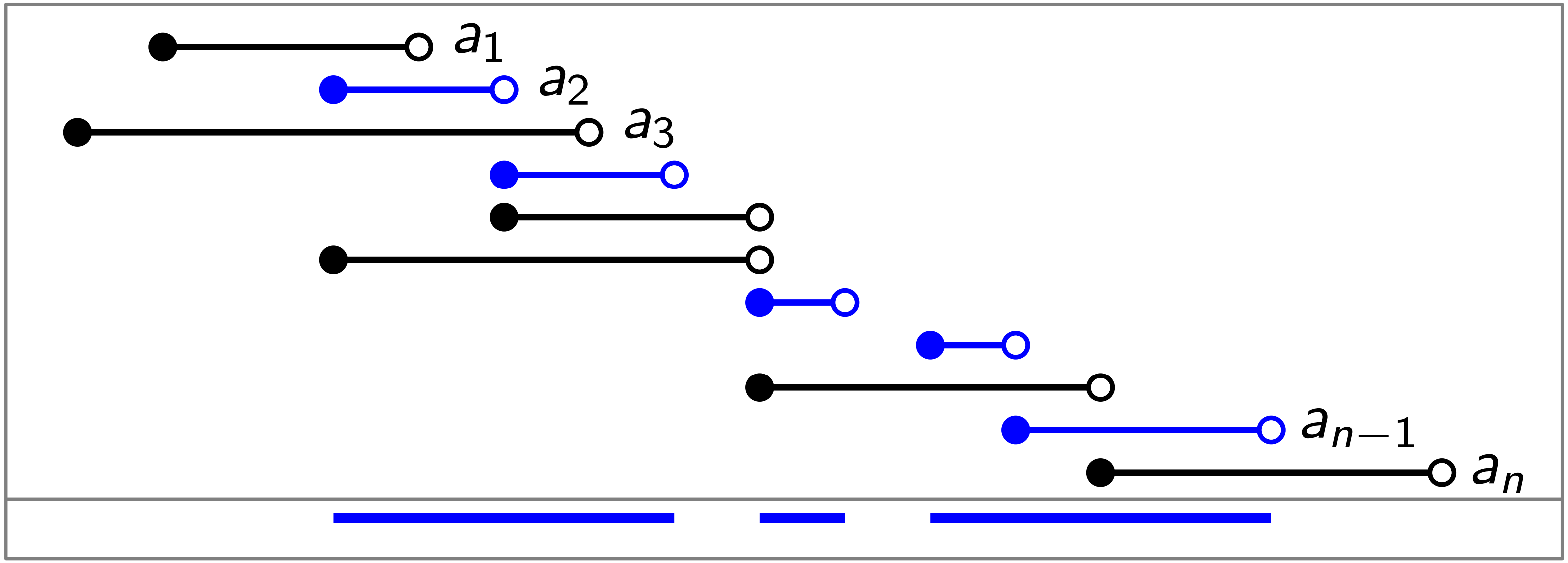
Gesucht: eine Menge $A' \subseteq A$ paarweise disjunkter Intervalle, deren Gesamtlänge $\ell(A')$ maximal ist.

Grund: Intervalle $\hat{=}$ Prozesse, die die gleiche Ressource nutzen; der Gesamtertrag ist proportional zur Auslastung.

Ein ähnliches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von halboffenen Intervallen, mit $a_i = [s_i, e_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

Für die Endpunkte gelte $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$.



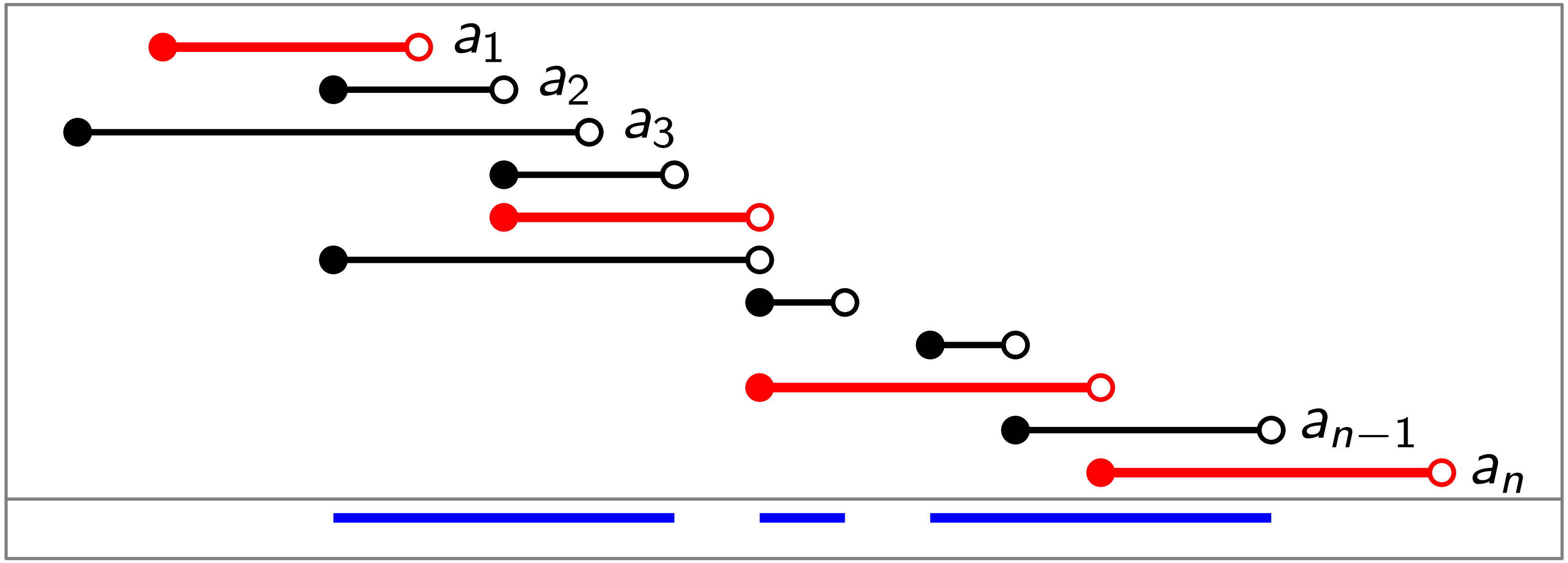
Gesucht: eine Menge $A' \subseteq A$ paarweise disjunkter Intervalle, deren Gesamtlänge $\ell(A')$ maximal ist.

Grund: Intervalle $\hat{=}$ Prozesse, die die gleiche Ressource nutzen; der Gesamtertrag ist proportional zur Auslastung.

Ein ähnliches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ von halboffenen Intervallen, mit $a_i = [s_i, e_i)$ für $i = 1, \ldots, n$.

Für die Endpunkte gelte $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$.



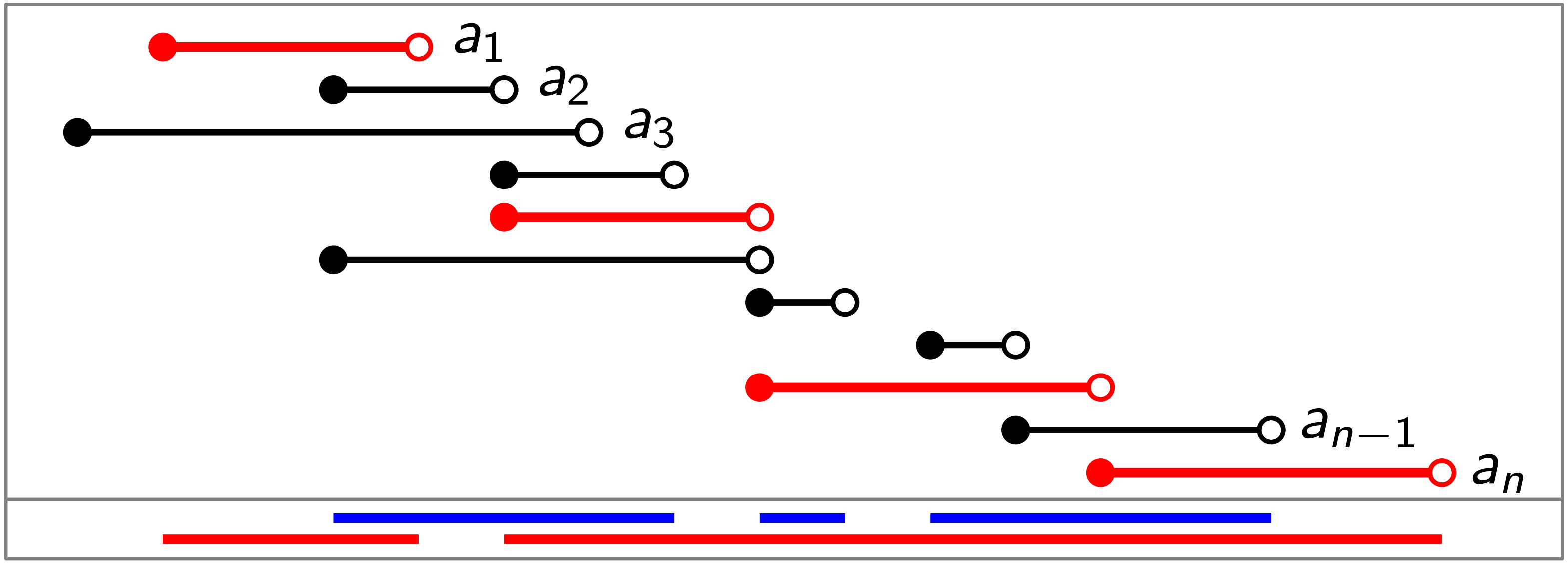
Gesucht: eine Menge $A' \subseteq A$ paarweise disjunkter Intervalle, deren Gesamtlänge $\ell(A')$ maximal ist.

Grund: Intervalle $\hat{=}$ Prozesse, die die gleiche Ressource nutzen; der Gesamtertrag ist proportional zur Auslastung.

Ein ähnliches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von halboffenen Intervallen, mit $a_i = [s_i, e_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

Für die Endpunkte gelte $e_1 \le e_2 \le \dots \le e_n$.



Gesucht: eine Menge $A' \subseteq A$ paarweise disjunkter Intervalle, deren Gesamtlänge $\ell(A')$ maximal ist.

Grund: Intervalle $\hat{=}$ Prozesse, die die gleiche Ressource nutzen; der Gesamtertrag ist proportional zur Auslastung.

Greedy?

Greedy?

1. Versuch: *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Greedy?

1. Versuch: *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:

Greedy?

1. Versuch: *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:

Greedy?

1. Versuch: *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:

2. Versuch:

Greedy?

1. Versuch: *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin,*
streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.

Gegenbsp.:

2. Versuch: *Nimm längste Aktivität,*
streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.

Greedy?

1. Versuch: *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:

2. Versuch: *Nimm längste Aktivität, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:

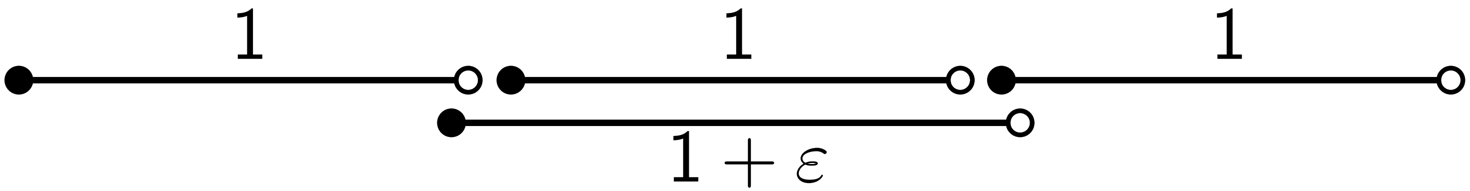
Greedy?

1. Versuch: *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:

2. Versuch: *Nimm längste Aktivität, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:



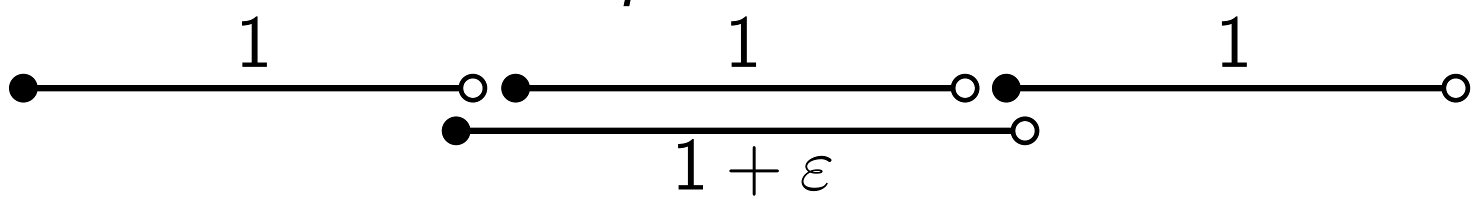
Greedy?

1. Versuch: *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:

2. Versuch: *Nimm längste Aktivität, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:



Aufgabe: Können Sie den 2. GA in $O(n \log n)$ Zeit implementieren?

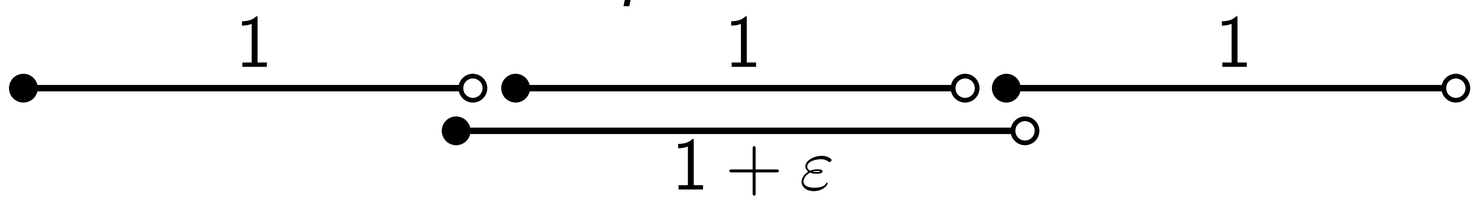
Greedy?

1. Versuch: *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:

2. Versuch: *Nimm längste Aktivität, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

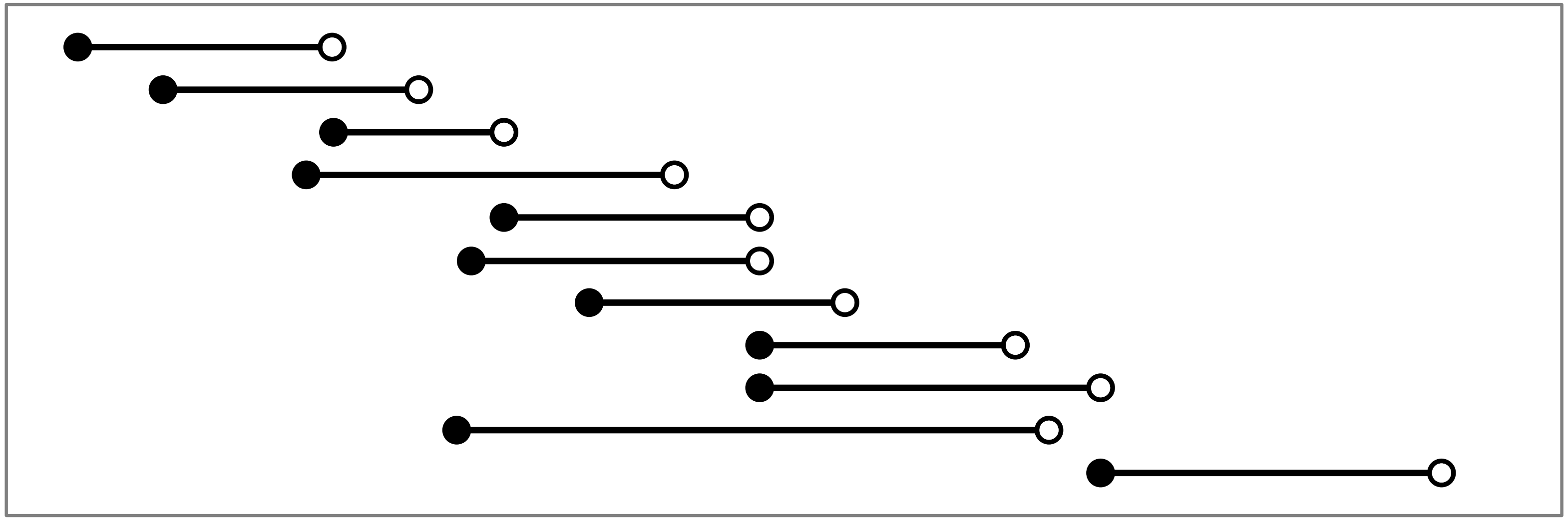
Gegenbsp.:



Aufgabe: Können Sie den 2. GA in $O(n \log n)$ Zeit implementieren?

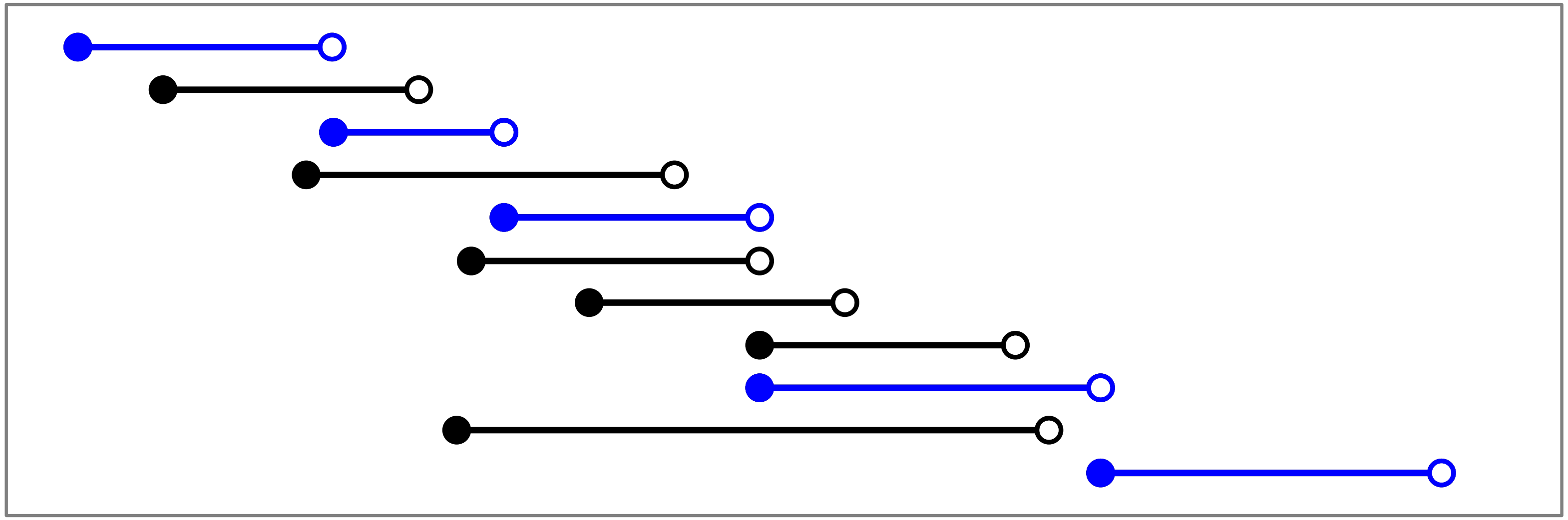
Tipp: Gehen Sie so ähnlich wie Kruskal vor!

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?



Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

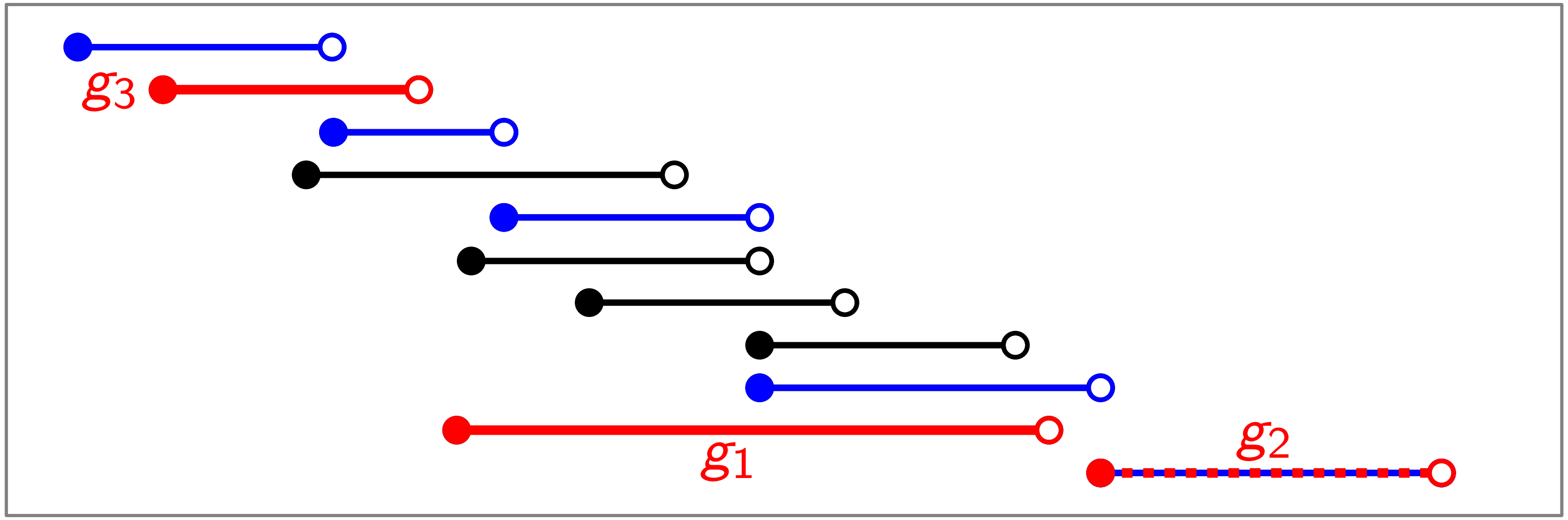
Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.



Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung *(in dieser Rf.)*.

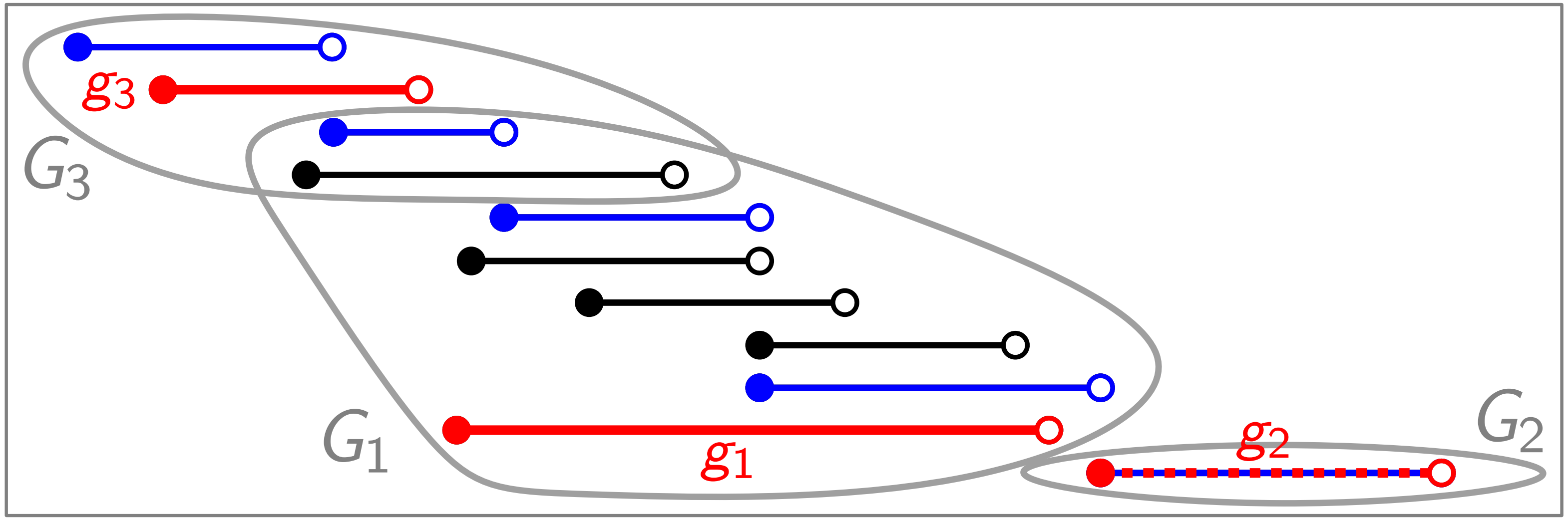


Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung *(in dieser Rf.)*.

Für $i = 1, \dots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\}$

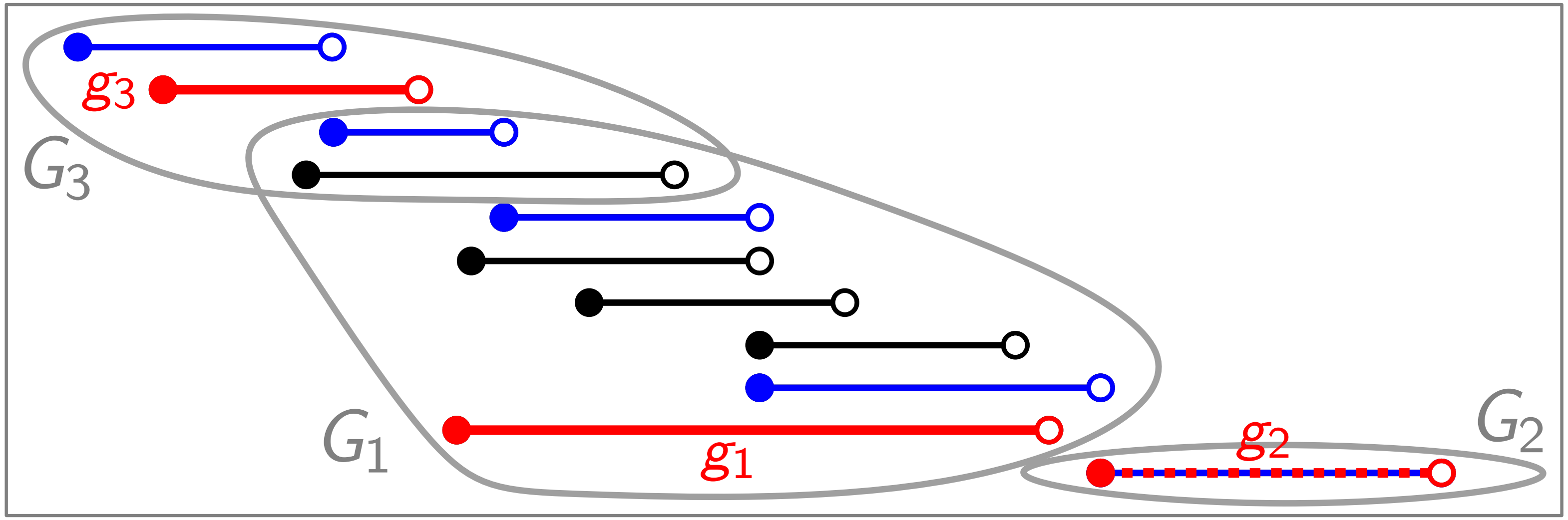


Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung *(in dieser Rf.)*.

Für $i = 1, \ldots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1})$

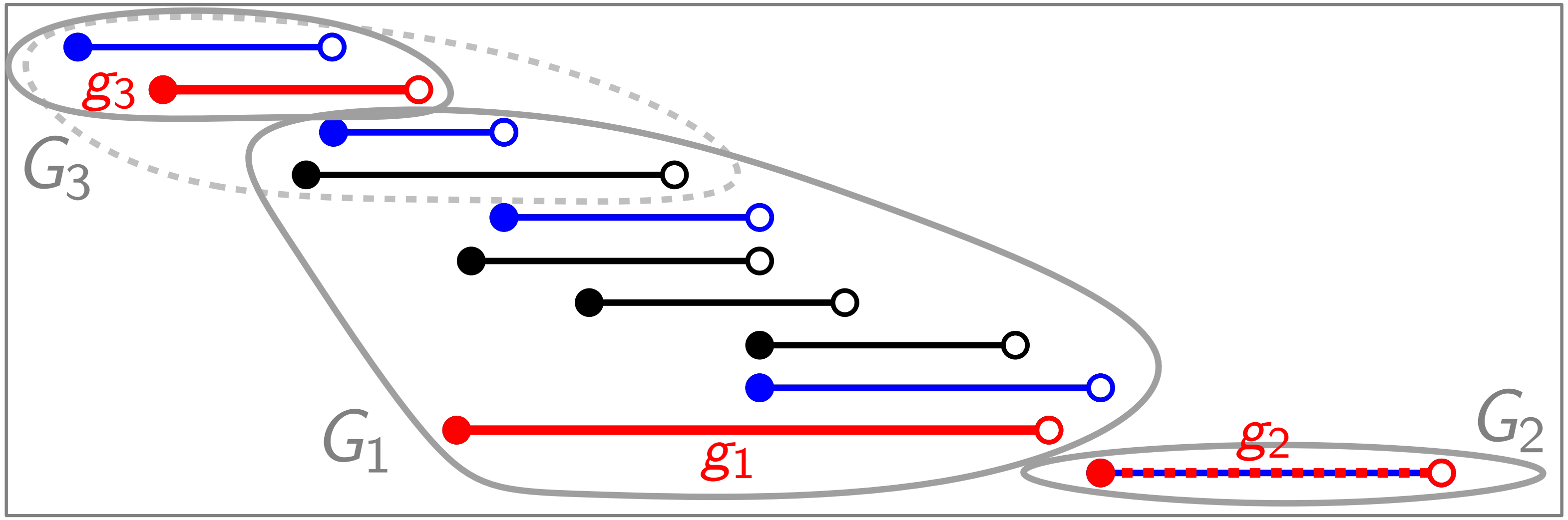


Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung *(in dieser Rf.)*.

Für $i = 1, \ldots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1})$

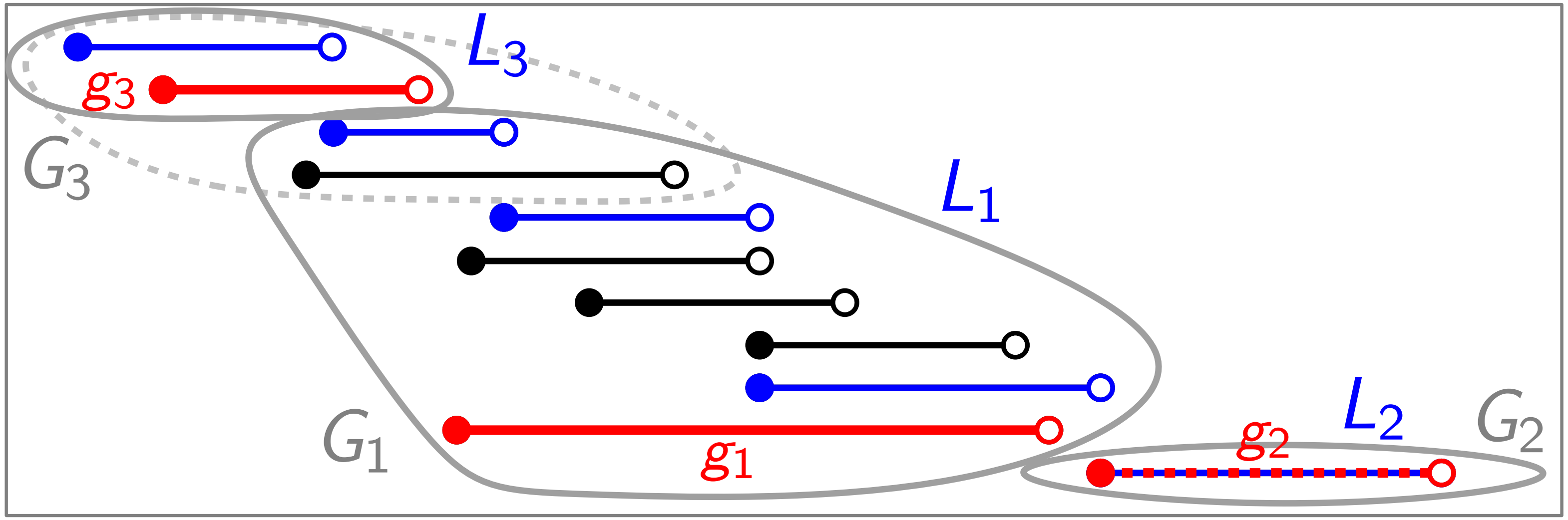


Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung *(in dieser Rf.)*.

Für $i = 1, \ldots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1})$



und

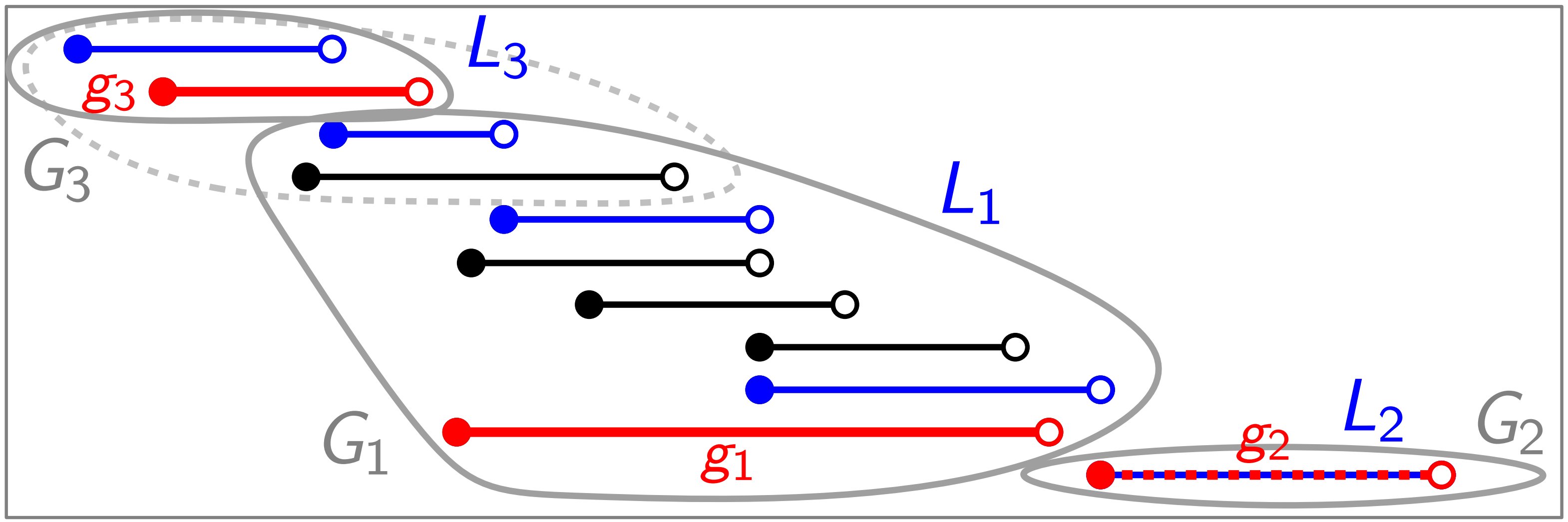
$L_i = L \cap G_i$.

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung *(in dieser Rf.)*.

Für $i = 1, \ldots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1})$



und $L_i = L \cap G_i$.

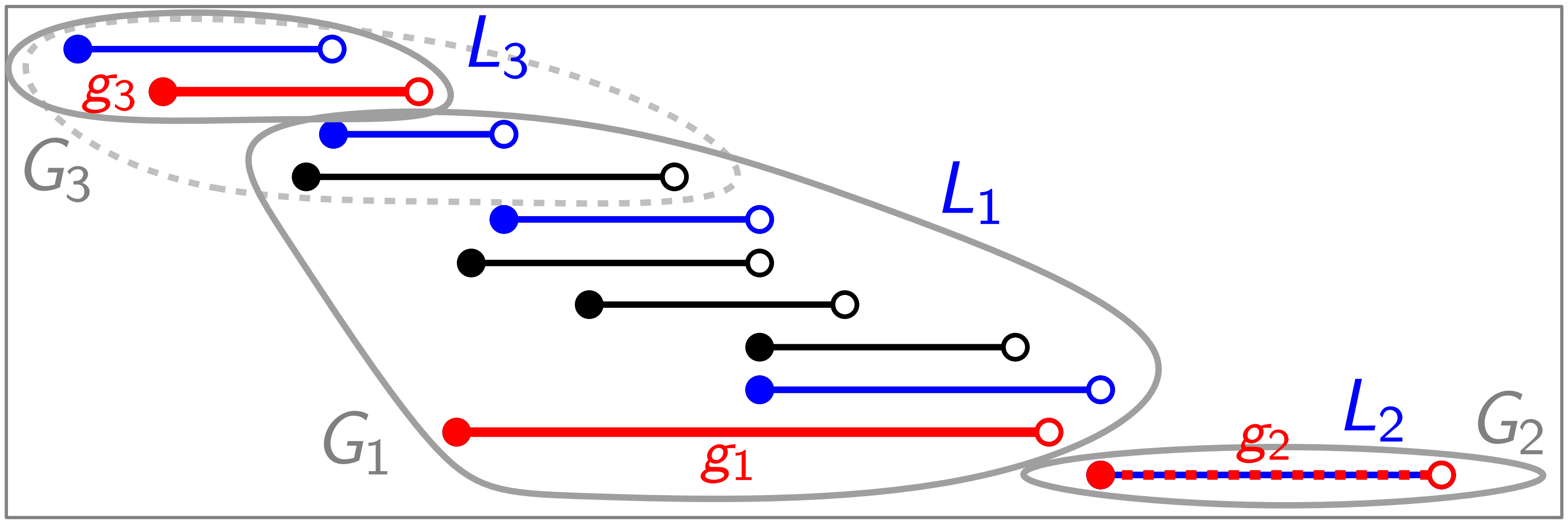
Dann gilt $A = G_1 \,\dot\cup\, G_2 \,\dot\cup\, \cdots \,\dot\cup\, G_k$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung *(in dieser Rf.)*.

Für $i = 1, \ldots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1})$



und

$L_i = L \cap G_i$.

Dann gilt $A = G_1 \,\dot{\cup}\, G_2 \,\dot{\cup}\, \cdots \,\dot{\cup}\, G_k$

„$\subseteq$“:

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

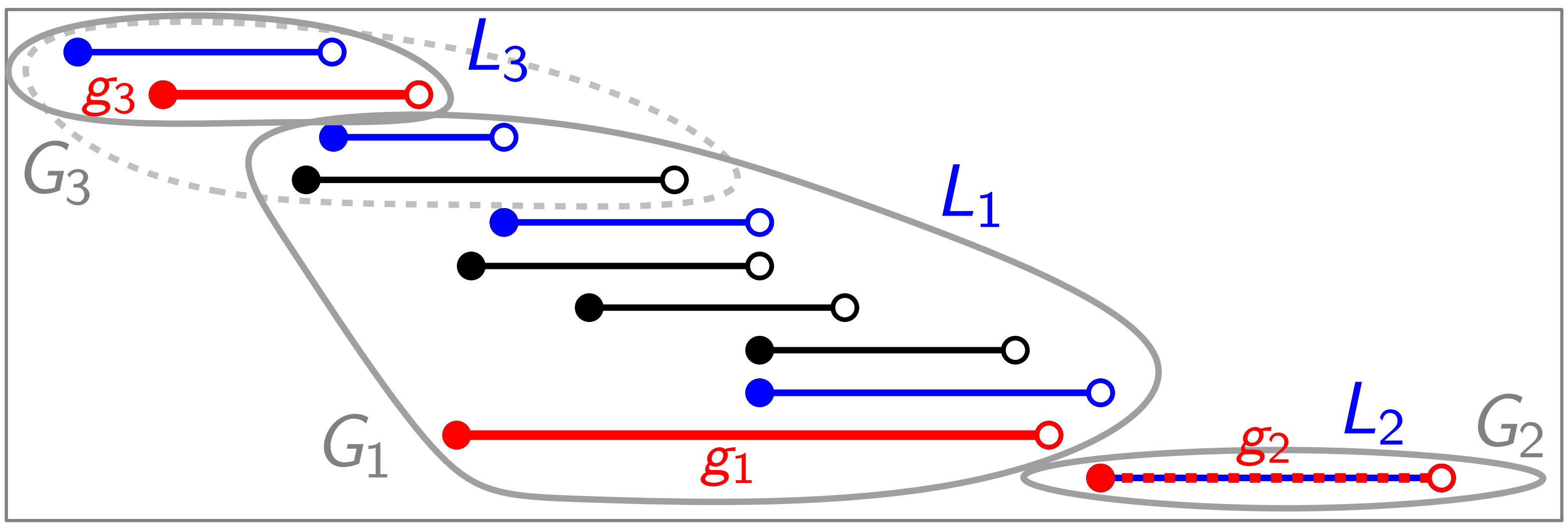
Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung *(in dieser Rf.)*.

Für $i = 1, \dots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_{i-1})$

und

$L_i = L \cap G_i$.



Dann gilt $A = G_1 \,\dot\cup\, G_2 \,\dot\cup\, \cdots \,\dot\cup\, G_k$

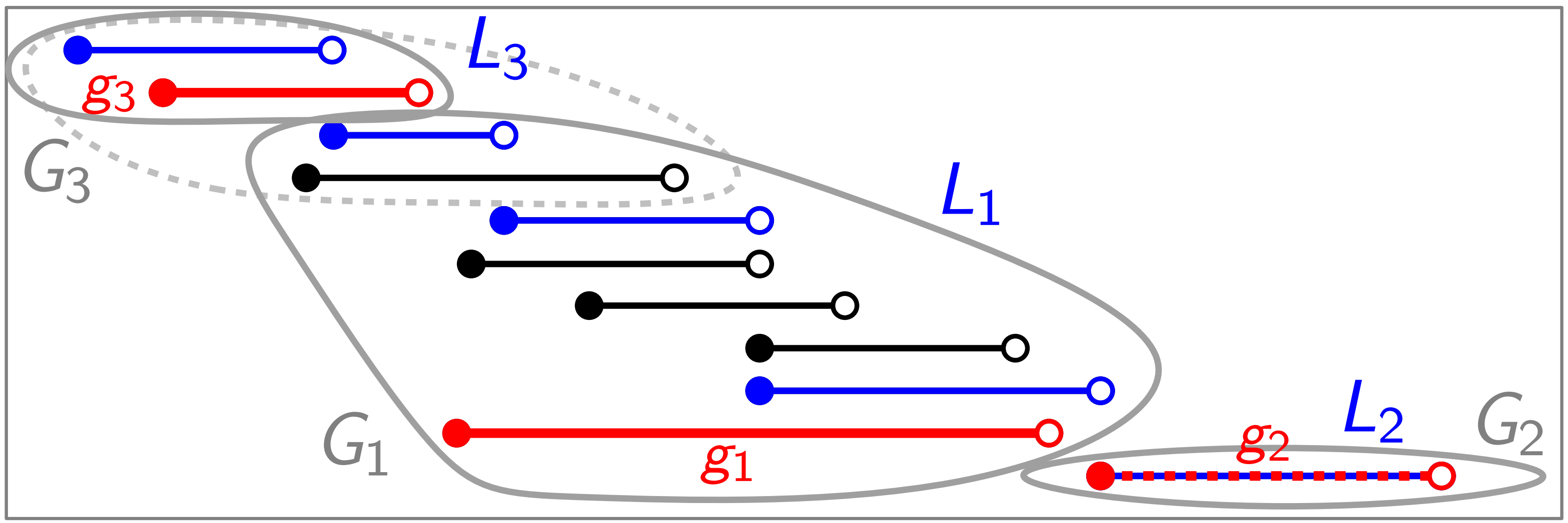
„$\subseteq$“: GA wählt so lange Intervalle aus, bis es keine mehr gibt.

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung *(in dieser Rf.)*.

Für $i = 1, \ldots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1})$



und

$L_i = L \cap G_i$.

Dann gilt $A = G_1 \,\dot\cup\, G_2 \,\dot\cup\, \cdots \,\dot\cup\, G_k$

„$\subseteq$“: GA wählt so lange Intervalle aus, bis es keine mehr gibt.

„$\supseteq$“:

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

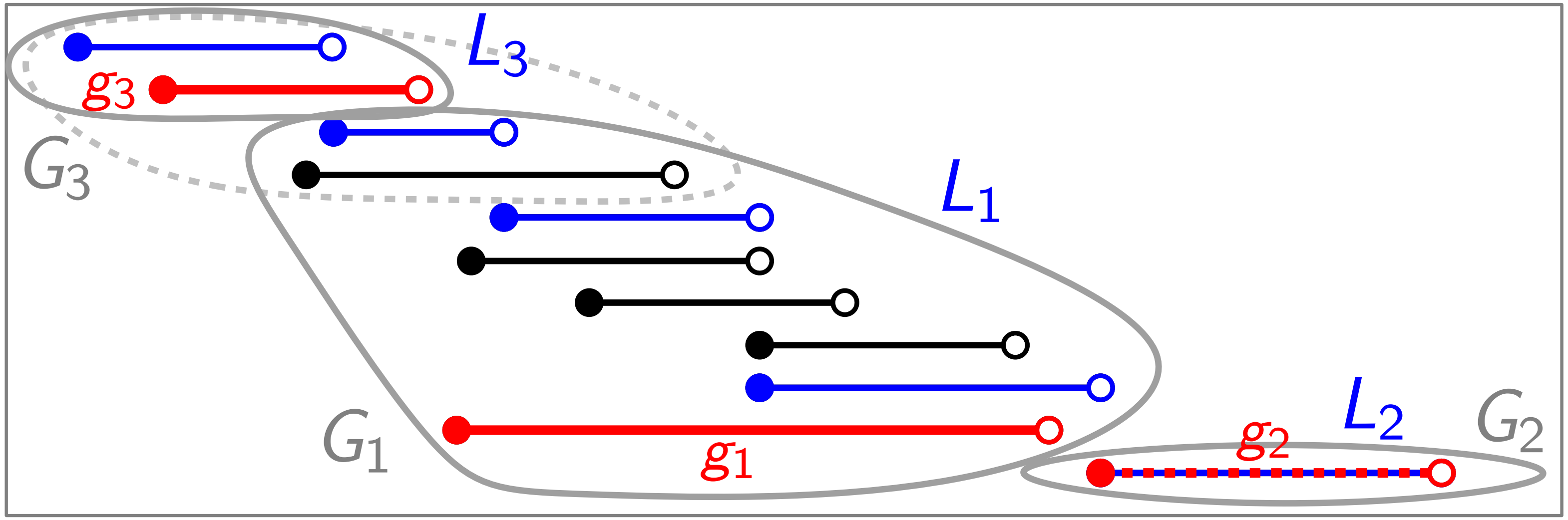
Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung *(in dieser Rf.)*.

Für $i = 1, \ldots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1})$

und

$L_i = L \cap G_i$.



Dann gilt $A = G_1 \,\dot\cup\, G_2 \,\dot\cup\, \cdots \,\dot\cup\, G_k$

„$\subseteq$“: GA wählt so lange Intervalle aus, bis es keine mehr gibt.

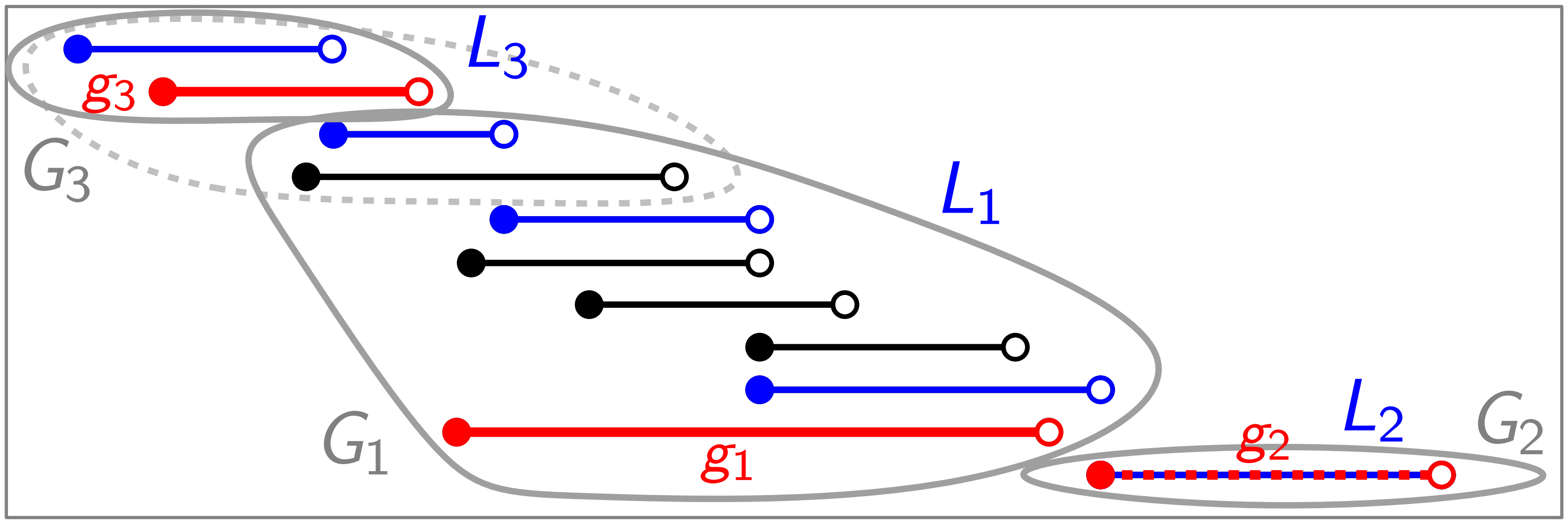
„$\supseteq$“: klar, da $G_1 \subseteq A$, $G_2 \subseteq A$, $\ldots$, $G_k \subseteq A$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung *(in dieser Rf.)*.

Für $i = 1, \ldots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1})$



und

$L_i = L \cap G_i$.

Dann gilt $A = G_1 \,\dot\cup\, G_2 \,\dot\cup\, \cdots \,\dot\cup\, G_k$ und $L = L_1 \,\dot\cup\, L_2 \,\dot\cup\, \ldots \,\dot\cup\, L_k$.

„$\subseteq$“: GA wählt so lange Intervalle aus, bis es keine mehr gibt.

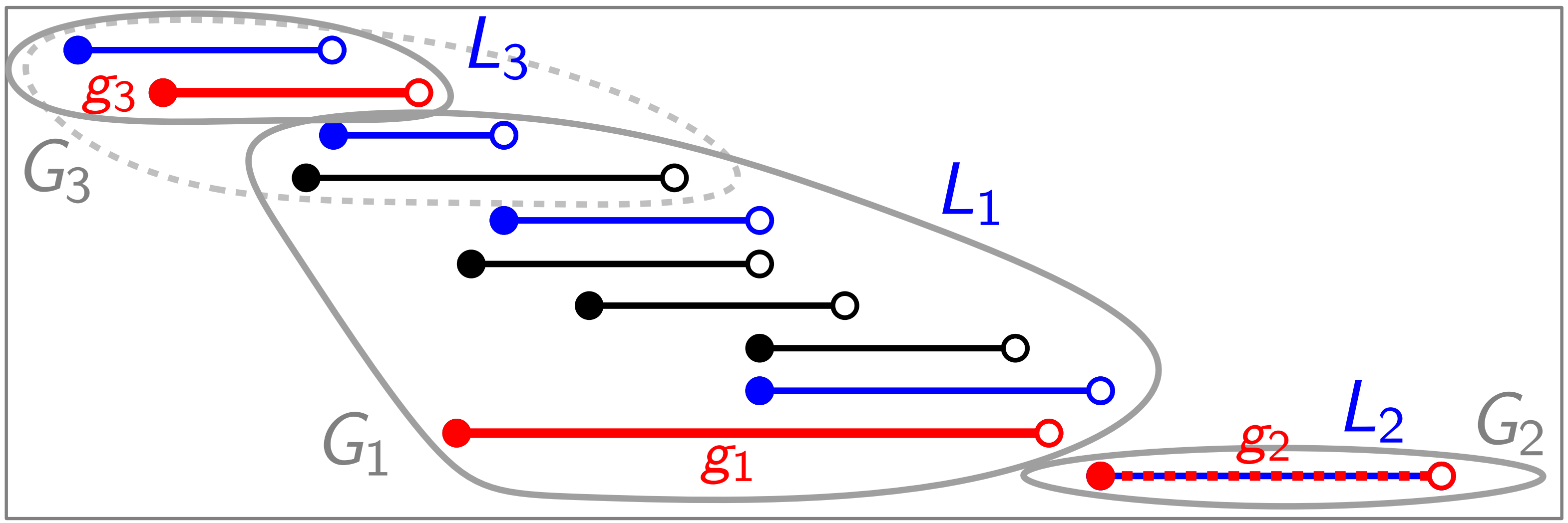
„$\supseteq$“: klar, da $G_1 \subseteq A$, $G_2 \subseteq A$, …, $G_k \subseteq A$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung *(in dieser Rf.)*.

Für $i = 1, \dots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_{i-1})$



und

$L_i = L \cap G_i$.

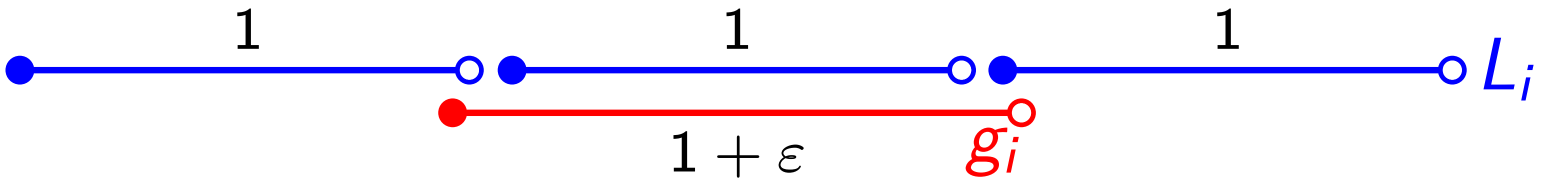
Dann gilt $A = G_1 \dot\cup G_2 \dot\cup \dots \dot\cup G_k$ und $L = L_1 \dot\cup L_2 \dot\cup \dots \dot\cup L_k$.

„$\subseteq$“: GA wählt so lange Intervalle aus, bis es keine mehr gibt.

„$\supseteq$“: klar, da $G_1 \subseteq A$, $G_2 \subseteq A$, $\dots$, $G_k \subseteq A$

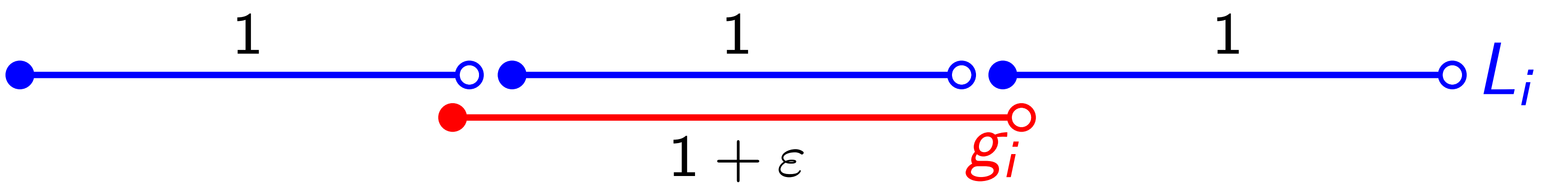
Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \ldots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

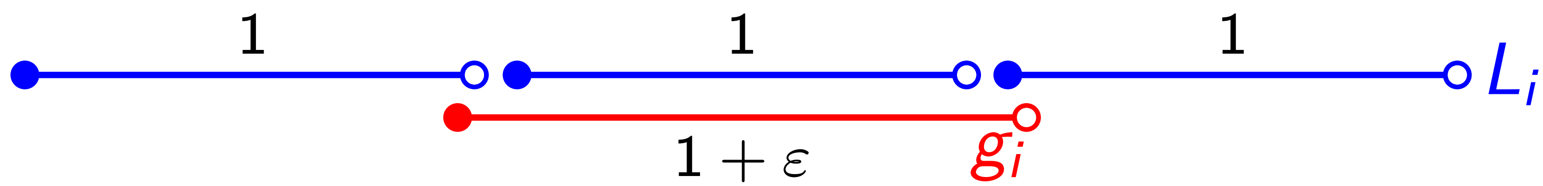
Behauptung: Für $i = 1, \ldots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



Beweis.

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

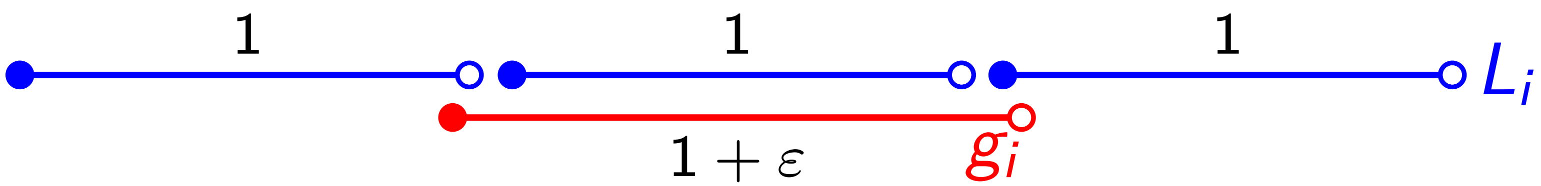
Behauptung: Für $i = 1, \ldots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



Beweis. (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \ldots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.

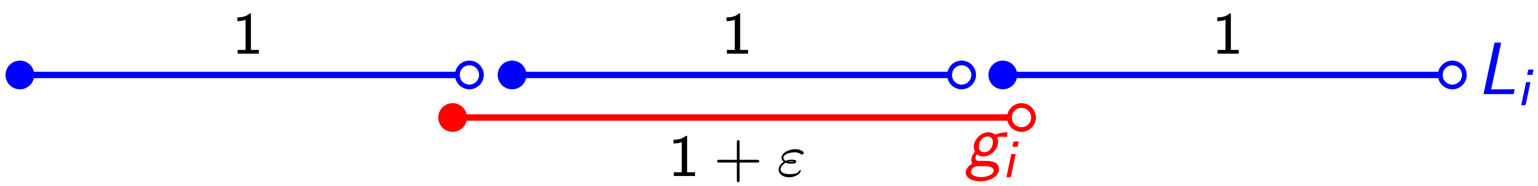


Beweis. (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i

(b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \ldots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



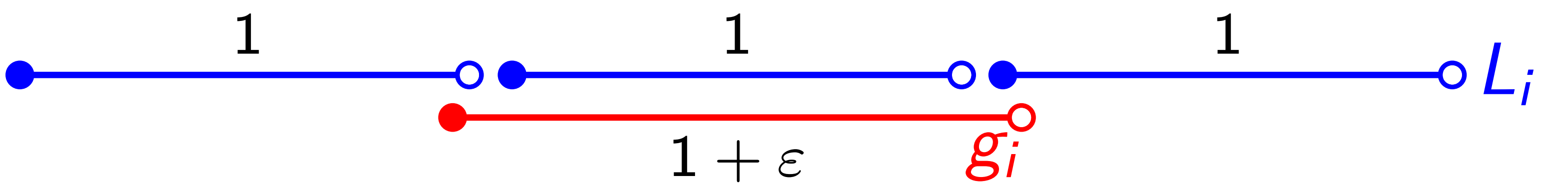
Beweis. (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i

(b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i

(c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \ldots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



Beweis. (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i

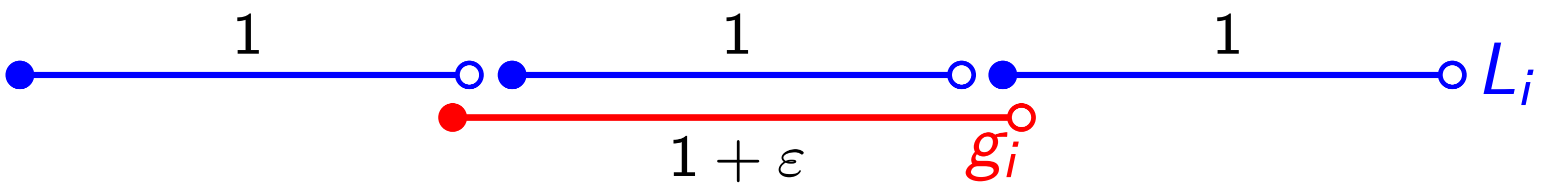
(b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i

(c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

$\Rightarrow$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \ldots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.

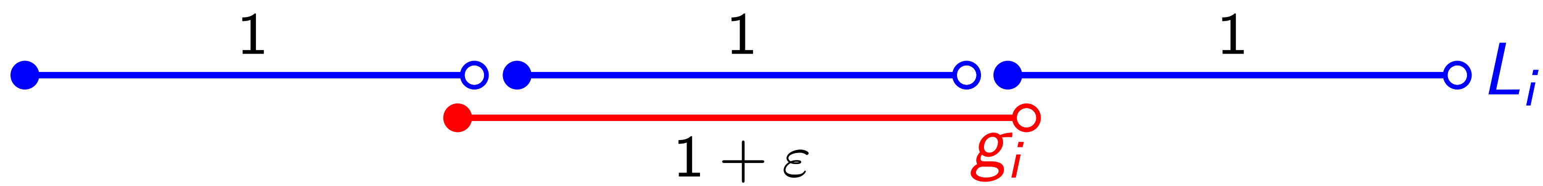


Beweis.
(a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i
(b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i
(c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

$\Rightarrow$ $$\sum_{i=1}^{k} \ell(L_i) < 3 \sum_{i=1}^{k} \ell(g_i)$$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \ldots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



Beweis. (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i

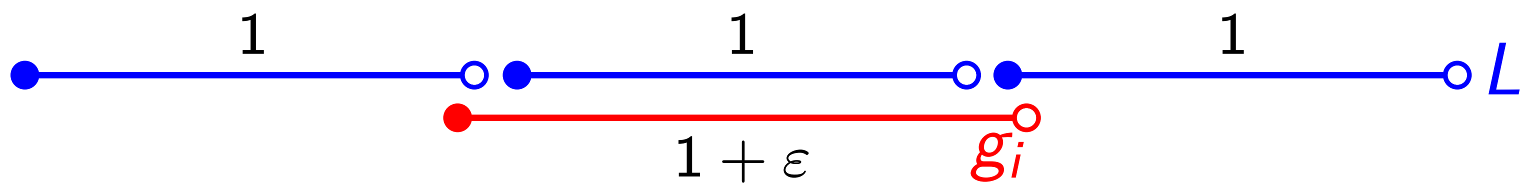
(b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i

(c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} \ell(L_i) < 3 \sum_{i=1}^{k} \ell(g_i) = 3\ell(G)$$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \ldots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



Beweis. (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i

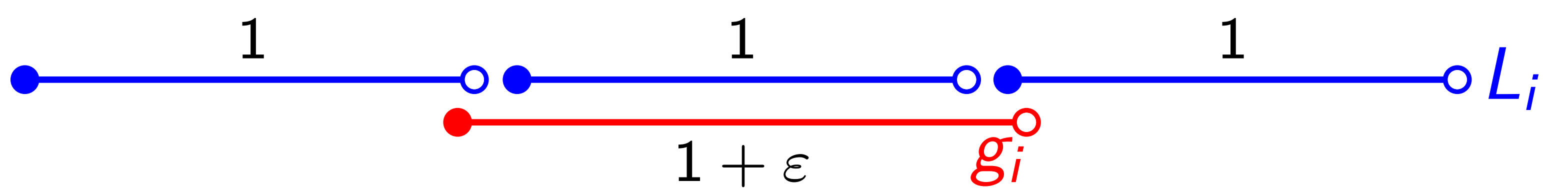
(b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i

(c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

$$\Rightarrow \qquad \ell(L) = \sum_{i=1}^{k} \ell(L_i) < 3 \sum_{i=1}^{k} \ell(g_i) = 3\ell(G)$$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \dots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.

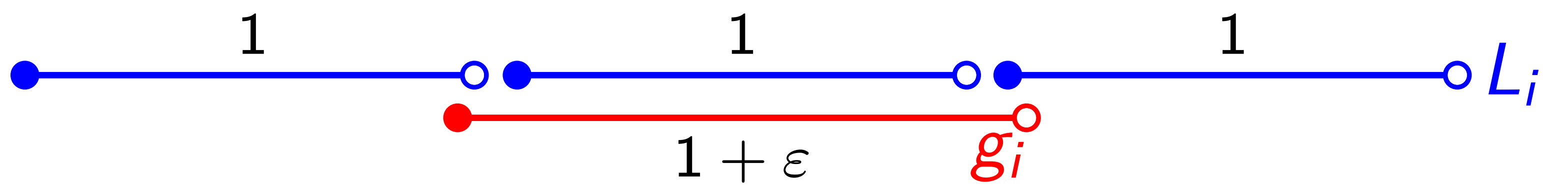


Beweis.
(a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i
(b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i
(c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

$$\Rightarrow \text{OPT} = \ell(L) = \sum_{i=1}^{k} \ell(L_i) < 3 \sum_{i=1}^{k} \ell(g_i) = 3\ell(G)$$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \ldots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



Beweis. (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i

(b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i

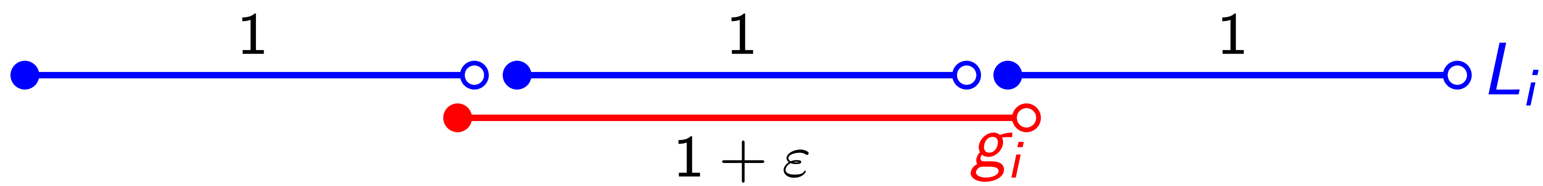
(c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

$$\Rightarrow \text{OPT} = \ell(L) = \sum_{i=1}^{k} \ell(L_i) < 3 \sum_{i=1}^{k} \ell(g_i) = 3\ell(G)$$

$$\Rightarrow \ell(G) > \text{OPT}/3$$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \ldots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



Beweis. (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i

(b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i

(c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

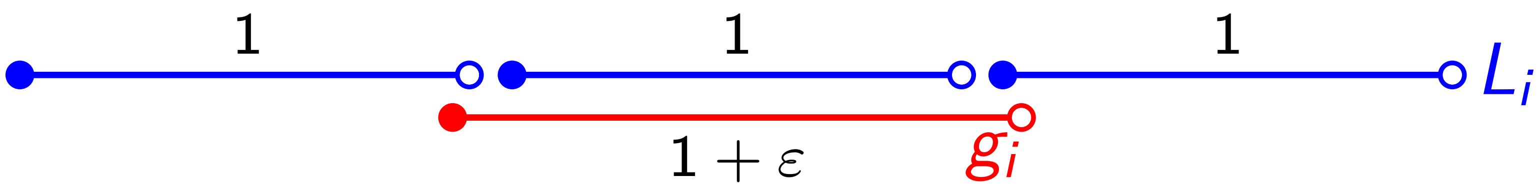
$\Rightarrow$ OPT $= \ell(L) = \sum_{i=1}^{k} \ell(L_i) < 3\sum_{i=1}^{k} \ell(g_i) = 3\ell(G)$

$\Rightarrow \ell(G) > \text{OPT}/3$

$\Rightarrow$ 2. GA liefert *immer* mind. $1/3$ der maximalen Gesamtlänge.

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \ldots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



Beweis. (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i
(b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i
(c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

$\Rightarrow$ OPT $= \ell(L) = \sum_{i=1}^{k} \ell(L_i) < 3 \sum_{i=1}^{k} \ell(g_i) = 3\ell(G)$

$\Rightarrow \ell(G) > \mathrm{OPT}/3$

$\Rightarrow$ 2. GA liefert *immer* mind. $1/3$ der maximalen Gesamtlänge.

Also ist der 2. GA ein *Faktor-(1/3)-Approximationsalgorithmus*.

Approxi. . . *hä?*

Approxi. . . *hä?*

„*All exact science is dominated by the idea of approximation.*“

Bertrand Russell (1872–1970)

Approxi. . . *hä?*

„*All exact science is dominated by the idea of approximation.*“

Bertrand Russell (1872–1970)

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Approxi. . . *hä?*

„*All exact science is dominated by the idea of approximation.*“

Bertrand Russell (1872–1970)

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

z.B. Ablaufplanung

Approxi. . . *hä?*

„*All exact science is dominated by the idea of approximation.*“

Bertrand Russell (1872–1970)

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

z.B. Ablaufplanung

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Approxi. . . *hä?*

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“
Bertrand Russell (1872–1970)

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

z.B. Ablaufplanung

$\zeta = \ell$

Approxi... *hä?*

„*All exact science is dominated by the idea of approximation.*"

Bertrand Russell (1872–1970)

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≤ 1.

z.B. Ablaufplanung

$\zeta = \ell$

$\gamma = 1/3$

Approxi. . . *hä?*

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“
Bertrand Russell (1872–1970)

Sei Π ein *Maximierungsproblem*. z.B. Ablaufplanung

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$. $\zeta = \ell$

Sei γ eine Zahl ≤ 1. $\gamma = 1/3$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

Approxi. . . *hä?*

„*All exact science is dominated by the idea of approximation.*“
Bertrand Russell (1872–1970)

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≤ 1.

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\zeta(\mathcal{A}(I))}{\mathrm{OPT}(I)} \geq \gamma$$

z.B. Ablaufplanung

$\zeta = \ell$

$\gamma = 1/3$

Approxi. . . *hä?*

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“
Bertrand Russell (1872–1970)

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≤ 1.

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\zeta(\mathcal{A}(I))}{\mathrm{OPT}(I)} \geq \gamma$$

z.B. Ablaufplanung

$\zeta = \ell$

$\gamma = 1/3$

1/3-Approx. liefert Menge von Aktivitäten, deren Gesamtlänge mindestens 1/3 der maximal möglichen Länge ist.

Approxi. . . *hä?*

„*All exact science is dominated by the idea of approximation.*“
Bertrand Russell (1872–1970)

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≤ 1.

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\zeta(\mathcal{A}(I))}{\mathrm{OPT}(I)} \geq \gamma$$

z.B. Ablaufplanung

$\zeta = \ell$

$\gamma = 1/3$

1/3-Approx. liefert Menge von Aktivitäten, deren Gesamtlänge mindestens 1/3 der maximal möglichen Länge ist.

Approxi. . . *hä?*

„*All exact science is dominated by the idea of approximation.*“

Bertrand Russell (1872–1970)

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≤ 1.

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

ζ(optimale Lösung)

$$\frac{\zeta(\mathcal{A}(I))}{\mathrm{OPT}(I)} \geq \gamma$$

z.B. Ablaufplanung

$\zeta = \ell$

$\gamma = 1/3$

1/3-Approx. liefert Menge von Aktivitäten, deren Gesamtlänge mindestens 1/3 der maximal möglichen Länge ist.

Approxi. . . *hä?*

„*All exact science is dominated by the idea of approximation.*“
Bertrand Russell (1872–1970)

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≤ 1.

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\zeta(\mathcal{A}(I))}{\mathrm{OPT}(I)} \geq \gamma$$

ζ(optimale Lösung)

- die Laufzeit von $\mathcal{A}$ polynomiell in $|I|$ ist.

z.B. Ablaufplanung

$\zeta = \ell$

$\gamma = 1/3$

1/3-Approx. liefert Menge von Aktivitäten, deren Gesamtlänge mindestens 1/3 der maximal möglichen Länge ist.

Approxi. . . *hä?*

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Bertrand Russell (1872–1970)

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≤ 1.

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\zeta(\mathcal{A}(I))}{\mathrm{OPT}(I)} \geq \gamma$$

ζ(optimale Lösung)

- die Laufzeit von $\mathcal{A}$ polynomiell in $|I|$ ist.

z.B. Ablaufplanung

$\zeta = \ell$

$\gamma = 1/3$

1/3-Approx. liefert Menge von Aktivitäten, deren Gesamtlänge mindestens 1/3 der maximal möglichen Länge ist.

Approxi. . . *hä?*

„*All exact science is dominated by the idea of approximation.*“
Bertrand Russell (1872–1970)

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≤ 1.

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\zeta(\mathcal{A}(I))}{\mathrm{OPT}(I)} \geq \gamma$$

ζ(optimale Lösung)

- die Laufzeit von $\mathcal{A}$ polynomiell in $|I|$ ist.

Größe der Instanz I

z.B. Ablaufplanung

$\zeta = \ell$

$\gamma = 1/3$

1/3-Approx. liefert Menge von Aktivitäten, deren Gesamtlänge mindestens 1/3 der maximal möglichen Länge ist.

Approxi. . . *hä?*

„*All exact science is dominated by the idea of approximation.*“
Bertrand Russell (1872–1970)

Sei Π ein *Maximierungsproblem*. z.B. Ablaufplanung

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$. $\zeta = \ell$

Sei γ eine Zahl ≤ 1. $\gamma = 1/3$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\zeta(\mathcal{A}(I))}{\mathrm{OPT}(I)} \geq \gamma$$

ζ(optimale Lösung)

Größe der Instanz I

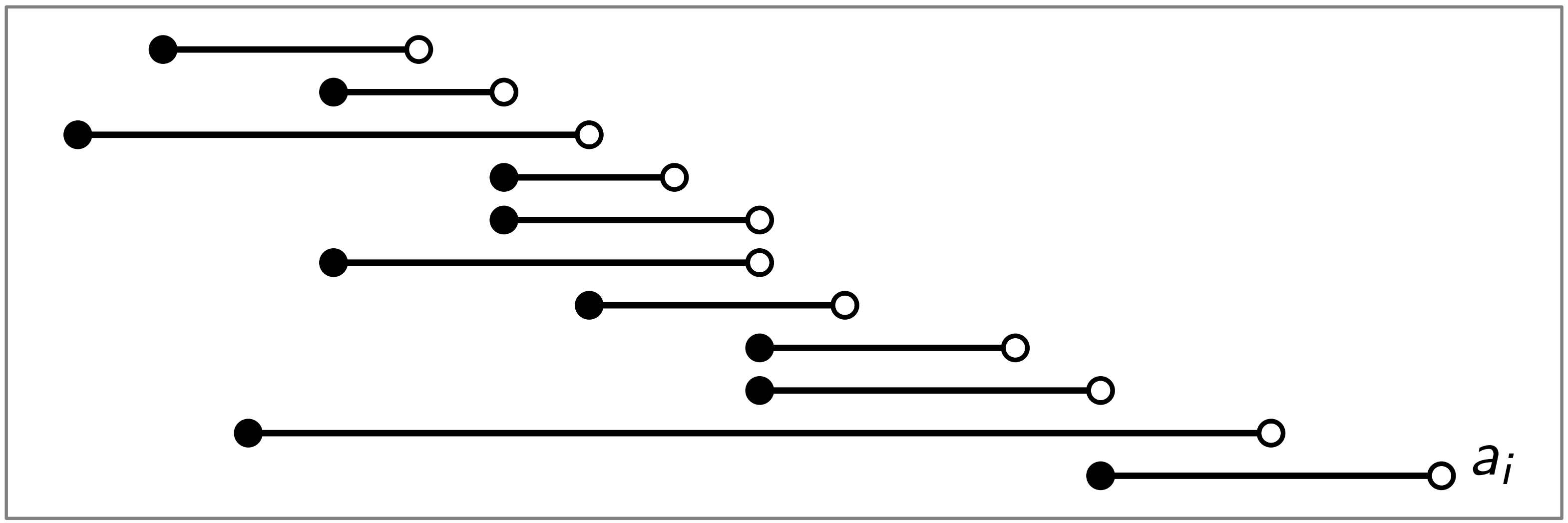
- die Laufzeit von $\mathcal{A}$ polynomiell in $|I|$ ist.

1/3-Approx. liefert Menge von Aktivitäten, deren Gesamtlänge mindestens 1/3 der maximal möglichen Länge ist.

$O(n \log n)$

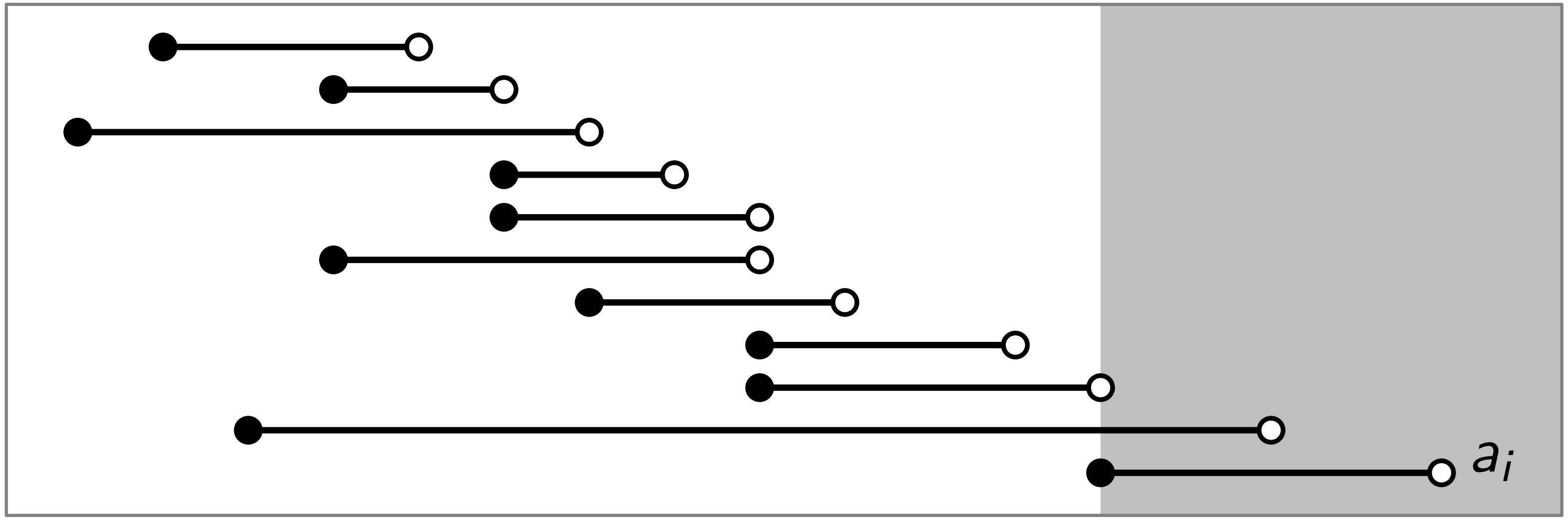
Ein exakter Algorithmus. . .

Für $i = 1, \ldots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A, die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



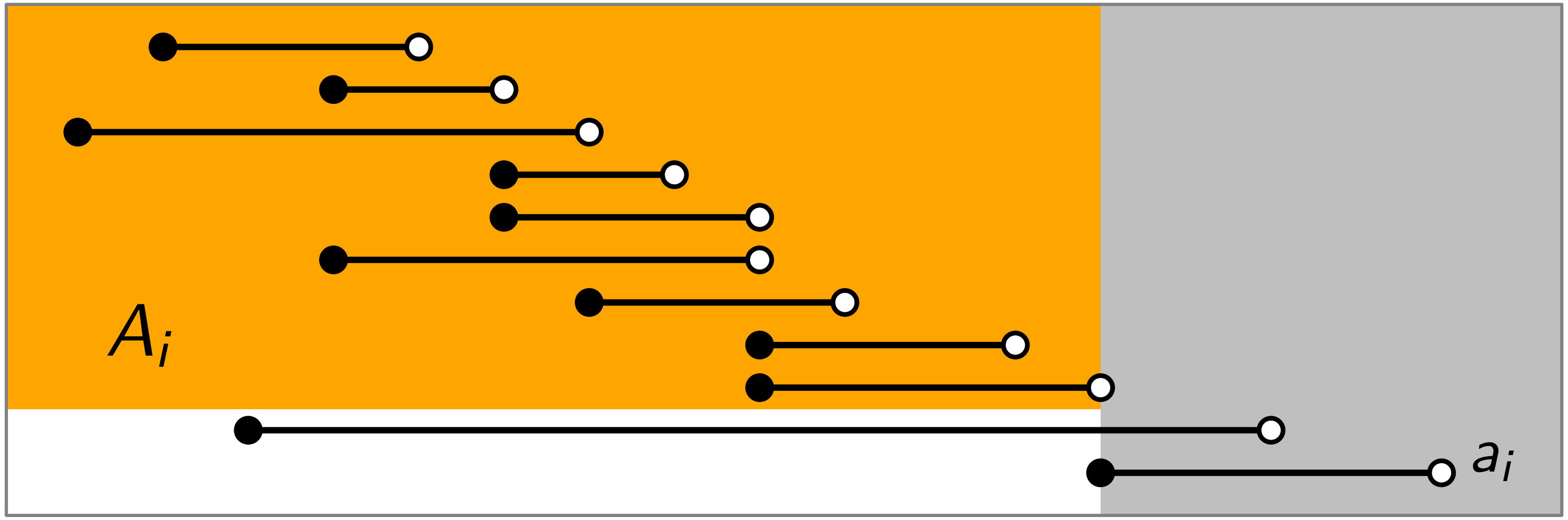
Ein exakter Algorithmus. . .

Für $i = 1, \ldots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A, die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



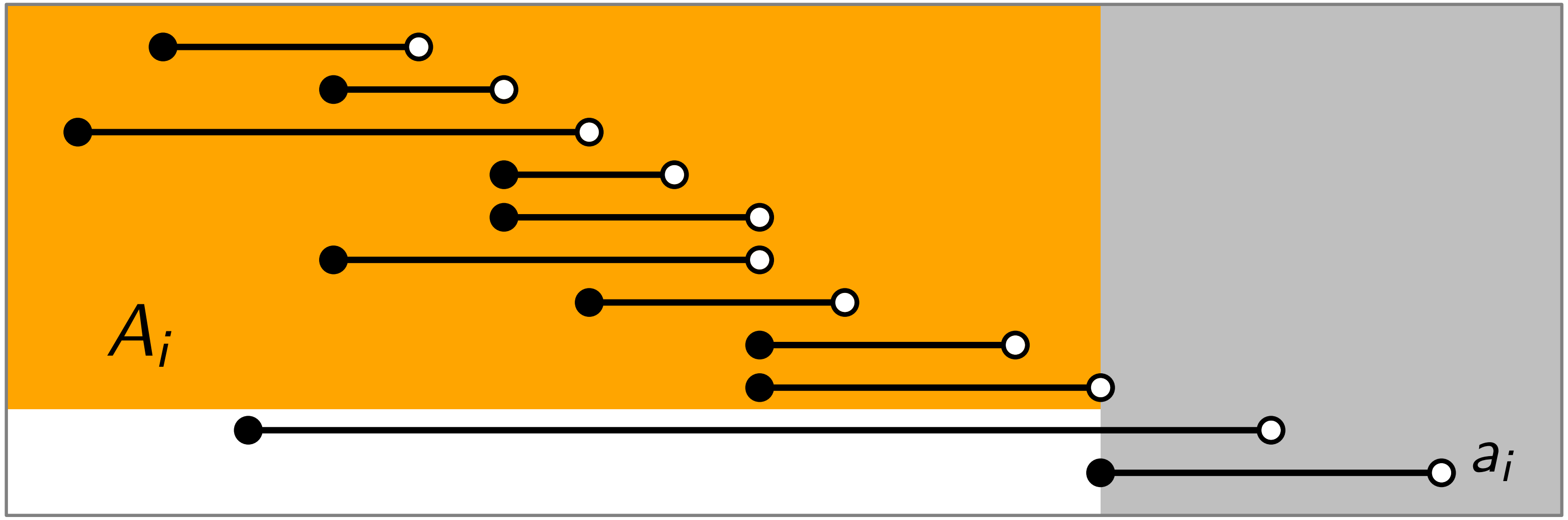
Ein exakter Algorithmus...

Für $i = 1, \ldots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A, die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



Ein exakter Algorithmus. . .

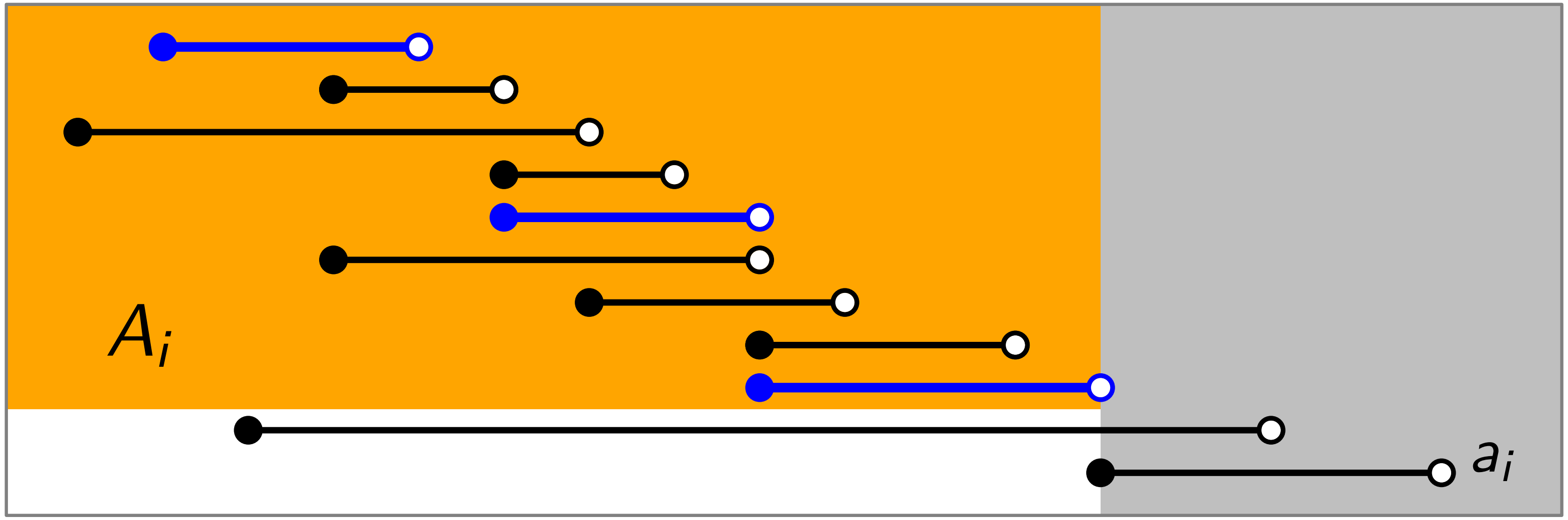
Für $i = 1, \ldots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A, die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:
– *einem* letzten Intervall a_k und
– einer optimalen Lösung für A_k.

Ein exakter Algorithmus. . .

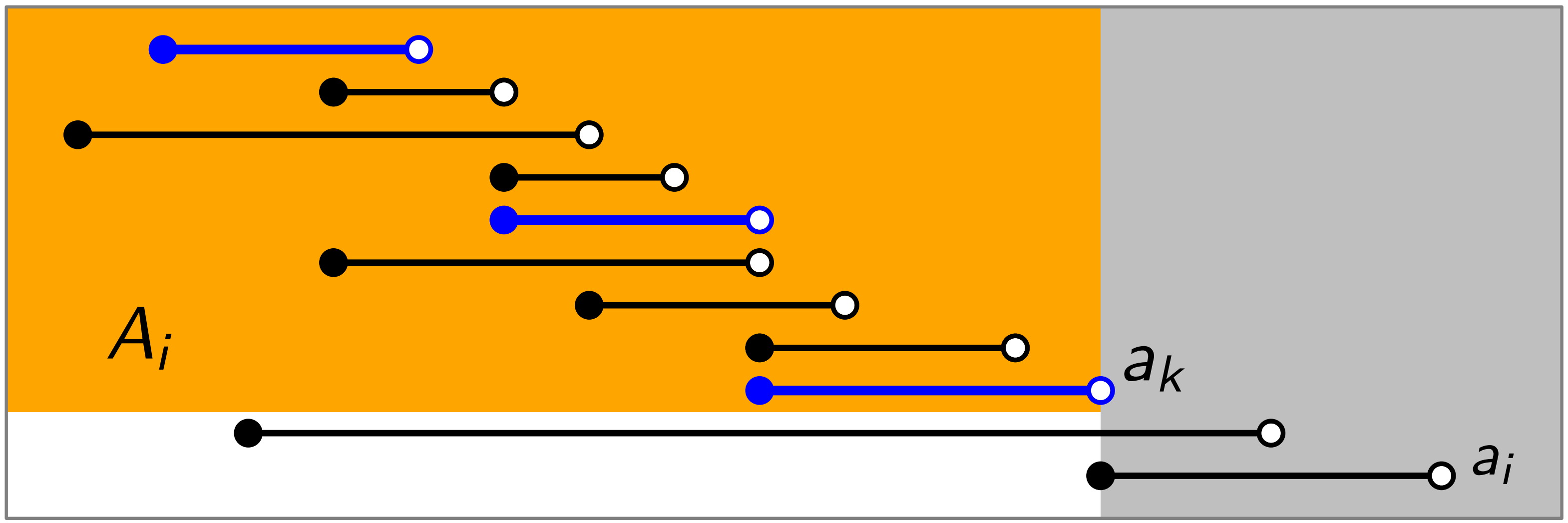
Für $i = 1, \ldots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A, die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:
– *einem* letzten Intervall a_k und
– einer optimalen Lösung für A_k.

Ein exakter Algorithmus. . .

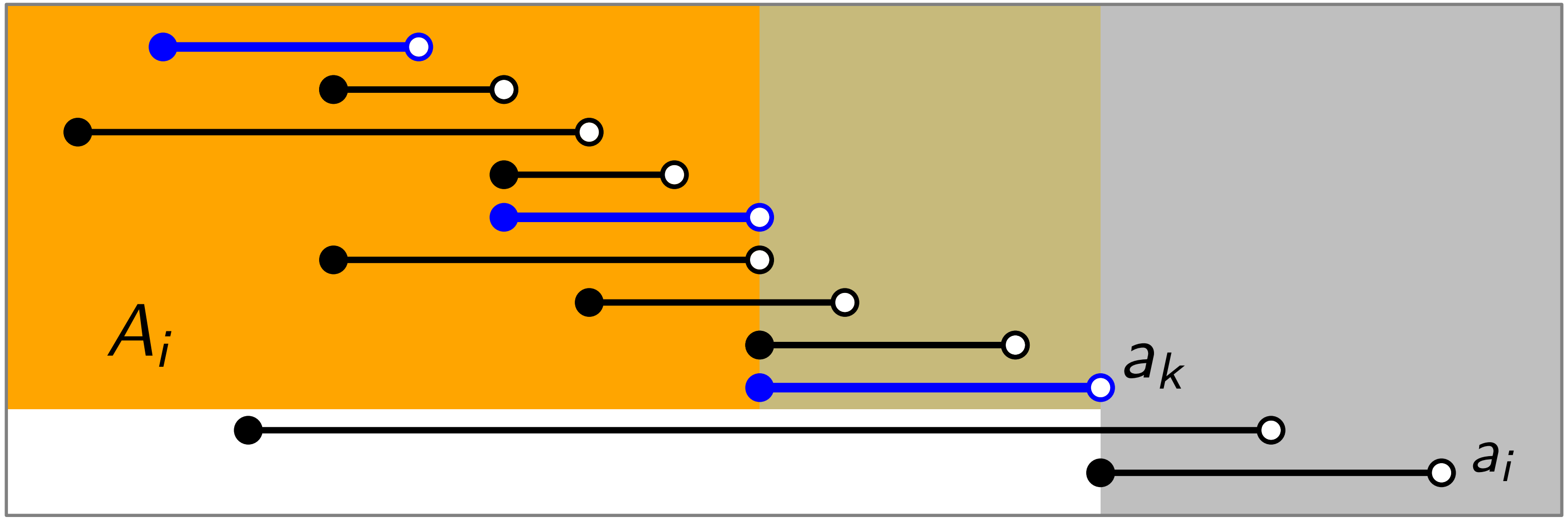
Für $i = 1, \ldots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A, die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:
– *einem* letzten Intervall a_k und
– einer optimalen Lösung für A_k.

Ein exakter Algorithmus. . .

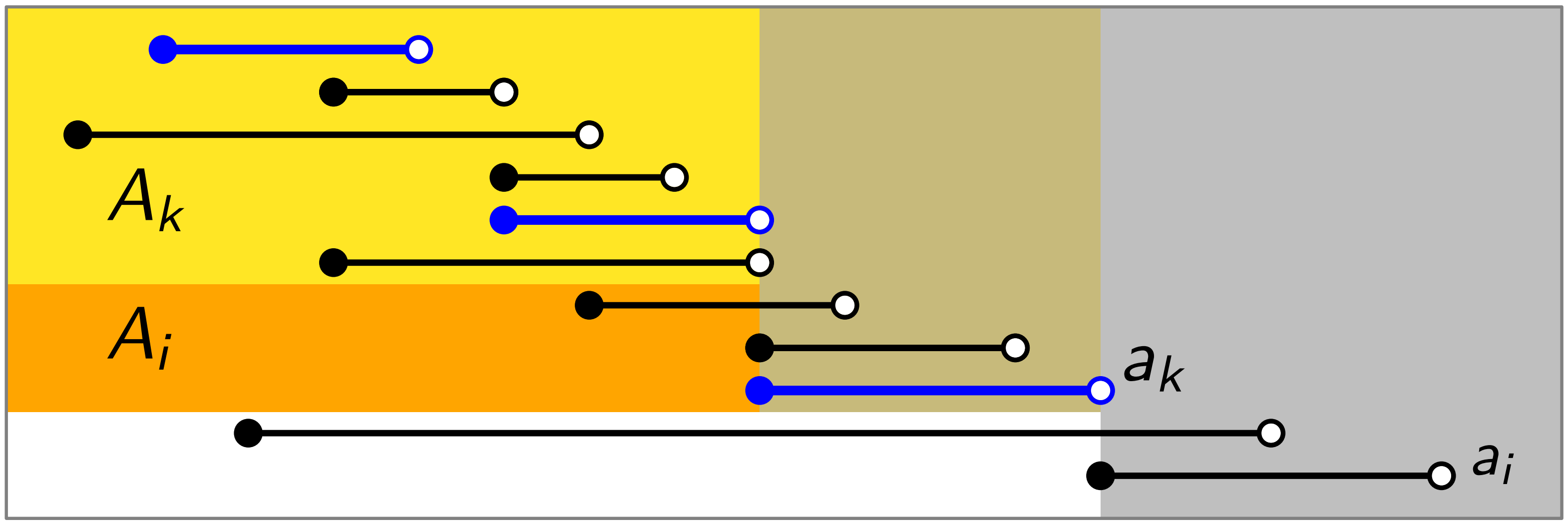
Für $i = 1, \ldots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A, die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:
– *einem* letzten Intervall a_k und
– einer optimalen Lösung für A_k.

Ein exakter Algorithmus. . .

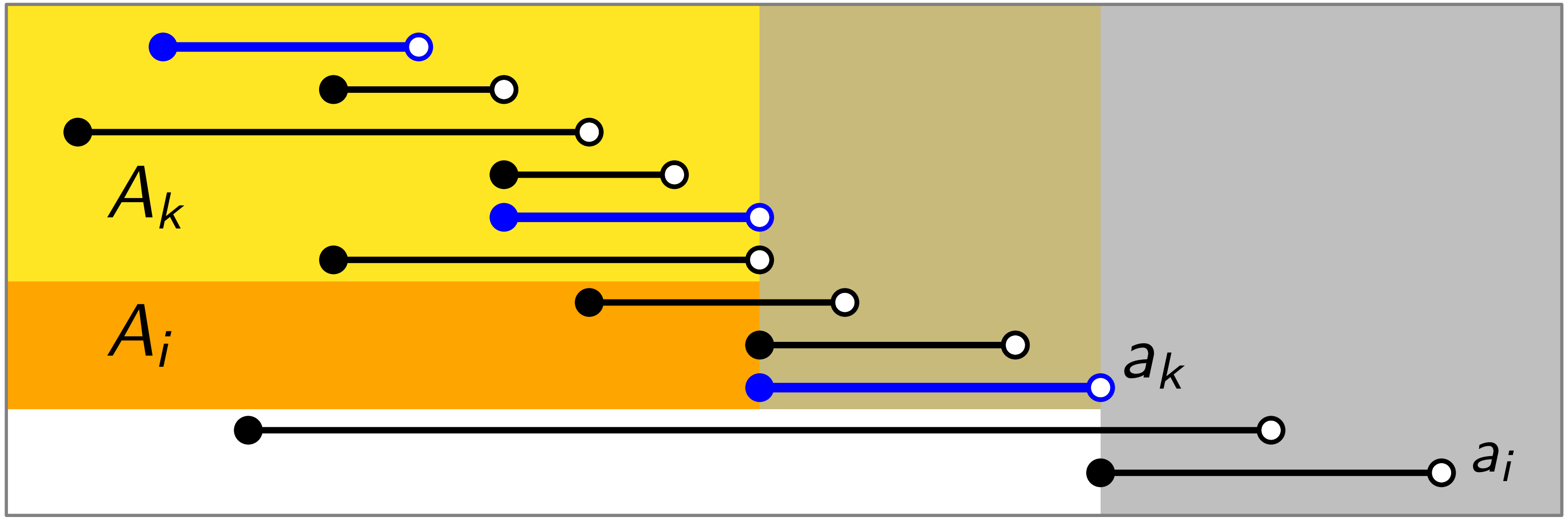
Für $i = 1, \dots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \le s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A, die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:
– *einem* letzten Intervall a_k und
– einer optimalen Lösung für A_k.

Ein exakter Algorithmus. . .

Für $i = 1, \dots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A, die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)

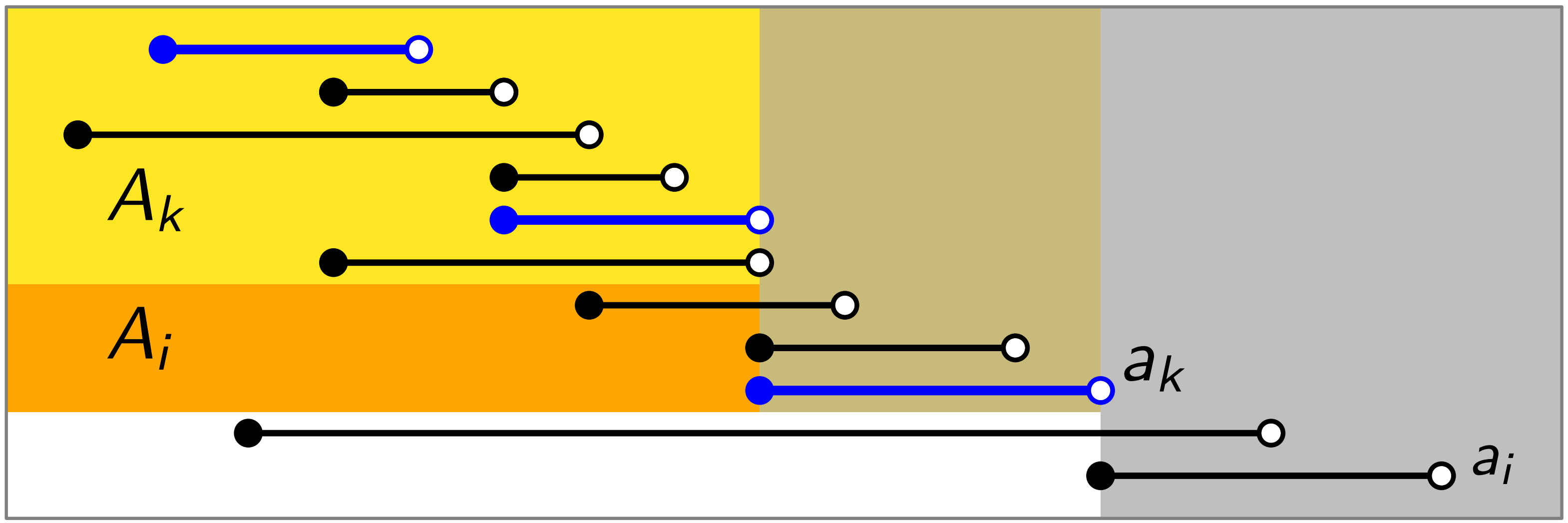


Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:
– *einem* letzten Intervall a_k und
– einer optimalen Lösung für A_k.

optimale Teilstruktur!

Ein exakter Algorithmus. . .

Für $i = 1, \ldots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A, die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



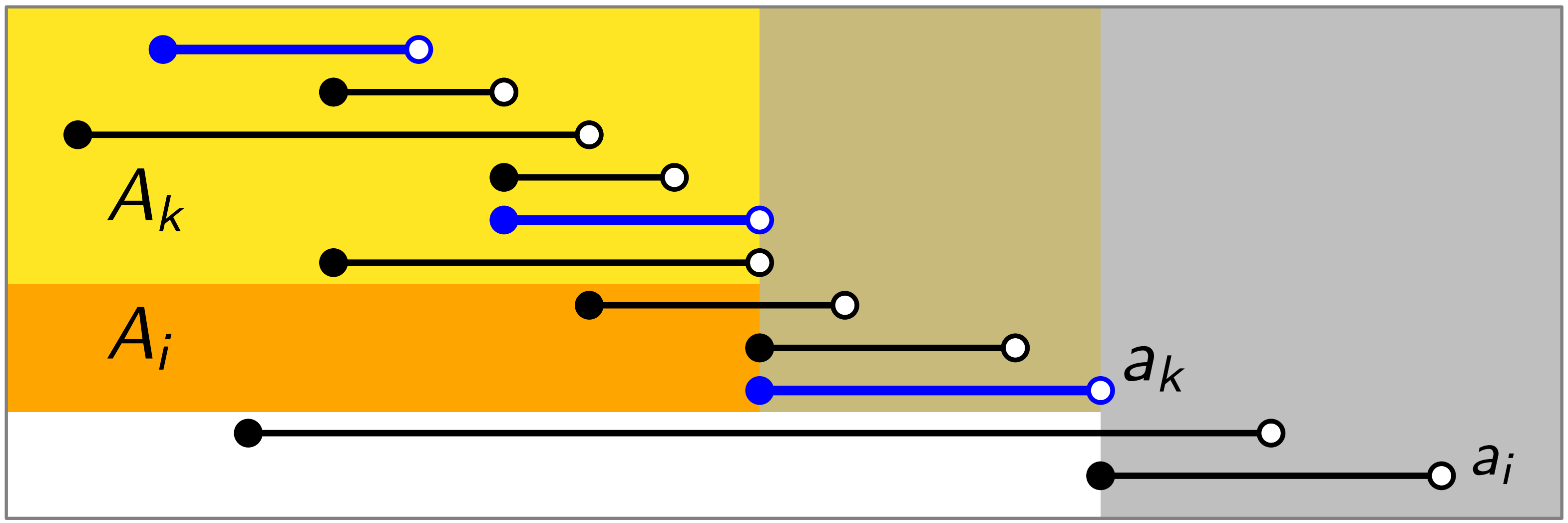
Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:
– *einem* letzten Intervall a_k und
– einer optimalen Lösung für A_k.

} optimale Teilstruktur!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

Ein exakter Algorithmus. . .

Für $i = 1, \ldots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A, die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:
– *einem* letzten Intervall a_k und
– einer optimalen Lösung für A_k.

} optimale Teilstruktur!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

$$c_i \;=\; \max_{a_k \in A_i} \; c_k + \ell(a_k)$$

. . . ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

$$c_i \; = \; \max_{a_k \in A_i} \; c_k + \ell(a_k)$$

. . . ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

$$c_i \; = \; \max_{a_k \in A_i} \; c_k + \ell(a_k)$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

...ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

$c_i \;=\; \max_{a_k \in A_i}\; c_k + \ell(a_k)$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es $c_1, \ldots, c_{n+1}$ zu berechnen.

. . . ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

$c_i \;=\; \max_{a_k \in A_i}\; c_k + \ell(a_k)$

Erinnern wir uns...
c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es $c_1, \ldots, c_{n+1}$ zu berechnen, wobei $c_1 =$

. . . ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

$$c_i \;=\; \max_{a_k \in A_i}\; c_k + \ell(a_k)$$

Erinnern wir uns...
c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es $c_1, \ldots, c_{n+1}$ zu berechnen, wobei $c_1 \;=\; 0$.

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

$c_i \; = \; \max_{a_k \in A_i} \; c_k + \ell(a_k)$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es $c_1, \ldots, c_{n+1}$ zu berechnen, wobei $c_1 \; = \; 0$.

Laufzeit?

...ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

$$c_i \;=\; \max_{a_k \in A_i}\; c_k + \ell(a_k)$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

TABELLE

Also genügt es $\boxed{c_1, \ldots, c_{n+1}}$ zu berechnen, wobei $c_1 \;=\; 0$.

Laufzeit?

. . . ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

$$c_i = \boxed{\max_{a_k \in A_i} \; c_k + \ell(a_k)}$$ **BERECHNUNG EINES TABELLENEINTRAGS**

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

TABELLE

Also genügt es $\boxed{c_1, \ldots, c_{n+1}}$ zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.

Laufzeit?

. . . ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

$$c_i = \boxed{\max_{a_k \in A_i} \; c_k + \ell(a_k)}$$ **BERECHNUNG EINES TABELLENEINTRAGS**

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es $\underbrace{\overbrace{\boxed{c_1, \ldots, c_{n+1}}}^{\textbf{TABELLE}}}_{\text{Größe } O(n)}$ zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.

Laufzeit?

. . . ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

$$c_i = \boxed{\max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k)} \left.\begin{array}{l}\textbf{BERECHNUNG EINES}\\ \textbf{TABELLENEINTRAGS}\end{array}\right\} \text{ in je } O(n) \text{ Zeit}$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es $\overset{\textbf{TABELLE}}{\underset{\text{Größe } O(n)}{\boxed{c_1, \ldots, c_{n+1}}}}$ zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.

Laufzeit?

. . . ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

$$c_i = \boxed{\max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k)} \left.\begin{array}{l}\textbf{BERECHNUNG EINES}\\ \textbf{TABELLENEINTRAGS}\end{array}\right\} \text{ in je } O(n) \text{ Zeit}$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es $\overbrace{\underbrace{\boxed{c_1, \ldots, c_{n+1}}}_{\text{Größe } O(n)}}^{\textbf{TABELLE}}$ zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.

Laufzeit? $O(n^2)$

. . . ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

$$c_i = \boxed{\max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k)} \left.\begin{matrix}\textbf{BERECHNUNG EINES}\\ \textbf{TABELLENEINTRAGS}\end{matrix}\right\} \text{ in je } O(n) \text{ Zeit}$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es $\overset{\textbf{TABELLE}}{\underset{\text{Größe } O(n)}{\boxed{c_1, \ldots, c_{n+1}}}}$ zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.

Laufzeit? $O(n^2)$

Schreiben Sie den Pseudocode!

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

$$c_i = \boxed{\max_{a_k \in A_i} \; c_k + \ell(a_k)} \left.\begin{array}{l}\textbf{BERECHNUNG EINES}\\ \textbf{TABELLENEINTRAGS}\end{array}\right\} \text{ in je } O(n) \text{ Zeit}$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es $\underbrace{\overbrace{\boxed{c_1, \ldots, c_{n+1}}}^{\textbf{TABELLE}}}_{\text{Größe } O(n)}$ zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.

Laufzeit? $O(n^2)$ **Schreiben Sie den Pseudocode!**

Resultate:

. . . ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

$c_i = \boxed{\max_{a_k \in A_i} \; c_k + \ell(a_k)}$ **BERECHNUNG EINES TABELLENEINTRAGS** } in je $O(n)$ Zeit

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

TABELLE

Also genügt es $\boxed{c_1, \dots, c_{n+1}}$ zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.

Größe $O(n)$

Laufzeit? $O(n^2)$ **Schreiben Sie den Pseudocode!**

Resultate:

- Der 2. Greedy-Alg. findet in $O(n \log n)$ Zeit eine Lösung, die *mindestens 1/3 des maximalen Ertrags* garantiert.

. . . ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

$$c_i = \boxed{\max_{a_k \in A_i} \; c_k + \ell(a_k)} \left.\begin{array}{l}\textbf{BERECHNUNG EINES}\\ \textbf{TABELLENEINTRAGS}\end{array}\right\} \text{ in je } O(n) \text{ Zeit}$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es $\overbrace{\boxed{c_1, \ldots, c_{n+1}}}^{\textbf{TABELLE}}_{\text{Größe } O(n)}$ zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.

Laufzeit? $O(n^2)$

Schreiben Sie den Pseudocode!

Resultate:

- Der 2. Greedy-Alg. findet in $O(n \log n)$ Zeit eine Lösung, die *mindestens 1/3 des maximalen Ertrags* garantiert.
- Unser DP findet in $O(n^2)$ Zeit eine Lösung mit *maximalem* Ertrag.

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i:

$$c_i = \boxed{\max_{a_k \in A_i} \; c_k + \ell(a_k)} \left.\begin{matrix}\textbf{BERECHNUNG EINES} \\ \textbf{TABELLENEINTRAGS}\end{matrix}\right\} \text{ in je } O(n) \text{ Zeit}$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

TABELLE

Also genügt es $\boxed{c_1, \ldots, c_{n+1}}$ zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.

Größe $O(n)$

Laufzeit? $O(n^2)$

Schreiben Sie den Pseudocode!

Resultate:

- Der 2. Greedy-Alg. findet in $O(n \log n)$ Zeit eine Lösung, die *mindestens 1/3 des maximalen Ertrags* garantiert.
- Unser DP findet in $O(n^2)$ Zeit eine Lösung mit *maximalem* Ertrag.

Trade-Off zwischen Zeit und Qualität!